بسم الله الرحمن الرحیم

پنجاهمین سال تأسیس دانشگاه مشهد

۱۳۲۸ - ۱۳۷۸

دانشگاه فردوسی مشهد

شمارهٔ ۲۶۲

مقدمه‌ای بر طراحی بهین

جلد اول

جاسبیر اس. آرورا

ترجمهٔ

دکتر محمد حسین ابوالبشری

۱۳۷۸

فهرست مطالب

مقدّمه مترجم

با توجه به اهمیت کاربردی بهینه سازی طرّاحی در رشته های مهندسی، لزوم ترجمه کتابی که مفاهیم اساسی بهینه سازی را بدون پرداختن عمیق به پایه های ریاضی آن به زبان ساده بیان کرده باشد و بتواند در سطح دوره های کارشناسی و کارشناسی ارشد و مطالعه آزاد مهندسان حرفه ای مورد استفاده قرار گیرد احساس می شد. هرچند غیر از مهندسان گروههای دیگری مانند اقتصاددانان به مقدار زیادی از روشهای بهینه سازی بهره می جویند ولی رویکرد و جهت کلی این کتاب و بیشتر مثالهای ذکر شده در آن متناسب با اطلاعات و آموخته های یک دانشجوی سال دوم و سوم مهندسی است. نظر به اهمیت فراگیری این موضوع توسط دانشجویان مهندسی مترجم خود تدریس یک درس ۳ واحدی به نام *«بهینه سازی در طرّاحی سازه ها»* را به عنوان یک درس تخصصی برای دانشجویان مکانیک از سال ۱۳۷۵ آغاز کرد. این درس بیشتر برمبنای نیمهٔ اوّل کتاب حاضر ارائه شد که شامل مفاهیم اساسی بهینه سازی است و در یک نیمسال تحصیلی می تواند تدریس شود.

در ترجمه فارسی در حالی که سعی شده رعایت امانت بشود، رساندن مفهوم و منظور اصلی مورد تأکید قرار گرفته است. از انتخاب جایگزینهای فارسی که چه ازنظر کاربرد و چه ازنظر مفهومی نامأنوس بوده اند پرهیز شده و از تلفظ لاتین آن با ذکر اصل کلمه در پاورقی استفاده شده است. امید است که فرزانگان ادب فارسی این جسارت را که تنها به دلیل رساندن معنی و مقصود نویسنده انجام پذیرفته در ترجمه یک متن فنی و مهندسی ببخشایند. *در ضمن، حدود ۸۰ غلط متن انگلیسی تصحیح و در ترجمه، عبارتها و رابطه های صحیح جایگزین شده اند.*

در خاتمه از زحمات آقایان دکتر علی وحیدیان کامیاد و مصطفی کدکنی که ویرایش این ترجمه را انجام داده اند و همچنین تلاش آقایان حسین عطائی ، مجید افشاران و غلامرضا فنائی که با حوصله کار حروف چینی و صفحه آرایی و آماده سازی چاپ آن را به عهده داشته اند تشکر و قدردانی می نماید .

مترجم امیدوار است این اثر مورد استقبال استادان، دانشجویان، مهندسان و تمامی کسانی که به نحوی با مفهوم طرّاحی سروکار دارند قرار گیرد و او را از نظرات سازندهٔ خود محروم نفرمایند .

محمدحسین ابوالبشری

دربارهٔ مؤلف

دکتر جاسبیراس . آرورا استاد بخشهای مهندسی عمران، محیط زیست و مهندسی مکانیک در دانشگاه آیوا است . او دکتری خود را در رشته مکانیک سازه ها در سال ۱۹۷۱ میلادی از همان دانشگاه گرفت و از سال ۱۹۷۲ به بعد به عنوان استاد در آن جا مشغول به کار است . او تاکنون درسهای مختلفی برای دوره های کارشناسی و کارشناسی ارشد در رشتهٔ تخصصی اش ارائه کرده است . از میان آنها می توان درس طرّاحی مهندسی و بهینه سازی را نام برد که او همیشه از تدریس آن به دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد لذت می برده است .

دکتر آرورا یکی از مؤلفان برجسته در موضوع بهینه سازی طرّاحی در دنیاست و برای حل مسائل پیچیده، تاکنون الگوریتمهای مختلف ارائه داده است ؛ که بسیاری از آنها هم اکنون در صنایع مورد استفاده قرار می گیرند . او بیش از صد مقاله در مجلات داخلی و بین المللی مهم و مجموعه مقالات کنفرانسها به چاپ رسانده است . ایشان از جمله نویسندگان کتابی در طرّاحی بهینه کاربردی هستند که در نوع خود یکی از قدیمی ترین کتابها در سطح کارشناسی ارشد در این زمینه محسوب می شود . او همچنین نویسنده و یا یکی از نویسندگان چند دستورالعمل طرّاحی و فصلهایی از چند کتاب است .

دکتر آرورا عضو انجمن مهندسان عمران، انجمن مهندسان مکانیک، مؤسّسهٔ علوم هوا و فضا و فرهنگستان مکانیک امریکاست . ایشان همچنین یکی از اعضای انجمن محاسبات الکترونیکی ای اس سی ای (ASCE) و مسؤول یکی از زیرمجموعه های آن در طرّاحی بهینه هستند . او عضو کمیتهٔ ویراستاری دو مجله بین المللی *مکانیک محاسباتی* و *بهینه سازی سازه هاست*، و تاکنون مدیر اجرایی چندین گردهمایی و سخنرانی علمی در همایشهای

بین‌المللی بوده و به‌عنوان سخنران کلیدی در آنها صحبت کرده است. او یکی از صاحب‌نظران برای داوری در مورد مقالات علمی رسیده به مجلات و مؤسسات علمی ملی و مشاور چندین آزمایشگاه و سازمان صنعتی نیز هست.

دیباچه

این کتاب جهت استفاده دانشجویان در اوّلین درس آنان در زمینه طرّاحی مهندسی و بهینه سازی نوشته شده است. مطالب آن در طول سالهای متمادی جمع آوری شده و براساس جزوه هایی است که برای هستهٔ درس دورهٔ کارشناسی *«اصول طرّاحی ۱»* تدریس می شده است. این درس الگوهای طرّاحی قابل پیش بینی را بیان می کرده و درس بعد از آن به نام *«اصول طرّاحی ۲»* دربارهٔ الگوهای آماری و قابلیت اعتماد سیستمها بحث می کرده است که در درس اوّل، هیچ گونه اطلاعات طرّاحی و یا بهینه سازی فرض نشده است. اساسی ترین پیش نیازی که برای استفاده از متن درس لازم است بردار، جبر ماتریسها و اساس محاسبات برداری است. مواد درسی را از این دید می توان پایهٔ ریاضی طرّاحی مهندسی نامید. این درس در اوّلین نیمسال تحصیلی دانشجویان سالهای سوم در بیشتر رشته های مهندسی تدریس می شده است. دانشجویان در پایان سال دوم، درسهای ریاضی مورد نیاز، علوم پایه و علوم مهندسی را می گذرانند (مثل استاتیک، دینامیک، اجسام تغییر شکل پذیر، محاسبات مهندسی، فیزیک مهندسی، نقشه کشی به وسیلهٔ رایانه، مبانی مهندسی برق، ریاضی مهندسی، ترمودینامیک و مکانیک سیالات). با معرفی مواد درسی تخصصی دانشجویان، ما بر استفاده از فرآیند خلاقیت در طرّاحی مهندسی تأکید می کنیم. با این کار، دانشجویان در سالهای آخر و در درسهای کارشناسی ارشد و همچنین پروژه های مستقل خود امکان استفاده از روشهای بهینه سازی را خواهند یافت.

بهینه سازی در حقیقت شاخه ای از ریاضیات کاربردی است، زیرا در آن شاخه مدتها مورد تحقیق قرار گرفته و فرضیه های مناسبی در سالهای اخیر برای آن تدوین گشته است.

موضوع بهینه سازی تقریباً در تمامی رشته های مهندسی در سطح کارشناسی ارشد تدریس می شده است. پژوهشهای قابل توجهی انجام شده یا در حال انجام است تا این موضوع را برای کاربردهای مهندسی در سطح کلان توسعه دهد. *توانایی روش طرّاحی بهینه اکنون مورد توجه قرار گرفته و از طرف بسیاری از مؤسسات صنعتی به عنوان روش طرّاحی انتخاب شده است.* روش طرّاحی بهینه از یک دید وسیله ای نظام مند در فرآیند طرّاحی مهندسی است. با استفاده از نرم افزارها و سخت افزارهای مناسب، آن را می توان از وسایل اساسی فرآیند خلاقیت طرّاحی ازنظر مفهومی و یا طرّاحی اجزاء برشمرد. با استفادهٔ صحیح از این وسیلهٔ نوین زمان مورد نیاز برای انتقال از مرحلهٔ مفاهیم به یک سیستم عملی به میزان چشمگیری کاهش می یابد. این عقیدهٔ جدی من است که طرّاحی بهینه هستهٔ اصلی فرآیند طرّاحی مهندسی را شکل خواهد بخشید. برای این که این توانایی را عمیقاً درك کنیم ما نیاز داریم که آن را در دوره های کارشناسی و کارشناسی ارشد گنجانیده و دانشجویانمان را آماده سازیم تا از آن در فرآیند طرّاحی استفاده کنند.

مقصود اوّلیه کتاب تشریح یک روش سازمان داده شده طرّاحی مهندسی و بهینه سازی آن به روش ساده است. تأکید اساسی بر رابطه سازی صحیح مسأله و مفاهیم اساسی طرّاحی بهینه است و فقط معدودی از مراحل عددی که مفاهیم اساسی را تبیین می کنند شرح داده می شوند. قصد این کتاب توضیح چگونگی به دست آمدن تمامی روشها و مزایا و معایب آنها نیست و برای این کار مراجع مورد نظر ذکر گردیده اند. تعدادی از روشهای نوین که خوب کار می کنند توضیح داده شده است. نتایج لازم از تئوری بهینه سازی بیان شده و طریقه استفاده و کاربرد آنها در طرّاحی مسائل مهندسی توضیح داده می شود. تئوری و مفهوم طرّاحی بهینه ازطریق مثالها و کاربردهای ساده مهندسی بیان می شود. اثبات بیشتر قضایا حذف شده اند. برای توضیح بهتر و کاملتر مفاهیم، از تعداد زیادی مسأله حل شده (بیش از ۱۶۰) و شکل (بیش از ۱۵۰) استفاده شده است. بخشها *و بندهایی که با علامت «*» مشخص شده اند حاوی مطالب کمی پیشرفته و تخصصی ترند و لازم نیست در ارائه ابتدایی درس و یا خواندن اوّل مورد توجه قرار گیرند.* البته برای دانشجویان سال آخر کارشناسی و یا کارشناسی ارشد ارائه آنها اشکالی نخواهد داشت.

بسیاری از سؤالهای نوع «چه می شود اگر» در مورد موضوع درس بیان شده است. در کتاب مسائل ساده طرّاحی که دو تا سه متغیر طرّاحی و سه تا چهار نوع قید دارند حل شده اند تا مفاهیم اساسی و ایده های اصلی را تشریح کنند. تعدادی تمرین ساده و پروژه های بحث انگیز برای هر بخش در نظر گرفته شده است. بسیاری از مراحل عددی در مفاهیمی که در متن

توضیح داده شده در سایر درسهای مهندسی و کاربردها نیز مفید هستند.

در واقع هر مسأله ای که لازم باشد پارامترهای معینی برای برآوردن قیود به دست آورده شوند می تواند به عنوان یک مسأله بهینه سازی رابطه سازی شود. مفاهیم و روشهایی که در متن توضیح داده شده کاملاً عمومی هستند و برای هر رابطه سازی به کار می روند. بنابراین، محدودهٔ کاربرد روش طرّاحی بهینه تقریباً بدون محدودیت است و تنها با قدرت تصور و میزان زبردستی و استادی طراح محدود می شود. ما تعداد اندکی از کاربردهای ساده را برای تشریح و بحث مفاهیم اساسی و روشها به کار می بریم. وقتی که آنها کاملاً درك شدند، می توان از آنها در مورد بسیاری از مسائل پیشرفته استفاده کرد.

مواد کتاب می تواند طوری گزینش شود که برای درس طرّاحی بهینه دانشجویان سال آخر کارشناسی و سال اوّل کارشناسی ارشد به کار رود. در این صورت، تدریس مواد باید شتاب بیشتری بگیرد و مسائل پیشرفته تر طرّاحی مطرح گردد تا نیاز این درس برآورده شود. مواد پیشرفته ای که با علامت «*» مشخص شده در یک درس کارشناسی ارشد تحت عنوان *«طرّاحی بهین کاربردی»* استفاده می شده است.

کتاب مجموعه ای خودکفا در موضوع طرّاحی بهینه است. تعداد زیادی مثال برای تشریح مفاهیم آورده شده که *برای کسانی که می خواهند خودشان بدون حضور در کلاس آن را فرا گیرند* مناسب است. توضیح مفاهیم کلیدی به طور ساده و مختصر ارائه شده است. مهندسان حرفه ای که در کار فرآیند طرّاحی هستند نیز می توانند با استفاده از مطالب کتاب، مفاهیم طرّاحی بهینه را برگیرند.

بیشتر نتایج نظری ارائه شده در کتاب جدید نبوده و از کتابهای متعدد موجود استخراج شده اند. چیزی که جدید و نو است تأکید روی دیدگاه طرّاحی موضوع، *استفادهٔ تعاملی از روشهای بهینه سازی* و استفاده از ترسیم به وسیلهٔ رایانه در فرآیند طرّاحی مهندسی است. بهینه سازی از دیدگاه یک وسیله برای طرّاحی نظام مند سیستمهای مهندسی مورد توجه قرار گرفته است. بسیاری از مثالها ساده هستند و به کاربرد خاص مهندسی مربوط نمی شوند. آنها صرفاً برای توضیح مفاهیم مهم و روشن شدن مراحل طرّاحی به کار رفته اند. بنابراین کتاب می تواند برای تدریس طرّاحی بهین در همهٔ رشته های مهندسی مورد استفاده قرار گیرد. برای این که کتاب برای استفاده به عنوان متن درس مناسب باشد بیش از ۵۰٪ از آن به مسائل حل شده و تمرینها و بقیه به مرور مطالب، مفاهیم بهینه سازی و روشهای عددی اختصاص یافته است.

کتاب هشت فصل و چهار پیوست دارد. هدف هر فصل در ابتدای آن بیان شده تا خواننده از مطالب آن یک دید کلی پیدا کند. همچنین مطالب در چندین جای مختلف تکرار شده تا خواننده به راحتی بتواند آن را فرا گیرد.

مطالب کتاب را می توان به طور کلی به سه بخش تقسیم کرد: قسمت اوّل شامل فصلهای ۱ تا ۳ که به رابطه سازی مسائل طرّاحی، مفاهیم و تعاریف اساسی و شرایط بهینگی اختصاص یافته است. بخش دوم که شامل فصلهای ۴ تا ۶ می باشد، روشهای جست و جوی عددی را برای مسائل بهینه سازی خطّی، نامقیّد و مقیّد شرح می دهد. مفهوم الگوریتم عددی تکراری و ایده اصلی که در ساختن بسیاری از الگوریتمها استفاده می شود در این قسمت توضیح داده می شود. بخش سوم فصلهای ۷ و ۸ را دربر می گیرد که جنبه عملی بهینه سازی را تشریح می کند. در این فصلها الگوریتم تکراری و کاربرد آنها توضیح داده شده و چندین مثال طرّاحی مهندسی نمونه رابطه سازی و حل شده اند.

ارزیابی اقتصادی جایگاه ویژه ای در طرّاحی سیستمهای مهندسی دارد. بنابراین، مقدّمه ای بر *تحلیل اقتصادی* در پیوست A آورده شده است. این موضوع به طور کلی در ابتدای درس ارائه شده و به دنبال آن پروژهٔ گروهی بیان شده که به وسیلهٔ آن دانشجویان ارزش ارزیابی اقتصادی را در تصمیمات طرّاحی مهندسی فرا می گیرند.

جبر *بردارها* و *ماتریسها* ـ که در متن استفاده شده ـ کلید فهم روشهای جدید محاسباتی در طرّاحی مهندسی است. این موضوعات در پیوست B مرور می شوند که شامل حل دستگاه معادلات و مسائل مقدار ویژه می شود. بسیاری از دانشجویان با عملیات بردارها و ماتریسها و علایم آن آشنا نیستند. بنابراین خیلی مهم است که کاملاً فهمیده شوند و دانشجویان در کاربرد آنها احساس راحتی کنند. این مسأله در فهم مفاهیم طرّاحی بهینه کمک شایانی می کند.

در فصل (۱) مفهوم اساسی سیستمهای مهندسی بحث شده است. *فرآیند طرّاحی سیستم*، از مفاهیم اوّلیه تا مراحل نهایی آن مورد بحث قرار می گیرد. مرحله اوّلیه طرّاحی و تفاوت بین تحلیل و طرّاحی یک سیستم بیان می شود، نقش رایانه در فرآیند طرّاحی بیان شده و علایم دیگری که در سراسر کتاب استفاده شده توضیح داده می شود.

در فصل (۲) رابطه سازی یک مسأله طرّاحی بهین به طور گسترده بحث می شود. *بیان ریاضی مناسب مسأله* در طرّاحی سیستمهای کارا بسیار حسّاس است. در بیشتر موارد،

به محض این که مسأله رابطه سازی شد، برای حل آن نرم افزارهایی که کار با آنها بسیار ساده است در دسترس است. نکات مبهم در رابطه سازی مسائل طرّاحی بهین بحث می شوند. مفاهیم متغیرهای طرّاحی، تابع هزینه، توابع قیود، طرّاحی قابل قبول و غیرقابل قبول بحث می شوند.

در فصل (۳) *مفاهیم مختلف طرح بهین* بحث می شود. مینیمم فراگیر و محلی تعریف می شوند. مفاهیم مورد نیاز از حساب بردارها مرور شده و توضیح داده می شوند. شرایط لازم برای مسائل مقیّد و نامقیّد که شامل مشتقات اوّل هستند بحث می شوند. شرایط بهین کان ـ تاکر[1] برای مسائل کلی مقیّد با مسائل طرّاحی ساده توضیح داده می شوند. اغلب این شرایط به یک سیستم معادلات غیرخطّی ختم می شود که باید به طریق عددی حل شود. روش *نیوتن ـ رافسون*[2] روشی است که برای حل این سیستمها استفاده می شود و در پیوست C توضیح داده شده است. همچنین یک فرضیه حساسیت تشریح می شود که برای مطالعه اثر تغییرات قیود روی مقدار بهین تابع هزینه استفاده می شود.

فصل (۴) بررسی روشهای *برنامه ریزی خطّی (LP)* در طرّاحی بهین را شامل می شود. روش سیمپلکس دو مرحله ای با استفاده از یک مثال ساده معرفی می شود. اهمیت دوگانی در برنامه ریزی خطّی بحث می شود. تحلیل پس بهینگی برای مسائل LP (برنامه ریزی خطّی) بحث و توضیح داده می شود.

فصل (۵) حاوی مفاهیم و روشهای عددی برای *مسائل طرّاحی بهینه نامقیّد* است. مفهوم روشهای عددی تکراری در این فصل معرفی و تشریح می شوند. مسائل بهینه سازی یک بعدی مطرح می شود. ابتدا روشهای کلاسیک مثل روش تندترین کاهش و روش نیوتن توضیح داده می شوند. سپس روش نیوتن تعمیم یافته، جهتهای مزدوج و شبه ـ نیوتن بیان می شوند. روشها با مسائلی در قالب مثال بیان می شود. برنامه های رایانه ای برای بعضی از روشها در پیوست D آورده شده است. این فصل همچنین حاوی مقدمه ای در فن استفاده از روشهای بهینه سازی نامقیّد برای حل مسائل مقیّد می باشد. این فنون عبارتند از فنون مینیمم یابی مقیّد دنباله ای (SUMT) و روشهای نوین ضرایب.

فصل (۶) روشهای عددی مسائل بهینه سازی مقیّد را بیان می کند. مفاهیم اساسی مختلف و اصطلاحات بیان می شوند. مفهوم خطّی کردن یک مسأله برنامه ریزی غیرخطّی

1. Kuhn-Tucker

2. Newton-Raphson

توضیح داده می شود. این مفهوم در بیشتر روشهای عددی مقیّد استفاده می شود. روش برنامه ریزی خطّی دنباله ای تشریح می شود. سپس یک روش نوین تندترین کاهش مقیّد بیان می شود و با مثالهای ساده تشریح می گردد. این روش بسط داده می شود تا هسیان تقریبی تابع لاگرانژ مسأله را نیز دربر گیرد. مقدمه مختصری از سه روش دیگر نیز بیان می شود.

پندارهٔ طرّاحی بهین رایانه ای در فصل (۷) معرفی شده و یک محیط تعاملی طرّاحی بهین شرح داده می شود. فنون بهینه سازی تعاملی و نقش طراح در ایجاد یک محیط تعاملی به طور مفصّل بحث می شود. کاربرد ترسیم تعاملی در فرآیند طرّاحی بهینه با مثال شرح داده می شود.

فصل (۸) استفادهٔ پیشرفته از فنون بهینه سازی را شرح می دهد. مسائل طرّاحی عملی معمولاً بسیار پیچیده بوده و برای این که یک طرح ایمن و مقرون به صرفه باشد نیاز به تحلیل و ارزیابی قابل توجهی دارد. اجزای نرم افزاری مختلفی برای تکمیل کار طرّاحی مورد نیاز است. جمع آوری اجزای نرم افزاری طرّاحی بهین همراه با چند مثال که کاربردهای پیشرفته روش بهینه سازی را نشان دهد بحث می شود.

کوشش من پیوسته در به کارگیری تمرینهای ساده با روشی کاملاً روشن برای توضیح پنداره های اساسی بوده است. مثالها و تمرینها از زمینه های مختلف گرفته شده تا موضوع برای تمامی گرایشهای مهندسی جذاب باشد. البته این کار یک عمل به یاد ماندنی است و من معتقدم بسته به سطح و نوع درس تعدادی تمرین پیشرفته جهت رفع نیازهای ارائه تخصصی تر درس اضافه شود.

انجام یک پروژه با این ابعاد بدون کمک و تشویق همکاران، آشنایان و دانشجویان ممکن نبود. من از کمک آنها چیزهای بسیاری آموختم و از همهٔ آنان صمیمانه تشکر می کنم. سپاس فراوان نثار افرادی که کتاب را مورد مطالعه قرار دادند: چارلز بیدل از دانشگاه کالیفرنیا، دیویس؛ گری ای جبرئیل از انیستیتو پلی تکنیک رنسلر؛ رافائل هفتکه از انیستیتو پلی تکنیک ویرجینیا؛ گری کینزل از دانشگاه ایالتی اوهایو؛ چارلز میسک از دانشگاه ایالتی آیوا؛ و فرد موسس از دانشگاه کیس وسترن رزرو.

مطالب کتاب طی سالهای متمادی کاملتر شده و لازم است از همه دانشجویان و استادانی که پیشنهادهایشان را روی متن خام اوّلیه داده اند قدردانی کنم. از همهٔ این عزیزان به خصوص پروفسور گوئل، کان، لائنس، لیتشواگر، اوسبورن و ترامل که چند مسأله

به صـورت تمرین برای این کـتاب ارائه دادند، سـپاسـگزاری می کنم. و از هرگـونه انتـقاد و پیشنهادی از جانب آنها و دیگران در جهت کامل شدن متن برای درك بهتر نقش روش بهینه سازی در فرآیند طرّاحی مهندسی صمیمانه استقبال می کنم.

همـچنین از هـمکاری آقـایان دکـتر آر. ال بندیکت و پی. بی ثـندار به جـهت بحثـهـای مـفیـدشـان در مـورد مـوضـوع کـتـاب خـصـوصـاً قـدردانی می کنم. آنـهـا پـیشنهـادهایی راجع به سازمان دهی متن کتاب دادند و مطالبی را نیز تهیه کردند. از شرکت ارزشمند گری جکسون، تی ـ پی لین، وای ـ اس ریو و سی ـ اچ سِنگ در رابطه سـازی و حل چند مسـأله طرّاحی و کمک آنها در خواندن مطالب کتاب بسیار قدردانی می شود. همچنین از بحث مفید دربارهٔ طرح بهین با پروفسـور اد هاگ، بی ـ ام کواك، کـیانگ چوی، وای ـ اس ریو و او ـ ك لیم، و دکـتر اس ـ وی بلسار، ج ـ بی کاردوسو، ام حریریان، ج ـ ك پائنگ، جی ـ ج پارك، ت اسریکانتامورثی، ج ـ ج تسای، و سی ـ سی وو سپاسگزاری می شود.

از پروفسـور چارلز بیدل از دانشگاه کالیفرنیا ـ دیویس، آشـوك بلگوندا از دانشگاه ایالتی پنسیلوانیا، گری جبرئیل از انیستیتو پلی تکنیک رنسلر، رافائل هفتکه از انیستیتو پلی تکنیک ویرجینیا، گری کینزل از دانشگاه ایالتی اوهایو، چارلز میسک از دانشگاه ایالتی آیوا، فرد موسس از دانشگاه کیس وسـترن رزرو، دی ـ تی نگویان از دانشگاه دومینین قـدیم و دکـتر سی ـ سی هوشی از آزمایشگاه پژوهشی جی ـ ام برای مـرور با دقت پیش نویس و پیشنهادهای سـازنده شان تشکر می نمایم. کـمکی که پروفسـور جک هولمن از دانشگاه متدیست جنوبی و جـان کوریگان و جـان مـوریس در مک گـروهیل جـهت جـمع بندی مطالب کـتـاب و تنظیـم آن کـردند بسـیـار باارزش بود.

سپـاس فراوان به آنشـیا کـراون و جین فـرانک که کـمک آنها در جـمع بندی مطالب کـتاب ارزشـمند بود. آنهـا بدون احسـاس خسـتگی زحمـت تهیـهٔ پیش نویسـهـای متـعـدد را کـشیـدند و خونسردی خود را حفظ کردند.

جاسبیر اس آرورا

به مدرّسان

مطالب کتاب حاضر برای درسی تحت عنوان «*اصول طرّاحی (۱)*» در نیمسال اوّل دانشجویان سال سوم کارشناسی تدریس می شده است. با این همه کتاب را می توان با شتاب بیشتری برای تدریس مواد بیشتر و گنجاندن مثالهایی از کاربردهای خاص برای دانشجویان سال چهارم کارشناسی و یا سال اوّل کارشناسی ارشد استفاده کرد. در سطح کارشناسی، دانشجویان سابقه ای در *جبر خطّی* و *حساب دیفرانسیل* دارند و می توانند مطالب را بسادگی درک کنند. فرض می شود دانشجویان *از پیش اطلاعی از فرآیند طرّاحی مهندسی ندارند* ولی درسهای فیزیک، استاتیک و دینامیک را گذرانده اند. بنابراین آنها در مورد تحلیل مسائل اطلاعاتی دارند. مقصود از ارائه درس اصول طرّاحی (۱) برای دانشجویان سال سوم این است که قبل از آن که آنان در درسهای طرّاحی سال چهارم و پروژه های طرّاحی متنوع مشغول شوند، در جریان فنون اصولی برای طرّاحی و بهینه سازی سیستمها قرار گیرند. آنان در آن جا این موقعیت را خواهند داشت تا از فنون طرّاحی بهین استفاده کنند.

پندارهٔ اساسی این درس معرفی طرّاحی سیستمهای مهندسی به عنوان یک کار منظم و با قاعده است. روشهای بهینه سازی به عنوان وسیله ای در اختیار طراح مورد توجه قرار می گیرد. استفاده آنها به عنوان ابزاری یاری رسان در طرّاحی مورد تأکید قرار می گیرد. فنون بهینه سازی با استفاده از تحلیل ریاضی پیشرفته می تواند مورد بحث قرار گیرد، اما استفاده از آن نوع ریاضی در حداقل نگه داشته می شود و از به دست آوردن قضیه ها پرهیز می شود. روشی که دنبال شده ارائه نظریه بهینه سازی در قالب مثالهاست. نتایج قضایای مختلف بدون تکیه بر اثباتشان تشریح می شوند. استفاده از قضایا و فرضیات انجام شده در آنها و نتایجشان با بیان مثالهایی بحث

می شوند. تقریباً نیمی از یک نیمسال تحصیلی به موضوعاتی در ارزیابی اقتصادی، فرآیندهای طرّاحی بهین، رابطه سازی مسأله، مفاهیم ترسیمی (گرافیکی)، مروری بر حساب دیفرانسیل و جبر ماتریسها و شرایط لازم و کافی برای مسائل بهینه سازی مقیّد و نامقیّد اختصاص دارد. نیمه دیگر روی روشهای عددی طرّاحی بهین مثل روش سیمپلکس برای مسائل خطّی، بهینه سازی یک بعدی و مفاهیم اساسی برای روشهای بهینه سازی مقیّد و نامقیّد متمرکز شده است. بیشتر بخشهای کتاب حاوی تمرینهای مفهومی با جواب درست / غلط است. آنها بدقت طرح شده اند تا دانشجویان مجبور شوند متن را برای یافتن جواب خوب بخوانند. آن مطالب همچنین مفاهیم و پنداره های اساسی را تقویت می کنند.

معمولاً سه تا پنج پروژه گروهی درطول هر نیمسال در زمینه های مختلف کاربردی داده می شود. این پروژه ها را می توان بسته به نیاز و جهت گیری خاص درس در همان زمینه بخصوص داد. پروژه ها به شکلی مطرح شده اند که دانشجویان باید مسأله طرّاحی را رابطه سازی کرده و با استفاده از روشهای طرّاحی بهین آن را حل کنند. آنها معمولاً شامل تحلیل اقتصادی که در پیوست A بحث شده، بهینه سازی ترسیمی، استفاده از شرایط لازم کان ـ تاکر برای بهینه سازی مقیّد، برنامه ریزی خطّی، و روشهای تکراری برای بهینه سازی غیرخطّی می شوند. پروژه ها دانشجویان را در جریان استفادهٔ پیشرفته از روشهای بهینه سازی و برنامه های رایانه ای قرار می دهد. این پروژه ها بسیار سودمند بوده اند. *بسیاری از پروژه هایی که با «*» مشخص شده در پایان هر بخش به عنوان تمرین ذکر شده است*. با استفاده از مثالها (بیش از ۱۶۰) و تمرینهای (قریب به ۷۰۰) موجود می توان مسائل متنوع دیگری را به عنوان تمرین طرح کرد.

درس با *مقدمه مختصری دربارهٔ توجه به مسائل اقتصادی* در فرآیند طرّاحی شروع می شود. *ارزش زمانی نقدینگی و روشهای مقایسه اقتصادی که در پیوست A آمده ارائه می‌شوند*. بعد از آن مطالب فصل (۱) که شامل مقدمه ای در فرآیند طرّاحی اصولی سیستمهای مهندسی است ارائه می شود. علایمی که در کتاب استفاده می شود تشریح می شود. سپس فرآیند رابطه سازی یک مسأله طرّاحی که در فصل (۲) آمده بحث می شود که شامل بیان مسأله داده شده به شکل ریاضی است. این بسیار مهم است و زمان زیادی صرف بحث در مورد رابطه سازی مناسب می شود. بعد از بحث مسائل نمونه مختلف یک *الگوی عمومی برای طرّاحی بهینه* تعریف و تشریح می شود. الگو دارای قیود از نوع مساوی و از نوع نامساوی

است. *مفاهیم هندسی* متعددی مثل نواحی قابل قبول/غیرقابل قبول، قیود فعال/غیرفعال/نقض شده، منحنیهای تراز هزینه[1] و سایر موارد بحث و تشریح شده است. مسائل ساده طرّاحی به روش ترسیمی حل می‌شوند تا مفاهیم اساسی طرّاحی بهین را روشن کنند.

مبانی جبر ماتریسها و بردارها در پیوست B قبل از بحث مفاهیم طرّاحی بهین در فصل (۳) به طور گذرا مرور می‌شود. مفاهیم اساسی *حساب بردارها* در فصل (۳) نیز به طور خلاصه مرور می‌شود. این مفاهیم عبارتند از: گرادیان تابع، ماتریس هسیان، بسط تیلور و شکل درجه دو. مینیمم محلی و فراگیر تابع تعریف شده و تشریح می‌گردد. *شرایط لازم و کافی* برای مینیمم محلی یک تابع چند متغیره ارائه شده و بحث می‌شود. آنها با استفاده از مثالهای ساده‌ای تشریح می‌شوند. شرایط لازم برای مسائل مقیّد و نامقیّد به یک سیستم معادلات غیر خطّی همزمان ختم می‌شود. این معادلات با استفاده از *روش نیوتن ـ رافسون* که در پیوست C بحث شده حل می‌شوند. از یک برنامه رایانه‌ای برای حل معادلات غیرخطّی استفاده می‌شود. سپس پندارهٔ اساسی مسائل بهینه سازی مقیّد بحث می‌شود. ابتدا قضیه لاگرانژ برای قیود مساوی تشریح و سپس برای قیود نامساوی تعمیم داده می‌شود. بعد از آن *شرایط لازم کان ـ تاکر* برای مسائل مقیّد عمومی با چند مثال تشریح می‌شود. سؤال بهین فراگیر به اختصار بحث می‌شود و پنداره برنامه ریزی محدب ارائه می‌گردد. استفاده از ضرایب لاگرانژ به عنوان ضرایب حساسیت تابع هزینه نسبت به تغییرات قیود بحث می‌شود. شرایط لازم و کافی مرتبه دوم[2] برای مسائل مقیّد عمومی معمولاً در درس مقدماتی بهینه سازی ارائه نمی‌گردد.

سپس پنداره اساسی *برنامه ریزی خطّی* بحث می‌شود. بعد از ارائه مفاهیم اساسی و تعاریف، روش سیمپلکس برنامه ریزی خطّی معرفی می‌شود. این روش در بستر رویه حذفی گوس ـ جردن[3] (تشریح شده در پیوست B) برای حل سیستم معادلات خطّی همزمان تشریح می‌شود. ضمن تشریح گام لولا یک روش دو مرحله‌ای سیمپلکس به دست می‌آید که مسائل برنامه ریزی خطّی را حل می‌کند. برنامه رایانه‌ای برای حل مسائل متنوع استفاده می‌شود. سؤال *تحلیل پس‌بهینگی* به اختصار بحث می‌شود. استفاده از جدول نهایی سیمپلکس برای *تحلیل حساسیت* و تغییر پارامترها با مثالهایی توضیح داده می‌شود.

1. isocost
2. second-order
3. Gauss-Jordan

بسیاری از مسائل بهینه سازی باید با استفاده از *الگوریتمهای عددی* حل شوند، زیرا حل تحلیلی آنها مشکل است. فصلهای (۵) و (۶) حاوی این نوع روشهایند که برای مسائل بهینه سازی مقیّد و نامقیّد به کار می روند. روشی که برای ارائه این مطالب دنبال می شود تشریح مفاهیم الگوریتمها بدون به دست آوردن آنهاست. سپس الگوریتمها با بیان مثالهایی توضیح داده می شوند. فصل (۵) *مفاهیم عمومی الگوریتمهای تکراری* را بیان می کند. این روشها با یک طرّاحی آزمایشی و حدسی شروع می شوند و برای بهبود آن تا حصول همگرایی کار ادامه پیدا می کند. هر بهبود شامل محاسبه جهت جست و جو در فضای طرّاحی و اندازهٔ گام در آن امتداد است. الگوریتمهای متعددی مثل *تندترین کاهش*، *گرادیان مزدوج* و *روشهای نیوتن* تعمیم یافته برای یافتن بردار جهت بحث می شوند. روش جست و جوی یک بعدی، بازه مساوی و بخش طلایی تشریح می شوند. برنامه های سادهٔ متعددی براساس این الگوریتمها در پیوست D ارائه شده است. دانشجویان این برنامه ها را برای مسائل تمرینی استفاده می کنند.

روشهای عددی برای مسائل بهینه سازی مقیّد در فصل (۶) تشریح می شوند. روشی که در این جا دنبال شده این است که مفاهیم کلیدی و مراحلی که در بیشتر الگوریتمها به کار می رود بحث و با مثالهایی تشریح شود. بیشتر روشهایی که براساس گرادیان می باشند *مسائل غیرخطّی را در نقطه طرّاحی فعلی با استفاده از بسط سری تیلور خطّی می سازند*. فرآیند خطّی سازی با مثالهایی تشریح می شود. مسأله خطّی شده را برای تغییری در طرّاحی می توان با روش سیمپلکس برنامه ریزی خطّی حل کرد. فرآیند نتیجه معمولاً *برنامه ریزی خطّی دنباله ای*[1] یا به اختصار SLP نامیده می شود. روش با مثالهای ساده ای توضیح داده می شود و محدودیتهای آن بیان می شود. الگوریتم دیگری که ارائه شده یک بسط از روش تندترین کاهش بهینه سازی نامقیّد است و آن را روش *تندترین کاهش مقیّد*[2](CSD) می نامند. روش با مثالهایی تشریح می شود. جهت جست و جو در این روش با حل یک زیرمسأله برنامه ریزی درجهٔ دو[3](QP) به دست می آید. روش سیمپلکس برنامه ریزی خطّی بسط داده می شود تا مسائل QP حل شوند. یک تابع کاهشی برای این روش تعریف شده و فرآیندی نیز برای به دست آوردن اندازه گام با مثال تشریح می شود.

---

1. Sequential Linear Programming
2. Constrained Steepest Descent
3. Quadratic Programming

طرّاحی بهین سیستمهای حقیقی نیاز به برنامه های رایانه‌ای هوشمند دارد. روش ترسیمی تعاملی که در آن امکان مطرح کردن پرسش و تصحیح موقعیت وجود دارد می تواند از ابزار بسیار حیاتی در فرآیند بهینه سازی طرّاحی باشد. نقش چنین توانایی در فصل (۷) تشریح می شود. یک سیستم بهینه سازی طرّاحی تعاملی[1] که آی دیزاین (IDESIGN) نام دارد معرفی می شود. توانایی و ظرفیتهای آن با مثالهایی توضیح داده می شود. دانشجویان مسائل تکالیف و پروژه هایشان را با استفاده از این سیستم حل می کنند. برای این منظور سیستمهای دیگری نیز ممکن است استفاده گردد.

فصل (۸) شامل موضوعاتی در زمینهٔ کاربردهای عملی پیشرفته است. معیار انتخاب یک الگوریتم و نرم افزار بحث می شود. چندین مسأله طرّاحی بهین رابطه سازی شده و حل می شوند. این فصل معمولاً برای درس مقدماتی دانشجویان کارشناسی ارائه نمی شود.

جدولی که در این جا ارائه شده حاوی پیشنهاد مطالبی است که در درس مقدماتی برای دانشجویان کارشناسی در نیمسال اوّل باید ارائه شود. هر ساعت درس ۵۰ دقیقه است. معمولاً ۴۵ ساعت درسی در هر نیمسال وجود دارد. در جدول تنها ۴۰ ساعت پیش بینی شده و بقیه ساعات می تواند به پروژه های طرّاحی، بحث، آزمایشگاه، امتحان و یا سایر موارد مورد نیاز اختصاص یابد. معمولاً بعد از هر کلاس دو یا سه مسأله به عنوان تکلیف داده می شود. مهلت تکالیف تا اوّل ساعت درسی آینده است. توجه کنید که درس برای ارائه دانش اساسی رابطه سازی مسائل طرّاحی، مفاهیم بهینه سازی و فرضیه ها، روشهای عددی، و کاربرد آنها طرّاحی شده است. طرح نشان داده شده در جدول می تواند به دلخواه جهت تأکید بیشتر روی روشهای عددی بهینه سازی و کاربرد آنها و تأکید کمتر روی نظریه ها تغییر یابد.

بعد از تدریس این درس از اوایل سال ۱۹۷۰، نتیجه گرفتم که بهتر است فرضیه های بهینه سازی، بویژه در سطح کارشناسی را با مثالهای طرّاحی تشریح کنم. هر روش یا قضیه باید تنها با مثال بیان شود. همچنین ضرورتها و فرضیات قضایا باید با مثال تشریح و تأکید شود. تجربه نشان داده است با این روش دانشجویان فنهای طرّاحی بهین را می فهمند و مفاهیم اساسی را بسیار ساده درك می کنند.

---

1. Interactive Design

جدول طرح زمان‌بندی پیشنهادی برای یك درس مقدماتی در سطح کارشناسی

شماره جلسه	موضوع	بخشها
۱	مقدمه؛ ارزش زمانی نقدینگی	A.1 ، ۱.۲ ، ۱.۱
۲	مقایسه اقتصادی	A.3 ، A.2
۳	فرآیند طرّاحی؛ علایم؛ رابطه سازی	۱.۷-۱.۳
۴	رابطه سازی مسائل طرّاحی	۲.۶-۲.۱
۵	مثالها (پروژه طرّاحی شماره ۱)	۲.۷ ، ۲.۶
۶	حل ترسیمی	۲.۸ ، ۲.۷
۷	تعاریف؛ دوره ریاضی	B.1-B.3 ، ۳.۲ ، ۳.۱
۸	مسائل نامقیّد؛ شرایط لازم و کافی	۳.۳-۳.۱ ، B.7
۹	مثالها؛ حل معادلات خطّی؛ حذف گوسی	B.4 ، ۳.۳
۱۰	مثالها؛ روش نیوتن ـ رافسون	C.2 ، C.1 ، ۳.۳
۱۱	مسائل مقیّد: قضیه لاگرانژ	۳.۴
۱۲	شرایط کان ـ تاکر (پروژه طرّاحی شماره ۲)	۳.۵
۱۳	مثالها؛ شرایط لازم و کافی مقیّد	۳.۵ ، ۳.۴
۱۴	بهینگی فراگیر؛ مثالها	۳.۶
۱۵	قضیه حساسیت؛ مثالها	۳.۷
۱۶	مثالها؛ مسائل مقیّد	۳.۸-۳.۴
۱۷	حل معادلات همزمان؛ LP استاندارد	۴.۳-۴.۱ ، B.5
۱۸	LP ؛ روش گوسی و گوس ـ جردن	B.5 ، B.4
۱۹	روش سیمپلکس	۴.۴
۲۰	روش سیمپلکس (پروژه طرّاحی شماره ۳)	۴.۴
۲۱	متغیرهای مصنوعی	۴.۵
۲۲	اهمیت اطلاعاتی که در جدول نهایی روش LP موجود است	۴.۶
۲۳	مثالهای LP	۴.۶-۴.۴
۲۴	مسائل غیرخطّی؛ جست و جوی ID	D.2 ، ۵.۳-۵.۱
۲۵	جست و جوی بخش طلایی	D.3 ، ۵.۳
۲۶	مثالهای ID	۵.۳-۵.۱
۲۷	تندترین کاهش؛ جهتهای مزدوج	D.5 ، D.4 ، ۵.۵ ، ۵.۴
۲۸	جهتهای مزدوج، روش نیوتن	۵.۶ ، ۵.۵
۲۹	مثالها؛ جنبه های عددی	۵.۶-۵.۴
۳۰	بهینه سازی مقیّد؛ نرمال سازی	۶.۲ ، ۶.۱
۳۱	مفاهیم پایه؛ خطّی سازی (پروژه طرّاحی شمارهٔ ۴)	۶.۳ ، ۶.۲
۳۲	خطّی سازی، LP دنباله ای	۶.۴ ، ۶.۳
۳۳	مسأله برنامه ریزی درجه دو (QP)	۶.۵

جدول (ادامه)

شماره جلسه	موضوع	بخشها
۳۴	QP ؛ مفاهیم تندترین کاهش مقیّد	۶.۵ ، ۶.۶
۳۵	مفاهیم تندترین کاهش مقیّد	۶.۶
۳۶	تندترین کاهش مقیّد	۶.۶
۳۷	مثالهای مقیّد	۶.۱-۶.۶
۳۸	بهینه سازی تعاملی	۷.۱-۷.۵
۳۹	مثالها؛ جنبه های عددی	۷.۶ ، ۸.۱-۸.۴
۴۰	مثالها؛ کاربردهای عملی	۸.۵-۸.۹

با استفاده از مطالب کتاب، درسهای طرّاحی سالهای سوم و چهارم کارشناسی در زمینهٔ کاربردهای ویژه، درسهای تخصصی اختیاری فنی و درسهای دوره کارشناسی ارشد را می توان تنظیم و برنامه ریزی کرد. برای درس اوّلیه دوره های کارشناسی تنها چند مورد از کاربردهای ویژه باید به مطالب کتاب افزوده شود. برای درس دورهٔ کارشناسی ارشد مطالب باید با شتاب بیشتری گفته شود. همچنین تقدّم و تأخّر مطالب ممکن است برعکس شود، مثلاً قضایا بعد از مثالها بیان شوند. کاربردهای پیشرفته در رشته مورد نظر نیز باید اضافه شود.

به دانشجویان

هدف بسیاری از مهندسان، طرّاحی سیستمهایی برای کاربردهای مهندسی خودرو، هوافضا، مکانیکی، ساختمانی، شیمیایی، صنعتی، برقی، مهندسی پزشکی، کشاورزی، دریایی و هسته ای است. در دنیای پر رقابت امروز دیگر کافی نیست سیستمی طرّاحی کنیم که عملکرد آن مطابق آنچه می خواستیم باشد، بلکه لازم است که آن سیستم *بهترین* باشد. بهترین یعنی سیستمی کارآمد، همه جانبه، منحصر به فرد و مقرون به صرفه. برای طرّاحی چنین سیستمی، *ابزار تحلیلی، تجربی و عددی* مناسب مورد نیاز است. مفاهیم طرّاحی بهین و روشهای آن قسمتی از این نیاز را برآورده می سازند. وقتی که آنها در یک نرم افزار به کار گرفته شوند، وسیلهٔ عددی قدرتمندی برای طرّاحی بهترین سیستمها خواهند بود. کتاب حاضر دربارهٔ چنین چیزی است، یعنی *توضیح ابزاری برای طرّاحی بهترین سیستمها*.

شاید باور این مطلب مشکل باشد که روشهای طرّاحی بهین برپایه *تعدادی مفاهیم ساده ریاضی* بنا شده است. به عبارت دیگر تنها، جبر بردار و ماتریس، و حساب توابع چندمتغیره مفاهیمی هستند که برای به دست آوردن و درک روشها مورد نیاز است. علایم *استفاده شده در به دست آوردن روشها گاهی پیچیده هستند و به نظر می رسد که موضوع پیچیده است، ولی این برداشت اصلاً صحیح نیست*. فقط فهم علایم و به خاطر سپردن آنها لازم است. بعضی از علایم عمومی و اصطلاحات که در متن به کار رفته در بخش ۷ . ۱ توضیح داده شده است. بقیه در موقعیت مناسب معرفی می شوند. آنها باید کاملاً درک شوند.

جبر ماتریس و بردار در پیوست B دوره می شود. مفاهیم مربوطه از حساب بردارها در بخش ۲ . ۳ توضیح داده شده و دوره می شوند. دانشجویانی که این مطالب را خوب

نیاموخته اند باید هر از گاهی آنها را مرور کنند. همچنین، برای بعضی از دانشجویان ممکن است این اوّلین برخوردشان با موضوع طرّاحی سیستمها باشد. فصلهای ۱ و ۲ مقدمهٔ خوبی برای این موضوع است.

این کتاب حاوی مطالبی خودکفا در موضوع طرّاحی و بهینه سازی است. هرکس که زمینه ای در جبر ماتریس و بردارها و حساب بردارها داشته باشد قادر خواهد بود مطالب را بفهمد. تعداد زیادی سؤال نوع «چه اگر» مطرح شده اند. تمرینهای مفهومی که جوابهای صحیح / غلط دارند در انتهای بیشتر بخشها آمده است. این سؤالات برای تقویت مفاهیم اصلی طرّاحی شده اند و باید جواب داده شوند.

باید توجه کرد که فرآیند کلی طرّاحی سیستمها در زمینه های مختلف مهندسی تقریباً یکسان است. روشهای تحلیلی و عددی تحلیل سیستمها ممکن است متفاوت باشد. بیان مسأله طرّاحی ممکن است حاوی اصطلاحاتی مخصوص به کاربرد ویژه ای باشد. به عنوان مثال، در زمینهٔ مهندسی سازه ای، مکانیکی، خودروی و هوافضایی توجّه ما معطوف به کل سازه و اجرای آن است. ازنظر عملی نیازها عبارتند از قیودی در تنش، کرنش و تغییر مکان[1] اعضا در نقاط کلیدی، بسامدهای ارتعاشی، فرو ریختن در اثر ناپایداری و غیره. بنابراین ما در تعریف و رابطه سازی مسأله اصطلاحاتی را به کار می گیریم که مخصوص این زمینه ها باشند. طراحانی که در آن زمینه کار می کنند معنی کلمه ها و قیدها را می فهمند. به طور مشابه، سایر زمینه های مهندسی نیز اصطلاحات مخصوص به خود را در شروع مسأله به کار می برند. در هر حال، *وقتی که مسائل طرّاحی در زمینه های مختلف با استفاده از علایم استاندارد به شکل ریاضی بیان شوند همه شبیه به هم هستند. روشهای بهینه سازی* که در این کتاب توضیح داده شده کاملاً عمومی است و *می تواند برای حل مسائل به کار رود.* روشها بدون اشاره به کاربرد طرّاحی آنها تشریح می شوند. دانشجویان باید این نکته *کلیدی* را هنگام مطالعه کتاب در ذهن بسپارند و دیدی *کلی* راجع به طرّاحی بهین داشته باشند. اصطلاحات ویژه ای که در بعضی از مثالها آمده است *نباید مانع از فهم اهمیت مفاهیم و روشهای بهینه سازی شوند.* کاربردهای طرّاحی مهندسی ساده ای که در متن برای ایجاد انگیزه در تعمیم و استفاده مفاهیم و روشها آمده است باید کاملاً درک شوند.

---

1. deflection

فصل اوّل

مقدّمه ای در طرّاحی

1.1 مقدّمه

مهندسی متشکل از تعدادی فعالیت است که خوب پایه ریزی شده اند و به شکل مناسبی در کنار هم قرار گرفته اند. این فعالیتها عبارتند از تحلیل، طراحی، ساخت، فروش، پژوهش و توسعهٔ سیستمها. موضوع این کتاب ـ طراحی سیستمها ـ یک زمینهٔ اصلی در حرفهٔ مهندسی است. فرآیند طراحی و ساخت سیستمها طی قرنها تدوین و به کار می رفته است. وجود ساختمانها، پلها، بزرگ راهها، خودروها، هواپیماها، فضاپیماهای خوب و دیگر سیستمهای پیچیده شاهدی عالی براین مدعاست. با این همه، تکامل این سیستمها کند بوده است. فرآیند کلی بسیار هزینه بر و طولانی است و به منابع انسانی و مادّی عمده ای نیاز دارد. بنابراین، مراحل عبارت بودند از طراحی، ساخت و استفاده یک سیستم بدون توجه به این که بهترین است یا خیر. سیستمهای بهبود یافته فقط هنگامی طراحی می شدند که قسمت اعظم سرمایه بازگشت شده بود. این سیستمهای جدید با عملکردی مشابه و یا عملکرد بهتر، کم هزینه تر و با بازده بیشتر بودند.

بحث قبلی مشخص می کند که سیستمهای متعددی می توانند وظیفه مشابهی را انجام دهند ولی بعضی از آنها از بقیه بهترند. برای مثال، هدف از یک پل ایجاد ارتباط از یک طرف به طرف دیگر است. از آن جا که تحلیل و طراحی همهٔ حالتهای ممکن بسیار وقت گیر و پر هزینه

است، معمولاً یک نوع انتخاب شده و با تمام جزئیات طراحی می شود.

طراحی سیستمهای پیچیده نیاز به محاسبات عظیم و پردازش داده ها دارد. در طی سه دهه گذشته، انقلابی در فن آوری رایانه و محاسبات عددی به وقوع پیوست. رایانه های امروزی محاسبات پیچیده و پردازش داده های بسیار بزرگ را به طور مؤثری انجام می دهند. فرآیند طراحی مهندسی از این انقلاب بسیار بهره مند شده است. سیستمهای بهتری را با تحلیل پارامترهای اختیاری متعددی می توان در زمان کوتاهی طراحی کرد. این نوع تحلیلها و طراحیها بسیار مورد توجّه هستند، زیرا حاصل آن سیستمهای بهتر، کم هزینه تر، با ظرفیتهای بیشتر، و عملکرد و نگه داری ساده تری خواهد بود.

طراحی سیستمها می تواند به عنوان *مسائل بهینه سازی رابطه سازی* شود به طوری که یک معیار عملکرد بهین شود و همه قیود برآورده شوند. در سالهای اخیر، روشهای عددی بهینه سازی به میزان زیادی توسعه و بهبود یافته اند. بسیاری از روشها برای طراحی سیستمهای بهتر استفاده می شده اند. این کتاب روشهای بهینه سازی و کاربردهای آن را در طراحی سیستمهای مهندسی بیان می کند. بر فرآیند طراحی در مقابل نظریه بهینه سازی تأکید بیشتری می شود. قضایای متعددی بدون بیان اثباتهای مشکل در قالب نتایج بیان می شوند. اما ضرورت آنها از دیدگاه مهندسی به تفصیل بحث و مطالعه می شود. پندارهٔ بهینه سازی، روشهای عددی، سخت افزار و نرم افزارهای پیشرفته همه به‌عنوان ابزارهایی جهت طراحی یک سیستم بهتر مهندسی مورد استفاده قرار می گیرند. در سرتاسر این کتاب روی این هدف تأکید شده است.

هر مسأله ای که در آن کمیتهای مشخصی باید به دست آید که قیود را برآورده کند می تواند به عنوان مسأله طراحی بهین رابطه سازی شود. وقتی این رابطه سازی انجام شد، می توان از مفاهیم و روشهایی که در کتاب تشریح شده برای حل مسأله استفاده کرد. بنابراین، فنون بهینه سازی کاملاً کلی هستند و کاربرد وسیعی در زمینه های متنوع دارند. محدودهٔ کاربرد تنها به کمک تصور و یا استادی مهندسان طراح محدود می شود. بحث کاربرد تمامی مفاهیم و فنون بهینه سازی در این کتاب مقدماتی میسور نیست. در هر صورت ما با استفاده از کاربردهای ساده، مفاهیم، اصول اساسی و فنون اصلی را که می تواند در بسیاری از کاربردها استفاده گردد بحث می کنیم. دانشجویان باید بدون متوقف شدن در علایم، اصطلاحات و جزئیات کاربرد ویژهٔ آنها را درك کنند.

طراحی یک سیستم با تحلیل گزینه های مختلف شروع می شود. زیرسیستمها و اجزای

آنها مشخص می شوند و برای کامل کردن فرآیند، طراحی و آزمایش می شوند. بخش ۱.۲ به تشریح فرآیند طراحی از دیدگاه مهندسی سیستمها می پردازد. تفاوت بین طراحی و تحلیل در بخش ۱.۳ بحث می شود. بخش ۱.۴ به توضیح پیرامون تفاوت بین فرآیند طراحی بهین و قراردادی اختصاص دارد. نقش رایانه در فرآیند طراحی در بخش ۱.۵ آمده است. در بخش ۱.۶ تفاوت بین طراحی بهین و کنترل بهین به اختصار بحث می شود و بالاخره اصطلاحات و علایم به کار رفته در سرتاسر کتاب در بخش ۱.۷ تعریف می شوند.

فصل (۲) *فرآیند رابطه سازی یک مسأله بهینه سازی را تشریح می کند.* ابتدا مسأله به بیان ریاضی که می تواند بعداً مورد تحلیل بیشتر قرار گیرد تبدیل می شود. سه گام مشخص در فرآیند رابطه سازی مسأله وجود دارد که یک مثال ساده طراحی آن را توضیح می دهد. مسائل طراحی بهینه متعددی رابطه سازی شده و یک الگوی کلی برای بهینه سازی طراحی بیان می شود. این مدل در سراسر کتاب استفاده می شود. همچنین از مسائل دو متغیّره برای تشریح مفاهیم مشخص هندسی استفاده می شود.

فصل (۳) حاوی *مفاهیمی از نظریهٔ بهینه سازی* برای طراحی سیستمهای مهندسی است. جبر خطی (بردارها و ماتریسها)، و مفاهیم حساب در بحثهای مختلف مورد نیاز است. مطالب مربوط در این زمینه مرور و مسائل بهینه سازی مقید و نامقیّد بحث می شوند. قضیه لاگرانژ برای مسائل با قید مساوی بحث و تشریح می شود، سپس برای مسائل مقید نامساوی تعمیم می یابد. بعداً، شرایط لازم کان ـ تاکر برای مسائل بهینه سازی مقید استخراج شده و تشریح می شوند. قضیه حساسیت تغییر قید که ارزش عملی قابل توجهی در فرآیند طراحی دارد به بحث گذاشته می شود. جواب بسیاری از مسائل بهینه سازی ریشه های معادلات غیرخطی هستند. این معادلات وقتی که شرایط لازم برای بهینه سازی نوشته می شود به وجود می آیند. این معادله ها همیشه به صورت تحلیلی حل نمی شوند (یعنی همواره جواب دقیق را نمی توان به دست آورد). یک روش عددی برای یافتن *ریشه های معادلات غیرخطی* مورد نیاز است. روش نیوتن ـ رافسون یکی از این روشهاست که به صورت اولیه اش در پیوست C آمده و با مثالها تشریح شده است.

فصل (۴) شامل دستهٔ خاصی از مسائل می شود که دارای توابعی خطی از متغیّرها هستند. اینها *مسائل برنامه ریزی خطی* نامیده می شوند. مزایای این ویژگی، در فرآیند حل مسأله مورد توجه قرار می گیرد. مفاهیم اساسی و قضایای برنامه ریزی خطی بیان می شود.

روش سیمپلکس ضمن چند مثال توضیح داده می شود. فصل (۴) همچنین حاوی سرفصلهایی دربارهٔ دوگانی و تحلیل پس بهینگی است.

در فصل (۵) روشهایی برای حل *مسائل طراحی بهین غیرخطی نامقید* تشریح می شوند. مفهوم اصلی یک روش عددی تکراری توضیح داده می شود. این مفهوم کاربرد وسیعی دارد و بسیار مهم است. روش تندترین کاهش، نیوتن و دیگر روشهای عددی بیان می شوند. این فصل همچنین حاوی روشهایی است که مسائل مقید را به یک سری مسائل نامقیّد تبدیل می کند. این روشها را روش تبدیل می گویند. با این روشها، روشهای بهینه سازی نامقید را می توان برای حل مسائل مقید به کار برد.

فصل (۶) حاوی مفاهیم متعددی پیرامون روشهای اولیه[1] می باشد که برای حل مستقیم *مسائل عمومی بهینه سازی مقید* به کار می رود. در روشهای اولیه یک رشته از زیرمسأله های مقید حل می شوند. بنابراین شکل مقید مسأله اصلی در هر تکرار حفظ می شود. این فلسفه کاملاً با روشهای تبدیل فصل (۵) متفاوت است. چند الگوریتم عددی مبتنی بر فلسفه اولیه تشریح می شوند.

فصل (۷) عنوان *بهینه سازی طراحی تعاملی*[2] را معرفی می کند و الگوریتم تعاملی را تشریح می کند. نقش ترسیم تعاملی و طراح در حین فرآیند طراحی بهین بحث و با مثالهایی تشریح می شود.

فصل (۸) شامل بحث پیرامون ملاحظات عملی در *بهینه سازی طراحی* می شود. فرآیند رابطه سازی مسائل پیچیدهٔ عملی، و مسأله ارزیابی گرادیان بحث می شود. موضوعات متعددی چون انتخاب یک الگوریتم، تعریف یک الگوریتم خوب، انتخاب نرم افزار کلی بهینه سازی، و مرز مشترک[3] یک کاربرد با نرم افزار چندکاره مورد بحث قرار می گیرد. چندین مسأله بهینه سازی طراحی جالب رابطه سازی شده و حل می شوند.

چهار پیوست در انتهای کتاب وجود دارد: پیوست A شامل مقدمه ای دربارهٔ روشهای *تحلیل اقتصادی* است. این روشها در اتخاذ تصمیم در طراحی نقش مستقیمی دارند. روشهای هزینهٔ سالیانه و ارزش فعلی با هم مقایسه و تشریح می شوند. پیوست B *عملیات ماتریسی و برداری* را شرح می دهد. عنوانهایی مثل دترمینان، رتبه[4] ماتریس، حل معادلات خطی، مسائل

1. primal
2. interactive
3. interfacing
4. rank

مقدار ویژه، استقلال خطی بردارها و عدد شرطی[1] یک ماتریس به بحث گذاشته می شوند. پیوست C روش *نیوتن ـ رافسون* برای یافتن ریشه های معادله های غیرخطی را تشریح می کند. پیوستها باید در زمان مناسبی بین درس بهینه سازی و طراحی مرور شوند. در پیوست D ، فهرست چند *برنامه رایانه ای* ساده که می توانند در حل مسائل بهینه سازی نامقید به کار روند آمده است.

۱.۲ فرآیند طراحی

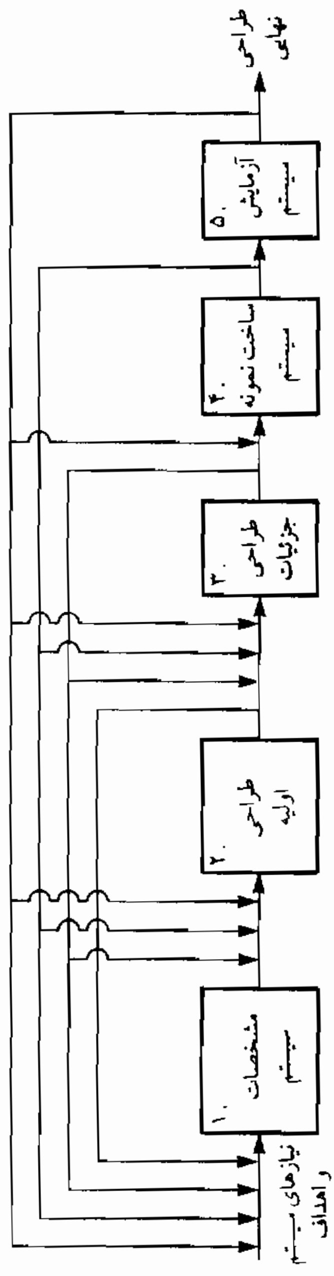
فرآیند طراحی سیستمها به مجموعهٔ نقشه ها، محاسبات و گزارشهایی می انجامد که سیستم براساس آنها ساخته می شود. ما از یک الگوی مهندسی سیستمها استفاده خواهیم کرد که *فرآیند طراحی* را تشریح می کند. اگرچه بحث کامل در این باره فراتر از هدف این کتاب است، چند مفهوم اساسی با استفاده از نمودار جعبه ای[2] ساده بحث خواهند شد.

طراحی یک *فرآیند چرخه ای*[3] است. تجربه، فهم و هنرمندی طرّاح از ملزومات طراحی سیستمها در بیشتر زمینه های مهندسی (هوا فضا، خودرو، عمران، شیمی، صنعتی، الکتریکی، مکانیکی، هیدولیک و حمل و نقل) است. منظور از چرخه این است که قبل از این که یک طرح قابل قبول به دست آید سیستمهای آزمایشی متعددی به دنبال هم تحلیل شود. مهندسان برای طراحی بهترین سیستمها تلاش می کنند. معنی بهترین برای سیستمهای مختلف با توجه به ویژگی آنها متفاوت است. به طور کلی، بهترین سیستم یعنی سیستمی کم هزینه تر، با بازدهی بالاتر، قابل اعتمادتر و بادوام تر. فرآیند می تواند شامل گروههایی از متخصصان در تخصصهای مختلف باشد که تداخل قابل توجهی دارند. مفاهیم اساسی در کتاب تشریح می شوند تا در طراحی سیستمها با کمترین هزینه و در کوتاهترین زمان مهندس را کمک کند.

فرآیند طراحی باید کاملاً حساب شده و منظم باشد. برای بحث آن، ما یک *الگوی تکامل سیستم* را که در شکل ۱.۱ نشان داده شده مورد توجه قرار می دهیم. فرآیند با مشخص کردن یک نیاز که ممکن است با تصور مهندسان و یا غیر مهندسان ایجاد شود شروع می شود. اولین قدم در فرآیند تکاملی تعریف دقیق مشخصات سیستم است. معمولاً برای تبیین *مشخصات* سیستم ارتباط متقابل قابل توجهی بین مهندس و درخواست کننده لازم است.

---

1. Condition number
2. Block diagram
3. iterative



شکل ۱.۱ یک الگوی تکامل سیستم

هنگامی که آن ویژگیها مشخص شدند، طراحی سیستم می تواند شروع شود. قدم مهم دوم در فرآیند این است که *طراحی اولیه* سیستم انجام شود. مفاهیم مختلف برای سیستم مطالعه می شوند. از آن جا که این کار باید در زمان نسبتاً کوتاهی انجام شود، از *الگوهای بسیار آرمانی* استفاده می شود. زیرسیستمهای متفاوتی شناسایی می شوند و طراحیهای مقدماتی آنها حدس زده می شود. به طور کلی تصمیمی که در این مرحله گرفته می شود بر عملکرد و ظاهر نهایی سیستم تأثیر می گذارد. در پایان مرحله مقدماتی طراحی، چند مفهوم که نیاز به تحلیل بیشتری دارند شناسایی می شوند.

قدم سوم در فرآیند، *طراحی جزئیات* زیرسیستم است. برای ارزیابی حالتهای مختلف، این کار باید برای تمامی مفاهیم شناسایی شدهٔ مرحله قبلی انجام شود. پارامترهای طراحی برای زیرسیستمها باید شناسایی شوند. پارامترها باید طوری باشند که وقتی مقادیر عددیشان مشخص شد، زیرسیستم بتواند ساخته شود. پارامترهای طراحی همچنین باید ازنظر فنی و عملکرد سیستم ارضاکننده باشند. زیرسیستمهای متعددی باید طراحی شوند تا ارزش سیستم ماکزیمم و یا هزینه آن مینیمم شود. روشهای بهینه سازی نظام مند[1] می تواند طراح را در فرآیند طراحی جزئیات شتاب بیشتری دهد. در پایان فرآیند، اطلاعاتی از سیستم به شکل گزارش و نقشه در دسترس خواهد بود.

دو جعبه آخر شکل ۱ . ۱ ممکن است برای همه سیستمها لازم نباشد. اینها برای ساخت سیستم نمونه و آزمایش آن است. این مراحل هنگامی لازم است که تولید انبوه سیستم مورد نیاز باشد و یا به زندگی بشر مربوط شود. ممکن است چنین به نظر برسد که این جعبه ها گامهای نهایی فرآیند طراحی هستند، ولی آنها گامهای نهایی نیستند، زیرا هنگام آزمایش، امکان دارد سیستم براساس مشخصه ها عمل نکند. بنابراین، ممکن است مشخصات نیاز به بهبود داشته باشند و یا لازم باشد مفاهیم دیگری مورد مطالعه قرار گیرند. در حقیقت، این آزمایش دوباره ممکن است در هر مرحله فرآیند طراحی نیاز باشد. این دلیل حلقه های پس خور[2] در هر مرحله از فرآیند تکامل سیستم در شکل ۱ . ۱ است. فرآیند چرخه باید آن قدر ادامه پیدا کند تا سیستمی قابل قبول به دست آید. بسته به پیچیدگی سیستم، فرآیند ممکن است از چند روز تا چندین ماه طول بکشد.

الگویی که در بالا تشریح شد یک نمودار جعبه ای ساده برای تکامل سیستم است.

1. Systematic 2. Feedback

در عمل شاید نیاز باشد تا هر جعبه به جعبه های کوچکتر متعددی شکسته شود تا مطالعه مناسب انجام گرفته و به یک نتیجه معقول برسد. *نکتهٔ مهم این است که مفاهیم بهینه سازی و روشها می‌توانند در هر مرحله فرآیند کمک کنند.* استفاده از این روشها به همراه نرم افزار می تواند در مطالعه حالات مختلف طراحی در زمانی کوتاه بسیار مفید باشد. این فنون می توانند در طراحی اوّلیه و جزئیات و برای ساخت و آزمایش کمک کنند. بنابراین، در این کتاب، ما روشهای بهینه سازی و کاربرد آنها را در طراحی مورد بحث قرار می دهیم.

در بعضی از مقاطع کتاب، ممکن است این تصور به وجود آید که فرآیند طراحی می تواند کاملاً خودکار شده و طرّاح از دور حذف شود؛ و از روشهای بهینه سازی و برنامه ها می توان به عنوان جعبه سیاه استفاده شود. این ممکن است در بعضی موارد درست باشد. به هرحال، طراحی هر سیستم یک فرآیند ابتکاری است که ممکن است کاملاً پیچیده باشد. از طرفی ممکن است مسأله بد تعریف شده باشد و حل مسأله طراحی وجود نداشته باشد. ممکن است تابع مسأله در ناحیهٔ مشخصی از فضای طرّاحی تعریف نشده باشد. بنابراین، در بیشتر مسائل عملی، طرّاح در راهنمایی فرآیند به محدودهٔ قابل قبول نقش کلیدی دارد. طراحان باید یکی از اجزای فرآیند باشند و از شمّ مهندسی و قضاوتشان در به دست آوردن طرح نهایی استفاده کنند. جزئیات بیشتر فرآیند بهینه سازی تعاملی و نقش طراح در فصل (۷) بحث خواهد شد.

۱.۳ طراحی مهندسی و تحلیل

توجه به اختلاف بین *تحلیل مهندسی و فعالیتهای طراحی* بسیار مهم است. مسأله تحلیل دربارهٔ به دست آوردن عملکرد سیستمی موجود و یا سیستمی آزمایشی که برای کار بخصوصی طراحی شده بحث می کند. به دست آوردن عملکرد سیستم به معنی محاسبهٔ پاسخ آن به ورودیهای مشخص است. بنابراین، اندازهٔ قسمتهای مختلف و شکل آنها برای تحلیل یک مسأله داده می شود، یعنی، طراحی سیستم شناخته شده است. ازطرف دیگر، مسأله طراحی محاسبه اندازه ها و شکل قسمتهای مختلف سیستم برای ایفای عملکرد مورد نیاز است. طراحی سیستم یک فرآیند آزمون و خطاست. ما طرحی را حدس می زنیم و برای آن که ببینیم براساس مشخصه ها عمل می کند یا نه، آن را تحلیل می کنیم. اگر عملکرد طرح ما قابل قبول باشد ممکن است بخواهیم برای بهبود عملکرد آن را باز هم تغییر دهیم. اگر طرح آزمایشی کار

نکرد، ما برای دست یابی به سیستم قابل قبول نیاز به تعویض آن داریم. پس در فرآیند طراحی باید توان تحلیل در دسترس باشد.

این کتاب برای استفاده در تمامی شاخه های مهندسی تهیه شده است. فرض شده که دانشجویان روشهای تحلیل را در درسهای استاتیک، دینامیک و فیزیک دوره کارشناسی آموخته اند. به هر حال، *ما نخواهیم گذاشت که فقدان توان تحلیل، فهم فرآیند طراحی بهین اصولی را مانع شود.* معادلات تحلیل سیستم هرجا نیاز باشد داده می شود.

از سال ۱۹۴۰ در تحلیل سیستمهای مهندسی که در محیطهای مختلف کار می کنند پیشرفت قابل توجهی به وجود آمده است. تحلیل مؤثر سیستمهای پیچیده تحت ورودیهای استاتیک و دینامیک امکان پذیر است. سیستمهای خطی و غیرخطی می توانند تجزیه و تحلیل شوند. در دسترس بودن رایانه های دیجیتالی با سرعت بالا نقش اساسی در توسعهٔ توانایی تحلیل به عهده دارد. امروزه توسعه تواناییهای مشابه برای طراحی سیستمهای پیچیده امکان پذیر است. روشهای بهینه سازی در فرآیند طراحی نقش اساسی بازی خواهند کرد. بنابراین، فهم و کاربرد آنها در فرآیندهای طراحی مهندسی مهم است.

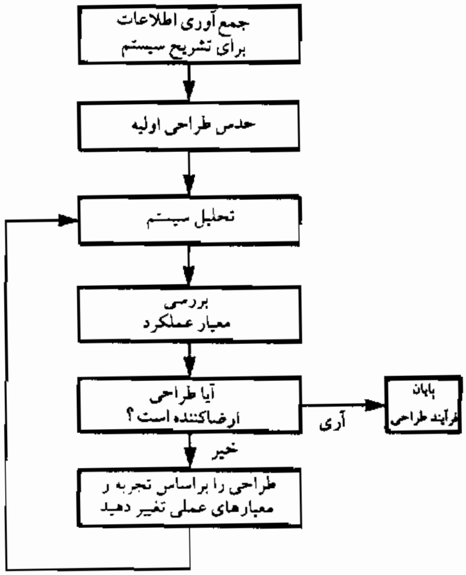
۱.۴ فرآیند طراحی قراردادی در مقابل بهین

طراحی مؤثر و کم هزینه سیستمها بدون از بین بردن صحّت و درستی عملکرد آنها مورد نظر مهندسان است. فرآیند طراحی قراردادی بستگی به دید فنی و تجربه و مهارت طراح دارد. این حضور پررنگ عنصر بشری گاه می تواند در ترکیب[1] سیستمهای پیچیده به نتایج نادرستی منتهی شود. شکل ۱ . ۲ نمودار جریانی برای فرآیند طراحی قراردادی را نمایش می دهد که استفاده از اطلاعات جمع آوری شده از یک یا چند طراحی آزمایشی و تجربه و مهارت فنی طراح را شامل می شود.

تنگناها و نیاز برای بازده بیشتر در دنیای پر رقابت امروز مهندسان را مجبور می کند تا به طراحی بهتر و اقتصادی تر علاقه بیشتری نشان دهند. با پیشرفتهای اخیر در فن آوری رایانه که بر گرایشهای مختلف مهندسی تأثیر گذاشته است، فرآیند طراحی به سختی می تواند دست نخورده باقی بماند. اخیراً، اصطلاح بهینه سازی طراحی به وسیله رایانه (CADO) برای خلاصه کردن تمامی طراحیها به کمک رایانه استفاده می شود. شکل ۱ . ۳ فرآیند طراحی بهین را نشان می دهد.

---

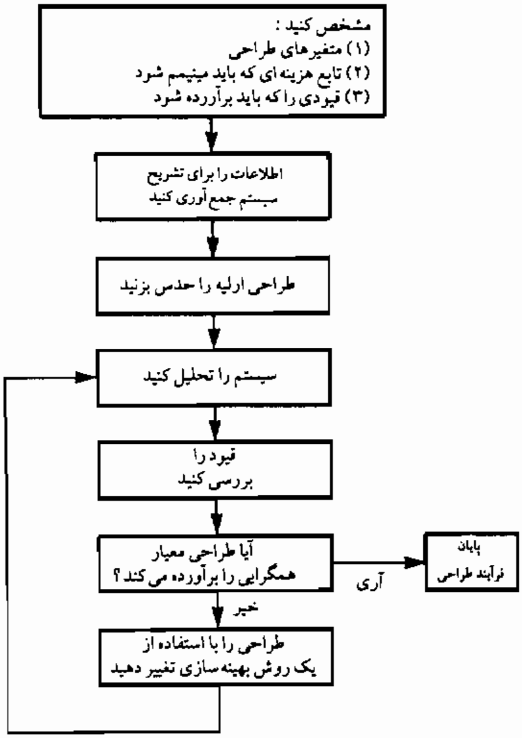
1. Synthesis



شکل ۱.۲ فرآیند طراحی قراردادی

طراحی نه فقط کم و بیش خلاقیت جهت دار مبتکرانه اطلاعات جدید است، که مشتمل بر تحلیل، ارائه نتایج، شبیه سازی و بهینه سازی است. اینها مشخصه های ضروری یک فرآیند چرخه ای اند که به یک طراحی قابل قبول و در نهایت بهینه ختم می شود.

هرکدام از فرآیندهای طراحی بهین و قراردادی، می تواند در سطوح مختلف تکامل سیستم استفاده شود. مزیت اصلی در فرآیند طراحی قراردادی آن است که تجربه و ابتکار طرّاح می تواند تغییرات مفهومی در سیستم ایجاد کند و یا مشخصهٔ اضافی در روش به وجود آورد. برای مثال، یک طرّاح می تواند پل را معلق یا قوسی انتخاب کند و یا قسمتهایی از سازه را حذف یا اضافه نماید و غیره. با این همه طراحی قراردادی در طراحی اجزا مشکل داشته و نتایج سوئی به بار می آورد. این مشکلات شامل نحوهٔ برخورد با قیود پیچیده (مثل محدودیتهایی در بسامدهای ارتعاشی)، و ورودیها (برای مثال، وقتی سازه تحت اثر شرایط باری مختلف قرار دارد) است. در این موارد، طراح برای تصمیم این که ابعاد اجزای سازه را برای برآورده شدن قیود افزایش یا کاهش دهد، دچار مشکل می شود. به علاوه، فرآیند طراحی قراردادی می تواند به طراحیهای



شکل ۱.۳ فرآیند طراحی بهین

غیراقتصادی بینجامد و به زمان زیادی نیاز نداشته باشد. *فرآیند طراحی بهین طرّاح را وادار می سازد تا مشخصاً متغیّرهای طراحی و یک تابع هزینه که باید مینیمم شود و توابع قیود را برای سیستم تعیین کند*. این رابطه سازی دشوار مسائل طراحی، به طرّاح کمک می کند تا فهم بهتری از مسأله داشته باشد. رابطه سازی ریاضی مناسب مسأله طراحی کلید یک جواب خوب است. موضوع با جزئیات بیشتر در فصل (۲) بحث می شود.

تفاوت میان دو روش بیان شده به این معنی است که فرآیند طراحی رسمیت کمتری دارد. تابع هدف که معیار عملکرد سیستم است مشخص نمی شود. اطلاعاتی که تصمیمات طراحی برای بهبود سیستم را می سازد محاسبه نمی گردد. بیشتر تصمیمات براساس قوه ابتکار و تجربه طراح گرفته می شود. به عکس، فرآیند بهینه سازی بسیار منظم تر است و از اطلاعات

برای تصمیم گیری استفاده می کند. با این وجود، فرآیند بهینه سازی می تواند به مقدار قابل توجهی از تجربه و قوه ابتکار طرّاح بهره مند شود. پس بهترین روش این است که یک فرآیند طراحی بهین داشته باشیم که به وسیله تعامل با طراح کار کند.

از بحث قبل روشن است که هرچند فرآیند طراحی می تواند با استفاده از فنون بهینه سازی تا اندازهٔ مشخصی خودکار شود، همچنان به ارتباط متقابل با طرّاح نیاز دارد. به عبارت دیگر، یک فرآیند طراحی کارآمد باید به خلاقیتهای طراح اجازه دهد که همراه فنون بهینه سازی پیش برود. بهینه سازی طراحی تعاملی[1] با جزئیات بیشتر در فصل (۷) بحث خواهد شد.

۱.۵ نقش رایانه در طراحی بهین

سیستمهای مهندسی می توانند توسط رایانه ها بسیار دقیقتر تحلیل شوند. رایانه به ما کمک می کند که عملکرد سیستمها را روشنتر درک کنیم و بدین وسیله آنها را دقیقتر و مؤثرتر طراحی کنیم. فرآیند طراحی قراردادی و یا بهین مرحله به مرحله و تکراری است و مکرّراً از مجموعه محاسبات مشابه استفاده می کند که این نوع محاسبات تکراری برای رایانه ای کردن بسیار مناسب است. بنابراین رایانه ها نقش مهمی در فرآیند طراحی بازی می کنند. آنها در هر مرحله فرآیند طراحی را آسان می کنند، چیزی که در سرّاسر کتاب مشاهده خواهد شد.

حجم داده هایی که در فرآیند تکراری تولید می شود می تواند بسیار زیاد باشد و باید به شکل جامعی ارائه شود. ارائه ترسیمی داده ها برای این منظور بسیار مناسب است. فیلمها و یا تصویرهای متحرك[2] رنگی که توسط رایانه تولید می شوند برای نمایش نتایج پیچیده بسیار مناسبند. به عنوان مثال، تمرکز تنش در یک جسم می تواند بخوبی با سایه های رنگهای مختلف که نشان دهندهٔ سطوح مختلف تنش است نمایش داده شود. در مطالعه دینامیک خودروها، حرکت خودرو را ممکن است در صفحه رایانه به صورت تصویر متحرك نشان داد و بدین وسیله عملکرد طرح را قبل از ساخت مشابه سازی کرد. در بسیاری از مواقع تعدادی از مفاهیم و جزئیات طراحی حتی قبل از آن که آنها ساخته و یا آزمایش شوند با استفاده از این روش حذف می شوند.

همچنان که قبلاً بیان شد، فرآیند طراحی از رابطه متقابل طرّاح به اندازه زیادی بهره مند می شود. اما وسایل و ابزار این رابطه متقابل و نمایش ترسیمی باید فراهم باشد. این بدین معنی

1. Interactive design optimization 2. Animation

است که روشهای بهینه سازی در یک نرم افزار که قابلیت این تعامل را دارا باشد ارائه شود. چنین نرم افزاری که تسهیلات مناسب را برای استفاده کنندگان داراست و توانایی تصمیم گیری داشته باشد از ابزار بسیار ضروری طراحی بهین سیستمهای مهندسی است. بدیهی است که سخت افزار رایانه ای مناسب در فرآیند طراحی نقش اساسی دارد. موضوع بهینه سازی طراحی تعاملی و نتایج آن با تفصیل بیشتر در فصل (۷) با ارائه مثالهایی بحث می شود.

۱.۶ طراحی بهین در مقابل کنترل بهین

طراحی بهین و کنترل بهین سیستمها دو فعالیت جداگانه هستند. در طراحی و ساخت سیستمها کاربردهای بسیار زیادی وجود دارد که در آنها روشهای طراحی بهین مفید هستند. کاربردهای بسیار دیگری هستند که در آنها مفاهیم کنترل بهین مورد نیاز است. به علاوه در بعضی کاربردها هر دو مفهوم کنترل بهین و طراحی بهین باید استفاده شود، مانند رباتیک و سازه های هوا فضایی. در این کتاب، مسائل و روشهای کنترل بهین بحث نمی شود، اما اختلافهای اساسی بین این دو فعالیت به اختصار توضیح داده می شود. مسائل کنترل بهین می توانند تبدیل به مسائل طراحی بهین شده و با روشهایی که در کتاب آمده با آنها برخورد شود. بنابراین روشهای طراحی بهین بسیار قدرتمند هستند و باید کاملاً فهمیده شوند. یک مسأله ساده کنترل بهین در فصل (۸) تشریح شده و با روشهای طراحی بهین حل می شود.

مسألهٔ کنترل بهین عبارت است از یافتن تنظیم کننده های پس خور برای یک سیستم جهت تولید خروجی دلخواه. سیستم عناصر فعالی دارد که انحرافات (افزایش و کاهش) خروجی را حس می کند. کنترلهای سیستم به طور خودکار تنظیم شده تا موقعیت را درست و معیار عملکرد را بهین سازند. بدین خاطر مسائل کنترل معمولاً طبیعت دینامیکی دارند. از طرف دیگر در طراحی بهین، ما سیستم و عناصرش را طراحی می کنیم تا تابع هدفی را بهین کنیم. سیستم سپس در تمام عمرش ثابت باقی می ماند. این تفاوت اصلی بین دو کاربرد است.

به عنوان مثال، سازوکار کنترل کروز[1] در یک ماشین سواری را در نظر بگیرید. پنداره این سیستم پس خور کنترل تزریق سوخت برای ثابت نگه داشتن سرعت ماشین است. بنابراین خروجی سیستم یعنی سرعت کروز مشخص است. وظیفه سازوکار کنترل این است که افزایش

1. cruise

و یا کاهش سرعت را احساس کرده و براساس آن تزریق سوخت را تنظیم کند. وقتی که ماشین مسیر سربالایی را طی می کند تزریق سوخت بیشتر از هنگامی است که ماشین در سرازیری حرکت می کند.

۱.۷ اصطلاحات اصلی و علایم

برای فهم روشن روشهای طراحی بهین یا تحلیل جدید، آشنایی با جبر خطی (عملیات بردار و ماتریس) و اصول حساب دیفرانسیل و انتگرال ضروری است. *عملیات جبر خطی* در پیوست B بیان شده است. دانشجویانی که در فهم آن مطالب مشکل دارند باید آنها را کاملاً مرور کنند. حساب توابع یک و چندمتغیّره نیز باید فهمیده شده باشند. این مفاهیم هرجا که نیاز باشد مرور خواهند شد.

در این بخش *اصطلاحات استاندارد* و *علایمی* که در کتاب به کار رفته تعریف می شوند. فهمیدن آنها بسیار مهم است، زیرا تعقیب بقیه کتاب بدون آنها بسیار مشکل است. علایمی که این جا تعریف می شوند نه تنها مشکل نبوده بلکه فراگرفتن و فهم آنها آسان است. هرکس که اطلاعاتی از اصول حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبر خطی داشته باشد مشکلی در فهم آنها نخواهد داشت.

۱.۷.۱ سیستم واحدهای امریکایی ـ انگلیسی و متریک (SI)

مفاهیم و مراحل رابطه سازی مسألهٔ طراحی، و روشهای بهینه سازی به واحدهای اندازه گیری استفاده شده بستگی ندارد. پس مهم نیست که چه واحدهایی در تعریف مسأله به کار رود. با این همه، شکل نهایی بعضی از عبارات تحلیلی برای مسائل به‌واحدهای استفاده شده بستگی دارند. در تمرینها و مثالهای کتاب، ما از دو سیستم آحاد یعنی امریکایی ـ انگلیسی و متریک (SI) استفاده خواهیم کرد. خوانندگانی که با یکی از سیستمهای آحاد آشنا نیستند نباید هنگام خواندن و درك متن احساس ناتوانی کنند. تبدیل از یک سیستم آحاد به سیستم دیگر موضوعی ساده است. برای سادگی تبدیل واحدها از سیستم امریکایی ـ انگلیسی به متریک (SI) و یا برعکس، جدول ۱.۱ ضرایب تبدیل بیشتر کمیتهایی را که استفاده می شوند ارائه می دهد. برای فهرست کامل ضرایب تبدیل، ASTM (1980) می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

جدول ۱.۱ ضرایب تبدیل بین آحاد امریکایی ـ انگلیسی و متریک (SI)

برای تبدیل از واحد امریکایی ـ انگلیسی	به متریک (SI)	ضرب کنید در
شتاب		
فوت بر مجذور ثانیه (ft/s^2)	متر بر مجذور ثانیه (m/s^2)	۳٫۰۴۸۰۰۰ E − ۰۱*
اینچ بر مجذور ثانیه (in/s^2)	متر بر مجذور ثانیه (m/s^2)	۲٫۵۴۰۰۰۰ E − ۰۲*
سطح		
فوت مربع (ft^2)	مترمربع (m^2)	۹٫۲۹۰۰۰۰ E − ۰۲*
اینچ مربع (in^2)	مترمربع (m^2)	۶٫۴۵۱۶۰۰ E − ۰۴*
لنگر خمشی یا گشتاور		
پوند نیرو ـ اینچ (lbf.in)	نیوتن متر (N.m)	۱٫۱۲۹۸۴۸ E − ۰۱
پوند نیرو ـ فوت (lbf.ft)	نیوتن متر (N.m)	۱٫۳۵۵۸۱۸
چگالی		
پوند جرم بر اینچ مکعب (lbm/in^3)	کیلوگرم بر متر مکعب (kg/m^3)	۲٫۷۶۷۹۹۰ E + ۰۴
پوند جرم بر فوت مکعب (lbm/ft^3)	کیلوگرم بر متر مکعب (kg/m^3)	۱٫۶۰۱۸۴۶ E + ۰۱
انرژی یا کار		
واحد حرارتی انگلیسی (BTU)	ژول (J)	۱٫۰۵۵۰۵۶ E + ۰۳
فوت ـ پوند نیرو (ft.lbf)	ژول (J)	۱٫۳۵۵۸۱۸
کیلووات ـ ساعت (kW h)	ژول (J)	۳٫۶۰۰۰۰۰ E + ۰۶*
نیرو		
kip (۱۰۰۰ پوند نیرو)	نیوتن (N)	۴٫۴۴۸۲۲۲ E + ۰۳
پوند نیرو (lbf)	نیوتن (N)	۴٫۴۴۸۲۲۲
طول		
فوت (ft)	متر (m)	۳٫۰۴۸۰۰۰ E − ۰۱*
اینچ (in)	متر (m)	۲٫۵۴۰۰۰۰ E − ۰۲*
مایل (mi) ، قانون امریکا	متر (m)	۱٫۶۰۹۳۴۷ E + ۰۳
مایل (mi) ، دریانوردی بین المللی	متر (m)	۱٫۸۵۲۰۰۰ E + ۰۳*
جرم		
پوند جرم (lbm)	کیلوگرم (kg)	۴٫۵۳۵۹۲۴ E − ۰۱
اسلاگ ($lbf.s^2/ft$) (slag)	کیلوگرم (kg)	۱٫۴۵۹۳۹۰ E + ۰۱
تن (کوتاه، ۲۰۰۰ lbm)	کیلوگرم (kg)	۹٫۰۷۱۸۴۷ E + ۰۲
تن (بلند، ۲۲۴۰ lbm)	کیلوگرم (kg)	۱٫۰۱۶۰۴۷ E + ۰۳
تن (t ، تن متریک)	کیلوگرم (kg)	۱٫۰۰۰۰۰۰ E + ۰۳*

جدول ۱-۱ (ادامه)

برای تبدیل از واحد امریکایی ـ انگلیسی	به متریک (SI)	ضرب کنید در
توان		
فوت ـ پوند بر دقیقه (ft.lbf/min)	وات (W)	۲٫۲۵۹۶۹۷ E − ۰۲
اسب بخار (۵۵۰ ft.lbf/s)	وات (W)	۷٫۴۵۶۹۹۹ E + ۰۲
فشار یا تنش		
اتمسفر (std) (۱۴٫۷ lbf/in^2)	نیوتن بر مترمربع یا پاسکال (N/m^2 یا Pa)	۱٫۰۱۳۲۵۰ E + ۰۵*
یک بار (b)	نیوتن بر مترمربع یا پاسکال (N/m^2 یا Pa)	۱٫۰۰۰۰۰۰ E + ۰۵*
پوند بر فوت مربع (lbf/ft^2)	نیوتن بر مترمربع یا پاسکال (N/m^2 یا Pa)	۴٫۷۸۸۰۲۶ E + ۰۱
پوند بر اینچ مربع (psi یا lbf/in^2)	نیوتن بر مترمربع یا پاسکال (N/m^2 یا Pa)	۶٫۸۹۴۷۵۷ E + ۰۳
سرعت		
فوت در دقیقه (ft/min)	متر بر ثانیه (m/s)	۵٫۰۸۰۰۰۰ E − ۰۳*
فوت در ثانیه (ft/s)	متر بر ثانیه (m/s)	۳٫۰۴۸۰۰۰ E − ۰۱*
نات (mi/h دریایی) بین‌المللی	متر بر ثانیه (m/s)	۵٫۱۴۴۴۴۴ E − ۰۱
مایل در ساعت (mi/h) بین‌المللی	متر بر ثانیه (m/s)	۴٫۴۷۰۴۰۰ E − ۰۱*
مایل در ساعت (mi/h) بین‌المللی	کیلومتر در ساعت (km/b)	۱٫۶۰۹۳۴۴*
مایل در ثانیه (mi/s) بین‌المللی	کیلومتر در ثانیه (km/s)	۱٫۶۰۹۳۴۴*
حجم		
فوت مکعب (ft^3)	مترمکعب (m^3)	۲٫۸۳۱۶۸۵ E − ۰۲
اینچ مکعب (in^3)	مترمکعب (m^3)	۱٫۶۳۸۷۰۶ E − ۰۵
گالن (مایع کانادایی)	مترمکعب (m^3)	۴٫۵۴۶۰۹۰ E − ۰۳
گالن (مایع انگلیسی)	مترمکعب (m^3)	۴٫۵۴۶۰۹۲ E − ۰۳
گالن (خشک امریکایی)	مترمکعب (m^3)	۴٫۴۰۴۸۸۴ E − ۰۳
گالن (مایع امریکایی)	مترمکعب (m^3)	۳٫۷۸۵۴۱۲ E − ۰۳
یک لیتر	مترمکعب (m^3)	۱٫۰۰۰۰۰۰ E − ۰۳*
اونس (سیال انگلیسی)	مترمکعب (m^3)	۲٫۸۴۱۳۰۷ E − ۰۵
اونس (سیال امریکایی)	مترمکعب (m^3)	۲٫۹۵۷۳۵۳ E − ۰۵
پینت (خشک امریکایی)	مترمکعب (m^3)	۵٫۵۰۶۱۰۵ E − ۰۴
پینت (مایع امریکایی)	مترمکعب (m^3)	۴٫۷۳۱۷۶۵ E − ۰۴
کوارت (خشک امریکایی)	مترمکعب (m^3)	۱٫۱۰۱۲۲۱ E − ۰۳
کوارت (مایع امریکایی)	مترمکعب (m^3)	۹٫۴۶۳۵۲۹ E − ۰۴

* ضریب دقیق تبدیل را مشخص می‌کند. همچنین توجه کنید که نماد علمی نوشتن اعداد به صورت توان ۱۰ استفاده شده است.

۱.۷.۲ مجموعه ها و نقاط

از آن جا که سیستمهای واقعی عموماً چند متغیّر دارند، لازم است که علایم راحت و جمع و جوری را تعریف و استفاده کنیم. علایم مجموعه و بردار این مقصود را بسیار خوب برآورده می کنند و در سراسر کتاب استفاده خواهند شد. *کلمات بردار و نقطه به جای یکدیگر استفاده خواهند شد و حروف کوچک پررنگ برای نشان دادن آنها به کار می رود.* حروف بزرگ پررنگ نمایشگر *ماتریسها* هستند.

یک *نقطه* یعنی یک دسته *مرتب از اعداد*، پس، (x_1, x_2) یک نقطه است متشکل از دو عدد؛ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ یک نقطه است متشکل از n عدد. آن چنان نقطه ای اغلب یک n-تایی[1] نامیده می شود. هریک از اعداد یک مؤلفه آن (نقطه) بردار نامیده می شود. پس، x_1 را مؤلفه اوّل، x_2 را مؤلفه دوم و به همین ترتیب مؤلفه های دیگر را نام گذاری می نماییم. n مؤلفهٔ $x_1, x_2, ..., x_n$ می تواند در یک بردار ستونی جمع آوری شود، مانند

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1\, x_2 \dots x_n]^T \qquad (۱.۱)$$

در حالی که اندیس بالایی T نشان ترانهاده یک بردار یا ماتریس است، علامتی که در سراسر کتاب از آن استفاده می شود. (برای جزئیات بحث جبر بردارها و ماتریسها به پیوست B مراجعه کنید). *ما* همچنین *از علامت*

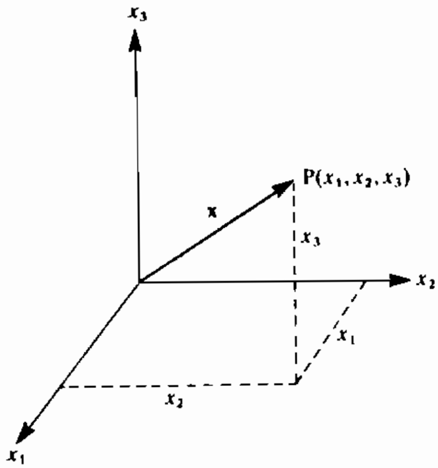
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

برای نشان دادن یک نقطه و یا بردار در فضای nـ بعدی استفاده خواهیم کرد.

در فضای سه بعدی بردار $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ نمایانگر نقطهٔ P می باشد همچنان که در شکل ۱.۴ نشان داده شده است. به طور مشابه، وقتی که n مؤلفه در یک بردار وجود دارد مثل آنچه در معادلهٔ (۱.۱) است، x به عنوان یک نقطه در فضای nـ بعدی حقیقی که با R^n نمایش داده می شود تلقی می گردد. فضای R^n مجموعه همه nـ بردار (نقاط) از اعداد حقیقی هستند. به عنوان مثال، خط حقیقی R^1 و صفحه R^2 است، و غیره.

---

1. n-tuple



شکل ۱.۴ نمایش برداری نقطه P در فضای ۳ ـ بعدی

اغلب ما در مورد مجموعه هایی از نقاط که شرایط مشخصی را برآورده می نمایند بحث می کنیم . برای مثال ممکن است مجموعه ای از تمام نقاط که سه مؤلفه داشته و مؤلفهٔ آخرشان صفر است در نظر بگیریم . با نشان دادن این مجموعه با S ، می توانیم بنویسیم

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = 0\} \qquad (۱ . ۲)$$

اطلاعات راجع به مجموعه در آکولاد آمده است . معادلهٔ (۲ . ۱) چنین خوانده می شود " S مساوی است با مجموعه ای از همه نقاط (x_1, x_2, x_3) با $x_3 = 0$ ". خط راست در داخل آکولاد آنها را به دو قسمت تقسیم می کند؛ طرف چپ ابعاد نقاط مجموعه است؛ طرف راست ویژگی خاصی است که نقاط را از دیگر نقاط غیر از مجموعه متمایز می سازد (یعنی ویژگیهایی که یک نقطه برای بودن در مجموعه S باید دارا باشد) .

اعضای یک مجموعه را گاهی *عناصر* آن می نامند . اگر نقطهٔ **x** عنصری از مجموعه S باشد ، آن گاه می نویسیم $\mathbf{x} \in S$. عبارت "$\mathbf{x} \in S$" خوانده می شود ، «**x** یک عنصر از (متعلق به) S است» . به عکس ، عبارت "$\mathbf{y} \notin S$" خوانده می شود ، «**y** یک عنصر از (متعلق به) S نیست» .

اگر تمامی عناصر مجموعهٔ S عناصر مجموعهٔ دیگر T نیز باشند ، آن گاه گفته می شود S یک زیرمجموعه از T است . با استفاده از علایم می نویسیم $S \subset T$ ، که خوانده می شود ، " S یک زیرمجموعه از T است" و یا " S در T گنجانده شده" . متقابلاً ، می گوییم T

یک فوق مجموعه[1] S است، که به صورت $T \supset S$ نوشته می‌شود.

به عنوان یک مثال از مجموعه S، ما در صفحه $x_1 - x_2$ دایره‌ای به شعاع ۳ و به مرکز (۴ ، ۴) را در نظر می‌گیریم. این در شکل ۱.۵ نشان داده شده است. ازنظر ریاضی، تمامی نقاط داخل و روی دایره می‌توانند به صورت

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \leqq 9\} \tag{۱.۳}$$

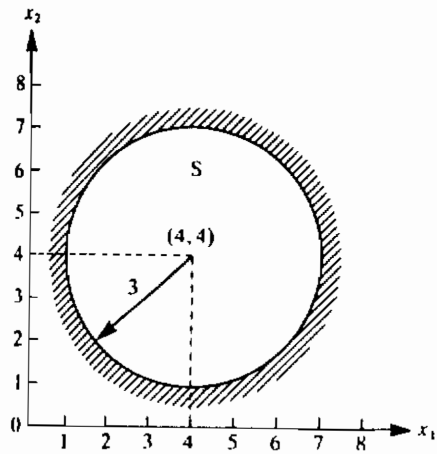
بیان شوند.

پس مرکز دایره (۴ ، ۴) در داخل مجموعه است، زیرا شرایط نامعادلهٔ (۱.۳) را برآورده می‌کند. این موضوع را به شکل $(0, 0) \in S$ می‌نویسیم. مرکز مختصات $(0, 0)$ متعلق به مجموعه نیست، زیرا نامعادلهٔ (۱.۳) را برآورده نمی‌کند. این را به شکل $(0, 0) \notin S$ می‌نویسیم. می‌توان نشان داد که نقاط زیر متعلق به مجموعه است:

$(3, 3), (2, 2), (3, 2), (6, 6)$

در حقیقت، مجموعهٔ S بی‌نهایت نقطه دارد. خیلی از نقاط هم در مجموعه نیستند. می‌توان نشان داد که نقاط زیر عضو مجموعه نیستند:

$(1, 1), (8, 8), (-1, 2)$



شکل ۱.۵ نمایش هندسی مجموعه $S = \{\mathbf{x} \mid (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 9\}$.

---

1. superset

۱.۷.۳ علایم نشان دادن قیود

به طور طبیعی در مسائل طراحی بهین قیود وجود دارند. به عنوان مثال، مواد سیستم نباید فاقد مقاومت باشند، تقاضاها باید برآورده شوند، منابع نباید از مقدار موجود تجاوز کنند و غیره. ما در فصل (۲) قیود را با جزئیات بیشتر بحث خواهیم کرد. در این جا ما اصطلاحات و علایم مربوط به آنها را مورد بحث قرار می دهیم.

قبلاً در شکل ۱.۵ با یک قید مواجه بودیم. در آن جا مجموعهٔ S نقاطی را تعریف می کند که در داخل و یا روی دایره ای به شعاع ۳ قرار دارند. این را با قید زیر نمایش می دهند:

$$(x_1-4)^2+(x_2-4)^2 \leqq 9$$

یک قید از این شکل را *نوع کوچکتر یا مساوی* می نامند. آن را به طور مختصر «نوع ≤» به کار خواهیم برد. به طور مشابه، قیود می توانند *نوع بزرگتر یا مساوی* باشند که به اختصار «نوع ≥» گفته می شود.

۱.۷.۴ اندیس بالا / پایین و علامت جمع

در قسمتهای بعدی کتاب، ما دربارهٔ مجموعه ای از بردارها، مؤلفه های بردارها، و ضرب بردارها و ماتریسها بحث خواهیم کرد. برای سادگی نوشتن این کمیات، علایم هماهنگ و خلاصه ای باید استفاده شود. ما چنین علایمی را این جا تعریف می کنیم. *اندیس بالا برای نمایش بردارها و ماتریسها* به کار می رود. برای مثال، $\mathbf{x}^{(i)}$ نمایشگر بردار i ام یک مجموعه، و $\mathbf{A}^{(k)}$ نمایشگر ماتریس k ام است. *اندیس پایین برای نشان دادن مؤلفه های بردارها و ماتریسهاست*. برای مثال، x_j مؤلفه j ام $\mathbf{x}$ و a_{ij} درایهٔ i - jام ماتریس $\mathbf{A}$ است. دو اندیس پایین برای نشان دادن درایه های یک ماتریس به کار می رود.

برای مشخص کردن محدودهٔ *اندیسهای پایین* یا بالا علامت

$$x_i; \qquad i=1 \text{ to } n \tag{۱.۴}$$

را به کار می بریم. این نشانگر اعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ است. توجه کنید که "$i = 1$ to n" نمایشگر محدودهٔ اندیس i است و خوانده می شود، "i از ۱ تا n". به همین ترتیب، مجموعه ای از بردارها که هریک n مؤلفه دارند به شکل زیر نمایش داده می شود

$$\mathbf{x}^{(j)}; \qquad j=1 \text{ to } k \tag{۱.۵}$$

این نمایشگر k بردار $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, ..., \mathbf{x}^{(k)}$ است. به این مهم باید توجه شود که اندیسهای i در معادلهٔ (۱.۴) و j در معادلهٔ (۱.۵) *اندیسهای آزاد* هستند، یعنی می توانند با متغیّرهای دیگری جایگزین شوند. برای مثال معادلهٔ (۱.۴) می تواند به شکل $x_j; j = 1 \text{ to } n$ و معادلهٔ (۱.۵) می تواند به شکل $\mathbf{x}^{(i)}; i = 1 \text{ to } k$ نوشته شود. توجه کنید اندیس j در معادلهٔ (۱.۵) توان $\mathbf{x}$ نیست، بلکه اندیسی است که jامین بردار از یک مجموعه بردار را نشان می دهد.

همچنین از علامت جمع بسیار استفاده خواهیم کرد. برای مثال،

$$c = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \tag{۱.۶}$$

به شکل

$$c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{۱.۷}$$

نوشته خواهد شد.

همچنین، ضرب یک بردار nـ بعدی $\mathbf{x}$ در یک ماتریس $m \times n$، $\mathbf{A}$، که یک بردار mـ بعدی $\mathbf{y}$ است به شکل زیر نوشته می شود

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{۱.۸}$$

یا، با علامت جمع، مؤلفهٔ iام ($i = 1 \text{ to } n$) بردار $\mathbf{y}$ عبارت است از

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$
$$= a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \tag{۱.۹}$$

راه دیگری برای نوشتن ضرب ماتریس معادلهٔ (۱.۸) وجود دارد. فرض کنید بردار mـ بعدی $\mathbf{a}^{(i)}; i = 1 \text{ to } n$ نمایشگر ستونهای ماتریس $\mathbf{A}$ باشد، آن گاه $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ را می توان به شکل

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}^{(j)} x_j = \mathbf{a}^{(1)} x_1 + \mathbf{a}^{(2)} x_2 + \ldots + \mathbf{a}^{(n)} x_n \tag{۱.۱۰}$$

نوشت. علامت جمع طرف راست معادلهٔ (۱.۱۰) راترکیب خطی ماتریس ستونی $\mathbf{A}$ با $x_j, j = 1 \text{ to } n$ به عنوان ضرایب ترکیب خطی می گویند. و یا، $\mathbf{y}$ به عنوان ترکیب خطی ستونهای $\mathbf{A}$ داده شده است (برای بحث بیشتر دربارهٔ ترکیب خطی بردارها به پیوست B مراجعه کنید).

باید بندرت از علامت جمع دوگانه استفاده کنیم. برای مثال، با فرض $m = n$ و

جایگزینی برای y_i از معادلهٔ (۱ . ۹) در معادلهٔ (۱ . ۷) جمع دوگانه به دست می آید.

$$c = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{۱ . ۱۱}$$

اندیسهای جمع i و j در معادلهٔ (۱ . ۱۱) می تواند عوض شود. این بدین خاطر است که c کمیتی *اسکالر* است و مقدار آن با این که ابتدا روی i و یا j جمع بسته شود فرقی نمی کند. معادلهٔ (۱ . ۱۱) را می توان به شکل ماتریسی نیز نوشت که در زیر نشان داده شده است.

۱.۷.۵ نرم[1] یا طول یك بردار

اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دو بردار n ـ بعدی باشند، ضرب *نقطه ای* آنها به شکل زیر تعریف می شود.

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \tag{۱ . ۱۲}$$

بنابراین ضرب *نقطه ای* عبارت است از مجموع ضرب عناصر متناظر بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$. دو بردار را *متعامد* گویند اگر ضرب نقطه ای آنها صفر باشد، یعنی $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ متعامدند اگر $\mathbf{x}.\mathbf{y} = 0$. اگر دو بردار متعامد نباشند زاویهٔ بین آنها از تعریف ضرب نقطه ای می تواند محاسبه گردد:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta \tag{۱ . ۱۳}$$

در حالی که θ زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ و $\|\mathbf{x}\|$ نمایشگر طول بردار است که در بند بعدی تعریف می شود.

جمع دوگانه معادلهٔ (۱ . ۱۱) را می توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$c = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{۱ . ۱۴}$$

چون $\mathbf{A}\mathbf{x}$ یک بردار است، ضرب سه گانه معادلهٔ (۱ . ۱۴) را می توان به شکل ضرب نقطه ای نوشت:

$$c = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}) \tag{۱ . ۱۵}$$

طول بردار $\mathbf{x}$ با $\|\mathbf{x}\|$ نشان داده می شود. این را *نرم بردار* نیز می نامند (برای تعریف کلی

---

1. Norm

نرم به پیوست B مراجعه کنید). طول بردار x به صورت ریشه مجموعه مجذورات مؤلفه ها تعریف می شود، یعنی

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} \tag{۱.۱۶}$$

۱.۷.۶ توابع

درست مثل تابعی از یک متغیّر که به صورت $f(x)$ نشان داده می شود، یک تابع از n متغیّر مستقل $x_1, x_2, ..., x_n$ به صورت زیر نمایش داده می شود

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{۱.۱۷}$$

ما دربارهٔ توابع بسیاری که متغیّرهای آنها بردارند بحث می کنیم. برای تمایز بین توابع، از اندیس استفاده می شود. تابع iام به شکل زیر نوشته می شود.

$$g_i(\mathbf{x}) = g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{۱.۱۸}$$

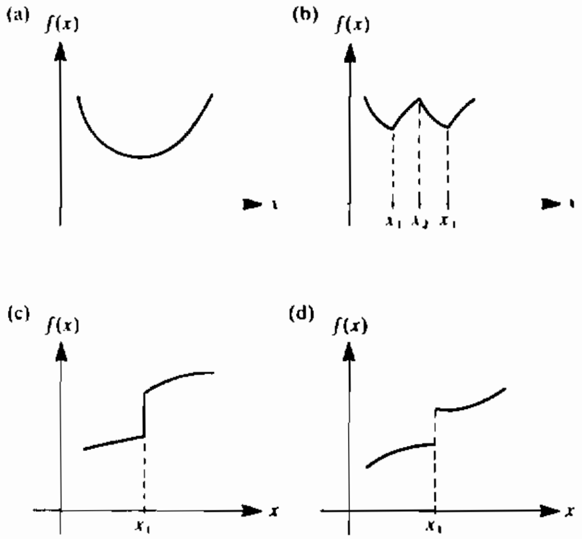
اگر m تابع $g_i(\mathbf{x});\ i = 1 \text{ to } m$ وجود داشته باشد، آن گاه به شکل برداری زیر نمایش داده می شود.

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x})\quad g_2(\mathbf{x}) \ldots g_m(\mathbf{x})]^T \tag{۱.۱۹}$$

در سراسر کتاب فرض می شود توابع پیوسته و حداقل تا دو مرتبه مشتق پذیر پیوسته هستند. تابع $f(\mathbf{x})$ از n متغیّر در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ پیوسته نامیده می شود اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ وجود داشته باشد، طوری که

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*)| < \varepsilon \tag{۱.۲۰}$$

در حالی که $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta$. پس برای تمامی نقاط $\mathbf{x}$ در همسایگی نزدیک نقطهٔ $\mathbf{x}^*$، وقتی که تابع پیوسته باشد، تغییر مقدار تابع از $\mathbf{x}^*$ به $\mathbf{x}$ کوچک است. یک تابع پیوسته لازم نیست مشتق پذیر باشد. دومرتبه مشتق پذیر پیوسته بودن یک تابع یعنی نه تنها دوبار مشتق پذیر است بلکه مشتق دوم آن نیز پیوسته است. شکلهای (a) ۱.۶ و (b) توابع پیوسته را نمایش می دهند. تابع نشان داده شده در شکل (a) ۱.۶ در همه جا مشتق پذیر است در حالی که تابع (b) ۱.۶ در نقاط x_1، x_2 و x_3 مشتق پذیر نیست. شکلهای (c) ۱.۶ و (d) مثالهایی از توابع گسسته است. به عنوان مثال، $f(x) = x^3$ و $f(x) = \sin x$ توابع پیوسته هستند و مشتقات آنها نیز پیوسته است. امّا تابع $f(x) = |x|$ همه جا پیوسته است ولی در $x = 0$ مشتق ندارد.



شکل ۱.۶ توابع پیوسته و گسسته. (a) تابع پیوسته؛ (b) تابع پیوسته؛ (c) تابع گسسته؛ و (d) تابع گسسته.

فصل دوم

رابطه سازی مسائل طرّاحی بهین

۲.۱ مقدمه

این یک اصل تقریباً قبول شده ای است که رابطه سازی صحیح یک مسأله حدود ۵۰٪ کل تلاشی است که برای حل آن مورد نیاز است. بنابراین، تبعیت از فرآیندهای تعریف شده مناسب برای رابطه سازی مسائل طرّاحی بهین بسیار مهم است. این فرآیندها با چند مثال طرّاحی مختلف در این فصل تشریح می شود.

طرّاحی بسیاری از سیستمهای مهندسی فرآیندی پیچیده است. فرضیات بسیاری برای ساختن مدل لازم است تا بتواند توسّط روشهای موجود تحلیل شود و همچنین درستی مدلها باید از راه آزمایش تأیید شود. عوامل و امکانات بسیاری در مرحلهٔ رابطه سازی مسأله باید مورد توجّه قرار گیرد. *بررسیهای اقتصادی* در طرّاحی سیستمهای هزینه بر نقش مهمی ایفا می کند. روشهای تحلیل اقتصادی که در پیوست A شرح داده شده برای این قسمت مفیدند. برای تکمیل طرّاحی یک سیستم مهندسی، معمولاً طرّاحانی از رشته های مختلف مهندسی باید با هم همکاری کنند. برای مثال، طرّاحی یک ساختمان مرتفع طراحانی از رشته های مهندسی معماری، سازه، مکانیک، برق و محیط زیست و متخصصان مدیریت ساختمان را می طلبد. طرّاحی یک خودرو سواری همکاری مهندسان سازه، مکانیک، خودرو، برق، عوامل انسانی، شیمی و هیدرولیک را نیاز دارد. پس در *شرایط بین رشته ای* برای تکمیل یک پروژه

ارتباط قابل توجهی بین گروههای گوناگون طرّاحی لازم است. برای بیشتر پروژه های طرّاحی کل پروژه باید به زیرمسأله های کوچکتری تقسیم شود که به طور مستقل حل می شوند. هریک از این زیرمسأله های کوچکتر می تواند یک مسأله طرّاحی بهین باشد.

در بیشتر قسمتهای این کتاب، فرض می شود *تحلیلهای اوّلیهٔ مسأله انجام شده و طرّاحی جزئیات یک مفهوم باید انجام شود یا زیرمسأله حل گردد.* ما فرآیند بیان زیرمسأله به شکل یک مسأله طرّاحی بهین را تشریح خواهیم کرد. این کار با هدف ما در این کتاب که بیان مفاهیم و روشهای طرّاحی بهین به روش ساده و واضح است هماهنگی دارد. دانشجویان باید در ذهن داشته باشند که تحلیلهای قابل توجهی باید انجام شود تا مسأله به مرحلهٔ نهایی بهینه سازی سیستم برسد. این فصل چندین کاربرد ساده و تا حدی پیچیده را مورد توجه قرار می دهد و آنها را به عنوان مسألهٔ طرّاحی بهین رابطه سازی می کند. کاربردهای پیچیده تر و پیشرفته بیشتری در فصلهای (۷) و (۸) بحث می شوند.

رابطه سازی یک مسألهٔ طرّاحی بهین عبارت است از بیان مسأله به صورت یک عبارت ریاضی. فرآیند رابطه سازی با معرفی مجموعه ای از متغیّرها که سیستم را مشخص می کنند شروع می شود که به آنها *متغیّرهای طرّاحی* می گویند. وقتی مقادیر عددی متغیّرها مشخص شد یک طرّاحی از سیستم داریم. این که این طرّاحی درست است یا نه، سؤال دیگری است. ما مفاهیم مختلفی برای بحث این نوع سؤالها معرفی خواهیم کرد.

تمامی سیستمها برای عمل کردن در محدوده مجموعه ای از قیود که محدودیتهایی روی منابع، شکست مصالح، پاسخ سیستم، اندازهٔ اعضا و غیره اند طرّاحی می شوند. قیود باید با متغیّرهای طرّاحی متأثر شوند زیرا در آن صورت است که اعمال آنها معنی پیدا می کند. اگر یک طرح تمامی قیود را برآورده کند، یک سیستم قابل قبول[1] (کارکردپذیر) داریم.

برای قضاوت این که یک طرح از طرح دیگر بهتر است معیاری لازم است. این معیار *تابع هدف یا هزینه نامیده می شود.* یک تابع هدف معتبر باید با متغیّرهای مسأله طرّاحی متأثر شود، یعنی باید تابعی از متغیّرهای طرّاحی باشد. این مفاهیم در بخشهای بعد با ذکر مثالهایی بیشتر توضیح داده می شوند.

اهمیت *رابطه سازی مناسب* یک مسأله طرّاحی بهین باید کاملاً درك شود، زیرا حل بهین به همان اندازه مطلوب است که رابطه سازی آن خوب بوده باشد. برای مثال، اگر فراموش کنیم

1. Feasible

یک قـید حسّاس و مـهم را در روش بهینه سازی وارد کنیم به احتـمال زیاد حل بهـین آن را نقض می کند، زیرا روشـهای بهینه سازی تمایل به بهره برداری و استفاده از خطاها و عـدم اطمینانها در مدلهـای طرّاحی دارند. این بدین خاطر است که مـا سعی می کنیم سیستم را بهـینه کنیم و اگر قیدها درست رابطه سـازی نشده باشند روشهای بهینه سازی طرح را به قسمتی از فضای طرّاحی می برند کـه یا طرح بی مـعنی است و یا خطرناك. بنـابراین، رابطه سـازی دقیق مسـألهٔ طرّاحی از اهمیت بیشتری برخوردار است و در ارتباط با تعریف عبارت قیود باید همیشه دقت زیادی به کار رود. در عمل، بعـد از آن که مسـأله به طور مناسبی رابطه سـازی شد، نرم افـزارهای خوبی برای حل آنها در دسترس است.

خلاصه ای از آنچه در این فصل می آید در زیر آمده است.

بخش ۲ . ۲ *طرّاحی یک خرپـای دومـیله ای*. طرّاحی یک سـازهٔ دو مـیله ای تشـریح می شود. از آن به عنوان مثالی برای بخش بعدی استفـاده می شود که تعریف متغیّرهای طرّاحی، تابع هدف و قیود است.

بخش ۳ . ۲ *متـغـیّـرهای طرّاحی*. اولین مـرحله در رابطه سـازی یک مـسـأله طرّاحی مشخص کردن مجموعهٔ متغیّرهای طرّاحی است که سیستم را مشخص می کند. این مجموعه را متـغیّرهای طرّاحی می نامند. مـا باید به منظور به دست آوردن یـک طرح متفـاوت قـادر باشیم متغیّرهای طرّاحی را مستقل از یکدیگر تغییر دهیم، به عبارت دیگر، متغیّرهای طرّاحی تا آن جا که ممکن است باید مستقل باشند. برای بعضی از مسـائل، مجموعـهٔ متغیّرهای متـفاوتی برای مشخص کردن سیستم شناسایی می شوند. یک مثال ساده برای تشریح این نگره استفاده می شود.

بخش ۴ . ۲ *تابع هزینه*. ما باید بتوانیم طرحهای مختلف سیستم را با هم مقایسه کنیم. این مقـایسه بدین خاطر مورد نیـاز است که بگوییم یک طرّاحی از دیگری بهـتر است. معیـاری که طرحهـای مختلف توسط آن متمایز می گردد، تابع هدف یا تابع هزینه نامیـده می شود. یک تابع هزینهٔ معتبـر باید با متغیّرهای طرّاحی سیستم متأثر شود؛ در غیر ایـن صورت، معنی دار نیست. تابعی را که باید مینمم شود تابع هزینه می نامند.

بخش ۵ . ۲ قیود *طرّاحی*. هر سیستم حقیقی باید در محدودهٔ خاصی از منابع و عملکرد طرّاحی و سـاخته شود، یعنی سیـستم باید چنان طرّاحی شود کـه تمامی قیـود را برآورده سازد. برای مثال، عضـوهای سازه نباید در شرایط بار عادی بشکنند. بسامـدهای طبیعی یک سازه باید از بسـامد کـارکرد ماشینی کـه روی آن نصب است متـفـاوت باشد، در غـیـر این صورت تشـدید

می تواند خرابی زیادی به بار آورد. عضوها باید در فضای مورد نظر قرار گیرند و تمامی قیدها باید برحسب متغیّرهای طرّاحی بیان شوند، زیرا تنها متغیّرهای طرّاحی هستند که در طرحهای مختلف تغییر می یابند، یعنی یک قید با معنی باید تابعی از دست کم یک متغیّر طرّاحی باشد. بیشتر قیود یک مسأله طرّاحی برحسب نامساویها بیان می شوند. برای مثال، تنش واقعی اعضا نباید از تنش مجاز مصالح تجاوز کند، خیز ماکزیمم نباید از حد مشخصی بیشتر شود و ... . با این وصف، قیودی هستند که باید برحسب مساویها بیان شوند. برای مثال، ممکن است خواسته باشیم خیز نقطهٔ مشخص از سیستم دقیقاً Δ باشد، نه بیشتر و نه کمتر. در این بخش هر دو نوع قید تشریح می شوند.

بخش ۲.۶ *مثالهایی از رابطه سازی مسائل طرّاحی بهین*. با استفاده از مفاهیمی که در بخشهای قبل گفته شد، مسائل طرّاحی متفاوتی در این بخش مورد توجه قرار می گیرند. بیان توضیحی مسأله به شکل نظام مندی به عبارت ریاضی معادل برای بهینه سازی برگردانده می شود. فرآیند رابطه سازی سه مرحلهٔ کاملاً تعریف شده را به کار می برد: (i) مشخص کردن متغیّرهای طرّاحی، (ii) مشخص کردن یک تابع هدف (هزینه) و بیان آن به عنوان تابعی از متغیّرهای طرّاحی، و (iii) مشخص کردن تمامی قیود طرّاحی و تبدیل آنها به بیان ریاضی. مثالهای متفاوتی در فصلهای آینده برای تشریح روشهای مختلف بهینه سازی استفاده می شود.

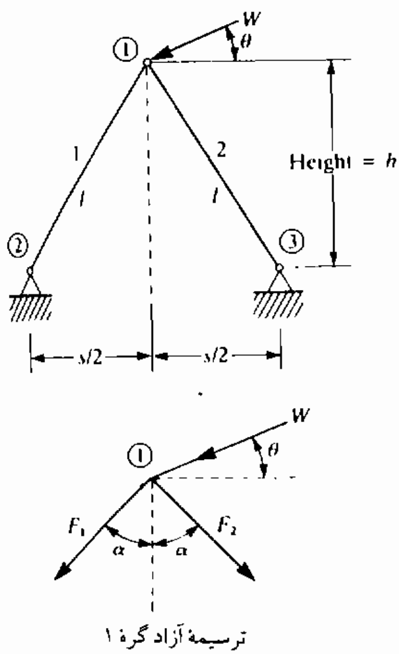
بخش ۲.۷ *مدل ریاضی عمومی برای طرّاحی بهین*. برای تشریح مفاهیم بهینه سازی و روشها ما نیاز به یک عبارت ریاضی عمومی برای بیان مسألهٔ طرّاحی بهین داریم. این چنین مدل ریاضی به عنوان مینیمم سازی یک تابع هزینه مشروط به قیود مساوی و نامساوی تعریف می شود. قیود نامساوی همیشه تبدیل به "نوع $\le$" می شوند. این مسأله طرّاحی تا آخر کتاب مطرح بوده و مورد بحث قرار می گیرد. تمامی مسائل طرّاحی را می توان به شکل استاندارد تبدیل کرد، مفهوم مهم ناحیه قابل قبول نیز معرفی می شود.

بخش ۲.۸ *بهینه سازی ترسیمی*. هر مسأله بهینه سازی را که دو متغیّر طرّاحی داشته باشد می توان به روش ترسیمی حل کرد. در این روش تمامی توابع قیود را در صفحه ترسیم و ناحیهٔ قابل قبول را مشخص می کنیم. پندارهٔ نواحی قابل قبول و غیر قابل قبول معرفی می شود، هر نقطه ای در ناحیهٔ قابل قبول مشخصه یک طرّاحی قابل کارکرد است. برای مشخص کردن بهترین طرح، خطوط تابع هزینهٔ یکسان باید در ناحیهٔ قابل قبول رسم شوند. سپس می توان با چشم معمولی طرح قابل قبولی که کمترین هزینه را دارد تشخیص داد و طرح بهین را مستقیماً از

روی صفحهٔ رسم خواند . از مثالهایی برای تشریح این پنداره استفاده می شود . بیشتر پنداره های هندسی برای مسائل با متغیّرهای بیشتر نیز قابل پیاده کردن است .

۲.۲ طرّاحی یك سازهٔ دو میله ای

یک مسأله طرّاحی سازه ساده در سه بخش آینده استفاده می شود تا مفاهیم مختلف و دقتهایی را که برای رابطه سازی یک مسأله طرّاحی بهین لازم است تشریح شوند . مسأله عبارت است از طرّاحی یک پایهٔ دو عضوی که در شکل ۱ . ۲ نشان داده شده برای تحمل نیروی W بدون شکست سازه . این نیرو با زاویه ای مثل θ اعمال می شود که بین ۰ و ۹۰° است . h ارتفاع و s عرض پایه است . از آن جا که پایه در سطح انبوه تولید خواهد شد ، هدف طرّاحی مینیمم کردن جرم سازه با حفظ قیود ساخت و محدودیتهای فضایی می باشد .



شکل ۱.۲ یك سازه دو میله‌ای

رابطه سازیهای متنوّعی برای مسألهٔ طرّاحی بهین ممکن است انجام شود. در بخشهای بعدی، ماده‌ای با خواص مشخص برای مصالح پایه فرض می شود. گرچه می توان سازه را با مصالح مختلف و هزینه های ساخت مربوط به آن نیز بهینه کرد و آن گاه آنها را برای انتخاب بهترین مصالح ممکن مقایسه کرد.

در رابطه سازی مسأله طرّاحی، *ما نیاز به تعریف دقیق شکست سازه داریم*. نیروهای اعضا F_1 و F_2 می تواند برای تعریف شرایط شکست استفاده شود. برای محاسبهٔ نیروهای اعضا، از اصل *تعادل ایستایی* استفاده می کنیم. با استفاده از ترسیمهٔ *آزاد* گره ۱ (نشان داده شده در شکل ۱ . ۲) تعادل نیروها در جهت افقی و عمودی رابطه های زیر را به ما می دهد :

$$-F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha = W \cos \theta \qquad (۲ . ۱)$$

$$-F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha = W \sin \theta \qquad (۲ . ۲)$$

به کمک هندسه از شکل ۱ . ۲ داریم، $\sin \alpha = s/2l$ و $\cos \alpha = h/l$. دقت کنید که نیروهای F_1 و F_2 در ترسیمهٔ آزاد به عنوان نیروهای کششی نشان داده شده است. *نیروی کششی نیز مثبت* در نظر گرفته خواهد شد. پس *اگر نیروها بعد از تحلیل منفی باشند اعضا در فشار خواهند بود*.

دو معادلهٔ بالا برحسب دو مجهول F_1 و F_2 است. از حل همزمان آنها داریم

$$F_1 = -0.5Wl\left[\frac{\sin \theta}{h} + \frac{2 \cos \theta}{s}\right] \qquad (۲ . ۳)$$

$$F_2 = -0.5Wl\left[\frac{\sin \theta}{h} - \frac{2 \cos \theta}{s}\right] \qquad (۲ . ۴)$$

در حالی که l طول اعضاست و از رابطه زیر به دست می آید

$$l = \sqrt{h^2 + (0.}$$

۲.۳ متغیّرهای طرّاحی

به پارامترهایی که برای تشریح طرّاحی یک سیستم انتخاب می شوند متغیّرهای طرّاحی می گویند. بعد از این که متغیّرها مقادیر عددی گرفتند طرح یک سیستم معلوم می شود. این متغیّرها آزاد هستند زیرا طراح می تواند هر مقداری را برای آنها در نظر بگیرد. اگر مقادیر مشخص شدهٔ همه قیود مسأله را برآورده نکنند، طرح *قابل قبول* نیست، در این صورت طرح غیر*قابل قبول* نامیده می شود. اگر قیود برآورده شوند یک طرح *قابل قبول* (*قابل* کارکرد و

استفاده) داریم، یعنی سیستمی که با این طرح ساخته شود تمامی کارهای بیان شده را انجام خواهد داد. یک طرح قابل قبول ممکن است بهترین نباشد ولی کاربردی است.

اولین قدم مهم در یک رابطه سازی کامل مشخص کردن متغیّرهای طرّاحی سیستم است. اگر متغیّرهای مناسب انتخاب نشوند، رابطه سازی یا غلط و یا غیر ممکن است. در مرحلهٔ اوّلیهٔ رابطه سازی، تمام گزینه ها برای مشخص کردن متغیّرهای طرّاحی باید مورد مطالعه قرار گیرند. گاهی بهتر است بیش از آنچه در ظاهر مسأله است متغیّر طرّاحی در نظر بگیریم. این کار انعطاف پذیری بیشتری را در رابطه سازی مسأله به وجود می آورد. بعداً ممکن است یک مقدار عددی برای یکی از متغیّرهای طرّاحی در نظر بگیریم و آن را از رابطه مسأله حذف کنیم. نکته مهم دیگری که باید در نظر داشت، این است که تمامی متغیّرهای طرّاحی باید تا حد امکان از هم مستقل باشند. شخص باید بتواند هر مقدار عددی را به هر متغیّر مستقل از دیگر متغیّرها بدهد. گاهی می شود متغیّرهای طرّاحی وابسته داشت ولی رابطه سازی مسأله بدون جهت پیچیده خواهد شد. به عنوان مثال، طرّاحی با سطح مقطع دایرهٔ توخالی را در نظر بگیرید که در شکل ((a) ۲.۲) نشان داده شده است. قطرهای داخلی و خارجی d_i و d_o و ضخامت جداره t را می توان به عنوان متغیّرهای طرّاحی در نظر گرفت، هرچند آنها از هم مستقل نیستند. ما نمی توانیم $d_i = 10$ ، $d_o = 12$ و $t = 2$ را قبول کنیم، زیرا شرط فیزیکی $t = 0.5(d_o - d_i)$ را نقض می کند. بنابراین اگر مسأله را با d_i ، d_o و t رابطه سازی کنیم، باید قید $t = 0.5(d_o - d_i)$ را نیز اعمال کنیم. این نوع رابطه سازی در بیشتر اوقات لازم نیست. می توانیم مقدار t را در تمامی رابطه ها جایگزین و آن را از مسأله حذف کنیم که در این صورت تعداد متغیّرهای طرّاحی و قیود کم خواهد شد.

برای سازهٔ دو میله ای بخش ۲.۲، چندین مجموعه از متغیّرهای طرّاحی را می توان شناسایی کرد. در رابطه سازی اوّل، ارتفاع h و عرض دهانه s را می توان به عنوان متغیّرهای طرّاحی در نظر گرفت. در رابطه سازیهای بعدی می توان برای آنها مقادیر عددی در نظر گرفت و آنها را از رابطه سازی حذف کرد. متغیّرهای دیگر طرّاحی به شکل سطح مقطع اعضای ۱ و ۲ بستگی خواهند داشت. شکلهای سطح مقطع متفاوتی همچنان که در شکل ۲.۲ نشان داده شده با متغیّرهای طرّاحی مشخص شده می توان در نظر گرفت. توجه کنید که انتخاب متغیّرهای طرّاحی شکلهای سطح مقطع متفاوت منحصر به فرد نیستند. برای مثال، در مورد دایرهٔ توخالی شکل (a) ۲.۲، قطر خارجی d_o و نسبت قطر داخلی به خارجی $r = d_i/d_o$ و یا d_i , d_o ممکن

است به عنوان متغیّرهای طرّاحی در نظر گرفته شوند. در نظر گرفتن d_o ، d_i و r به عنوان متغیّرهای طرّاحی مناسب نیست، زیرا آنها از هم مستقل نیستند. تعبیرهای مشابهی می توان برای سایر شکلهای سطح مقطع نشان داده شده در شکل۲ . ۲ بیان کرد.

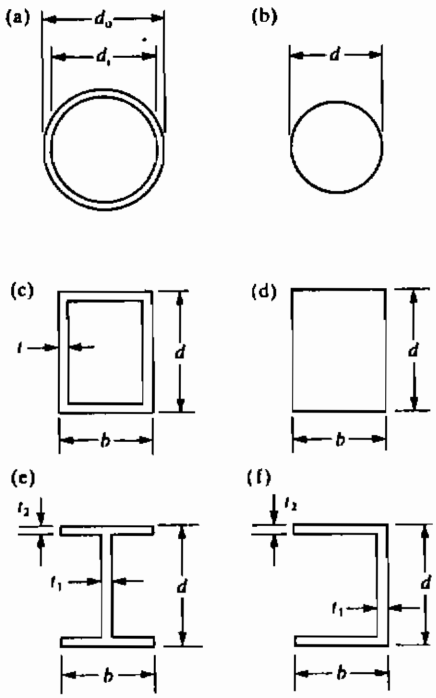
ما تمامی متغیّرهای طرّاحی یک مسأله را با بردار x نمایش می دهیم.

به طور خلاصه، نکات زیر را برای شناسایی متغیّرهای طرّاحی یک مسأله باید در نظر داشت:

۱ . متغیّرهای طرّاحی تا حد امکان مستقل از هم باشند.

۲ . برای رابطه سازی درست یک مسأله طراحی، یک حد مینیمم برای تعداد متغیّرهای طرّاحی وجود دارد.

۳ . خوب است تا حد امکان متغیّرهای طرّاحی مستقل بیشتری در مرحلهٔ اولیه رابطه سازی شناسایی کرد. در مراحل بعد، همیشه می توان مقادیر ثابتی برای بعضی از آنها در نظر گرفت.



شکل ۲ . ۲ شکلهای سطح مقطع خرپای دو میله‌ای. (a) دایرهٔ توخالی؛ (b) دایرهٔ توپر؛ (c) مستطیل توخالی؛ (d) مستطیل توپر؛ (e) I - شکل؛ و (f) سطح مقطع کانالی

۲.۴ تابع هزینه

برای یک سیستم طرحهای بسیاری قابل قبول هستند که بعضی از آنها از بقیه بهترند. برای چنین ادعایی باید معیاری داشت تا طرحهای مختلف را با هم مقایسه کرد. معیار باید یک تابع اسکالر باشد که مقدار عددی آن را بتوان با مشخص کردن متغیّرهای طرّاحی به دست آورد، یعنی باید تابعی از متغیّرهای طرّاحی باشد. چنین *معیاری برای یک مسأله طرّاحی بهین تابع هدف نامیده می‌شود* و با f نمایش داده می شود و یا با $f(\mathbf{x})$ تا تأکیدی باشد بر وابسته بودن آن به بردار متغیّرهای طرّاحی $\mathbf{x}$. در این کتاب تابع هدف همیشه مینیمم می شود. این انتخاب خللی به کلّیت مسأله وارد نمی کند. زیرا ماکزیمم کردن $f(\mathbf{x})$ می تواند تبدیل به مینیمم کردن $-f(\mathbf{x})$ شود. *تابعی که مینیمم می‌شود تابع هزینه نامیده خواهد شد*.

انتخاب تابع هدف مناسب تصمیمی مهم در فرآیند طرّاحی است. توابع هدف متفاوتی در مقالات علمی استفاده شده است: مینیمم کردن هزینه، ماکزیمم کردن سود، مینیمم کردن وزن، مینیمم کردن هزینهٔ انرژی، ماکزیمم کردن کیفیت راندن خودرو و غیره. در بسیاری از موقعیتها یک تابع واضح می تواند مشخص گردد. یعنی، ما همیشه می خواهیم هزینهٔ ساخت کالاها را مینیمم کنیم، یا برگشت سرمایه گذاری را ماکزیمم کنیم. در موقعیتهای دیگری دو و یا چند تابع هزینه ممکن است وجود داشته باشد. برای مثال ممکن است بخواهیم وزن سازه را مینیمم کنیم و در همان حال خیز و یا تنش را در نقاط معینی نیز مینیمم کنیم. اینها *مسائل طرّاحی بهین چندهدفه* نامیده می شوند. روش عمومی و قابل اطمینانی برای حل چنین مسائلی وجود ندارد. با این همه، برخوردهای متفاوتی برای این موقعیتها امکان‌پذیر است. برای مثال، یک *تابع هزینهٔ مرکب* برای مسأله می تواند تعریف شود که مجموع وزن‌دار همهٔ توابع هزینه باشد. باید ضرایب وزنی مناسب برای توابع هزینه مختلف در نظر گرفته شود تا تابع هدف خاصی تابع هدف مرکب را در یافتن طرح بهین تحت تأثیر قرار ندهد. راه دوم انتخاب مهمترین معیار برای تابع هدف و در نظر گرفتن دیگر هدفها به‌عنوان قیود است. با تغییر مقدار حدی برای قیود، طرح بهین جدیدی را می توان به دست آورد. بنابراین منحنیهای بسیاری برای تمام توابع هدف می تواند تولید شده و در فرآیند طرّاحی استفاده شود.

برای بسیاری از مسائل طرّاحی، این که تابع هزینه چه باید باشد و چگونه باید با متغیّرهای طرّاحی ارتباط داشته باشد، روشن نیست. شناخت و تجربهٔ قابل توجهی برای مشخص کردن تابع هدف مناسب لازم است. برای مثال، بهینه سازی یک خودرو سواری را در نظر بگیرید.

متغیّرهای طرّاحی برای خودرو چه چیزهایی است؟ تابع هزینه چیست و شکل تابعی[1] آن برحسب متغیّرهای طرّاحی کدام است ؟ این یک مثال کاملاً عملی ولی بسیار پیچیده است . معمولاً چنین مسائلی به مسائل مختلف کوچکتری تقسیم می شوند و هریک به عنوان یک مسألهٔ طرّاحی بهین رابطه سازی می شود . برای مثال ، طرّاحی خودرو سواری برای ظرفیت و عملکردی مشخص می تواند به زیرمسائل بهینه سازی در صندوق عقب ، درها ، قسمتهای بدنه ، پهلوها ، سقف ، صندلیها ، سیستم تعلیق ، سیستم انتقال ، شاسی ، موتور ، داشبرد ، کاپوت ، سیستم برق ، سپر و غیره تقسیم شود . هریک از این مسائل قابل بررسی و ممکن است به عنوان یک مسأله طرّاحی بهین رابطه سازی شود . مسائل پیچیدهٔ شاخه ها و زمینه های دیگر نیز می تواند به مسائل کوچکتری شکسته شود که هرکدام را کم و بیش بتوان مستقلاً طرّاحی کرد . این قسمتها را می توان بعداً کنار هم گذاشت تا سیستم را بهینه کنند .

برای مورد سازهٔ دو میله ای بخش ۲ . ۲ ، جرم به عنوان تابع هزینه مشخص شده ، که عبارت است از تعیین شکل سطح مقطع و متغیّرهای طرّاحی آن . برای مورد دایرهٔ توخالی ، متغیّرهای طرّاحی به شکل زیر تعریف می شوند :

x_1 = ارتفاع h خرپا ،

x_2 = عرض دهانه s خرپا ،

x_3 = قطر خارجی عضو ۱ ،

x_4 = قطر داخلی عضو ۱ ،

x_5 = قطر خارجی عضو ۲ ، و

x_6 = قطر داخلی عضو ۲ .

کل جرم خرپا عبارت است از (چگالی × حجم مواد) :

$$\text{جرم} = \frac{\pi\rho}{8}(4x_1^2 + x_2^2)^{1/2}(x_3^2 + x_5^2 - x_4^2 - x_6^2) \qquad (۲.۵)$$

که در آن ρ چگالی است . توجه کنید که اگر قطر خارجی و نسبت قطر داخلی به خارجی به عنوان متغیّرهای طرّاحی انتخاب شوند ، شکل تابع هزینه تغییر می کند . پس شکل نهایی به متغیّرهای طرّاحی شناسایی شده بستگی دارد .

عبارت تابع هزینه برای سایر شکلهای سطح مقطع شکل ۲ . ۲ را بسادگی می توان نوشت .

1. Functional

۲.۵ قیود طرّاحی

۲.۵.۱ طرح قابل قبول

طرّاحی یک سیستم تعیین مجموعه مقادیر عددی متغیّرهای طرّاحی است (یعنی یک بردار متغیّرهای طرّاحی مشخص x). حتی اگر این طرّاحی بی معنی باشد (به عنوان مثال شعاع و یا ضخامت منفی) و یا جملات تابعش ناکافی باشند، هنوز می توان آن را یک طرح نامید. پر واضح است که بعضی از طرحها مفید و بعضی نامناسبند. طرحی که تمامی ضرورتها را دارا باشد یک طرح *قابل قبول* (*پذیرفتنی یا قابل کارکرد*) نامیده می شود. یک طرح غیر قابل قبول (نپذیرفتنی) یک یا چند ضرورت را دارا نمی باشد.

۲.۵.۲ قیود ضمنی

به طور کلی تمامی محدودیتهایی را که روی طرح می گذارند جمعاً قیود می نامند. هر قید باید توسط یک یا چند متغیّر طرّاحی متأثر شود. در چنین صورتی است که آنها معنی دارند و روی طرح بهین تأثیر می گذارند. بعضی از قیود کاملاً ساده هستند، مثل مقادیر حداقل و حداکثر متغیّرهای طرّاحی، در حالی که قیود پیچیده ممکن است از متغیّرهای طرّاحی به طور غیرمستقیم تأثیر پذیرند. به عنوان مثال، خیز نقطه ای در یک سازهٔ بزرگ به طرّاحی آن بستگی دارد. اما بیان خیز به عنوان یک تابع صریح از متغیّرهای طرّاحی بجز در سازه های خیلی ساده نامکن است. اینها را قیود ضمنی می نامند که در فصل (۸) با جزئیات بیشتری آنها را مطالعه می کنیم.

۲.۵.۳ قیود خطی و غیرخطی

بسیاری از توابع قید تنها حاوی عبارات مرتبه اوّل از متغیّرهای طرّاحی هستند. اینها را قیود خطی می نامند. *مسائل برنامه ریزی خطی تنها قیود خطی* دارند، در حالی که مسائل عمومی قیود غیرخطی نیز دارند. بنابراین روشهای کار با قیود خطی و غیرخطی باید تبیین شود.

۲.۵.۴ قیود مساوی و نامساوی

مسائل طرّاحی ممکن است قیود مساوی و نامساوی داشته باشند. به عنوان مثال، برای

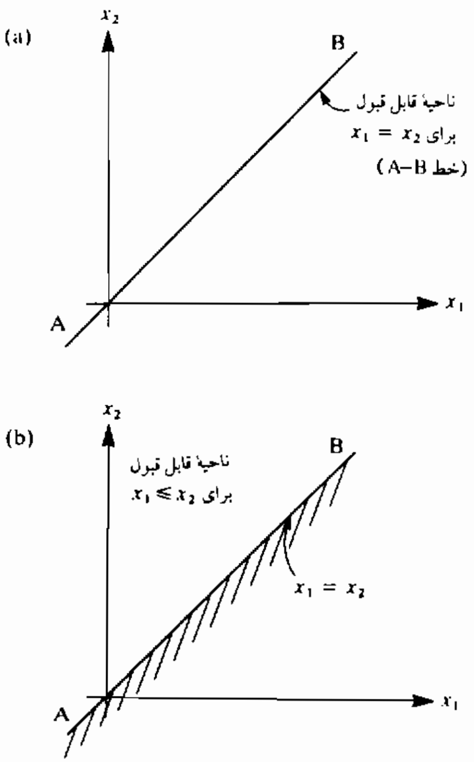
انجام دادن عمل مطلوب، یک عضو ماشین باید به اندازهٔ Δ حرکت کند، پس ما باید آن را به عنوان یک قید مساوی در نظر بگیریم. یک طرح قابل قبول باید دقیقاً قیود مساوی را برآورده کند. قیود نامساوی نیز در بسیاری از مسائل طرّاحی وجود دارند. مثالهایی از چنین قیودی عبارتند از: تنشهای محاسبه شده نباید از تنش مجاز مصالح تجاوز کنند، بسامدهای ارتعاشی اساسی (یک خاصیت ذاتی دینامیکی سازه یا سیستم مکانیکی) باید از بسامد عملکرد بیشتر باشند، خیزها نباید از حدود مشخصی تجاوز کنند، منابع و امکانات نباید بیش از مقدار موجود استفاده شوند، تقاضاها باید برآورده شوند، بارها برای سازه ها نباید از بار کمانش بیشتر شوند و غیره. دقت کنید بسیاری از طرحها ازنظر یک قید نامساوی قابل قبولند. به عنوان مثال، هر طرحی که تنشهای محاسبه شدهٔ آن کمتر یا مساوی تنش مجاز باشد از نظر آن قید قابل قبول است. بسیاری از طرحها این قید را برآورده می کنند. یک طرح قابل قبول ازنظر یک قید مساوی باید حتماً روی آن واقع شود. بنابراین *ناحیهٔ قابل قبول* برای قیود نامساوی از آنچه برای همان قید اگر به طور مساوی بیان شود، بسیار بزرگتر است. یافتن طرحهای قابل قبول برای سیستمی که تنها قیود نامساوی دارد آسانتر است.

برای تشریح بیشتر اختلاف بین قیود مساوی و نامساوی، قید را هم به صورت مساوی و هم به صورت نامساوی می نویسیم. شکل (a) ۲.۳ قید مساوی $x_1 = x_2$ را نشان می دهد. طرح قابل قبول نسبت به این قید باید روی خط مستقیم A–B قرار داشته باشد. اما اگر قید به صورت یک نامساوی به صورت $x_1 \leq x_2$ نوشته شود، ناحیهٔ قابل قبول همان طور که در شکل (b) ۲.۳ نشان داده شده است، بسیار بزرگتر است. هر نقطه ای روی خط A–B یا بالای آن یک طرح قابل قبول را می دهد.

۲.۵.۵ سازهٔ دو میله ای

توجه کنید که وارد کردن تمامی قیود در حکم یا بیان مسأله از اهمیت بسیاری برخوردار است، زیرا حل نهایی به آنها بستگی دارد. به عنوان مثالی از رابطه سازی قیود طرّاحی، سازهٔ دو میله ای بخش ۲.۲ را مورد توجه قرار می دهیم. قیود مسأله عبارتند از: تنش اعضا نباید از تنش مجاز بیشتر شوند، و محدودیتهای مختلف متغیّرهای طرّاحی باید رعایت شوند. این قیود برای دایره ای توخالی با استفاده از متغیّرهای طرّاحی که قبلاً مشخص شده رابطه سازی می شوند.

تنش σ در یک عضو عبارت است از تقسیم نیرو بر مساحت سطح مقطع (مساحت/نیرو = تنش). واحد آن در سیستم SI ، نیوتن بر مترمربع که پاسکال (Pa) نیز نامیده می شود. واحد آن در سیستم انگلیسی ـ امریکایی[1]، پوند بر اینچ مربع (نوشته می شود psi) است. برای پرهیز از ازدیاد تنش در اعضا، تنش محاسبه شده σ باید کوچکتر یا مساوی تنش مجاز مصالح σ_a باشد؛ یعنی $|\sigma| \le \sigma_a$ ، در حالی که $\sigma_a > 0$. تنش مجاز از تقسیم تنش شکست مصالح بر یک ضریب اطمینان بزرگتر از ۱ به دست می آید. می توانیم آن را تنش طرّاحی نیز بنامیم. توجه کنید برای در نظر گرفتن تنشهای مثبت و منفی (کششی و فشاری)، باید قدر مطلق تنش محاسبه شده را به کار ببریم.



شکل ۲.۳ تفاوت بین قیود مساوی و نامساوی. (a) ناحیهٔ قابل قبول برای قید $x_1 = x_2$ (خط A–B)؛ (b) ناحیه قابل قبول برای قید $x_1 \le x_2$ (خط A–B و ناحیهٔ بالای آن).

1. US-British

اکنون آماده‌ایم تا قیود تنش را برحسب متغیّرهای طرّاحی بیان کنیم. از معادلهٔ (۳ . ۲)، F_1 (نیرو در عضو ۱) همیشه منفی و لذا فشاری است. اگر F_2 نیز نیروی فشاری باشد (یعنی در معادلهٔ (۴ . ۲) $(\sin\theta)/x_1 \geq 2(\cos\theta)/x_2$ باشد وقتی که در آن $x_1 = h$ و $x_2 = s$ استفاده شده باشند)، قیدهای تنش عضو عبارت است از :

$$\frac{2Wl}{\pi(x_3^2 - x_4^2)}\left[\frac{\sin\theta}{x_1} + \frac{2\cos\theta}{x_2}\right] \leqq \sigma_a \qquad (۲ . ۶)$$

$$\frac{2Wl}{\pi(x_5^2 - x_6^2)}\left[\frac{\sin\theta}{x_1} - \frac{2\cos\theta}{x_2}\right] \leqq \sigma_a \qquad (۲ . ۷)$$

در حالی که عبارت زیر برای مساحتهای سطح مقطع A_1 و A_2 اعضای ۱ و ۲ استفاده شده است :

$$A_1 = \frac{\pi}{4}(x_3^2 - x_4^2), \qquad A_2 = \frac{\pi}{4}(x_5^2 - x_6^2)$$

اگر در معادلهٔ (۴ . ۲) $(\sin\theta)/x_1 < 2(\cos\theta)/x_2$ باشد، آن‌گاه F_2 نیروی کششی و قید تنش برای عضو ۲ عبارت است از

$$\frac{-2Wl}{\pi(x_5^2 - x_6^2)}\left[\frac{\sin\theta}{x_1} - \frac{2\cos\theta}{x_2}\right] \leqq \sigma_a \qquad (۲ . ۸)$$

بالاخره، قیدهای روی متغیّرهای طرّاحی به شکل زیر نوشته می‌شوند

$$x_{il} \leqq x_i \leqq x_{iu}; \qquad i = 1 \text{ to } 6 \qquad (۲ . ۹)$$

در حالی که x_{il} و x_{iu} مقادیر حداقل و حداکثر متغیّر طرّاحی i ام است. این قیود برای ساخت و محدودیتهای فضای فیزیکی باید اعمال شوند.

دقت کنید که شکل قیود تنش اعضا با تغییر متغیّرهای طرّاحی مقطع دایره‌ای توخالی عوض می‌شوند. به‌عنوان مثال اگر شعاعهای داخلی و خارجی، شعاع میانگین و ضخامت جداره، یا قطر خارجی و نسبت قطر داخلی به خارجی متغیّرهای طرّاحی باشند برای معادله‌های (۶ . ۲) تا (۸ . ۲) عبارت متفاوتی به دست می‌آید. این مطلب نشان می‌دهد که انتخاب متغیّرهای طرّاحی رابطه سازی مسأله را به میزان زیادی تحت تأثیر قرار می‌دهد. همچنین واضح است که اگر سطح مقطع دیگری برای اعضا انتخاب شود، عبارات مساحت سطح مقطع و قیود تغییر خواهند کرد.

همچنین دقت کنید که ما برای این که بتوانیم قیود را درست بنویسیم باید اوّل سازه را *تحلیل* کنیم (محاسبهٔ پاسخ آن به ورودی). باید نیروها را در اعضا محاسبه می‌کردیم تا قادر

باشیم قیود را بنویسیم. این گامی مهم در رابطه سازی مسائل طرّاحی مهندسی است. قبل از رابطه سازی مسألهٔ طرّاحی طرّاح باید قادر باشد سیستم را تحلیل کند. ما این نکته را در بخش بعدی با رابطه سازی چندین مسأله مختلف طرّاحی توضیح می دهیم.

بالاخره، مسأله بهینه سازی سازه دو میله ای را می توان به شکل زیر خلاصه نمود:

متغیّرهای طرّاحی x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_5 و x_6 را طوری بیابید که تابع هزینهٔ معادلهٔ (۲.۵) نسبت به معادله های قیود (۲.۶) تا (۲.۹) مینیمم گردد.

دقت کنید که برای این مسأله ساده ۱۵ قید وجود دارد.

۲.۶ مثالهایی از رابطه سازی مسأله طرّاحی بهین

۲.۶.۱ مقدّمه

در این بخش مسائل متنوعی از طرّاحی بهین رابطه سازی می شوند. بعضی از مسائل می توانند به روشهای مختلفی رابطه سازی شوند و در این جا نیز رابطه های مختلفی برای آنها ارائه می شود. فرآیند رابطه سازی *مسأله با مشخص کردن متغیّرهای طرّاحی که گاهی مشکلترین قسمت در کل فرآیند است شروع می شود.* شخص باید متغیّرهای مستقل را برای تشریح سیستم مشخص کند. سپس یک *تابع هزینه برای مسأله باید مشخص شود* که عملکرد سیستم را اندازه گیری می کند. تابع هزینه باید به همه و یا بعضی از متغیّرها بستگی داشته باشد. طرحهای مختلف سیستم می توانند توسط مقادیر تابع هزینه شان مقایسه شوند. *آخرین مرحله در فرآیند مشخص کردن قیود است* که باید به همه و یا بعضی از متغیّرهای طرّاحی بستگی داشته باشند، تنها در این صورت است که آنها می توانند در فرآیند طرّاحی اعمال شوند.

باید روشن شده باشد که رابطه سازی یک مسأله طرّاحی بهین به انتخاب مناسب متغیّرهای طرّاحی بستگی دارد. به علاوه، *شکل همه توابع مسأله به آنها وابسته است.* بنابراین معنی تمامی متغیّرهای طرّاحی باید روشن باشد. دقت در قوانین ساده زیر رابطه سازی صحیح مسأله طرّاحی را آسان می کند.

برای بعضی از مسائل، همه توابع ـ هزینه و قید ـ برحسب متغیّرهای طرّاحی خطی هستند. اینها را *مسائل برنامه ریزی خطی* می نامند. روشهای عددی برای حل چنین مسائلی به خوبی گسترش یافته است و در فصل (۴) تشریح می شوند.

به طور خلاصه سه مرحله زیر برای تبدیل یک عبارت توضیحی مسأله طرّاحی به رابطه سازی ریاضی باید انجام شود :

۱ . شناسایی و تعریف متغیّرهای طرّاحی .

۲ . شناسایی تابع هزینه و به دست آوردن رابطه ای برحسب متغیّرهای طرّاحی برای آن .

۳ . شناسایی قیود و به دست آوردن رابطه ای برحسب متغیّرهای طرّاحی برای آنها .

۲.۶.۲ طرّاحی قوطی نوشابه

به عنوان اولین مثال، ما مسأله ساده طرّاحی یک قوطی نوشابه را که می تواند مقدار مشخصی نوشابه را در خود جای دهد و بقیه ضرورتهای طرّاحی را نیز برآورده کند تعریف و رابطه سازی می کنیم . تولید قوطیها به صورت بیلیونی خواهد بود، بنابراین تمایل به مینیمم شدن هزینه تولید آنها وجود دارد . از آن جا که هزینه مستقیماً به مساحت سطوح ورقهای فلزی استفاده شده بستگی دارد، واضح است که باید مساحت ورقهای فلزی مورد نیاز ساخت قوطیها را مینیمم کرد . ساخت، جابه جایی، باربری، حمل و نقل و سایر موارد محدودیتهای زیر را در مورد قوطی اعمال می کنند :

۱ . قطر قوطی نباید بیشتر از ۸ سانتی متر باشد . همچنین نباید قطر آن کمتر از ۳/۵ سانتی متر باشد .

۲ . ارتفاع قوطی نباید بیشتر از ۱۸ سانتی متر و کمتر از ۸ سانتی متر باشد .

ظرفیت قوطی باید حداقل ۴۰۰ میلی لیتر مایع (۴۰۰ میلی لیتر = ۴۰۰ سانتی متر مکعب) باشد .

به دنبال سه مرحله ای که در تبدیل مسأله به شکل ریاضی گفته شد، دو متغیّر طرّاحی قطر قوطی، D و ارتفاع قوطی، H برحسب سانتی متر تعریف می شوند .

هدف طرّاحی مینیمم کردن مساحت سطح ورقهای مورد استفاده است که از دو قسمت تشکیل شده :

۱ . مساحت سطح جانبی استوانه به قطر D و ارتفاع H که عبارت است از $\pi DH\ (\mathrm{cm}^2)$ = ارتفاع × محیط .

۲ . مساحت سطوح سر و ته قوطی : $2(\pi D^2/4) = (\pi/2)D^2\ (\mathrm{cm}^2)$.

بنابراین، تابع هزینه (کل ورق فلزی) عبارت است از

$$f(D, H) = \pi DH + \frac{\pi}{2}D^2, \qquad \mathrm{cm}^2$$

قیود باید برحسب متغیّرهای طرّاحی رابطه سازی شوند. قید اول این است که قوطی باید ظرفیت ۴۰۰ سانتی متر مکعب مایع را داشته باشد. چون حجم قوطی عبارت است از $\pi D^2H/4$ ، این قید به صورت زیر بیان می شود

$$\frac{\pi}{4}D^2H \geqq 400, \qquad \text{cm}^3$$

قیود دیگر در مورد اندازهٔ قوطی عبارتند از

$$3.5 \leqq D \leqq 8; \qquad 8 \leqq H \leqq 18, \qquad \text{cm}$$

در مقالات مختلف قیود صریح روی متغیّرهای طرّاحی نامهای گوناگونی دارند، مانند *قیود جانبی*[1] ، *قیود فن‌آورانه*[2]، *کرانهای ساده*[3]، *قیدهای اندازه‌ای*[4]، *حد بالا و پایینی متغیّرهای طرّاحی*. توجه کنید که برای این مسأله در حقیقت چهار قید از این نوع وجود دارد: $3.5 \leq D$ ، $D \leq 8$ ، $8 \leq H$ ، $H \leq 18$. پس مسأله دو متغیّر طرّاحی و پنج قید نامساوی دارد. توجه کنید که توابع هزینه و قید اوّل برحسب متغیّرهای طرّاحی غیرخطی و بقیه قیود خطی هستند.

۲.۶.۳ عملکرد کارخانهٔ چوب بری

یک شرکت دو کارخانه چوب بری و دو جنگل دارد. جدول ۱ . ۲ ظرفیت این دو کارخانه (تعداد الوار در روز) و فاصلهٔ بین کارخانه ها و جنگلها را نشان می دهد. هر جنگل می تواند در دورهٔ اجرای طرح تا میزان ۲۰۰ الوار در روز بدهد و هزینه حمل الوارها، ۱۵ سنت برای حمل یک الوار در یک کیلومتر تخمین زده می شود. دست کم ۳۰۰ الوار در روز مورد نیاز است. مسأله را برای مینیمم شدن هزینه حمل الوارها در روز رابطه سازی کنید.

متغیّرهای طرّاحی مسأله بدین شکل تعریف می شوند

x_1 = تعداد الوارهایی که از جنگل ۱ تا کارخانهٔ A حمل می شود،

x_2 = تعداد الوارهایی که از جنگل ۲ تا کارخانهٔ A حمل می شود،

x_3 = تعداد الوارهایی که از جنگل ۱ تا کارخانهٔ B حمل می شود،

x_4 = تعداد الوارهایی که از جنگل ۲ تا کارخانهٔ B حمل می شود،

---

1. side constraints
2. technological constraints
3. simple bounds
4. sizing constraints

مرحله بعدی بیان هزینه حمل و نقل (که باید مینیمم گردد) برحسب متغیّرهای طرّاحی x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 می باشد. هزینه به فاصلهٔ جنگلها تا کارخانه ها بستگی دارد و عبارت است از

$$\text{هزینه} = 24(0.15)x_1 + 20.5(0.15)x_2 + 17.2(0.15)x_3 + 18(0.15)x_4$$
$$= 3.6x_1 + 3.075x_2 + 2.58x_3 + 2.7x_4$$

قیود مسأله عبارتند از ظرفیت کارخانه ها و حداکثر میزانی که هر جنگل می تواند در روز الوار بدهد. قیود ظرفیت کارخانه ها به شکل زیر بیان می شوند

$$x_1 + x_2 \leqq 240 \qquad (\text{کارخانهٔ A})$$
$$x_3 + x_4 \leqq 300 \qquad (\text{کارخانهٔ B})$$

قیود حداکثر الوار جنگلها به شکل زیر بیان می شوند

$$x_1 + x_3 \leqq 200 \qquad (\text{جنگل ۱})$$
$$x_2 + x_4 \leqq 200 \qquad (\text{جنگل ۲})$$

قید مربوط به تعداد الوار مورد نیاز در روز به شکل زیر بیان می شود

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqq 300$$

برای این که رابطه سازی مطابق با واقعیت باشد باید متغیّرهای طرّاحی نامنفی باشند، یعنی

$$x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 4$$

مسأله، چهار متغیّر طرّاحی، پنج قید نامساوی، و چهار قید نامنفی متغیّرهای طرّاحی دارد. دقت کنید که تمامی توابع برحسب متغیّرهای طرّاحی خطی هستند، پس یک *مسأله برنامه ریزی خطی* است. همچنین دقت کنید که برای یک جواب با معنی، متغیّرهای طرّاحی باید مقادیر اعداد صحیح داشته باشند. این نوع مسائل را *مسائل برنامه ریزی صحیح* می نامند که به روش حل ویژه ای نیاز دارند. یک راه ساده ولی تقریبی برای حل مسأله بعداً در بخش ۲.۷ بحث می شود.

جدول ۲.۱ داده های عملکرد کارخانه چوب بری

کارخانه	فاصله (کیلومتر) جنگل ۱	جنگل ۲	ظرفیت کارخانه در روز
A	۲۴٫۰	۲۰٫۵	۲۴۰ الوار
B	۱۷٫۲	۱۸٫۰	۳۰۰ الوار

۲.۶.۴ طرّاحی کابینت

یک کابینت از قطعات C_1 ، C_2 و C_3 مونتاژ می شود. هر کابینت نیاز به هشت C_1 ، پنج C_2 و پانزده C_3 دارد. مونتاژ C_1 پنج مهره یا پرچ؛ C_2 شش مهره یا پرچ؛ و C_3 سه مهره یا پرچ نیاز دارد. هزینهٔ پیچ کردن به همراه قیمت مهره 0.70$ برای C_1 ، 1.00$ برای C_2 و 0.60$ برای C_3 است. همچنین هزینهٔ پرچ کردن 0.60$ برای C_1 ، 0.80$ برای C_2 و 1.00$ برای C_3 است. تعداد ۱۰۰ عدد کابینت در روز باید مونتاژ شود. ظرفیت پیچ و پرچ کردن در هر روز به ترتیب ۶۰۰۰ و ۸۰۰۰ عدد است. ما می خواهیم تعداد قطعاتی را که باید پیچ یا پرچ شوند طوری تعیین کنیم که هزینه مینیمم گردد [طراحی شده به وسیله سیدال[1]، ۱۹۷۲].

این مسأله جالب چندین رابطه سازی دارد. برای هر رابطه سازی، متغیّرهای طرّاحی مناسب شناسایی می شوند و عبارات هزینه و توابع قیود نوشته می شوند.

۲.۶.۴.۱ رابطه سازی ۱ برای طرّاحی کابینت. برای اولین رابطه سازی متغیّرهای طرّاحی زیر شناسایی می شوند: برای ۱۰۰ کابینت، فرض کنید

x_1 = تعداد C_1 که باید پیچ شوند،

x_2 = تعداد C_1 که باید پرچ شوند،

x_3 = تعداد C_2 که باید پیچ شوند،

x_4 = تعداد C_2 که باید پرچ شوند،

x_5 = تعداد C_3 که باید پیچ شوند، و

x_6 = تعداد C_3 که باید پرچ شوند.

هدف اصلی طرّاحی مینیمم کردن هزینه ساخت کابینتهاست که از هزینه های مشخص پیچ و پرچ کردن هر قطعه به دست می آید:

$$\text{هزینه} = 0.70(5)x_1 + 0.60(5)x_2 + 1.00(6)x_3 + 0.80(6)x_4 + 0.60(3)x_5 + 1.00(3)x_6$$
$$= 3.5x_1 + 3.0x_2 + 6.0x_3 + 4.8x_4 + 1.8x_5 + 3.0x_6$$

قیود مسأله عبارتند از ظرفیت پیچ و پرچ کردن، و تعداد کابینتهایی که می تواند در هر روز ساخته شود. چون هر روز باید ۱۰۰ کابینت ساخته شود، تعداد مورد نیاز C_1 ، C_2 و C_3 در قیود زیر آمده است:

---

1. Siddall

$x_1 + x_2 = 800$ (تعداد C_1 ها)
$x_3 + x_4 = 500$ (تعداد C_2 ها)
$x_5 + x_6 = 1500$ (تعداد C_3 ها)

ظرفیت پیچ یا پرچ کردن نباید از حد تجاوز کند، پس

$5x_1 + 6x_3 + 3x_5 \leqq 6000$ (ظرفیت پیچ کردن)
$5x_2 + 6x_4 + 3x_6 \leqq 8000$ (ظرفیت پرچ کردن)

بالاخره، تمامی متغیّرهای طرّاحی باید نامنفی باشند تا یک جواب معنی دار داشته باشیم :

$x_i \geqq 0; \quad i = 1 \text{ to } 6$

۲.۶.۳.۲ رابطه سازی ۲ برای طرّاحی کابینت. اگر این قید را که هر قطعه ای باید پیچ یا پرچ شود رها سازیم، آن گاه متغیّرهای طرّاحی زیر می توانند تعریف شوند :

x_1 = تعداد پیچهایی که برای همه C_1 ها نیاز است،
x_2 = تعداد پیچهایی که برای همه C_2 ها نیاز است،
x_3 = تعداد پیچهایی که برای همه C_3 ها نیاز است،
x_4 = تعداد پرچهایی که برای همه C_1 ها نیاز است،
x_5 = تعداد پرچهایی که برای همه C_2 ها نیاز است، و
x_6 = تعداد پرچهایی که برای همه C_3 ها نیاز است.

هدف همچنان مینیمم کردن هزینه کل ساخت ۱۰۰ کابینت است که به شکل زیر بیان می شود

هزینه $= 0.70x_1 + 1.00x_2 + 0.60x_3 + 0.60x_4 + 0.80x_5 + 1.00x_6$

چون هر روز باید ۱۰۰ کابینت ساخته شود، ما $800\ C_1$ ، $500\ C_2$ و $1500\ C_3$ نیاز داریم. تعداد کل پیچها و پرچهایی که برای C_1 ، C_2 و C_3 نیاز است با قیود مساوی زیر بیان می شوند :

$x_1 + x_4 = 4000$ (برای C_1)
$x_2 + x_5 = 3000$ (برای C_2)
$x_3 + x_6 = 4500$ (برای C_3)

قید مربوط به ظرفیت پیچ و پرچ کردن عبارت است از

$x_1 + x_2 + x_3 \leqq 6000$
$x_4 + x_5 + x_6 \leqq 8000$

بالاخره، تمام متغیّرهای طرّاحی باید نامنفی باشند :

$x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 6$

بنابراین، این رابطه سازی نیزشش متغیّر طرّاحی، سه قید مساوی و دو قید نامساوی دارد. بعد از این که جواب بهین مسأله به دست آمد، تعداد قطعاتی که باید پیچ یا پرچ شوند نیز مشخص می شود.

۲.۶.۴.۳ رابطه سازی ۳ برای طرّاحی کابینت. اگر بخواهیم همهٔ کابینتها مثل هم باشند رابطه سازی دیگری برای مسأله نیز امکان پذیر است. متغیّرهای طرّاحی می تواند به شکل زیر مشخص شود :

x_1 = تعداد C_1 ها که در یک کابینت باید پرچ شوند،

x_2 = تعداد C_2 ها که در یک کابینت باید پیچ شوند،

x_3 = تعداد C_3 ها که در یک کابینت باید پرچ شوند،

x_4 = تعداد C_4 ها که در یک کابینت باید پیچ شوند، و

x_5 = تعداد C_5 ها که در یک کابینت باید پرچ شوند.

با تعریفهای متغیّرهای طرّاحی فوق، هزینه ساخت ۱۰۰ کابینت در روز عبارت است از

$$\begin{aligned} \text{هزینه} &= 100[5(0.7)x_1 + 5(0.6)x_2 + 6(1.0)x_3 + 6(0.8)x_4 \\ &\quad + 3(0.6)x_5 + 3(1.0)x_6] \\ &= 350x_1 + 300x_2 + 600x_3 + 480x_4 + 180x_5 + 300x_6 \end{aligned}$$

چون هر کابینت $8\ C_1$ ، $5\ C_2$ و $15\ C_3$ نیاز دارد، قیود مساوی زیر به دست می آیند :

$x_1 + x_2 = 8 \qquad$ (برای C_1)

$x_3 + x_4 = 5 \qquad$ (برای C_2)

$x_5 + x_6 = 15 \qquad$ (برای C_3)

قیود ظرفیت پیچ یا پرچ کردن به شکل نامساویهای زیر بیان می شوند

$$100(5x_1 + 6x_3 + 3x_5) \leqq 6000$$

$$100(5x_2 + 6x_4 + 3x_6) \leqq 8000$$

بالاخره، تمامی متغیّرهای طرّاحی باید نامنفی باشند :

$x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 6$

دقت کنید که توابع هزینه و قیود در هر سه رابطه سازی خطی هستند. بنابراین، همه اینها مسائل برنامه ریزی خطی هستند. این که سه رابطه سازی سه جواب بهینه مختلف خواهند داشت قابل درك است. بعد از حل مسائل طراح می تواند بهترین راهبرد را برای ساخت کابینتها انتخاب کند.

همچنین توجه کنید که هر سه رابطه سازی سه *قید مساوی دارند* که هر قید دو متغیّر طرّاحی دارد. ما می توانیم از این قیود استفاده کرده و سه تا از متغیّرهای طرّاحی را برحسب سه تای دیگر به دست آورده و ابعاد مسأله را کم کنیم. این کار ازنظر محاسباتی مطلوب است، زیرا تعداد متغیّرها و قیود کم می شوند. اما حذف متغیّرها در بسیاری از مسائل پیچیده امکان پذیر نیست و ما باید روشهایی را که در آن بتوان هم قیود مساوی و هم قیود نامساوی را داشت توسعه دهیم.

دقت کنید برای یک جواب معنی دار با این رابطه سازیها، تمامی متغیّرهای طرّاحی باید مقادیر اعداد صحیح داشته باشند. اینها را مسائل *برنامه ریزی صحیح* می نامند که خیلی از وقتها در کاربردهای روزمرّه اتفاق می افتد. در حالی که چندین روش عددی برای حل این نوع مسائل تدوین شده، بسیاری از آنها غیر دقیق و براساس تجربه و راههای عملی استوارند. در این کتاب ما جزئیات آن روشها را بحث نخواهیم کرد. یک روش ساده برای به دست آوردن جوابهای قابل قبول خوب در بخش ۷ . ۲ تشریح خواهد شد.

۲.۶.۵ طرّاحی مخزن کروی عایق شده

هدف انتخاب ضخامت عایق t برای مینیمم ساختن هزینه سرد کردن یک مخزن کروی است. هزینه سرمایش شامل نصب و راه اندازی وسایل تبرید و هزینه نصب و عایق بندی است. یک عمر ۱۰ ساله فرض کنید. نرخ سود سالیانه ۱۰٪ است و هیچ پولی بابت بیمه پرداخت نمی شود.

متغیّر *طرّاحی* برای این مسأله ضخامت عایق $t\ (m)$ برحسب متر است. مساحت سطح مخزن کروی عبارت است از :

$$A = 4\pi r^2, \qquad \mathrm{m}^2$$

که در آن $r\ (m)$ شعاع کره است. هزینه های عایق بندی عبارت است از c_1 دلار برای

هر متر مکعب. اگر $r \gg t$ باشد، هزینه عایق بندی عبارت است از

$$c_1 A t = c_1 4\pi r^2 t$$

حرارت نگهداری شده در سال

$$G = \frac{(365)(24)(\Delta T)A}{c_2 t}, \qquad \text{ساعت ـ وات}$$

که در آن ΔT متوسط اختلاف دمای داخل و خارج برحسب درجهٔ کلوین و c_2 عبارت است از مقاومت حرارتی در واحد ضخامت برحسب متر ـ کلوین بروات. قیمت خرید وسایل تبرید به ظرفیت آن بستگی دارد و عبارت است از $c_3 G$ ، که c_3 هزینه به دلار برای هر ساعت ـ وات ظرفیت است. هزینه سالانه آن عبارت است از $c_4 G$ ، که c_4 هزینه دلاری سالانه برای هر ساعت ـ وات است. بنابراین، هزینه سرد کردن مخزن در ۱۰ سال عبارت است از

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 4\pi r^2 t + \frac{A}{c_2 t}(c_3 + \text{uspwf}(0.1, 10)c_4)(365)(24)(\Delta T) \\ &= at + b/t \end{aligned}$$

در حالی که $a = c_1 4\pi r^2$ ، $b = (c_3 + \text{uspwf}(0.1, 10)c_4)(365)(24)(\Delta T)A/(c_2)$ ، و uspwf عبارت است از ضریب ارزش فعلی سری یکنواخت[1] (به پیوست A مراجعه کنید).

پس مسأله طرّاحی عبارت است از مینیمم ساختن کل هزینه سرد کردن با $t \geq 0$ به عنوان تنها قید. دقت کنید که در واقع t نمی تواند صفر باشد، بنابراین قید می توانند به صورت $t > 0$ بیان شود. امّا نامساویهای اکید را ازنظر ریاضی یا عددی نمی توان اعمال کرد ناگزیر باید اجازه دهیم که نامساوی غیراکید به جای نامساوی اکید قرار گیرد. قید واقعی تر $t \geq t_{\min}$ است که $t_{\min}$ برای برآوردن شرایط تولید، گسیختگی مصالح و سایر شرایط در نظر گرفته شده است.

۲.۶.۶ طرّاحی مخزن استوانه ای با کمترین هزینه

یک مخزن استوانه ای را که دو طرف آن بسته است برای گنجایش حجم V از مایع طوری طرّاحی کنید که هزینهٔ آن مینیمم باشد. در طرّاحی اولیه به این نتیجه می رسیم که مخزن باید فولادی بوده و جوشکاری شود. هزینه مستقیماً به ورق فلزی استفاده شده بستگی دارد.

---

1. uniform series present worth factor

یک مجموعه متغیّرهای طرّاحی می تواند شعاع مخزن R و ارتفاع آن H باشد. تابع هزینه مسأله قیمت دلاری ورق فلزی برای مخزن است. مساحت سطح کل مخزن عبارت است از سطح جانبی و صفحات بالا و پایین یعنی

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi RH$$

بنابراین، اگر c قیمت دلاری واحد مساحت ورق فلزی باشد، تابع هزینه مسأله عبارت است از

$$f = c(2\pi R^2 + 2\pi RH)$$

حجم مخزن ($\pi R^2 H$) باید V باشد. بنابراین،

$$\pi R^2 H = V$$

همچنین هر دو متغیّر طرّاحی باید در محدوده یک مقدار مینیمم و ماکزیمم باشند:

$$R_{\min} \leqq R \leqq R_{\max}; \qquad H_{\min} \leqq H \leqq H_{\max}$$

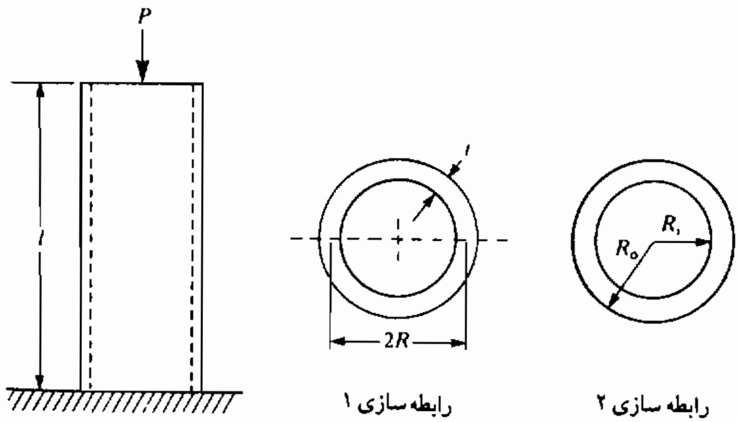
این مسأله بسیار شبیه مسأله قوطی نوشابه در بخش ۲.۶.۲ است و تنها قید حجم فرق می کند. آن جا قید نامساوی و این جا قید مساوی داریم.

۲.۶.۷ طرّاحی ستون استوانه ای توخالی با وزن مینیمم

ستونهای مستقیم به عنوان اعضای سازه ای در بسیاری از سازه های ساختمانی، مکانیکی، هوا فضایی، کشاورزی و خودرو استفاده می شوند. بسیاری از کاربردهای ستونها در زندگی روزمره دیده می شود، به عنوان مثال تیرهای روشنایی خیابانها، ستونهای چراغ راهنمایی، میله پرچم، پایه های مخازن آب، پایه های علایم راهنمایی بزرگراهها، محورهای انتقال قدرت و غیره. مهم است که آنها را تا آن جا که ممکن است سبک طرّاحی کنیم.

مسأله عبارت است از طرّاحی ستون استوانه ای توخالی به طول l که بار P را تحمل کرده و کمانش نکند و مقدار تنشهای آن از حد تسلیم نگذرد و دارای کمترین وزن باشد. ستون در پایه ثابت و بالای آن آزاد است. این نوع ستون را ستون یک سر گیردار می نامند. بار کمانش برای چنین ستونی عبارت است از $\pi^2 EI/4l^2$ (بار کمانش برای ستونهایی با شرایط مرزی دیگر با این عبارت متفاوت است [کراندال، دال و لاردنر[1]، ۱۹۷۸]). در این جا I گشتاور ماند سطح مقطع ستون و E خاصیتی از مصالح است که ضریب ارتجاعی (ضریب یانگ[2]) نامیده می شود.

1. Crandall, Dahl and Lardner 2. Young's modulus



شکل ۲.۴ ستون استوانه‌ای توخالی

تنش مصالح σ برای ستون P/A است که در آن A مساحت سطح مقطع ستون است. تنش مجاز مصالح برای بار محوری σ_a و چگالی مصالح ρ (جرم در واحد حجم) است. مسأله طرّاحی را رابطه سازی کنید.

ستون استوانه ای توخالی و سطح مقطع آن در شکل ۲.۴ نشان داده شده است. برای مسأله طرّاحی برحسب تعریفهایی که برای متغیّرهای طرّاحی می کنیم رابطه سازیهای مختلفی امکان پذیر است. دو رابطه سازی در این جا تشریح می شود.

۲.۶.۷.۱ رابطه سازی اول برای طرّاحی ستون. برای رابطه سازی اول، متغیّرهای طرّاحی زیر تعریف می شوند: شعاع متوسط ستون = R و ضخامت جداره = t. اگر فرض کنیم جداره نازك است ($R \gg t$)، مساحت سطح مقطع و گشتاور ماند آن عبارت است از

$$A = 2\pi R t; \qquad I = \pi R^3 t$$

تابع هزینهٔ جرم کل ستون برابر است با:

$$\text{جرم} = \rho(lA) = 2\rho l \pi R t$$

قید اوّل این است که تنش (P/A) نباید از σ_a بیشتر باشد تا مصالح گسیخته نشوند. این را به عنوان نامساوی $\sigma \le \sigma_a$ بیان می کنیم. با جایگزینی P/A به جای σ و سپس با جای گذاری

مقدار A داریم

$$\frac{P}{2\pi Rt} \leqq \sigma_a$$

ستون نباید تحت بار P کمانش کند. با استفاده از عبارت بار کمانش، این قید را می توان به شکل $P \le \pi^2 EI/4l^2$ بیان کرد. اگر مقدار I را جایگزین کنیم، داریم

$$P \leqq \frac{\pi^3 E R^3 t}{4l^2}$$

بالاخره، R و t باید در محدودهٔ دو مقدار مینیمم و ماکزیمم معین شده باشند:

$$R_{\min} \leqq R \leqq R_{\max}; \qquad t_{\min} \leqq t \leqq t_{\max}$$

۲.۶.۷.۲ رابطه سازی دوم برای طرّاحی ستون. اگر متغیّرهای طرّاحی را به شکل زیر تعریف کنیم رابطه سازی دیگری برای مسأله طرّاحی امکان پذیر است: شعاع خارجی ستون = R_o و شعاع داخلی ستون = R_i. برحسب این متغیّرهای طرّاحی مساحت سطح مقطع A و گشتاور ماند I عبارتند از

$$A = \pi(R_o^2 - R_i^2); \qquad I = \frac{\pi}{4}(R_o^4 - R_i^4)$$

جرم کل ستون از رابطهٔ زیر به دست می آید

$$\text{جرم} = \rho(lA) = \pi\rho l(R_o^2 - R_i^2)$$

مثل قبل، قید گسیختگی $P/A \le \sigma_a$ است. و با جایگزینی مقدار A داریم،

$$\frac{P}{[\pi(R_o^2 - R_i^2)]} \leqq \sigma_a$$

با استفاده از رابطه قبل برای I، قید بارکمانش عبارت است از

$$P \leqq \frac{\pi^3 E}{16 l^2}(R_o^4 - R_i^4)$$

بالاخره، متغیّرهای طرّاحی باید در محدودهٔ معینی باشند:

$$R_{o_{\min}} \leqq R_o \leqq R_{o_{\max}} \qquad \text{و} \qquad R_{i_{\min}} \leqq R_i \leqq R_{i_{\max}}$$

وقتی این مسأله با روشهای عددی حل می شود، باید قید $R_o > R_i$ نیز اعمال

شود. در غیر این صورت بعضی از روشها ممکن است طراحی را به نقطه ای ببرند که $R_o < R_i$ است. این وضعیت ازنظر فیزیکی ممکن نیست و باید صریحاً از حل عددی مسأله طرّاحی خارج شود.

توجه کنید که در رابطه سازی دوم، فرض نازك بودن جداره منظور نشده است. پس حل بهین با دو رابطه سازی می تواند متفاوت باشد. در صورت نیاز، فرض جدار نازك بودن را باید با اعمال این که نسبت شعاع متوسط به ضخامت جداره باید از یک ثابت k بزرگتر باشد در نظر گرفت:

$$\frac{(R_o + R_i)}{2(R_o - R_i)} \geqq k$$

معمولاً $k \geq 20$ تقریب خوبی برای جدار نازك بودن می دهد.

۲.۶.۸ طرّاحی خرپای سه میله ای متقارن با وزن مینیمم

به عنوان مثالی از یک مسأله طرّاحی کمی پیچیده تر، سازهٔ سه میله ای شکل ۲.۵ [سان، آرورا و هاگ[1]، ۱۹۷۵؛ هاگ و آرورا[2]، ۱۹۷۹] را درنظر بگیرید. این سازه از زمانی که توسط اشمیت[3][۱۹۶۰] معرفی شده در بررسیهای بی شماری مورد استفاده قرار گرفته است. سازه باید برای حجم مینیمم (یا، به طور معادل، جرم مینیمم) طرّاحی شود تا نیروی P را تحمل کند. باید قیود فن آورانه و عملکردی متنوعی مانند شکستن اعضا، کمانش اعضا، شکست در اثر انحراف شدید گرهٔ ۴، و شکست در اثر تشدید، وقتی که بسامد طبیعی سازه پایین تر از حد مورد نظر است، برآورده شود. این مسأله از مسأله قبل کمی پیچیده تر است. برای به دست آوردن نیروهای اعضا، تغییر مکان گرهها و بسامدهای طبیعی باید از روشهای تحلیلی پیشرفته استفاده کرد.

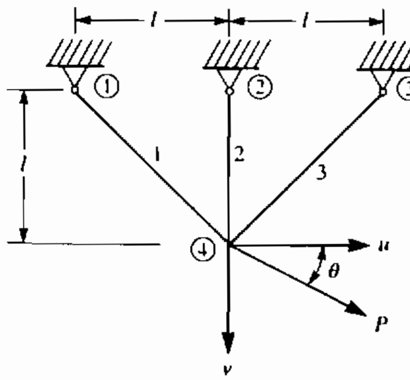
سازه باید متقارن باشد. بنابراین متغیّرهای طرّاحی زیر تعریف می شوند:

A_1 = مساحت سطح مقطع اعضای ۱ و ۳، و

A_2 = مساحت سطح مقطع عضو ۲.

---

1. Sun, Arora and Haug
2. Haug and Arora
3. Schmit



شکل ۲.۵ خرپای سه میله‌ای

بسته به شکل سطح مقاطع که در شکل ۲ . ۲ نشان داده شده است، اختیار کردن متغیّرهای طرّاحی دیگری برای مسأله امکان پذیر است . میزان شایستگی هر طرح حجم مصالح سازه است . بنابراین، حجم کل مصالح سازه (طول × مساحت = حجم یک عضو) تابع هزینه است،

$$\text{حجم} = l(2\sqrt{2}\,A_1 + A_2) \qquad \text{(الف)}$$

در حالی که l در شکل ۵ . ۲ تعریف شده است .

برای تعریف توابع قیود مسأله، باید تنشها، انحرافها و بسامدهای طبیعی اصلی را برای سازه محاسبه کنیم. اگر از روش تحلیل سازه‌های نامعین استفاده کنیم، تغییر مکان u و v گره ۴ خرپا عبارت است از

$$u = \frac{\sqrt{2}\,lP_u}{A_1 E} \qquad \text{(ب)}$$

$$v = \frac{\sqrt{2}\,lP_v}{(A_1 + \sqrt{2}\,A_2)E} \qquad \text{(پ)}$$

که در آن E ضریب ارتجاعی مصالح، و P_u و P_v مؤلفه‌های افقی و عمودی بار P است .

$$P_u = P\cos\theta; \qquad P_v = P\sin\theta$$

تنشهای σ_1 ، σ_2 و σ_3 در اعضای ۱ ، ۲ و ۳ در اثر بار P از نیروی اعضا محاسبه می شوند

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{P_u}{A_1} + \frac{P_v}{(A_1+\sqrt{2}\,A_2)}\right] \qquad \text{(ت)}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}\,P_v}{(A_1+\sqrt{2}\,A_2)} \qquad \text{(ث)}$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{P_v}{(A_1+\sqrt{2}\,A_2)} - \frac{P_u}{A_1}\right] \qquad \text{(ج)}$$

بسیاری از سازه ها به عنوان پایه های ماشینهای دوار به کار می روند و یا بارهای دینامیکی دیگری را تحمل می کنند. این پایه ها با بسامد مشخصی که به عنوان *بسامد طبیعی* شناخته می شود مرتعش می شوند. این یک خاصیت ذاتی دینامیکی هر سازه است. حالتهای ارتعاشی مختلفی می تواند باشد که هرکدام بسامد مخصوص به خود دارند. وقتی یک بسامد ارتعاشی با بسامد ماشین دوار منطبق شود تشدید اتفاق می افتد که باعث شکست خطرناکی در سازه می شود. بنابراین منطقی است که خواسته باشیم هیچ بسامدی از بسامدهای ارتعاشی، نزدیک بسامد ماشین دوار نباشد. حالت ارتعاشی مربوط به پایین ترین بسامد طبیعی مهم است، زیرا اوّل آن حالت تحریک می شود. این موضوع اهمیت دارد که برای اجتناب از امکان تشدید باید پایین ترین (اساسی ترین) بسامد طبیعی را تا حد امکان افزایش داد. این کار باعث سخت تر شدن سازه نیز می گردد. بسامدهای سازه با حل یک مسأله مقادیر ویژه که در آن خواص سختی و جرم وجود دارد به دست می آید. پایین ترین مقدار ویژه ζ که به پایین ترین بسامد طبیعی سیستم خرپای سه میله ای متقارن بستگی دارد، با استفاده از یک مدل جرم متوافق محاسبه شده (سان و دیگران[1]، ۱۹۷۵) و عبارت است از:

$$\zeta = \frac{3EA_1}{[\rho l^2(4A_1+\sqrt{2}\,A_2)]} \qquad \text{(چ)}$$

که در آن ρ ، چگالی (جرم بر واحد حجم) است. این رابطه تحلیل سازه را کامل می کند. اکنون می توانیم عبارات مختلفی را برای بیان قیود به کار ببریم.

سازه برای استفاده در دو کاربرد طرّاحی می شود. در هر کاربرد، بارهای مختلفی را تحمل می کند. آنها را شرایط بار سازه می نامند. در کاربری فعلی، اگر دو شرط باری زیر برای سازه در نظر گرفته شود یک سازه متقارن به دست خواهد آمد. اولین بار تحت زاویهٔ θ اعمال

1. Sun et al.

می شود و دومی در زاویهٔ $(\pi - \theta)$ ، که θ در شکل ۵ . ۲ نشان داده شده است. اگر ما اجازه دهیم عضو ۱ و ۳ مثل هم باشند، آن گاه از شرایط باری دوم می توان صرف نظر کرد. بنابراین، یک بار که با زاویهٔ θ $(0 \le \theta \le 90)$ اثر می کند در نظر می گیریم.

دقت کنید که از معادله های (ب) و (ج) معلوم می شود σ_1 همیشه از σ_3 بزرگتر است. بنابراین فقط نیاز به اعمال قیود σ_1 و σ_2 داریم. اگر σ_a تنش مجاز مصالح باشد، قیود تنش ($\sigma_1 \le \sigma_a$ و $\sigma_2 \le \sigma_a$) عبارتند از

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{P_u}{A_1}+\frac{P_v}{(A_1+\sqrt{2}\,A_2)}\right] \leqq \sigma_a \qquad \text{(ح)}$$

و

$$\frac{\sqrt{2}\,P_v}{(A_1+\sqrt{2}\,A_2)} \leqq \sigma_a \qquad \text{(خ)}$$

انحرافهای افقی و عمودی گره ۴ باید به ترتیب در محدودهٔ Δ_u و Δ_v باشد ($u \le \Delta_u,\ v \le \Delta_v$) . از معادله های (ب) و (پ)، قیود انحراف عبارتند از

$$\frac{\sqrt{2}\,lP_u}{A_1E} \leqq \Delta_u \qquad \text{(د)}$$

و

$$\frac{\sqrt{2}\,lP_v}{E(A_1+\sqrt{2}\,A_2)} \leqq \Delta_v \qquad \text{(ذ)}$$

همچنان که در بالا بحث شد، بسامد طبیعی اساسی سازه باید از یک بسامد معین ω_0 (هرتز Hz[1]) بیشتر باشد. این قید برحسب جملات پایین ترین مقدار ویژه سازه می تواند نوشته شود. مقدار ویژه مربوط به بسامد ω_0(Hz) عبارت است از $(2\pi\omega_0)^2$. پایین ترین مقدار ویژه ζ سازه باید بیشتر از $(2\pi\omega_0)^2$ باشد. بنابراین، از معادلهٔ (چ)، قید بسامد می شود

$$\frac{3EA_1}{[\rho l^2(4A_1+\sqrt{2}\,A_2)]} \geqq (2\pi\omega_0)^2 \qquad \text{(ر)}$$

برای اعمال قید کمانش برای اعضای تحت فشار، وابستگی گشتاور ماند I با مساحت سطح مقطع اعضا باید مشخص شود. یک شکل با کاربری عمومی زیاد $I = \beta A^2$ است که A

1. Hertz

مساحت سطح مقطع و β یک ثابت بی بعد است. این رابطه وقتی سطح مقطع ثابت بوده و ابعادش با یک نسبت کم و یا زیاد شوند صادق است. نیروی محوری عضو iام عبارت است از $F_i = A_i\sigma_i$، در حالی که ۳، ۲، ۱ = i و نیروی کششی را مثبت فرض می کنیم. اعضای خرپا ستونهایی هستند که انتهای آنها لولاست. بنابراین، بار کمانش برای عضو iام عبارت است از $\pi^2 EI_i/l_i^2$ که در آن l_i طول عضو i ام است [کراندال، دال و لاردنر[1]، ۱۹۷۸]. قیود کمانش به شکل $-F_i \le \pi^2 EI_i/l_i^2$ که در آن ۳، ۲، ۱ = i است بیان می شود. علامت منفی F_i برای مثبت ساختن طرف چپ قیدها وقتی که عضو در فشار است به کار می رود. نیازی نیست که قیود کمانش را برای اعضایی که در کشش هستند اعمال کرد. با رابطه سازی گذشته، قید کمانش برای اعضایی که در کشش هستند به طور خودکار برآورده می شود. اگر کمیتهای مختلف را جایگزین کنیم، قید کمانش اعضا به صورت زیر در می آیند

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{P_u}{A_1}+\frac{P_v}{(A_1+\sqrt{2}A_2)}\right] \leqq \frac{\pi^2 E\beta A_1}{2l^2} \qquad \text{(ز)}$$

$$-\frac{\sqrt{2}P_v}{(A_1+\sqrt{2}A_2)} \leqq \frac{\pi^2 E\beta A_2}{l^2} \qquad \text{(ژ)}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{P_v}{(A_1+\sqrt{2}A_2)}-\frac{P_u}{A_1}\right] \leqq \frac{\pi^2 E\beta A_1}{2l^2} \qquad \text{(س)}$$

دقت کنید که در عبارات گذشته بار کمانش در طرف راست به مساحت عضو تقسیم شده. همچنین قیدهای معادلهٔ (ز) و (ژ) به طور خودکار برآورده شده اند، زیرا آن دو عضو همیشه در کشش هستند (با توجه به جهت نیرویی که در شکل ۵.۲ نشان داده شده، همیشه نیرو در آنها مثبت است).

بالاخره، A_1 و A_2 هر دو باید نامنفی باشند یعنی $A_1, A_2 \ge 0$. در بسیاری از مسائل طرّاحی عملی هر عضو باید یک مساحت مینیمم، $A_{\min}$ داشته باشد. قید مربوط به مینیمم مساحت می تواند به شکل زیر نوشته شود

$$A_1, A_2 \geqq A_{\min} \qquad \text{(ش)}$$

پس مسأله طرّاحی بهین عبارت است از یافتن مساحتهای مقطع $A_1, A_2 \ge A_{\min}$ طوری که تحت قیود معادله های (ح) تا (ش)، حجم، معادلهٔ (الف)، مینیمم گردد. این مسأله نسبتاً کوچک ۱۰ قید نامساوی و ۲ متغیّر طرّاحی دارد.

---

1. Crandall, Dahl and Lardner

۲.۷ یك الگوی كلی ریاضی برای طرّاحی بهین

۲.۷.۱ الگوی بهینه سازی طرّاحی

در بخش گذشته، مسائل طرّاحی مختلفی رابطه سازی شدند. تمامی مسائل یک تابع هزینه داشتند که می توانست برای مقایسه طرّاحیهای متنوع سیستم استفاده شود. اغلب مسائل طرّاحی نیز باید قیود مشخصی را برآورده کنند. بعضی از مسائل طرّاحی فقط قیود نامساوی، برخی فقط قیود مساوی و تعدادی هم قیود مساوی و هم قیود نامساوی دارند. می توانیم یک الگوی کلی ریاضی برای طرّاحی بهین تعریف کنیم که همهٔ حالات را در بر گیرد. ابتدا یک شکل استاندارد الگو که در سراسر کتاب مطرح می شود بیان خواهد شد. آن گاه تبدیل مسائل مختلف به شکل استاندارد تشریح می شود.

۲.۷.۱.۱ الگوی بهینه سازی طرّاحی استاندارد. الگوی بهینه سازی طرّاحی استاندارد به شکل زیر تعریف می شود: n بردار $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ از متغیّرهای طرّاحی را بیابید که تابع هزینه

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (۲.۱۰)$$

را مینیمم کند مشروط به p قید مساوی

$$h_j(\mathbf{x}) \equiv h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \qquad j = 1 \text{ to } p \qquad (۲.۱۱)$$

و m قید نامساوی

$$g_i(\mathbf{x}) \equiv g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } m \qquad (۲.۱۲)$$

در حالی که p تعداد کل قیود مساوی و m تعداد کل قیود نامساوی است.

توجه کنید که کرانهای بر متغیّرهای طرّاحی مثل $x_i \geq 0,\ i = 1 \text{ to } n$، یا $x_{il} \leq x_i \leq x_{iu},\ i = 1 \text{ to } n$ که در آن x_{il} و x_{iu} کوچکترین و بزرگترین مقدار مجاز x_i است در معادله های قیود (۲.۱۲) ملحوظ شده اند. در روشهای عددی این قیود می توانند به شکل اولیه راحت تر اعمال شوند تا به شکل معادلات (۲.۱۲). به هر حال در بحث مفاهیم اساسی و نظریه ها ما فرض خواهیم کرد که آنها در معادله های قیود نامساوی (۲.۱۲) در نظر گرفته شده اند.

مسائل بهینه سازی طرّاحی تمامی زمینه های مهندسی می توانند به الگوی استاندارد تبدیل شوند. برای مثال، با استفاده از علایم استاندارد تمامی مسائلی که در بخش ۲.۶ رابطه سازی شدند می توانند به شکل معادله های (۲.۱۰) تا (۲.۱۲) تبدیل شوند. بنابراین

الگوی استاندارد کاملاً عمومی است . *مهم است به این نکته توجه کنید که مسائل طرّاحی زمینه های مختلف وقتی به الگوی استاندارد تبدیل شوند همگی شبیه به هم هستند . بنابراین ، روش حل مشابهی دارند ، همان طور که در این کتاب تشریح می شود . پس مفاهیم و روشهای کتاب در همهٔ زمینه ها به کار می روند .*

۲.۷.۱.۲ بازبینی الگوی استاندارد. نکات متعددی باید در مورد الگوی استاندارد به وضوح درك شوند :

۱ . اوّل از همه ، روشن است که توابع $f(\mathbf{x})$ ، $h_i(\mathbf{x})$ و $g_i(\mathbf{x})$ باید به همه و یا بعضی از متغیّرهای طرّاحی بستگی داشته باشند . فقط در آن صورت است که آنها برای مسأله طرّاحی معتبرند . توابعی که به هیچ یک از متغیّرهای طرّاحی بستگی ندارند به مسأله ارتباطی ندارند و با اطمینان می توان از آنها صرف نظر کرد .

۲ . تعداد قیود مساوی مستقل باید کمتر و یا حداکثر مساوی تعداد متغیّرهای طرّاحی باشند ، یعنی $p \le n$. وقتی $p > n$ است ، ما یک سیستم معادلات فرا معین[1] داریم . در این صورت یا چند قید مساوی اضافی داریم (به طور خطی به بقیه قیود وابسته اند) ، یا رابطه سازی متناقض و ناهماهنگ است . در صورت اول ، قیود اضافی باید حذف شوند و اگر $p < n$ شد جواب بهین برای مسأله امکان پذیر است . در صورت دوم ، جوابی برای مسأله ممکن نیست و طراح باید رابطه سازی را دوباره بازبینی کند . وقتی $p = n$ است ، بهینه کردن سیستم لازم نیست ، زیرا حل معادلات قیود مساوی تنها نامزد مسأله طرّاحی بهین است . این جوابها می تواند با استفاده از روشهای مناسب حل معادلات به دست آید .

۳ . *توجه کنید که تمامی قیود مساوی معادلهٔ (۲ . ۱۲) به صورت "≤ 0" نوشته شده اند .* این استاندارد در سراسر کتاب مراعات شده است . در مسائل نمونه بخش ۲ . ۶ ، ما هر دو نوع قیود "نوع$\le$" و همچنین "نوع$\ge$" را به کار بردیم . "نوع$\le$" می تواند با انتقال عبارات طرف راست به طرف چپ به شکل استاندارد معادلهٔ (۲ . ۱۲) تبدیل شود . "نوع$\ge$" نیز می تواند با ضرب کردن ۱- در آنها به شکل "$\le$" تبدیل شود ، همچنان که در بخش ۲ . ۷ . ۳ تشریح می شود . دقت کنید هرچند در مورد تعداد قیود مساوی مستقل محدودیتی وجود دارد در مورد قیود *نامساوی محدودیتی نیست* . بعضی از نامساویها ممکن است در طرح بهین به طور حدی (مرزی) برآورده شوند . تعداد قیود فعال (آنهایی که با مساوی ارضا

---

1. overdetermined

شده‌اند) در بهین معمولاً کمتر و یا حداکثر مساوی تعداد متغیّرهای طرّاحی است.

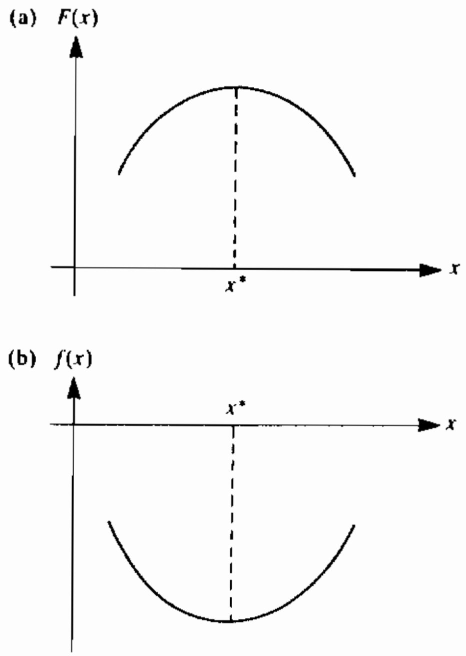
۴ . بعضی از متغیّرهای طرّاحی ممکن است قیدی نداشته باشند. اینها مسائل بهینه سازی نامقید نامیده می‌شوند، نظریه بهینه سازی نامقید مدتی است که شناخته شده است و در فصل (۳) تشریح می‌شود. نظریه بهینه سازی مقید جدیدتر است و آن نیز در فصل (۳) تشریح می‌شود.

۵ . اگر تمامی توابع $f(\mathbf{x})$ ، $h_i(\mathbf{x})$ و $g_i(\mathbf{x})$ برحسب متغیّرهای طرّاحی $\mathbf{x}$ خطی باشند، آن گاه مسأله را یک مسأله برنامه ریزی خطی می‌نامند. اگر یکی از این توابع غیرخطی باشد مسأله را مسأله برنامه ریزی غیرخطی می‌نامند. مسائل برنامه ریزی خطی نسبت به مسائل برنامه ریزی غیرخطی به طور کلی ازنظر حل ساده‌ترند. روشهای برنامه ریزی خطی بخوبی تدوین شده‌اند و یکی از آنها در فصل (۴) تشریح می‌شود.

۶ . *به این نکته مهم باید توجه کرد که اگر تابع هزینه را با ضرب یک عدد مثبت در آن کوچک یا بزرگ کنیم، طرح بهین تغییری نمی‌کند* ولی مقدار تابع هزینه بهین مسلماً تفاوت خواهد داشت. همچنین می‌توان بدون آن که طرح بهین را تحت تأثیر قرار داد هر عدد ثابتی را به تابع هزینه اضافه کرد. به طور مشابه قیود نامساوی را می‌توان با ضرب در یک عدد مثبت و قیود مساوی را با ضرب در هر عددی بزرگ یا کوچک کرده و تغییر داد. این کار ناحیهٔ قابل قبول را تغییر نمی‌دهد و بنابراین جواب بهین نیز بدون تغییر می‌ماند. تمامی تبدیلهای گذشته، به هرحال مقدار ضرایب لاگرانژ (تعریف شده در فصل (۳)) را همچنان که در بخش ۷ . ۳ خواهیم دید تغییر می‌دهد.

۲.۷.۲ رفتار با مسائل ماکزیمم سازی

الگوی طرّاحی عمومی تنها برای مسائل مینیمم سازی تدوین شده است. این محدودیتی نیست زیرا ماکزیمم سازی تابع $F(\mathbf{x})$ مثل مینیمم سازی تابع تبدیل یافته $f(\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x})$ است. برای دیدن این موضوع به شکل ترسیمی، منحنی تابع $F(\mathbf{x})$ را که در شکل (a) ۶ . ۲ نشان داده شده در نظر بگیرید. تابع $F(\mathbf{x})$ مقدار ماکزیمم خود را در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ دارد. حال رسم تابع $f(\mathbf{x}) = -F(\mathbf{x})$ را که در شکل (b) ۶ . ۲ نشان داده شده در نظر بگیرید. روشن است که $f(\mathbf{x})$ انعکاس $F(\mathbf{x})$ نسبت به محور x است. همچنین با توجه به رسم منحنیها روشن است که $f(\mathbf{x})$ در همان نقطه $\mathbf{x}^*$ که مقدار ماکزیمم تابع $F(\mathbf{x})$ اتفاق می‌افتد مینیمم است. بنابراین مینیمم سازی تابع $f(\mathbf{x})$ معادل ماکزیمم سازی تابع $F(\mathbf{x})$ است.



شکل ۲.۶ نقطه ماکزیمم‌ساز $F(x)$ = نقطه مینیمم‌ساز $-F(x)$

۲.۷.۳ رفتار با قیود " نوع بزرگتری"

توجه کنید که الگوی طرّاحی عمومی تنها قیود نامساوی "نوع $\leq$" را در نظر می گیرد. بسیاری از مسائل طرّاحی قیود نامساوی "نوع $\geq$" دارند. این قیود می توانند بدون مشکل به شکل استاندارد تبدیل شوند. یک قید "نوع $\geq$" به شکل

$$G_j(\mathbf{x}) \geqq 0$$

معادل نامساوی "نوع $\leq$" زیر است

$$g_j(\mathbf{x}) \equiv -G_j(\mathbf{x}) \leqq 0$$

بنابراین ما می توانیم هر قید "نوع $\geq$" را در ۱- ضرب کنیم تا آن را به "نوع $\leq$" تبدیل کنیم.

پس، بسیاری از مسائل طرّاحی می توانند توسط الگوی عمومی نمایش داده شوند.

۲.۷.۴ مجموعه قید

عبارت "مجموعه قید" در سراسر کتاب استفاده خواهد شد. یک مجموعه قید برای مسأله طرّاحی عبارت است از مجموعه تمامی طرّاحیهای قابل قبول. حرف S برای نمایش مجموعه قید استفاده خواهد شد. ازنظر ریاضی، مجموعه S جمع نقاط طرّاحی است که تمامی قیود را برآورده می کنند :

$$S = \{\mathbf{x} \mid h_j(\mathbf{x}) = 0; \quad j = 1 \text{ to } p; \quad g_i(\mathbf{x}) \leqq 0; \quad i = 1 \text{ to } m\} \qquad (۲.۱۳)$$

توجه کنید که S نمایانگر مجموعه طرّاحیهای قابل قبول است و گاهی به عنوان ناحیه قابل قبول نیز به آن اشاره می شود.

مهم است توجه کنید که ناحیه قابل قبول معمولاً وقتی قیود بیشتری به مسأله طرّاحی اضافه شوند کوچکتر شده و وقتی بعضی از قیود حذف شوند بزرگتر می شود. وقتی ناحیهٔ قابل قبول کوچکتر شود، تعداد طرحهای ممکن که می تولند تابع هزینه را بهینه کند کم می شود، یعنی تعداد کمتری طرح قابل قبول وجود دارد. در این حالت مقدار مینیمم تابع هزینه به احتمال زیاد افزایش می یابد. این اثرات وقتی که بعضی از قیود حذف شوند برعکس می شوند. این مسأله ازنظر طرّاحی عملی قابل توجه است و باید کاملاً درك شود.

۲.۷.۵ قیود فعال /غیرفعال / نقض شده

بسیار اتفاق می افتد که ما به قیدی اشاره می کنیم که فعال، سفت و محکم، غیرفعال یا نقض شده است. این عبارات را به روشنی تعریف می کنیم. یک قید نامساوی $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ را در نقطهٔ طرّاحی x^* فعال می گویند اگر به طور مساوی برآورده شود، یعنی $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$. به آن قید محکم یا سفت نیز گفته اند. برای یک طرح قابل قبول، قید نامساوی ممکن است فعال یا غیرفعال باشد. ولی برای طرحهای قابل قبول قیود مساوی همگی فعالند.

قید نامساوی $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ را در نقطهٔ طرّاحی $\mathbf{x}^*$ غیرفعال می گویند اگر اکیداً برآورده شود، یعنی $g_i(\mathbf{x}^*) < 0$. قید نامساوی $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ را در نقطهٔ طرّاحی $\mathbf{x}^*$ نقض شده می گویند اگر مقدارش مثبت باشد، یعنی $g_i(\mathbf{x}^*) > 0$. قید مساوی $h_i(\mathbf{x}) = 0$ را در نقطهٔ طرّاحی $\mathbf{x}^*$ نقض شده می گویند اگر $h_i(\mathbf{x}^*)$ صفر نباشد. توجه کنید که با این تعاریف، یک قید مساوی در یک نقطه طرّاحی یا فعال و یا نقض شده است.

۲.۷.۶ متغیّرهای طرّاحی صحیح و گسسته

تاکنون ما در الگوی عمومی فرض کرده ایم x_i هر مقدار عددی را در ناحیهٔ قابل قبول می تواند دارا باشد. بسیاری از مواقع بعضی از متغیّرها باید مقادیر صحیح و یا گسسته داشته باشند. در مسائل طرّاحی مهندسی بسیاری این نوع متغیّرها وجود دارند. قبلاً در بخشهای ۲.۶.۳ و ۲.۶.۴ مسائلی را که متغیّرهای طرّاحی صحیح داشتند آوردیم. قبل از بحث چگونگی حل آنها اجازه بدهید منظورمان را از متغیّرهای صحیح و گسسته تعریف کنیم.

یک متغیّر طرّاحی را گسسته گویند اگر مقدار آن را باید از یک مجموعه مقادیر محدود انتخاب کرد. برای مثال، ضخامت ورقها را باید طوری انتخاب کرد که در بازار موجود باشد یعنی، $\frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۴}, \frac{۳}{۸}, \frac{۱}{۲}, \frac{۵}{۸}, \frac{۳}{۴}, ۱, \ldots$ و غیره. به طور مشابه برای این که سازه با قیمت ارزانتری ساخته شود باید اعضا از تکه های بریده شده موجود ساخته شوند.

یک متغیّر صحیح، چنان که از نام آن پیداست باید مقادیر صحیح داشته باشد؛ مانند: تعداد الوارهایی که باید حمل شوند، تعداد مهره هایی که باید استفاده شوند، تعداد کالایی که باید فرستاده شود و غیره.

تاکنون روشهای مختلفی برای چگونگی برخورد بامتغیّرهای صحیح مطرح شده است. بسیاری از آنها پیچیده بوده و کار محاسباتی بسیار زیادی را می طلبند. آنها مورد اطمینان نیز نیستند. بنابراین، چند روش ساده و عملی برای برخورد با مسائل برنامه ریزی صحیح و گسسته بحث می شوند.

به عبارتی متغیّرهای صحیح و گسسته قیود اضافی به مسأله طرّاحی می افزایند. بنابراین همچنان که قبلاً گفته شد مقدار بهینهٔ تابع هزینه به احتمال زیاد با حضور آن قیود به نسبت متغیّرهای پیوسته افزایش می یابد. اگر تمامی متغیّرهای طرّاحی را به عنوان متغیّرهای پیوسته در نظر بگیریم، مقدار مینیمم تابع هزینه مقدار کمتری را نسبت به متغیّرهای طرّاحی گسسته خواهد داشت. این موضوع تصویری از بهترین جواب بهین در صورتی که همه متغیّرهای طرّاحی پیوسته می بودند می دهد. مقدار تابع هزینه بهین وقتی مقادیر گسسته را برای متغیّرهای طرّاحی در نظر بگیریم به احتمال زیاد افزایش می یابد. پس اولین راه حل مسأله این است که متغیّرهای طرّاحی را پیوسته فرض کرده و مسأله را حل کنیم. سپس نزدیکترین مقادیر گسسته/ صحیح را برای متغیّرهای طرّاحی در نظر گرفته و طرح را برای قابل قبول بودن امتحان می کنیم. با چند آزمون و خطا، بهترین طرح قابل قبولی که به جواب بهین پیوسته نزدیکتر باشد به دست می آید.

توجه کنید که ممکن است ترکیبات متعددی از متغیّرها طرحهای قابل قبولی را به وجود بیاورند.

راه دوم استفاده از یک فرآیند بهینه سازی عددی سازگار است. ابتدا حل بهین با متغیّرهای پیوسته به دست می‌آیند. آن گاه فقط متغیّرهایی را که به مقادیر گسسته یا صحیح نزدیک هستند آن مقادیر را می‌گیرند، سپس آنها را ثابت فرض کرده و مسأله دوباره بهینه می‌شود. این مراحل تا این که همهٔ متغیّرها مقادیر مناسبی را بگیرند ادامه می‌یابد. طرح نهایی که بدین ترتیب به دست می‌آید قابل قبول است. برای بهبود بخشیدن به مقدار تابع هزینه بهین این روش می‌تواند چندبار تکرار شود. این مراحل توسط آرورا و سنج[1] [۱۹۸۸] تشریح شده است.

هر دو راه حل به محاسبات بیشتری نیاز دارند و مقدار مینیمم واقعی را تضمین نمی‌کنند. در عین حال آنها بسیار ساده‌اند و به روش یا نرم‌افزار دیگری نیاز ندارند.

۲.۸ بهینه سازی ترسیمی

بعضی از مسائل طرّاحی بهین با بازبینی ترسیمی آنها می‌توانند حل شوند. تمامی توابع قیود را می‌توان رسم کرد و مجموعه قید (مجموعه طرحهای قابل قبول) برای مسأله را مشخص کرد. آن گاه خطوط تراز تابع هزینه رسم شده و طرح بهین با نگاه کردن به ترسیمه به دست می‌آید. چون توابع باید بر کاغذ رسم کشیده شوند ما می‌توانیم مسائلی را با دو متغیّر طرّاحی و یا حداکثر سه متغیّر طرّاحی حل کنیم. برای سه متغیّر طرّاحی باید سطوح رسم شوند که رسم آنها بسیار خسته کننده است. ما می‌توانیم تمامی مفاهیم هندسی را با مسائل دو متغیّره معرفی کنیم. بنابراین تنها مسائل دو متغیّره در این بخش مورد توجه قرار می‌گیرند. تمامی عبارات و مفاهیم معرفی شده هندسی قابل کاربرد برای مسائل کلی‌تر هستند.

۲.۸.۱ مسألهٔ ماکزیمم‌سازی سود

کارخانه‌ای دو ماشین A و B را تولید می‌کند. مواد در دسترس این اجازه را می‌دهد که یا 28 A یا 14 B ماشین در روز ساخته شود. بخش فروش می‌تواند 14 A و یا 24 B ماشین را به فروش برساند. امکانات حمل و نقل تنها می‌تواند ۱۶ ماشین را در روز جابه جا کند. کارخانه می‌تواند از فروش هر ماشین A، ۴۰۰ دلار و هر ماشین B؛ ۶۰۰ دلار سود ببرد. برای سوددهی بیشتر کارخانه باید چند ماشین A و B در روز تولید کند؟

---

1. Arora and Tseng

متغیّرهای طرّاحی برای این مسأله عبارتنداز تعدادماشین A که در روزساخته می‌شود= x_1، تعداد ماشین B که در روز ساخته می شود= x_2 . هدف عبارت است از ماکزیمم کردن سود که به صورت زیر می تواند بیان شود :

$$\text{سود} = 400x_1 + 600x_2 \qquad \text{(الف)}$$

اگر به شکل استاندارد مینیمم سازی بنویسیم، تابع هزینه مسأله عبارت است از

$$f(x_1, x_2) = -(400x_1 + 600x_2) \qquad \text{(ب)}$$

قیود طرّاحی روی ظرفیت تولید محدودیت افراد بخش فروش و تجهیزات حمل و نقل می باشند. قید تجهیزات حمل و نقل را می توان بسادگی نوشت که عبارت است از

$$x_1 + x_2 \leqq 16 \qquad \text{(قید حمل و نقل)} \qquad \text{(پ)}$$

قیود تولید و فروش کمی پیچیده هستند. ابتدا محدودیت ساخت را در نظر بگیرید. اگر کارخانه تعداد x_1 از ماشین A تولید کند فرض می شود مواد و ماشین‌آلات باقی مانده قادرند به نسبت ذکر شده برای ساخت ماشین B استفاده شوند. بنابراین، این قید را می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{x_1}{28} + \frac{x_2}{14} \leqq 1 \qquad \text{(قید ساخت)} \qquad \text{(ت)}$$

به طور مشابه، قید امکانات فروش را می توان به شکل زیر بیان کرد

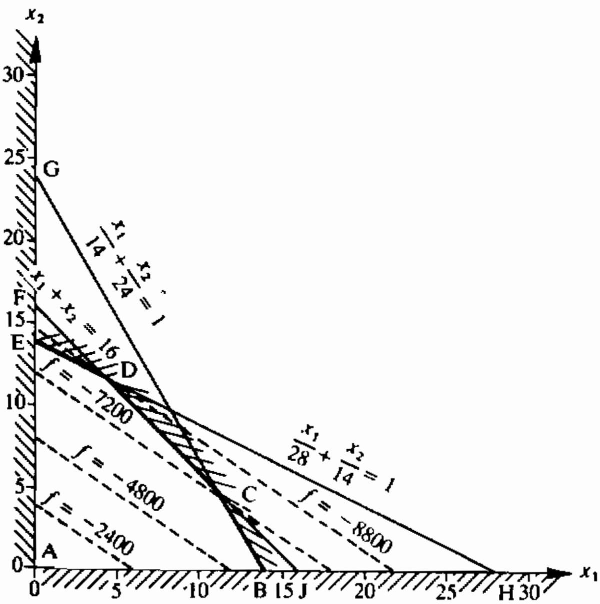
$$\frac{x_1}{14} + \frac{x_2}{24} \leqq 1 \qquad \text{(محدودیت بخش فروش)} \qquad \text{(ث)}$$

بالاخره، متغیّرهای طرّاحی باید نامنفی باشند، یعنی $x_1, x_2 \geq 0$ و یا به شکل استاندارد

$$-x_1 \leqq 0; \qquad -x_2 \leqq 0 \qquad \text{(ج)}$$

دقت کنیدکه برای این مسأله، حتی اگریکی ازمتغیّرهای طرّاحی صفرباشدرابطه سازی معتبراست.

این مسأله دو متغیّر طرّاحی و پنج قید نامساوی دارد. تمامی توابع برحسب متغیّرهای x_1 و x_2 خطی اند. بنابراین مسأله یک مسأله برنامه ریزی خطی است. قیود مسأله در شکل ۲.۷ رسم شده اند. چون $x_1, x_2 \geq 0$ است، طرح بهین باید در ربع اول قرار داشته باشد. خطوط J–F ، H–E و B–G به ترتیب نشانگر قیود (پ)، (ت) و (ث) می باشند. تمامی نقاط روی



شکل ۲.۷ حل ترسیمی مسأله ماکزیمم‌سازی سود. نقطهٔ بهین = (۴، ۱۲) ؛ هزینه بهین = ۸۸۰۰-

چند ضلعی ABCDE و یا داخل آن طرحهای قابل قبول (مجموعه قید S) را تشکیل می دهند. سطح ABCDE را ناحیهٔ قابل قبول نیز می نامند. مکمل آن ـ مجموعه نقاط خارج از ناحیه ABCDE ـ ناحیه غیرقابل قبول نامیده می شود. در شکل ۲.۷ ، ناحیه‌ای که پشت آن هاشور خورده ناحیه قابل قبول است. این علامت در سراسر کتاب استفاده خواهد شد. وقتی ناحیهٔ قابل قبول مشخص شد، بهترین طرح قابل قبول (بهین) را می توان تعیین کرد. ما باید خطوط تراز تابع هزینه (خطوط هزینه ثابت) را در ناحیهٔ قابل قبول رسم کنیم. سپس با دیدن شکل، نقطهٔ مینیمم تعیین می گردد. در حالت کلی، باید در ناحیه قابل قبول تا آن جا که تابع هزینه بهبود می یابد (کم می شود) خطوط هزینه ثابت رسم شوند. خطوط هزینه ثابت ۲۴۰۰- ، ۴۸۰۰- و ۸۸۰۰- در شکل ۲.۷ رسم شده اند. می توان مشاهده کرد که نقطهٔ D یک طرح قابل قبول با کمترین مقدار تابع هزینه است. پس بهترین روش برای کارخانه تولید 4 A و 12 B ماشین است تا سودش ماکزیمم شود. سود ماکزیمم عبارت است از ۸۸۰۰ دلار. قیود معادله های (پ) و (ت) در بهین فعال هستند. اینها محدودیتهای ساخت و حمل و نقل هستند. کارخانه می تواند برای سود بیشتر در جهت رفع این قیدها اقدام کند.

دقت کنید در این مثال، متغیّرهای طرّاحی باید صحیح باشند. خوشبختانه جواب بهین برای متغیّرها مقادیر صحیح داده است. اگر چنین نبود، باید روشهای پیشنهادی بخش ۲.۷.۶ را به کار می بردیم.

برای این مثال، تمامی توابع نسبت به متغیّرهای طرّاحی خطی هستند. بنابراین تمام خطوط در شکل ۲.۷ خطوط مستقیمی هستند. در حالت کلی، توابع مسألهٔ طرّاحی ممکن است خطی نباشند. در چنین حالتی، برای مشخص کردن ناحیه قابل قبول باید منحنیها رسم شوند. برای تعیین طرح بهین باید منحنیهای هزینه ثابت رسم شوند. برای رسم توابع غیرخطی باید جدولهای عددی x_1 برحسب x_2 تولید شوند. این نقاط روی صفحه مشخص شده و توسط منحنیهای صافی به هم متصل می شوند.

۲.۸.۲ مساله طرّاحی چند جوابه

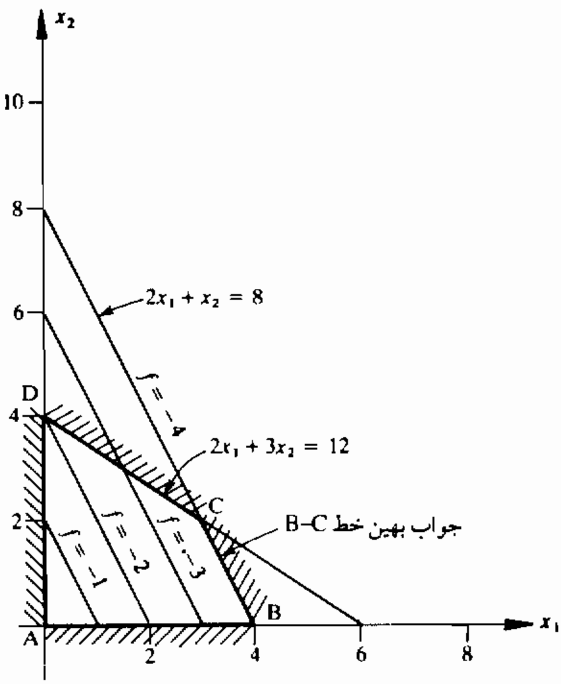
بعضی از مسائل چندین طرح بهین دارند. این موقعیت وقتی اتفاق می افتد که یک قید موازی تابع هزینه باشد. اگر قید در بهین فعال باشد، آن گاه برای مسأله جوابهای متعددی وجود دارد. برای تشریح این موقعیت مسأله طرّاحی زیر را مورد توجه قرار می دهیم. تابع $f = -x_1 - 0.5x_2$ را با قیدهای

$$2x_1 + 3x_2 \leqq 12$$
$$2x_1 + x_2 \leqq 8$$
$$-x_1 \leqq 0; \qquad -x_2 \leqq 0$$

مینیمم کنید. قید دوم مسأله موازی تابع هزینه است. بنابراین امکان طرحهای بهین چندگانه وجود دارد. شکل ۲.۸ حل ترسیمی مسأله را نشان می دهد. چنان که مشاهده می شود هر نقطه روی خط B–C یک طرح بهین است.

۲.۸.۳ مسأله با جواب بی کران

بعضی از مسائل طرّاحی جوابهای محدود ندارند. این موقعیت وقتی پیش می آید که یک قید را فراموش کرده و یا مسأله را غلط رابطه سازی کرده باشیم. برای تشریح چنین موقعیتی مسأله طراحی زیر را در نظر می گیریم. تابع $x_1 - 2x_2$ را با قیود



شکل ۲.۸ مثال مسأله با جواب چندگانه

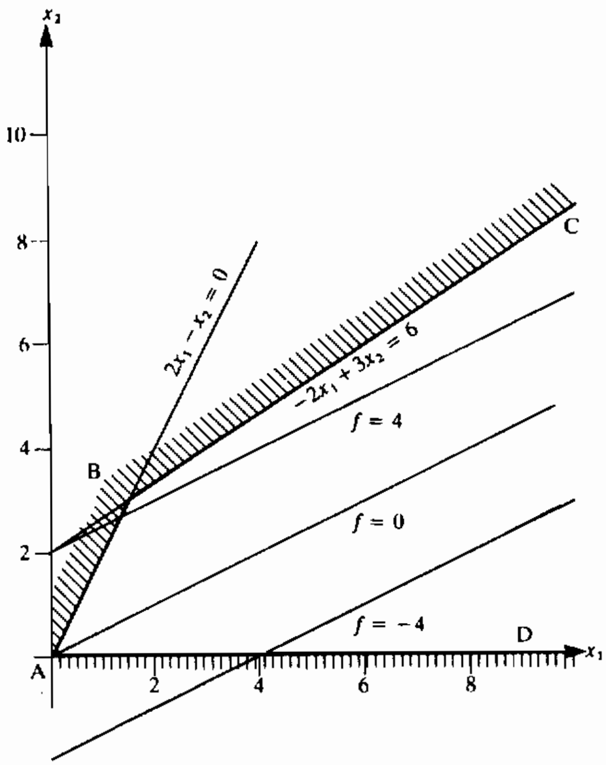
$$2x_1 - x_2 \geqq 0$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leqq 6$$
$$x_1,\ x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

مسأله را به شکل استاندارد تبدیل می کنیم. تابع $f_1 = -x_1 + 2x_2$ را با قیود

$$-2x_1 + x_2 \leqq 0$$
$$-2x_1 + 3x_2 \leqq 6$$
$$-x_1 \leqq 0; \qquad -x_2 \leqq 0$$

مینیمم کنید. مجموعه قید مسأله و چند خط هزینه ثابت در شکل ۲.۹ نشان داده شده است. دیده می شود که مجموعه قید (ناحیهٔ قابل قبول) برای مسأله بی کران است. بنابراین جواب



شکل ۲.۹ مثال مسأله‌ای با جواب بی‌کران

محدودی وجود ندارد. باید رابطه سازی مسأله را دوباره انجام دهیم تا این وضعیت تصحیح شود. در شکل ۲.۹ دیده می شود که مسأله کمبود قید دارد.

۲.۸.۴ حل ترسیمی ستون توخالی با وزن مینیمم

مسأله طرّاحی در بخش ۲.۶.۷ رابطه سازی شده است. داده های زیر برای حل مسأله به روش ترسیمی استفاده خواهد شد: $P = 10$ MN ، $E = 207$ GPa ، $\rho = 7833$ kg/m3 ، $l = 5.0$ m و $\sigma_a = 248$ MPa . با استفاده از این داده ها، رابطه سازی ۱ مسأله بدین شکل تعریف می شود: شعاع متوسط R و ضخامت t را طوری بیابید که تابع

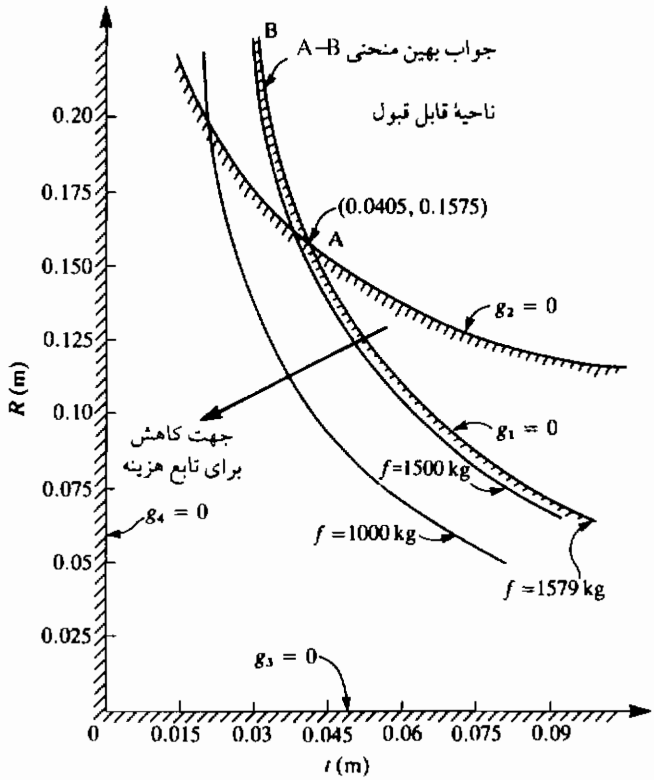
$$f(R, t) = 2\pi\rho lRt$$
$$= 2\pi(7833)(5)Rt = (2.4608\text{E}+05)Rt, \qquad \text{kg}$$

مینیمم گردد، مشروط به قیود

$$g_1(R, t) \equiv \frac{P}{2\pi Rt} - \sigma_a \leqq 0$$
$$\equiv \frac{10(1.0\text{E}+06)}{2\pi Rt} - 248(1.0\text{E}+06) \leqq 0$$
$$g_2(R, t) \equiv P - \frac{\pi^3 ER^3 t}{4l^2} \leqq 0$$
$$\equiv 10(1.0\text{E}+06) - \frac{\pi^3(207.0\text{E}+09)R^3 t}{4(5)(5)} \leqq 0$$
$$g_3(R, t) \equiv -R \leqq 0$$
$$g_4(R, t) \equiv -t \leqq 0$$

قیود مسأله در شکل ۱۰ . ۲ رسم شده و ناحیهٔ قابل قبول مشخص گردیده است. خطوط تراز تابع هزینه برای $f = 1000, 1500, 1579$ kg نیز نشان داده شده‌اند. توجه کنید که برای این مثال خطوط تابع هزینه موازی قید g_1 است. چون g_1 در بهین فعال است، مسأله دارای بی نهایت طرح بهین است، یعنی تمامی منحنی A–B در شکل ۱۰ . ۲. ما می توانیم مختصات هر نقطه روی منحنی A–B را خوانده و به عنوان جواب بهین در نظر بگیریم. بویژه نقطهٔ A، محل تلاقی قیود g_1 و g_2 یک نقطهٔ بهینه است که در آن جا $R^* = 0.1575\ m$ و $t^* = 0.0405\ m$ است.

دقت کنید که این مسأله توابع غیرخطی دارد. برای رسم آنها جدولی از نقاط داده ها برای t و R درست می کنیم و با خطوط منحنی نقاط را به هم وصل می کنیم. برای مثال، برای رسم مرز قید g_2 ($R^3t = 1.558\text{E}{-}04$)، ما مقادیر 0.015, 0.03, 0.06, 0.075, 0.09 را برای t در نظر می گیریم که از $g_2 = 0$ مقادیر R برای آنها عبارت است از 0.218, 0.173, 0.1374, 0.1275, 0.12 . این روش برای رسم هر تابع دو متغیّره کلی می تواند به کار رود.



شکل ۲.۱۰ حل ترسیمی ستون توخالی با وزن مینیمم

۲.۸.۵ حل ترسیمی مسأله طرّاحی تیر

تیری با سطح مقطع مربع مستطیل تحت تأثیر گشتاور خمشی M (N.m) و ماکزیمم نیروی برشی V (N) قرار دارد. تنش خمشی تیر از $\sigma = 6M/bd^2$ (Pa) و تنش برشی متوسط از $\tau = 3V/2bd$ (Pa) محاسبه می شود که در آنها b عرض و d ضخامت تیر است. تنشهای مجاز خمشی و برشی به ترتیب عبارتند از 10 MPa و 2 MPa . خواسته شده که ضخامت تیر از دو برابر عرض آن بیشتر نشود. حداقل مساحت سطح مقطع تیر چقدر باید باشد؟

ابتدا مسأله را با مجموعه ای از سیستم واحدهای هماهنگ رابطه سازی می کنیم. ضخامت تیر (میلی متر) = d و عرض تیر (میلی متر) = b است. تابع هزینه مسأله مساحت سطح

مقطع است که به شکل زیر بیان می شود.

$$f(b, d) = bd \qquad \text{(الف)}$$

قیود مسأله عبارتند از تنش خمشی، تنش برشی و نسبت ضخامت به عرض. برای مثال عددی، $M = 40$ kN.m و $V = 150$ kN تنش خمشی عبارت است از

$$\sigma = \frac{6(40)(1000)(1000)}{bd^2}, \qquad \mathrm{N/mm^2} \qquad \text{(ب)}$$

تنش برشی عبارت است از

$$\tau = \frac{3(150)(1000)}{2bd}, \qquad \mathrm{N/mm^2} \qquad \text{(پ)}$$

تنش مجاز خمشی برابر است با

$$10\ \mathrm{MPa} = 10(1.0\mathrm{E}{+}06)\ \mathrm{N/m^2} \doteq 10\ \mathrm{N/mm^2} \qquad \text{(ت)}$$

تنش برشی مجاز مساوی است با

$$2\ \mathrm{MPa} = 2(1.0\mathrm{E}{+}06)\ \mathrm{N/m^2} = 2\ \mathrm{N/mm^2} \qquad \text{(ث)}$$

با استفاده از معادله های (ب) تا (ث) قیدهای تنشهای خمشی و برشی بدین شکل نوشته می شود

$$\text{تنش خمشی}: \quad g_1 \equiv \frac{(2.40\mathrm{E}{+}08)}{bd^2} - 10 \leqq 0 \qquad \text{(ج)}$$

$$\text{تنش برشی}: \quad g_2 \equiv \frac{(2.25\mathrm{E}{+}05)}{bd} - 2 \leqq 0 \qquad \text{(چ)}$$

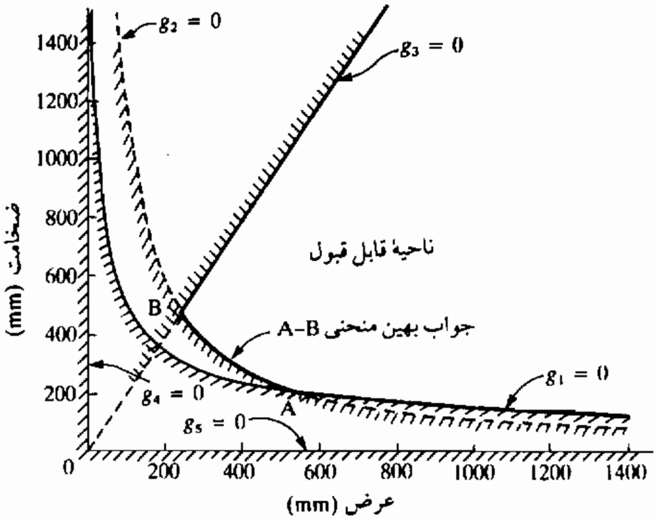
قیدی که ضخامت نباید از دو برابر عرض بیشتر باشد، به شکل زیر بیان می شود

$$g_3 \equiv d - 2b \leqq 0 \qquad \text{(ح)}$$

بالاخره، دو متغیّر طرّاحی باید نامنفی باشند:

$$g_4 \equiv -b \leqq 0; \qquad g_5 \equiv -d \leqq 0 \qquad \text{(خ)}$$

در واقع هیچ کدام از b و d نمی توانند صفر باشند، بنابراین باید یک مقدار حداقلی برای آنها در نظر بگیریم، یعنی $b \geq b_{min}$ و $d \geq d_{min}$.



شکل ۲.۱۱ حل ترسیمی مسأله طرّاحی تیر با سطح مقطع مینیمم

قیدهای مسأله در شکل ۲.۱۱ رسم شده‌اند و ناحیهٔ قابل قبول مشخص شده است. توجه کنید که تابع هزینه موازی قید g_2 است (هر دو تابع شکل مشابه، ثابت = bd دارند). بنابراین هر نقطه در امتداد A–B یک جواب بهین را نشان می‌دهد. تعداد نامحدودی از طرحهای بهین وجود دارد و طراح می‌تواند برای آوردن نیاز خود یکی از آنها را انتخاب کند. از دیدگاه عملی، این یک موقعیت بسیار خوب است، زیرا انتخابهای بی‌شماری از جواب بهین را در اختیار طراح قرار می‌دهد.

مساحت سطح مقطع بهین عبارت است از $112500\ \text{mm}^2$. نقطهٔ B مربوط به یک نقطهٔ بهین با $b = 237$ mm و $d = 474$ mm است. نقطهٔ A مربوط به $b = 527.3$ mm و $d = 213.3$ mm است. این نقاط دو جواب فرین بهینه را نمایش می‌دهند، تمامی جوابهای دیگر در این محدوده و روی منحنی A–B قرار دارند.

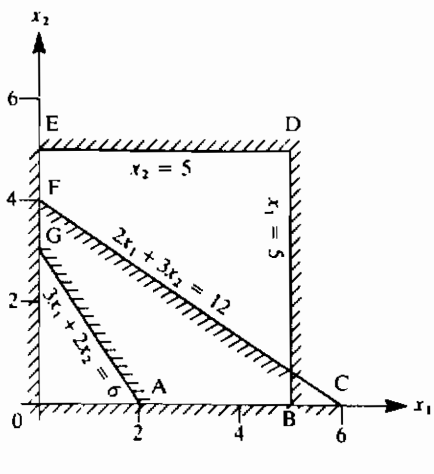
۲.۸.۶ مسأله غیرقابل قبول

اگر در رابطه سازی مسأله طرّاحی دقّت نکنیم ممکن است مسأله هیچ گونه جوابی نداشته باشد. این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که خواسته‌ها تداخل داشته باشند و یا معادله قیود

ناهماهنگ باشند. حالت دیگر هنگامی است که قیود بسیار زیادی را روی سیستم اعمال کنیم، یعنی قیود طوری باشند که جواب قابل قبولی یافت نشود. اینها را مسائل غیرقابل قبول[1] می نامند. برای توضیح این حالت، مسأله زیر را در نظر می گیریم. تابع $x_1 + 2x_2$ را نسبت به قیود زیر مینیمم کنید.

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &\leqq 6 \\
2x_1 + 3x_2 &\geqq 12 \\
x_1 &\leqq 5 \\
x_2 &\leqq 5 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

قیدهای مسأله در شکل ۲.۱۲ ترسیم شده اند. دیده می شود که ناحیه ای در فضای طرّاحی که تمامی قیود را برآورده کند یافت نمی شود. پس مسأله غیرقابل قبول است. در اصل، دو قید اول روی مسأله طرّاحی مغایرت ایجاد می کنند. قید اوّل طرّاحی قابل قبول را زیر خط A–G ایجاب می کند و دومی روی خط C–F. چون دو خط یکدیگر را در چهار ضلعی قطع نمی کنند ناحیه قابل قبولی برای مسأله وجود ندارد.



شکل ۲.۱۲ مثالی از مسأله بهینه‌سازی غیرقابل قبول

1. infeasible

تمرینهای فصل ۲

بخش ۲.۶ مثالهایی از رابطه سازی مسأله طرّاحی بهین

۲.۱ قطعه زمینی به ابعاد 100×100 m برای ساختن ساختمانی چند طبقه برای دفتر در دست است. زیربنای مورد نیاز تمام طبقات $20000\ m^2$ است. براساس دستورالعمل ساختمان سازی محلی، ماکزیمم ارتفاع ساختمان ۲۱ m و مساحت توقفگاه خارج ساختمان باید حداقل ۲۵٪ سطح زیربنای کل طبقات باشد. تصمیم گرفته شده که ارتفاع هرطبقه ۳/۵ m باشد. هزینه ساختمان برحسب میلیون دلار به صورت $(0.6h + 0.001A)$ تخمین زده شده که در آن A مساحت سطح مقطع ساختمان و h ارتفاع آن است. مسأله طرّاحی مینیمم کردن هزینه را رابطه سازی کنید.

۲.۲ پالایشگاهی دو نوع نفت خام دارد:

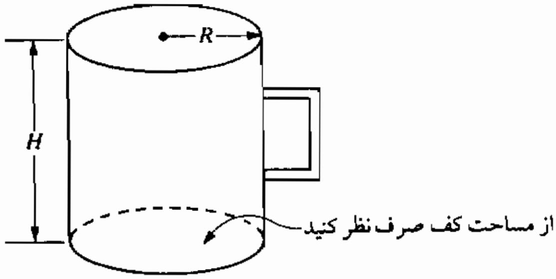
۱. از نفت خام A که بشکه‌ای ۳۰ دلار ارزش دارد ۲۰۰۰۰ بشکه در دسترس است و
۲. از نفت خام B که بشکه‌ای ۳۶ دلار ارزش دارد ۳۰۰۰۰ بشکه در دسترس است.

پالایشگاه از نفت خام بنزین و روغن تولید می‌کند. مقدار مورد نیاز نفت خام برای تولید بنزین و روغن و قیمت فروش هر بشکه از تولیدات و مقدار سفارش در جدول ۲.۲ نشان داده شده است. پالایشگاه باید برای ماکزیمم کردن سود خود چه مقدار نفت خام استفاده کند. مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کنید.

جدول ۲.۲ داده‌های عملیات پالایشگاهی

محصول	مقدار مورد نیاز برای تولید یک بشکه محصول: نفت خام A	نفت خام B	قیمت فروش هر بشکه	تقاضای بازار (بشکه)
بنزین	۰/۶	۰/۸	۵۰ دلار	۲۰۰۰۰
روغن	۰/۴	۰/۲	۱۲۰ دلار	۱۰۰۰۰

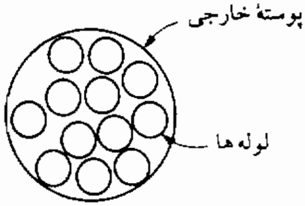
۲.۳ یک لیوان بزرگ نوشابه مانند شکل E2.3 طوری طرّاحی کنید که ظرفیت آن ماکزیمم باشد. ارتفاع لیوان باید حداکثر ۲۰ cm و شعاع آن حداقل ۵ cm باشد. مساحت



شکل E2.3 لیوان نوشابه

سطح جانبی لیوان نباید از cm^2 ۹۰۰ بیشتر باشد (از مساحت کف و دسته لیوان صرف نظر کنید شکل را ببینید). مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کنید.

۲.۴ شرکتی برای افزایش انتقال حرارت، می خواهد مبدلهای پوسته و لوله ای تولیدی اش را دوباره طرّاحی کند. مقطع این نوع مبدل در شکل E2.4 نشان داده شده است. محدودیتهای مشخصی در مسأله طرّاحی وجود دارد. کمترین شعاع لوله های داخلی مبدل که در دسترس است 0.5 cm و همهٔ لوله ها باید یک اندازه باشند. به علاوه مساحت سطح مقطع تمامی لوله ها نباید از $2000\ cm^2$ بیشتر باشد تا فضای مناسبی داخل پوسته باقی بماند. مسأله را برای به دست آوردن تعداد لوله ها و قطر آنها به شکلی که سطح لوله ها در مبدل ماکزیمم شود رابطه سازی کنید.



شکل E2.4 سطح مقطع مبدل حرارتی

۲.۵ پیشنهاد ساخت یک توقفگاه در ناحیه بازسازی شدهٔ مرکز شهر به مناقصه گذاشته شده است. قیمت زمین عبارت است از $200W + 100D$ ، که W عرض توقفگاه در طرف خیابان و D عمق توقفگاه به متر می باشد. ماکزیمم عرض

توقفگاه در طرف خیابان 100 m و حداکثر عمق 200 m است. می خواهیم حداقل $10000\ m^2$ توقفگاه داشته باشیم. برای زیبایی توقفگاه ضلع بزرگتر توقفگاه نباید از دو برابر ضلع کوچکتر بیشتر باشد. مسأله طرّاحی مینیمم کردن هزینه را رابطه سازی کنید.

۲.۶ کارخانه ای محصول A و B را می فروشد. سود عایدی از فروش A ، \$10/kg و از B ، \$8/kg است. مواد خام در دسترس برای تولید عبارتند از : 100 kg از C و 80 kg از D . برای تولید 1 kg از A ، 0.4 kg از C و 0.6 kg از D مورد نیاز است. برای تولید 1 kg از B ، 0.5 kg از C و 0.5 kg از D مورد نیاز است. تقاضای بازار برای A ، 70 kg و برای B ، 110 kg است. چه مقدار از A و B باید تولید شود تا سود ماکزیمم گردد؟ مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کنید.

۲.۷ یک برنامه غذایی از شیر و نان طرّاحی کنید که روزانه حداقل ۵ واحد از ویتامین A و ۴ واحد از ویتامین B داشته باشد. مقدار ویتامینهای A و B در 1 kg از شیر و نان و قیمت هر کیلوگرم از آنها در جدول ۲.۳ داده شده است. مسأله طرّاحی بهین را طوری رابطه سازی کنید که بتوانیم حداقل ویتامین مورد نیاز را با کمترین هزینه بگیریم.

جدول ۲.۳ داده ها برای مسأله برنامه غذایی

ویتامین	نان	شیر
A	۱	۲
B	۳	۲
قیمت/kg	۲	۱

۲.۸ دانشجویان رشته مهندسی شیمی دستگاهی را ساخته اند که می تواند هر هفته ۲۲۵ بطری الکل خالص تولید کند. آنها با الکل دو نوع محلول A و B تولید می کنند : (الف) محلول A با مقاومت[1] ۲۰ و (ب) محلول B با مقاومت ۸۰ . یادآور می شود که مقاومت الکل خالص ۲۰۰ است. آنان آب به اندازهٔ کافی دارند. ولی

1. proof

هر هفته تنها ۸۰۰ بطری خالی می توانند داشته باشند. شکر موجود در هر هفته فقط برای ۶۰۰ بطری محلول A و یا ۱۲۰۰ بطری محلول B کافی است. سود فروش هر بطری محلول A ، ۱ دلار و محلول B ، ۲ دلار است. آنان هرچه تولید کنند می توانند به فروش برسانند. برای ماکزیمم کردن سود چند بطری از محلول A و محلول B باید تولید کنند. مسأله بهینه سازی طرّاحی را رابطه سازی کنید (این مسأله توسط دی لوی[1] طرّاحی شده).

۲.۹ قوطی نوشابه ای که تنها یک طرف آن بسته است طرّاحی کنید که برای حجم داخلی $600\ cm^3$ کمترین مساحت ورق استفاده شود. قوطی به شکل استوانه ای است به ارتفاع h و شعاع r. نسبت ارتفاع به قطر نباید کمتر از ۱ و بیشتر از ۱/۵ باشد. ارتفاع نیز نباید بیشتر از $20\ cm$ باشد. مسأله بهینه سازی طرّاحی را رابطه سازی کنید.

۲.۱۰ یک کانتینر حمل کالا به ابعاد $b \times b \times h$ طوری طرّاحی کنید که نسبت زیر مینیمم شود: (هزینه حمل محموله برای یک راه)/(هزینه حمل خود کانتینر برای رفت و برگشت). از داده های زیر استفاده کنید.

سطح/جرم کانتینر : $80\ kg/m^2$

ماکزیمم b : $10\ m$

ماکزیمم h : $18\ m$

هزینه حمل یک طرف پر

یا خالی : $18\$$ برای هر کیلوگرم جرم خالص

جرم محموله : $150\ kg/m^3$

مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کنید.

۲.۱۱ برای عملیات استخراج معدنی یک واگن مکعب مستطیل روباز برای حمل مواد مورد نیاز است. داده های مسأله عبارتند از :

هزینهٔ ساخت :

بدنه ها : $\$50/m^2$

دو انتها : $\$60/m^2$

کف : $\$90/m^2$

---

1. D. Levy

قیمت بیمه : 25% هزینه ساخت

عمر مفید : 20 سال

نگه داری سالیانه : سطح خارجی $\$12/\text{m}^2$

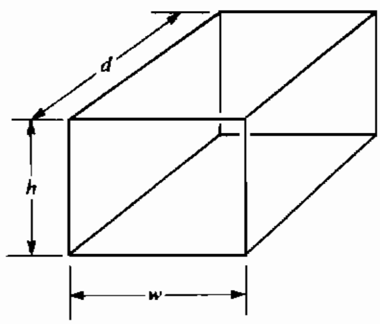
حداقل حجم مورد نیاز : $150\ \text{m}^3$

نرخ بهره : 12% در سال

مسأله به دست آوردن ابعاد کانتینر را برای مینیمم بودن هزینه رابطه سازی کنید.

۲.۱۲ مخزن استوانه ای شکلی طرّاحی کنید که دو طرف آن بسته و حجم آن $150\ \text{m}^3$ باشد. هزینه ساخت متناسب با مساحت ورق مصرفی و عبارت است از $\$400/\text{m}^2$. مخزن قرار است در انباری که سقف آن شیب دار است قرار داده شود. لذا ارتفاع H مخزن با رابطهٔ $H \le 10 - D/2$ محدود می شود که در آن D قطر مخزن است. مسأله طرّاحی مینیمم کردن هزینه را رابطه سازی کنید.

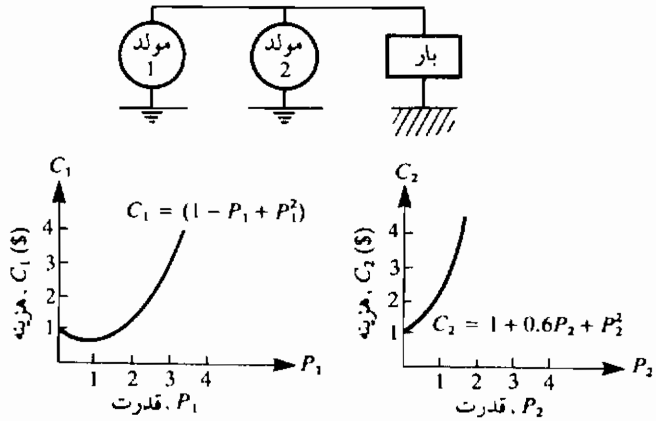
۲.۱۳ قاب فولادی نشان داده شده در شکل E2.13 را چنان طرّاحی کنید که هزینه آن مینیمم گردد. هزینه اعضای افقی در یک بعد $\$20w$ و در بعد دیگر $\$30d$ است. هزینه ستونهای عمودی $\$50h$ است. قاب باید حداقل $600\ \text{m}^3$ حجم را بپوشاند. مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کنید.



شکل E2.13 قاب فولادی

۲.۱۴ دو واحد مولد الکتریکی به هم متصل شده اند تا قدرت کلی مورد نیاز بار را تولید کنند. همچنان که در شکل E2.14 نشان داده شده است هزینهٔ هر مولد تابعی از قدرت

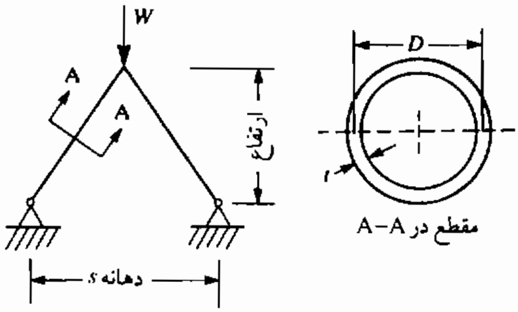
خروجی آن است. تمامی هزینه ها و قدرتها براساس واحد برق تولیدی بیان شده است. قدرت مورد نیاز حداقل 60 واحد می باشد. مسأله طرّاحی مینیمم کردن هزینه را رابطه سازی کنید.



شکل E2.14 مولد برق

۲.۱۵ ***مسأله حمل و نقل***. یک شرکت دارای m دستگاه تولیدی است. دستگاه واقع در موقعیت i ام ظرفیت تولید b_i واحد از یک کالا را دارد. محصول باید به n مرکز پخش حمل شود. مرکز پخش j ام حداقل تعداد a_j از کالا را برای برآوردن تقاضاها نیاز دارد. هزینهٔ حمل یک کالا از محل دستگاه i ام به مرکز پخش j ام عبارت است از c_{ij}. مسأله مینیمم کردن هزینه حمل و نقل را طوری رابطه سازی کنید که تقاضای هر مرکز پخش برآورده شده و از ظرفیت تولید دستگاهها تجاوز نشود.

۲.۱۶ ***طرّاحی خرپای دو میله ای***. یک خرپای دو میله ای متقارن (با سطح مقطع یکسان) مطابق شکل E2.16 طرّاحی کنید تا بار W را تحمل کند. خرپا از لوله های فولادی که از یک طرف به هم و ازطرف دیگر به زمین لولا شده اند تشکیل شده است. دهانهٔ لوله ثابت و برابر با s است. مسأله مینیمم کردن جرم خرپا را رابطه سازی کنید و از ارتفاع و ابعاد سطح مقطع به عنوان متغیّرهای طرّاحی استفاده کنید. طرّاحی باید قیود زیر را برآورده کند:



شکل E2.16 سازه دومیله‌ای

۱ . به خاطر محدودیت فضایی، ارتفاع خرپا نباید از b_1 بیشتر و از b_2 کمتر باشد.

۲ . نسبت قطر متوسط به ضخامت لوله ها نباید از b_3 بیشتر باشد.

۳ . تنش فشاری در لوله ها نباید از تنش مجاز فولاد σ_a بیشتر شود.

۴ . ارتفاع، قطر و ضخامت باید طوری انتخاب شوند که اعضا در مقابل کمانش مقاوم باشند.

از داده های زیر استفاده کنید: $W = 10$ kN ، دهانه، $s = 2$ m ، $b_1 = 5$ m ، $b_2 = 2$ m ، $b_3 = 90$ ، تنش مجاز، $\sigma_a = 250$ MPa ، ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa ، چگالی، $\rho = 7850$ kg/m^3 ، ضریب اطمینان برای کمانش FS = 2 ، $0.1 \le D \le 2$ (m) ، و $0.01 \le t \le 0.1$ (m) .

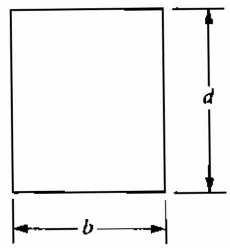
۲ . ۱۷ تیری با مقطع مربع مستطیل (شکل E2.17) تحت تأثیر بیشترین گشتاور خمشی M و بیشترین برش V است. تنش خمشی و برشی مجاز به ترتیب σ_a و τ_a است. تنش خمشی تیر عبارت است از

$$\sigma = \frac{6M}{bd^2}$$

و تنش برشی متوسط عبارت است از

$$\tau = \frac{3V}{2bd}$$

که در آنها d عمق و b عرض تیر می باشد. عمق تیر نباید از دو برابر عرض بیشتر باشد. مسأله طرّاحی را برای مینیمم شدن مساحت سطح مقطع با داده های زیر رابطه سازی کنید: $M = 140$ kN.m ، $V = 24$ kN ، $\sigma_a = 165$ MPa ، $\tau_a = 50$ MPa .



شکل E2.17 سطح مقطع یك تیر مکعب مستطیل

۲ . ۱۸ یک کارخانه تولید روغن گیاهی می خواهد میزان تولید روغن کره، روغن سالاد و کرهٔ نباتی خود را طوری تنظیم کند که استفاده از روغنهای موجودی انبارش بهینه شود. در حال حاضر کارخانه kg ۲۵۰۰۰۰ روغن دانه سویا، kg ۱۱۰۰۰۰ روغن دانه کتان و kg ۲۰۰۰ از موادی که اساس شیری دارند در انبار موجود دارد. موادی که اساس شیری دارند فقط برای تولید کرهٔ نباتی مورد نیازند. مقدار معینی ضایعات برای تولید هر محصول وجود دارد؛ ۱۰٪ برای روغن کره، ۵٪ برای روغن سالاد، و برای کرهٔ نباتی ضایعاتی وجود ندارد. سفارش قبلی تولید کننده او را مجبور می کند که حداقل kg ۱۰۰۰۰۰ روغن کره، kg ۵۰۰۰۰ روغن سالاد، و kg ۱۰۰۰۰ کرهٔ نباتی تولید کند. علاوه براین، پیش بینی فروش در آینده نزدیک نشان دهنده تقاضای زیاد بازار برای تمامی محصولات است. میزان سود به ازای هر کیلوگرم و میزان موجودی انبار مورد نیاز در هر کیلوگرم برای هر محصول در جدول ۲ . ۴ داده شده است. مسأله را برای سود بیشتر در برنامه زمان بندی آینده رابطه سازی کنید. (طرّاحی شده توسط ج. لیتشواگر[1].)

جدول ۲.۴ داده های مسأله فرآیند روغنهای گیاهی

تولید	سود در هر کیلوگرم	نیاز به انبار هر قسمت در کیلوگرم		
		دانه سویا	دانه کتان	اساس شیری
روغن کره	۰/۱۰	۲	۱	۰
روغن سالاد	۰/۰۸	۰	۱	۰
کرهٔ نباتی	۰/۰۵	۳	۱	۱

1. J. Liittschwager

بخش ۲.۷ یک الگوی کلی ریاضی برای طرّاحی بهین

۲.۱۹ با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید

۱. طرّاحی یک سیستم به معنی تعیین مقدار متغیّرهای طرّاحی است.

۲. تمامی مسائل طرّاحی تنها قیود نامساوی خطی دارند.

۳. تا آن جا که ممکن است باید تمامی متغیّرهای طرّاحی از یکدیگر مستقل باشند.

۴. اگر یک قید مساوی در مسأله طرّاحی وجود دارد، جواب بهین باید آن را برآورده کند.

۵. هر مسأله بهینه سازی باید پارامترهای مشخصی که متغیّرهای طرّاحی نامیده می شوند دارا باشد.

۶. یک طرح قابل قبول ممکن است قید مساوی را نقض کند.

۷. یک طرح قابل قبول ممکن است قید "نوع ≥" را نقض کند.

۸. یک قید "نوع ≤" که در شکل استاندارد بیان می شود در یک نقطه طرّاحی وقتی فعال است که در آن جا مقدارش صفر باشد.

۹. مجموعه قید یک مسأله طرّاحی متشکل از تمامی نقاط قابل قبول است.

۱۰. تعداد قیود نامساوی مستقل می تواند بیشتر از متغیّرهای طرّاحی مسأله باشد.

۱۱. در یک رابطه سازی معتبر مسأله، تعداد قیود "نوع ≤" باید کمتر از تعداد متغیّرهای طرّاحی باشد.

۱۲. ناحیهٔ قابل قبول یک قید مساوی زیر مجموعه ای است از ناحیه قابل قبول همان قید که به صورت نامساوی بیان شده باشد.

۱۳. ماکزیمم سازی $f(x)$ معادل مینیمم سازی $1/f(x)$ است.

۱۴. اگر قیود بیشتری به رابطه سازی مسأله اضافه گردد مقدار مینیمم تابع هزینه کمتر می شود.

۱۵. فرض کنید f_n مقدار مینیمم تابع هزینه ای با n متغیّر طرّاحی باشد. اگر تعداد متغیّرهای طرّاحی برای همان مسأله به $m = 2n$ افزایش پیدا کند، آن گاه $f_m > f_n$ خواهد بود در حالی که f_m مقدار مینیمم تابع هزینه با m متغیّر طرّاحی است.

***۲.۲۰** یک شرکت حمل و نقل می خواهد چند کامیون جدید خریداری کند. شرکت

۲ میلیون دلار بودجه برای این کار دارد. سرمایه گذاری باید به ماکزیمم شدن ظرفیت یعنی تن ضرب در کیلومتر در روز بینجامد. سه نوع کامیون در جدول ۲.۵ داده شده است. چند محدودیت دیگر نیز باید مورد توجه قرار گیرد.

شرکت ۱۵۰ راننده استخدام کرده و اخراج آنان ممکن نیست. توقفگاه و امکانات تعمیراتی حداکثر ۳۰ کامیون را می تواند جوابگو باشد.

شرکت چند کامیون از هر نوع باید بخرد؟ مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کنید. آن را به الگوی بهینه سازی استاندارد تبدیل کنید.

جدول ۲.۵ اطلاعات کامیونهای موجود

مدل کامیون	ظرفیت بار (تن)	سرعت متوسط (km/h)	راننده مورد نیاز	تعدا ساعات کارکرد در روز (سه شفیت)	سرمایه گذاری اولیه برای هر کامیون (دلار)
A	۱۰	۵۵	۱	۱۸	۴۰۰۰۰
B	۲۰	۵۰	۲	۱۸	۶۰۰۰۰
C	۱۸	۵۰	۲	۲۱	۷۰۰۰۰

۲.۲۱* یک شرکت بزرگ فولادسازی دو کارخانه احیای سنگ آهن دارد. هر کارخانه احیا آهن را به دو نوع شمش خام تبدیل می کند. شمشها به سه کارخانهٔ فرآوری حمل شده و در آن جا به یکی از دو نوع محصول نهایی تبدیل می شوند. در مجموع، دو کارخانه احیا، دو نوع شمش خام، و سه کارخانه فرآوری و دو محصول نهایی وجود دارند.

در برنامه آینده، شرکت می خواهد به شرط قیود تولید و تقاضا میزان تناژ کل احیای سنگ آهن را در کارخانهٔ احیا مینیمم نماید. مسأله بهینه سازی طرّاحی را رابطه سازی کرده و آن را به شکل استاندارد تبدیل نمایید.

اصطلاحات

$a(r,s)$ تناژ به دست آمده شمش خام s از یک تن سنگ آهن احیا شده در کارخانه r

$b(s,f,p)$ مقدار به دست آمده از یک تن شمش s که به کارخانه فرآوری f حمل شده و تبدیل به محصول p شده.

$c(r)$ ظرفیت سنگ آهن احیا شده برحسب تن در کارخانه احیا r

$k(f)$ ظرفیت فرآوری کارخانه f برحسب تناژ برای همه شمشها، و

$D(p)$ تناژ مورد تقاضا برای محصول p

قیود تولید و تقاضا

۱. تناژ کل دو کارخانه احیای سنگ آهن باید مساوی تناژ شمشهای خام حمل شده به کارخانه فرآوری باشد.

۲. تناژ هر کارخانه احیای سنگ آهن نباید از ظرفیت آن تجاوز کند.

۳. تناژ کل شمش خام که در کارخانهٔ فرآوری تبدیل به محصول می شود باید با تناژ شمشی که از کارخانه های احیای سنگ آهن حمل می شود برابر باشد.

۴. تناژ کل شمشهای خامی که به محصول تبدیل می شود در هر کارخانه فرآوری نباید از ظرفیت آن تجاوز کند.

۵. تناژ کل هر کارخانه باید با تقاضای آن برابر باشد.

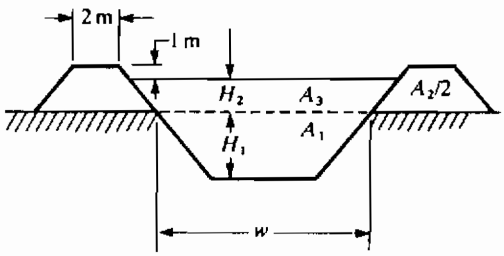
ثابتهای مسأله

$a(1, 1) = 0.39$	$c(1) = 1\,200\,000$	$k(1) = 190\,000$	$D(1) = 330\,000$
$a(1, 2) = 0.46$	$c(2) = 1\,000\,000$	$k(2) = 240\,000$	$D(2) = 125\,000$
$a(2, 1) = 0.44$		$k(3) = 290\,000$	
$a(2, 2) = 0.48$			

$b(1, 1, 1) = 0.79$	$b(1, 1, 2) = 0.84$
$b(2, 1, 1) = 0.68$	$b(2, 1, 2) = 0.81$
$b(1, 2, 1) = 0.73$	$b(1, 2, 2) = 0.85$
$b(2, 2, 1) = 0.67$	$b(2, 2, 2) = 0.77$
$b(1, 3, 1) = 0.74$	$b(1, 3, 2) = 0.72$
$b(2, 3, 1) = 0.62$	$b(2, 3, 2) = 0.78$

۲.۲۲ ***بهینه سازی یک کانال آب*** (طرّاحی شده توسط وی ك گوئل [1]). یک کانال آب به سطح مقطع ۱۵۰ m^2 طرّاحی کنید. کمترین هزینهٔ ساخت وقتی اتفاق می افتد که حجم خاك برداری مساوی مصالحی باشد که برای ساختن دیواره های کانال استفاده می شود

1. V. K. Goel



شکل E2.22 سطح مقطع یك كانال

همــچنـان کـه در شـکل E2.22 دیده می شــود. برای مـینیـمـم سـاختن مـیـزان خاك برداری A_1 مسأله را رابطه سازی کنید. مسأله را به الگوی طرّاحی بهین استاندارد تبدیل کنید.

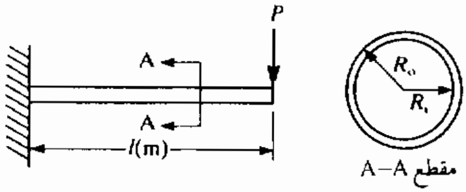
۲.۲۳ یک تیـر یک سـر گـیـردار تحت تأثیـر بار نقطه ای P (kN) قـرار دارد، چنان کـه در شکل E2.23 دیده می شود. گشتاور خمشی ماکزیمم در تیر Pl (kN.m) و نیروی برشی ماکزیمم P (kN) است. مسأله طرّاحی کمترین جرم را با استفاده از سطح مقطع دایره ای توخالی رابطه سازی کنید. مصالح باید تحت تأثیر تنشهای خمشی و برشی مقاوم باشند. تنش خمشی ماکزیمم از رابطهٔ

$$\sigma = \frac{Pl}{I} R_o$$

محاسبه می شود که در آن I = گشتاور ماند سطح مقطع است. ماکزیمم تنش برشی از رابطهٔ

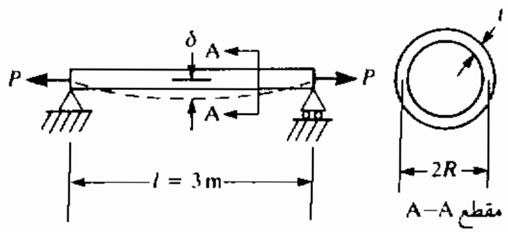
$$\tau = \frac{P}{3I}(R_o^2 + R_o R_i + R_i^2)$$

به دست می آید. مسأله را به شکل استاندارد تبدیل کنید (همچنین از $R_o \le 40.0$ cm ، $R_i \le 40.0$ cm استفاده کنید). داده های دیگر عبارتند از : $P = 14$ kN ، $l = 10$ m ، چگالی، $\rho = 7850$ kg/m^3 ، تنش خمشی مجاز، $\sigma_a = 165$ MPa ، تنش برشی مجاز، $\tau_a = 50$ MPa .



شکل E2.23 تیر یک‌سر گیردار

۲.۲۴ یک تیر ستون استوانه ای توخالی آن چنان که در شکل E2.24 نشان داده شده برای دو حالت طرّاحی کنید : وقتی $P = 50$ (kN) ، تنش محوری σ باید کمتر از σ_a ، و وقتی $P = 0$ ، خیز δ تحت تأثیر وزن باید $\delta \le 0.001l$ را برآورده کند . محدودیتهای ابعاد عبارتند از $t = 0.1$ cm تا $t = 1.0$ ، $R = 2.0$ تا 20.0 cm و $R/t \ge 20$. مسأله طرّاحی مینیمم جرم را رابطه سازی کرده و آن را به شکل استاندارد تبدیل کنید . از داده های زیر استفاده کنید : $\delta = 5wl^4/384EI$ ، (N/m) طول/نیروی وزن تیر = w ، $\sigma_a = 250$ MPa ، ضریب ارتجاعی ، $E = 210$ GPa ، چگالی ، $\rho = 7800$ kg/m^3 ، $\sigma = P/A$ ، شتاب ثقل ، $g = 9.80$ m/s^2 ، گشتاور ماند ، $I = \pi R^3 t$ (m^4) .



شکل E2.24 تیر استوانه‌ای توخالی

بخش ۲.۸ بهینه سازی ترسیمی

مسائل زیر را به شکل استاندارد تبدیل کرده ، سپس آنها را به روش ترسیمی حل کنید :

۲.۲۵ تابع $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$

را با قیدهای زیر مینیمم کنید . $x_1 + x_2 \leqq 4$

$x_1, x_2 \geqq 0.$

۲.۲۶ تابع

$$x_1 + 2x_2$$

را با قیدهای زیر ماکزیمم کنید.

$$2x_1 + x_2 \leqq 4$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

۲.۲۷ تابع

$$x_1 + 3x_2$$

را با قیدهای زیر مینیمم کنید.

$$x_1 + 4x_2 \geqq 48$$
$$5x_1 + x_2 \geqq 50$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

۲.۲۸ تابع

$$x_1 + x_2 + 2x_3$$

را با قیدهای زیر ماکزیمم کنید.

$$1 \leqq x_1 \leqq 4$$
$$3x_2 - 2x_3 = 6$$
$$-1 \leqq x_3 \leqq 2$$
$$x_2 \geqq 0$$

۲.۲۹ تابع

$$4x_1x_2$$

را با قیدهای زیر ماکزیمم کنید.

$$x_1 + x_2 \leqq 20$$
$$x_2 - x_1 \leqq 10$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

۲.۳۰ تابع

$$5x_1 + 10x_2$$

را با قیدهای زیر مینیمم کنید.

$$10x_1 + 5x_2 \leq 50$$
$$5x_1 - 5x_2 \geqq -20$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

۲.۳۱ تابع

$$3x_1 + x_2$$

را با قیدهای زیر مینیمم کنید.

$$2x_1 + 4x_2 \leqq 21$$
$$5x_1 + 3x_2 \leqq 18$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

۲.۳۲ تابع

$$x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1$$

را با قیدهای زیر مینیمم کنید.

$$x_1 + x_2 \leqq 6$$

$x_2 \leqq 3$

$x_1, x_2 \geqq 0$

۲.۳۳ تابع

$x_1 x_2$

را با قیدهای زیر مینیمم کنید.

$x_1 + x_2^2 \leqq 0$

$x_1^2 + x_2^2 \leqq 9$

۲.۳۴ تابع

$3x_1 + 6x_2$

را با قیدهای زیر مینیمم کنید.

$-3x_1 + 3x_2 \leqq 2$

$4x_1 + 2x_2 \leqq 4$

$-x_1 + 3x_2 \geqq 1$

۲.۳۵ مسأله تیر مکعب مستطیل تمرین ۲.۱۷ را به طور ترسیمی با داده های زیر حل کنید: $M = 80$ kN.m ، $V = 150$ kN ، $\sigma_a = 8$ MPa و $\tau_a = 3$ MPa.

۲.۳۶ مسأله تیر یک سر گیردار تمرین ۲.۲۳ را به طور ترسیمی با داده های زیر حل کنید: $P = 10$ kN ، $l = 5.0$ m ، ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa ، تنش خمشی مجاز، $\sigma_a = 250$ MPa ، تنش برشی مجاز، $\tau_a = 90$ MPa ، چگالی، $\rho = 7850$ kg/m^3 ، $R_o \leq 20.0$ cm ، $R_i \leq 20.0$ cm.

۲.۳۷ برای مسأله جرم مینیمم ستون لوله ای که در بخش ۲.۶.۷ رابطه سازی شد، داده های زیر را در نظر بگیرید: $P = 50$ kN ، $l = 5.0$ m ، ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa ، تنش مجاز، $\sigma_a = 250$ MPa ، چگالی، $\rho = 7850$ kg/m^3.

شعاع متوسط R و ضخامت دیواره t را به عنوان متغیّرهای طرّاحی در نظر گرفته مسأله را به طریق ترسیمی حل کنید با یک شرط اضافی $R/t \leq 50$. این قید بدین خاطر لازم است تا از کمانش موضعی ستون جلوگیری شود. همچنین قید اندازه های اعضا را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$0.01 \leqq R \leqq 1.0 \text{ m}; \qquad 5 \leqq t \leqq 200 \text{ mm}$$

۲.۳۸ برای تمرین ۲.۳۷ ، شعاع خارجی R_o و شعاع داخلی R_i را به عنوان متغیّرهای طرّاحی انتخاب کرده و مسأله را به طور ترسیمی حل کنید. تمامی قیدهای تمرین ۲.۳۷ را در نظر بگیرید.

۲.۳۹ مسأله طرّاحی ستون با کمترین وزن بخش ۲.۶.۷ را با سطح مقطع مربعی توخالی با

بعد خارجی w و ضخامت t به عنوان متغیّرهای طرّاحی رابطه سازی کنید. مسأله را به روش ترسیمی حل کرده و از قیود و داده های تمرین ۲.۳۷ استفاده کنید.

۲.۴۰ مسأله خرپای دو میله ای متقارن (اعضا مساوی هستند) را که در بخشهای ۲.۲ تا ۲.۵ مورد بحث قرار گرفت با داده های زیر در نظر بگیرید: $W = 10$ kN ، $\theta = 30°$ ، ارتفاع $h = 1.0$ m ، دهانه $s = 1.5$ m ، تنش مجاز، $\sigma_a = 250$ MPa ، ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa .

مسأله طرّاحی جرم مینیمم را با قیودی در تنش اعضا و محدودیتهای متغیّرهای طرّاحی رابطه سازی کنید. مسأله را با استفاده از روش ترسیمی و با اعضای لوله ای حل کنید.

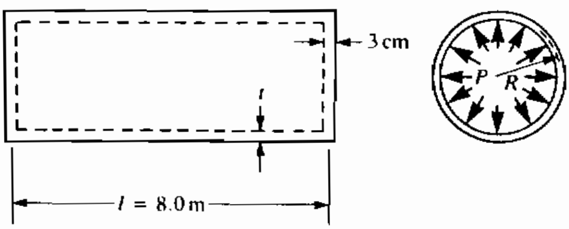
۲.۴۱ مسأله تمرین ۲.۱ را رابطه سازی کرده و با روش ترسیمی حل کنید.

۲.۴۲ در طرّاحی یک مخزن استوانه ای تحت فشار که دو طرف آن بسته است و در شکل E2.42 نشان داده شده، هدف عبارت است از انتخاب شعاع متوسط R و ضخامت دیواره t به شکلی که وزن کل مینیمم شود. مخزن دست کم باید $25.0\ m^3$ گاز با فشار 3.5 MPa را نگه داری کند. تنش محیطی در مخزن نباید از 210 MPa و کرنش محیطی از 1.0E–03 تجاوز کند. تنش و کرنش محیطی از روابط زیر محاسبه می شوند:

$$\sigma_c = \frac{PR}{t}, \qquad \varepsilon_c = \frac{PR(2-\nu)}{2Et}$$

در حالی که σ_c = تنش محیطی (Pa) ، ρ = چگالی ($7850\ kg/m^3$) ، ε_c = کرنش محیطی، P = فشار داخلی (Pa) ، E = ضریب ارتجاعی (210 GPa) و ν = ضریب پواسان (0.3) .

(الف) مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کنید و (ب) مسأله را به شکل ترسیمی حل کنید.



شکل E2.42 مخزن تحت فشار استوانه‌ای

۲.۴۳ مسأله طرّاحی خرپای سه میله ای متقارن را که در بخش ۲.۶.۸ رابطه سازی شد در نظر بگیرید. مسأله را با داده های زیر رابطه سازی نموده و به شکل ترسیمی حل کنید. $l = 1.0\ \text{m}$ ، $P = 100\ \text{kN}$ ، $\theta = 30°$ ، چگالی، $\rho = 2800\ \text{kg/m}^3$ ، ضریب ارتجاعی، $E = 70\ \text{GPa}$ ، تنش مجاز $\sigma_a = 140\ \text{MPa}$ ، $\Delta_u = 0.5\ \text{cm}$ ، $\Delta_v = 0.5\ \text{cm}$ ، $\omega_0 = 50\ \text{Hz}$ ، $\beta = 1.0$ و $A_1, A_2 \geq 2\ \text{cm}^2$.

۲.۴۴ مسأله طرّاحی کابینت بخش ۲.۶.۴ را در نظر بگیرید. از قیود مساوی برای کم کردن سه متغیّر طرّاحی استفاده کنید. مسأله را برحسب سه متغیّر طرّاحی باقیمانده بیان کرده و آن را به شکل استاندارد تبدیل کنید.

۲.۴۵ مسأله طرّاحی مخزن کروی عایق شده که در بخش ۲.۶.۵ رابطه سازی شد را به شکل ترسیمی و با داده های زیر حل کنید: $r = 3.0\ \text{m}$ ، $c_1 = \$100$ ، $c_2 = 500$ ، $c_3 = \$10$ ، $c_4 = \$5$ ، $\Delta T = 10$.

۲.۴۶ مسأله طرّاحی مخزن استوانه ای بخش ۲.۶.۶ را با داده های زیر به شکل ترسیمی حل کنید: $c = \$1500/\text{m}^2$ و $V = 3000\ \text{m}^3$.

۲.۴۷ مسأله ستون لوله ای با جرم مینیمم را که در بخش ۲.۶.۷ رابطه سازی شد در نظر بگیرید. برای هر دو شکل رابطه سازی شده مسأله، جواب بهین را به روش ترسیمی و با داده های زیر پیدا کنید: بار، $P = 100\ \text{kN}$ ، طول، $l = 5.0\ \text{m}$ ، ضریب ارتجاعی، $E = 210\ \text{GPa}$ ، تنش مجاز، $\sigma_a = 250\ \text{MPa}$ ، چگالی، $\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$ ، $R \leq 0.4\ \text{m}$ ، $t \leq 0.1\ \text{m}$ و $R, t \geq 0$.

*۲.۴۸ یک میلهٔ توخالی تحت پیچش مطابق شکل E2.48 طرّاحی کنید که شرایط زیر را برآورده کند (طراحی شده توسط ج ام ترومل[1]):

۱. تنش برشی محاسبه شده، τ ، تحت گشتاور عملکرد T_0 (N.m) نباید از تنش برشی مجاز τ_a تجاوز کند.

۲. زاویهٔ چرخش محاسبه شده، θ ، نباید از زاویهٔ چرخش مجاز، θ_a (رادیان) تجاوز کند.

۳. میله نباید هنگام اعمال گشتاور T_{max}(N.m) که در مدت کوتاهی انجام می شود کمانش کند.

---

1. J. M. Trummel

خواص جنس میله ها و دیگر داده ها در جدولهای ۲.۶ و ۲.۷ آمده است (برای تمام میله یک جنس انتخاب کنید). از متغیّرهای طرّاحی زیر استفاده کنید: x_1 = قطر خارجی میله و x_2 = نسبت قطر داخلی به خارجی، d_i/d_o .

با استفاده از بهینه سازی ترسیمی، قطر داخلی و خارجی میله را برای مینیمم بودن جرم و با شرایط ذکر شده به دست آورید. میله توخالی را با میله معادل توپر $(d_i/d_o = 0)$ مقایسه کنید. از واحدهای هماهنگ (نیوتن و میلی متر) استفاده کنید و مقادیر مینیمم و ماکزیمم متغیّرهای طرّاحی را به شکل زیر در نظر بگیرید

$$0.02 \leqq d_o \leqq 0.5 \text{ m}$$

$$0.60 \leqq \frac{d_i}{d_o} \leqq 0.999$$

روابط مفید میله عبارتند از :

جرم میله : $M = \frac{\pi}{4}\rho l(d_o^2 - d_i^2), \quad \text{kg}$

تنش برشی محاسبه شده : $\tau = \frac{c}{J}T_o, \quad \text{Pa}$

زاویهٔ پیچش محاسبه شده : $\theta = \frac{l}{GJ}T_o,$ رادیان

گشتاور کمانش بحرانی : $T_{cr} = \frac{\pi d_0^3 E}{12\sqrt{2}\,(1-\nu^2)^{0.75}}\left(1 - \frac{d_i}{d_o}\right)^{2.5}, \quad \text{N}\cdot\text{m}$

علایم

M = جرم میله (kg)،

d_o = قطر خارجی میله (m)،

d_i = قطر داخلی میله (m)،

ρ = چگالی مصالح (kg/m^3)،

l = طول میله (m)،

T_o = گشتاور عملکرد در حالت معمولی (N.m)،

c = فاصله محور میله تا لایهٔ دورتر (m)،

J = گشتاور ماند قطبی (m^4)،

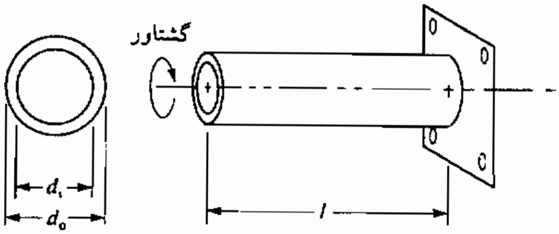
θ = زاویهٔ پیچش (رادیان)،

G = ضریب صلبیت (Pa)،

T_{cr} = گشتاور بحرانی کمانش (N.m)،

E = ضریب ارتجاعی (Pa)، و

ν = ضریب پواسان.



شکل E2.48 میله توخالی پیچش

جدول ۲.۶ مشخصات میله‌ها

میله پیچشی	طول l (m)	گشتاور در حالت عادی T_o (kN.m)	ماکزیمم T_{max} (kN.m)	پیچش مجاز، θ_a (درجه)
۱	۰٫۵۰	۱۰٫۰	۲۰٫۰	۲
۲	۰٫۷۵	۱۵٫۰	۲۵٫۰	۲
۳	۱٫۰۰	۲۰٫۰	۳۰٫۰	۲

جدول ۲.۷ مواد و خواص میله پیچشی

مواد	چگالی ρ (kg/m^3)	تنش برشی مجاز τ_a (MPa)	ضریب ارتجاعی E (GPa)	ضریب برشی G (GPa)	ضریب پواسان (ν)
۱- فولاد آلیاژی 4140	۷۸۵۰	۲۷۵	۲۱۰	۸۰	۰٫۳۰
۲- فولاد آلومینیومی 24 ST4	۲۷۵۰	۱۶۵	۷۵	۲۸	۰٫۳۲
۳- آلیاژ منیزیم A261	۱۸۰۰	۹۰	۴۵	۱۶	۰٫۳۵
۴- بریلیوم	۱۸۵۰	۱۱۰	۳۰۰	۱۴۷	۰٫۰۲
۵- تیتانیم	۴۵۰۰	۱۶۵	۱۱۰	۴۲	۰٫۳۰

۲.۴۹* تمرین ۲.۴۸ را با استفاده از قطر خارجی d_o و قطر داخلی d_i به عنوان متغیّرهای طرّاحی، رابطه سازی و حل کنید.

۲.۵۰* تمرین ۲.۴۸ را با استفاده از شعاع متوسط R و ضخامت جدارهٔ t به عنوان متغیّرهای طرّاحی، رابطه سازی و حل کنید. محدودهٔ متغیّرهای طرّاحی را $5 \le R \le 20$ cm و $0.2 \le t \le 4$ cm در نظر بگیرید.

۲.۵۱ تمرین ۲.۳ را رابطه سازی کرده و حل کنید.

۲.۵۲ تمرین ۲.۴ را رابطه سازی کرده و حل کنید.

۲.۵۳ تمرین ۲.۳۷ و ۲.۳۸ را برای ستونی که در دو انتها لولا شده حل کنید. بار کمانش برای چنین ستونی از رابطه $\pi^2 EI/l^2$ به دست می آید.

۲.۵۴ تمرین ۲.۳۷ و ۲.۳۸ را برای ستونی که در یک انتها گیردار است حل کنید. بار کمانش برای چنین ستونی برابر است با $4\pi^2 EI/l^2$.

۲.۵۵ تمرین ۲.۳۷ و ۲.۳۸ را برای ستونی که در یک انتها گیردار و در انتهای دیگر لولا شده حل کنید. بار کمانش برای چنین ستونی عبارت است از $2\pi^2 EI/l^2$.

۲.۵۶ مسأله طرّاحی قوطی نوشابه بخش ۲.۶.۲ را به طریق ترسیمی حل کنید.

۲.۵۷ خرپای دو میله ای شکل ۲.۱ را با استفاده از داده های زیر در نظر بگیرید: سازه ای با وزن مینیمم طرّاحی کنید که $W = 100$ kN، $\theta = 30°$، $h = 1$ m، $s = 1.5$ m، ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa، تنش مجاز، $\sigma_a = 250$ MPa، چگالی، $\rho = 7850$ kg/m^3. از نیوتن و میلی متر به عنوان واحدها استفاده کنید. اعضا باید در مقابل تنشها مقاوم بوده و کمانش نیز نکنند. خیز نوك در هر جهتی نباید از 5 cm بیشتر باشد.

از سطح مقطع A_1 و A_2 مربوط به دو عضو به عنوان متغیّرهای طرّاحی استفاده کنید و گشتاور اینرسی اعضا را $I = A^2$ در نظر بگیرید. مساحتهای سطح مقطع نیز باید رابطه قیدی زیر را برآورده کنند $1 \le A_i \le 50$ cm^2.

۲.۵۸ برای تمرین ۲.۵۷، اعضا را لوله های گرد و شعاع متوسط R و ضخامت جدارهٔ t را به عنوان متغیّرهای طرّاحی در نظر بگیرید. مطمئن شوید که $R/t \le 50$. سازه را متقارن طرّاحی کنید و اعضای ۱ و ۲ را مثل هم در نظر بگیرید. شعاع و ضخامت باید قیود زیر را برآورده کنند $2 \le R \le 40$ cm و $2 \le t \le 40$ mm.

۲.۵۹ سازهٔ متقارنی را که در تمرین ۲.۵۷ تعریف شد طرّاحی کنید و سطح مقطع A و ارتفاع h را به عنوان متغیّرهای طرّاحی در نظر بگیرید. متغیّرهای طرّاحی باید قیود زیر را برآورده کنند. $1 \le A \le 50\ \text{cm}^2$ و $0.5 \le h \le 3\ \text{m}$.

۲.۶۰ سازه متقارنی طرّاحی کنید که در تمرین ۲.۵۷ تعریف شد، ولی متغیّرهای طرّاحی را این بار سطح مقطع A و فاصلهٔ دهانهٔ s در نظر بگیرید. متغیّرهای طرّاحی باید قیود زیر را برآورده کنند $1 \le A \le 50\ \text{cm}^2$ و $0.5 \le s \le 4\text{m}$.

۲.۶۱ یک خرپای متقارن (سطح مقطع عضو ۱ و ۳ یکی است) سه میله ای باید طوری طرّاحی شود که جرم آن مینیمم باشد. این خرپا باید بار P را مطابق شکل ۲.۵ حمل کند. علایم زیر را می توان به کار برد: $P_u = P\cos\theta$ ، $P_v = P\sin\ \theta$ ، مساحت سطح مقطع عضو ۱ و ۳ = A_1 ، مساحت سطح مقطع عضو ۲ = A_2.

اعضا نباید در مقابل تنشها بشکنند و خیز در گره ۴ نباید از ۲ cm در هر جهتی بیشتر شود. از نیوتن و میلی متر به عنوان واحدها استفاده کنید. داده ها عبارتند از: $P = 50$ kN ، $\theta = 30°$ ، چگالی، $\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$ ، ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa و تنش مجاز، $\sigma_a = 150$ MPa . متغیّرهای طرّاحی نیز باید قید زیر را برآورده کنند $50 \le A_i \le 5000\ \text{mm}^2$.

۲.۶۲* *طرّاحی ستون یک منبع آب* (طرّاحی شده به وسیله جی باان زیگر[1]). به عنوان عضوی از گروه مهندسان مشاور ABC از شما خواسته شده که یک ستون استوانه ای یک سر گیردار با جرم مینیمم برای یک منبع جدید طرّاحی کنید. منبع به شکل قطره اشک همانند شکل E2.62 طرّاحی شده است. ارتفاع کف منبع (H)، قطر آن (D)، و فشار باد روی منبع (w) به ترتیب عبارتند از $H = 30$ m ، $D = 10$ m و $w = 700\ \text{N/m}^2$.

مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی نموده و به طریق ترسیمی حل کنید. علاوه بر طرّاحی برای ترکیبی از تنش محوری و خمشی و کمانش، محدودیتهای دیگری در طرّاحی قرار داده شده است. قطر داخلی ستون (d_i) باید حداقل 0.70 m باشد تا بتوان در آن لوله و نردبان جاسازی کرد. برای جلوگیری از کمانش دیواره های ستون، نسبت قطر به ضخامت (d_0/t) نباید بزرگتر از ۹۲ باشد. جرم زیاد آب و فولاد، خیز را بحرانی می سازند، زیرا آنها لنگر خمشی را افزایش می دهند. اثرات خیز و 10 cm

1. G. Baenziger

خارج از مرکز بودن (e) باید در فرآیند طرّاحی در نظر گرفته شود. خیز در مرکز جرم مخزن نباید از Δ بیشتر باشد.

محدودیتهای شعاع داخلی و ضخامت جداره عبارتند از $0.35 \le R \le 2.0$ m و $0.1 \le t \le 20$ cm.

رابطه ها و ثابتهای مربوطه

ارتفاع منبع آب، $h = 10$ m

خیز مجاز، $\Delta = 20$ cm

وزن مخصوص آب، $\gamma_w = 10$ kN/m³

وزن مخصوص فولاد، $\gamma_s = 80$ kN/m³

ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa

گشتاور ماند ستون، $I = \frac{\pi}{64}[d_o^4 - (d_o - 2t)^4]$

مساحت سطح مقطع ستون، $A = \pi t(d_o - t)$

تنش خمشی مجاز، $\sigma_b = 165$ MPa

تنش محوری مجاز، (با استفاده از بار بحرانی کمانش و با ضریب اطمینان $\frac{23}{12}$ محاسبه شده) $\sigma_a = \frac{12\pi^2 E}{92(H/r)^2}$

شعاع ژیراسیون، $r = \sqrt{I/A}$

ضخامت متوسط جداره منبع، $t_1 = 1.5$ cm

حجم منبع، $V = 1.2\pi D^2 h$

سطح منبع، $A_s = 1.25\pi D^2$

سطح تصویر شده منبع برای بار باد، $A_p = \frac{2Dh}{3}$

بار روی ستون به خاطر وزن آب و فولاد منبع، $P = V\gamma_w + A_s t_1 \gamma_s$

بار جانبی مرکز جرم منبع به خاطر فشار باد، $W = wA_p$

خیز مرکز جرم، $\delta = \delta_1 + \delta_2$ ، که در آن

$$\delta_1 = \frac{WH^2}{12EI}(4H + 3h)$$

$$\delta_2 = \frac{H}{2EI}(0.5Wh + Pe)(H + h)$$

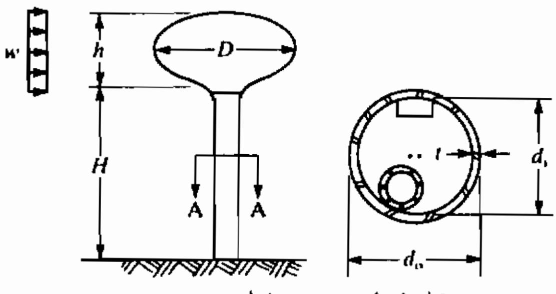
گشتاور پایه، $M = W(H + 0.5h) + (\delta + e)P$

تنش خمشی، $f_b = \frac{M}{2I} d_o$

تنش محوری، $f_a (= P/A) = \frac{V\gamma_w + A_s\gamma_s t_t}{\pi t(d_o - t)}$

قید تنش ترکیبی، $\frac{f_a}{\sigma_a} + \frac{f_b}{\sigma_b} \leq 1$

شتاب ثقل، $g = 9.81 \text{ m/s}^2$



شکل E2.62 ستون منبع آب

۲.۶۳* **طرّاحی میله پرچم.** از شرکت مشاوره ای شما خواسته شده است که یک میله پرچم به ارتفاع H که جرم مینیمم داشته باشد طرّاحی کنید. میله از لولهٔ یکنواختی به قطر خارجی d_o و قطر داخلی d_i ساخته خواهد شد. میله باید در مقابل بادهای قوی مقاوم باشد.

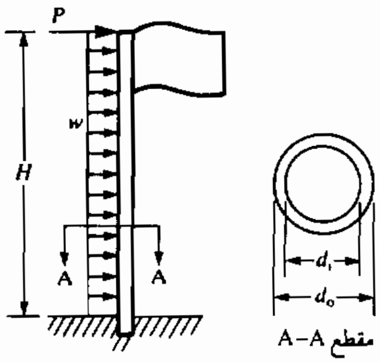
برای طرّاحی، میله به عنوان یک تیر یک سر گیردار در نظر گرفته خواهد شد که تحت بار یکنواخت جانبی باد w (kN/m) قرار دارد. علاوه بر بار یکنواخت، باد باعث یک بار متمرکز P (kN) در نوك میله نیز می شود، همچنان که در شکل E2.63 نشان داده شده است. میله پرچم نباید تحت برش و خمش مقاومت خود را از دست بدهد. خیز نوك نباید از 10 cm تجاوز کند. نسبت قطر متوسط به ضخامت نباید از 60 بیشتر شود. اطلاعات مورد نیاز در زیر داده شده است. در صورتی که دادهٔ دیگری نیاز بود آن را فرض کنید. مقدار حداقل و حداکثر متغیّرهای طرّاحی عبارتند از $5 \leq d_o \leq 50$ cm و $4 \leq d_i \leq 45$ cm.

معادلات و ثابتهای مورد نیاز

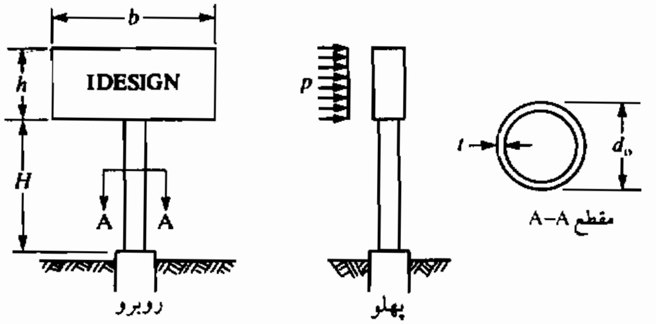
مساحت سطح مقطع،	$A = \frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2)$
گشتاور ماند،	$I = \frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_i^4)$
ضریب ارتجاعی،	$E = 210\ \text{GPa}$
تنش خمشی مجاز،	$\sigma_b = 165\ \text{MPa}$
تنش برشی مجاز،	$\tau_s = 50\ \text{MPa}$
چگالی،	$\rho = 7800\ \text{kg/m}^3$
بار باد،	$w = 2.0\ \text{kN/m}$
ارتفاع میله پرچم،	$H = 10\ \text{m}$
بار متمرکز در نوک،	$P = 4.0\ kN$
گشتاور در پایه،	$M = (PH + 0.5wH^2),\ \text{kN}\cdot\text{m}$
تنش خمشی،	$\sigma = \frac{M}{2I}d_o,\ \text{kPa}$
برش در پایه،	$S = (P + wH),\ \text{kN}$
تنش برشی،	$\tau = \frac{S}{12I}(d_o^2 + d_o d_i + d_i^2),\ \text{kPa}$
خیز در نوک،	$\delta = \frac{PH^3}{3EI} + \frac{wH^4}{8EI}$

حداقل و حداکثر ضخامت، 0.5 و 2 سانتی متر

مسأله طرّاحی را رابطه سازی کرده و به روش ترسیمی حل کنید.



شکل E2.63 پایه پرچم



شکل E2.64 پایه تابلو

۲.۶۴* ***طرّاحی پایه تابلو*** (طرّاحی شده به وسیله اچ کین[1]). از بخش طرّاحی یک مؤسسه تقاضا شده که ستونی را برای یک تابلو مطابق شکل طرّاحی کند که وزن آن حداقل باشد. ارتفاع تا زیر تابلو H، عرض تابلو b، و فشار باد p عبارتند از: $H = 20\ \text{m}$، $b = 8\ \text{m}$، $p = 800\ \text{N/m}^2$ (شکل E2.64).

وزن خود تابلو $w = 2.5\ \text{kN/m}^2$ است. پایه باید در مقابل تنشهای مرکب محوری و خمشی مقاوم باشد. برای جلوگیری از کمانش موضعی نسبت قطر به ضخامت، d_o/t نباید از 92 تجاوز کند. توجه کنید که تنش خمشی در پایه در نتیجهٔ خیز تابلو در اثر بار باد افزایش می‌یابد. ماکزیمم خیز در مرکز ثقل تابلو نباید از 0.1 m تجاوز کند. مقادیر حداکثر و حداقل متغیّرهای طرّاحی عبارتند از $25 \le d_o \le 150\ \text{cm}$ و $0.5 \le t \le 10\ \text{cm}$.

ثابتها و معادلات مورد نیاز

ارتفاع تابلو، $h = 4.0\ \text{m}$

برای پایه

مساحت، $A = \dfrac{\pi}{4}[d_o^2 - (d_o - 2t)^2]$

گشتاور ماند، $I = \dfrac{\pi}{64}(d_o^4 - (d_o - 2t)^4)$

---

1. H. Kane

شعاع ژیراسیون، $r = \sqrt{I/A}$

ضریب ارتجاعی (آلیاژ آلومینیم)، $E = 75\ \text{GPa}$

وزن مخصوص فولاد، $\gamma = 80\ \text{kN/m}^3$

تنش خمشی مجاز، $\sigma_b = 140\ \text{MPa}$

تنش محوری مجاز، $\sigma_a = \dfrac{12\pi^2 E}{92\,(H/r)^2}$

نیروی باد، $F = pbh$

وزن تابلو، $W = wbh$

خیز در مرکز ثقل تابلو، $\delta = \dfrac{F}{EI}\left(\dfrac{H^3}{3} + \dfrac{H^2 h}{2} + \dfrac{Hh^2}{4}\right)$

تنش خمشی ستون، $f_b = \dfrac{M}{2I} d_o$

تنش محوری، $f_a = \dfrac{W}{A}$

گشتاور پایه، $M = F\left(H + \dfrac{h}{2}\right) + W\delta$

شرط ترکیب تنشها، $\dfrac{f_a}{\sigma_a} + \dfrac{f_b}{\sigma_b} \leqq 1$

*۲.۶۵ ***طرّاحی یک سه پایه***. برای تحمل یک بار عمودی $W = 60\ \text{kN}$ سه پایه ای به ارتفاع H طرّاحی کنید که وزن آن مینیمم باشد. قرار گرفتن پایه ها روی زمین به شکل یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $B = 1200\ \text{mm}$ است. میله ها توپر و با مقطع دایره ای به قطر D (شکل E2.65) می باشند.

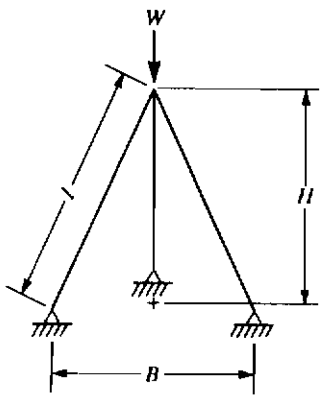
تنش محوری در میله ها نباید از تنش مجاز فشاری و بار هر میله نباید از بار بحرانی کمانش P_{cr} تقسیم بر یک ضریب اطمینان $\text{FS} = 2$ تجاوز کند. از واحدهای هماهنگ نیوتن و میلی متر استفاده کنید. حداقل و حداکثر متغیّرهای طرّاحی عبارتند از $0.5 \le H \le 5\ \text{m}$ و $0.5 \le D \le 50\ \text{cm}$. خواص مصالح و سایر روابط در زیر داده شده است:

جنس: آلیاژ آلومینیم 2014-T6

تنش مجاز فشاری، $\sigma_a = 150\ \text{MPa}$

ضریب ارتجاعی، $E = 75\ \text{GPa}$

چگالی،	$\rho = 2800\ \mathrm{kg/m^3}$
طول میله،	$l = (H^2 + \frac{1}{3}B^2)^{0.5}$
بار بحرانی کمانش،	$P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{l^2}$
گشتاور ماند،	$I = \dfrac{\pi}{64} D^4$
بار میله ها،	$P = \dfrac{Wl}{3H}$



شکل E2.65 یك سه‌پایه

فصل سوم

مفاهیم طرّاحی بهین

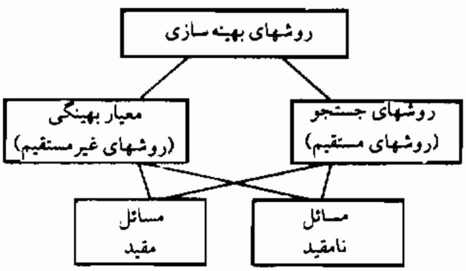
۳.۱ مقدّمه

در فصل (۲) یک رابطه سازی ریاضی مناسب برای یک مسأله بهین تشریح شد. همیشه مسأله به یک مسأله مینیمم یابی یک تابع هزینه با قیودی مناسب روی متغیّرهای طرّاحی تبدیل می شد. در این فصل، ما *پنداره های اصلی*، *مفاهیم و فرضیه هایی را* که در *بهینه سازی طرّاحی (مسأله مینیمم سازی) استفاده* می شود بحث می کنیم. فرضیه های متعددی در این موضوع بدون اثبات بیان می شوند. به دانشجویان توصیه می شود که اصطلاحات و علایم گفته شده در بخش ۱.۷ را مرور کنند، زیرا آنها در سراسر این فصل و در بقیهٔ کتاب استفاده می شوند.

باید به این نکته توجه شود که فرآیند کلی طرّاحی سیستمها در زمینه های مختلف مهندسی تقریباً مشابه هستند. روشهای تحلیلی و عددی برای تحلیل سیستمهای مختلف می تواند به نحوی متفاوت باشد. بیان مسأله طرّاحی می تواند حاوی اصطلاحاتی باشد که مختص حوزهٔ کاربردی مشخصی باشد. به عنوان مثال، در حوزهٔ سازه، مکانیک و مهندسی هوا و فضا، ما با سازه به عنوان یک کل و اجزای آن سروکار داریم. شرایط عملکرد، قیودی روی تنش و کرنش اعضا، خیز نقاط کلیدی، بسامد ارتعاشی، شکست در اثر کمانش، و ... را شامل می شود. این کلمات مختص حوزه ها و زمینه هایی است که طراحانی که در آن کار می کنند معانی آنها را

درك می کنند. به طور مشابه، زمینه های دیگر مهندسی برای تشریح *مسأله بهینه سازی طرّاحی* اصطلاحات خاص خود را دارند. در هر حال، *وقتی مسائل زمینه های مختلف تبدیل به بیان ریاضی و با علایم استاندارد شوند همه شبیه به هم می نمایند*. آنها مشمول الگوی استاندارد بهینه سازی طرّاحی که در معادله های (۲.۱۰) تا (۲.۱۲) تعریف شدند می شوند. به عنوان مثال، همه مسائلی که در بخش ۲.۶ رابطه سازی شدند می توانند به شکل معادلات (۲.۱۰) تا (۲.۱۲) تبدیل شوند. *روشهای بهینه سازی که در کتاب تشریح شده اند کاملاً عمومی هستند و می توانند برای حل مسائل به کار روند*. آنها می توانند بدون ارجاع به مسأله طرّاحی خاصی تدوین شوند. این نکته کلیدی باید هنگام مطالعه مفاهیم و روشهای بهینه سازی در ذهن باشد.

به عنوان دیدی کلی از مطالب این فصل و فصلهای آینده، ما یک دسته بندی بسیار کلی را از فنون بهینه سازی در شکل ۳.۱ نشان داده ایم. دو دیدگاه متفاوت فلسفی نشان داده شده اند. مهم است که قابلیتها ـ محدودیتها و مزایای ـ دو راهبرد درك شوند تا دیدی برای کاربرد عملی بهینه سازی حاصل شود. دو دسته عبارتند از روشهای غیرمستقیم یا معیارهای بهینگی و روشهای مستقیم یا جست و جو. *معیارهای بهینگی* عبارتند از شرایطی که یک تابع باید در نقطهٔ مینیمم خودش برآورده سازد. فنون مینیمم یابی که جوابی برای شرایط بهینگی پیدا می کنند اغلب *روشهای غیرمستقیم* خوانده می شوند. *فنون مستقیم (جست و جو)* برپایه فلسفهٔ دیگری استوارند. معمولاً طرّاحی اولیه ای که حدس اولیه و برای شروع است معیار بهینگی را برآورده نمی کند. بنابراین، آنها به مرور بهبود می یابند تا شرایط برآورده شوند. پس، در این راهبرد ما فضای طرّاحی را برای یافتن نقاط بهین جست و جو می کنیم. ما مسائل بهینه سازی مقید و نامقید را برای هر دو دسته بندی بیان می کنیم.



شکل ۳.۱ دسته بندی روشهای بهینه سازی

داشتن دانشی کلی از شرایط بهینگی برای فهم عملکرد روشهای عددی متفاوتی که در کتاب بحث خواهد شد مهم است. در این فصل این شرایط و روشهای مبتنی بر آنها بحث می شود و با مثالهای ساده ای پنداره ها و مفاهیم تشریح می شوند. مثالها محدودیتهای عملی روشهای مبتنی بر معیار بهینگی را نیز نشان خواهند داد. روشهای جست و جو در فصلهای بعدی بحث می شوند. آنها نیز به نتایجی که در این فصل بحث می شود ارجاع داده می شوند. *بنابراین، مطالب این فصل باید کاملاً فهمیده شوند*. ما ابتدا به بحث مفهوم بهینگی محلی یک تابع و شرایطی که آن را تبیین می کند می پردازیم. مسأله بهینگی فراگیر[1] یک تابع بعداً در همین فصل بحث می شود. در تمام متن فرض می شود که تابع همهٔ مسائل دو مرتبه مشتق پذیر و پیوسته باشد.

خلاصه ای از عناوین این فصل در زیر می آید.

بخش ۳.۲ *مفاهیم اساسی*. برای بحث مفاهیم طرّاحی بهین ما نیاز به پنداره های اساسی در جبر بردارها و ماتریسها، و حساب بردارها داریم. یک بحث اجمالی از این موضوعات ارائه می شود. مفاهیم مینیمم *محلی* و *فراگیر* تعریف و تشریح می شوند. علایم مربوط به مشتق توابع چندمتغیّره نیز معرفی می شوند. *بردار گرادیان* برای تابع چندمتغیّره تعریف می شود. برای این کار اولین مشتق جزئی تابع مورد نیاز است. سپس ماتریس هسیان تعریف می شود که نیاز به مشتق جزئی دوم تابع دارد. بسط سری *تیلور* برای توابع یک و چندمتغیّره بحث می شوند. پندارهٔ بسط سری تیلور در تعریف مفاهیم طرّاحی بهین و روشهای عددی اساسی است و باید کاملاً درك شود. مفهوم شکلهای درجه دو[2] برای تعریف شرط کافی بهینگی نیز لازم است. بنابراین، علایم و تحلیل مربوط به شکل درجه دو تشریح می شود. مفهوم شرایط لازم و کافی توضیح داده می شود.

بخش ۳.۳ *مسائل طرّاحی بهین نامقیّد*. در این بخش ما مسائل مینیمم یابی توابعی را مورد توجه قرار می دهیم که هیچ گونه قیدی روی متغیّرهای طرّاحی ندارند. شرایط لازم و کافی برای یک مینیمم محلی بحث شده و در مثالهای متعدد تشریح می شود.

بخش ۳.۴ *مسائل بهینه سازی مقید*. این بخش به تشریح نظریه مسائل بهینه سازی مقید می پردازد. ابتدا شرایط لازم برای مسائل بهینه سازی با قید مساوی بیان می شوند. این شرایط شامل نظریه ضرایب لاگرانژ می شود که در کتابهای ریاضی به طور عموم بحث می شود.

1. global

2. quadratic forms

شرایط کافی برای مسائل عمومی مقید به عنوان گسترشی از نظریهٔ ضرایب لاگرانژ به دست می‌آیند. سپس شرایط کافی کان ـ تاکر[1] برای یک مسأله طرّاحی کلی بیان می‌شود. آنها در ضمن مثالهای متعددی تشریح می‌شوند.

بخش ۳.۵ *بهینگی فراگیر*. سؤال بهینگی فراگیر همیشه برای یک مسأله طرّاحی بهین مطرح می‌شود. به طور کلی دادن پاسخی قانع کننده به این سؤال مشکل است. با این همه برای یک دسته از مسائل، که به عنوان مسائل برنامه ریزی محدب شناخته شده‌اند، یافتن بهینه فراگیر ممکن است. برای مطالعه آنها، به مفهوم توابع محدب نیاز داریم. بنابراین، پنداره‌های اساسی مجموعه‌های محدب بیان می‌شوند. نحوهٔ تشخیص محدب بودن یک تابع و ناحیه قابل قبول تشریح می‌شوند. قضیه‌ای نیز برای تشخیص بهینگی فراگیر گفته می‌شود.

بخش ۳.۶ *شرایط مرتبهٔ دوم برای بهینه سازی مقید*. این شرایط ابتدا برای مسائل برنامه ریزی محدب و سپس برای مسائل کلی بیان می‌شوند. شرایط مرتبهٔ دوم لازم و کافی بحث و با مثالهایی تشریح می‌شوند. آنها نیاز به محاسبهٔ هسیان تابع هزینه و توابع قیود دارند.

بخش ۳.۷ *تحلیل پس بهینگی: معنی فیزیکی ضرایب لاگرانژ*. تعبیر فیزیکی به طراح این اجازه را می‌دهد که اثر منقبض یا منبسط کردن قیود مسأله طرّاحی را مطالعه کند. ضرایب لاگرانژ در نقطهٔ بهین اطلاعات لازم برای مطالعهٔ این اثر را فراهم می‌کنند. پس ضرایب مزایای زیادی در طرّاحی عملی دارند. این موضوع به طور مفصل بحث می‌شود. تأثیر مقیاس بندی توابع هزینه و قیود روی ضرایب لاگرانژ نیز تشریح می‌شود.

بخش ۳.۸ *مثالهای طرّاحی مهندسی*. روشهایی که در بخشهای گذشته تشریح شد برای حل مسائل طرّاحی مهندسی استفاده می‌شوند. محدب بودن مسائل بررسی شده و شرایط لازم و کافی تشریح می‌شوند و تحلیل حساسیت انجام می‌شود.

۳.۲ مفاهیم اساسی

شرایط بهینگی برای یک نقطهٔ مینیمم در بخشهای بعدی بحث می‌شوند. این شرایط از پنداره‌های حساب استفاده می‌کنند. بنابراین، در این بخش، *ما مفاهیم اساسی حساب را با استفاده از علایم بردار و ماتریس مرور می‌کنیم*. فهم و به کار بردن راحت این مفاهیم اساسی و جبر خطی که در پیوست B تشریح شده بسیار مهم است.

1. Kuhn-Tucker

مفاهیم *گرادیان* و *هسیان* یک تابع تشریح می شوند. بسط *تیلور* یک تابع، نقش کلیدی در روشها و قضایای بهینه سازی ایفا می کند. بنابراین برای توابع تک و چندمتغیّره بحث می شوند. شکل درجهٔ دو که در شرایط مرتبهٔ دوم بهینگی و مفاهیم مختلف وابسته به آنها ظاهر می شود، مورد بحث قرار می گیرند.

۳.۲.۱ مینیمم

در بخش ۲.۷، ما مفهوم مجموعهٔ *قید* S (که *ناحیهٔ قابل قبول* نیز نامیده می شود) برای یک مسأله طرّاحی را به عنوان مجموعهٔ طرّاحیهای قابل قبول تعریف کردیم. چون در مسائل نامقیّد، قیدی وجود ندارد، تمام ناحیهٔ طرّاحی برای آنها قابل قبول است.

مسألهٔ بهینه سازی عبارت است از پیدا کردن طرحی در ناحیهٔ قابل قبول که مقدار کمتری را برای تابع هزینه بدهد. روشهای یافتن طرّاحی بهین در سرتاسر کتاب بحث می شوند. ما باید ابتدا به دقت تعریف کنیم که منظور از یک بهینه چیست. در بحث آینده، $\mathbf{x}^*$ برای نشان دادن یک نقطهٔ بخصوص از مجموعهٔ قید استفاده می شود.

۳.۲.۱.۱ مینیمم فراگیر (مطلق). یک تابع $f(\mathbf{x})$ از n متغیّر در صورتی در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ مینیمم فراگیر (مطلق) دارد که

$$f(\mathbf{x}^*) \leqq f(\mathbf{x}) \tag{۳.۱}$$

برای تمام $\mathbf{x}$ هایی که در ناحیهٔ قابل قبول (مجموعه S) هستند؛ اگر فقط نامساوی برای تمامی $\mathbf{x}$ ها بجز $\mathbf{x}^*$ در معادلهٔ (۳.۱) برقرار باشد، آن گاه $\mathbf{x}^*$ مینیمم *فراگیر قطعی* نامیده می شود.

۳.۲.۱.۲ مینیمم محلی (نسبی). یک تابع $f(\mathbf{x})$ از n متغیّر، در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ مینیمم محلی (نسبی) دارد اگر نامعادلهٔ (۳.۱) برای تمامی $\mathbf{x}$ هایی که در همسایگی نزدیک N از $\mathbf{x}^*$ در *ناحیهٔ قابل قبول* (مجموعه S) هستند برقرار باشد؛ اگر فقط نامساوی برقرار باشد، آن گاه $\mathbf{x}^*$ مینیمم محلی قطعی نامیده می شود. همسایگی N نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ در ریاضی به عنوان مجموعه ای از نقاط به شکل زیر تعریف می شوند:

$$N = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in S \quad \text{با} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \delta\}$$

برای δ های کوچکی که $\delta > 0$ است؛ همسایگی از نظر هندسی، ناحیهٔ قابل قبول کوچکی است که نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ را دربر می گیرد.

توجه کنید که یک تابع $f(\mathbf{x})$ تنها می تواند در یک نقطه مینیمم *فراگیر قطعی* داشته باشد. البته، ممکن است مینیمم فراگیر در چند نقطه داشته باشد که در آن صورت همهٔ آن نقاط مقدار تابع یکسانی دارند. به طور مشابه، یک تابع $f(\mathbf{x})$ تنها در یک نقطه در همسایگی N از $\mathbf{x}^*$ می تواند مینیمم محلی قطعی داشته باشد. البته ممکن است مینیمم محلی در نقاط متعددی در N داشته باشد که در آن صورت همهٔ آنها مقدار تابع یکسانی دارند. توجه دارید که در این جا این تعاریف روشی برای پیدا کردن نقاط مینیمم نشان نمی دهند. ولی، ما می توانیم برای یافتن آن نقاط مراحل تحلیل و محاسبات خود را براساس آنها بنا کنیم. توجه کنید که می توانیم به روش مشابهی ماکزیمم محلی و فراگیر را تعریف کنیم.

برای فهم تمایز ترسیمی مینیمم محلی و فراگیر، رسم تابع $f(x)$ را که در شکل ۲ . ۳ نشان داده شده مورد توجه قرار دهید. در قسمت (a) شکل جایی که x بین $-\infty$ و ∞ $(-\infty \leq x \leq \infty)$ قرار دارد، نقاط B و D مینیممهای محلی هستند، زیرا تابع کمترین مقدار را در همسایگی آنها دارد. به طور مشابه، نقاط A و C نقاط ماکزیمم محلی تابع هستند. مینیمم و یا ماکزیمم فراگیر برای تابع وجود ندارد، زیرا تابع $f(x)$ بی کران[1] است؛ یعنی x و $f(x)$ می توانند هر مقداری بین $-\infty$ و $+\infty$ داشته باشند. اگر x را به قرار گرفتن بین نقاط a و b محدود کنیم، چنان که در شکل ۲ . ۳ قسمت (b) نشان داده شده، آن گاه نقطهٔ E مینیمم فراگیر قطعی و نقطهٔ F ماکزیمم فراگیر قطعی تابع است.

به طور کلی قبل از شروع به حل مسأله ای حتی از وجود مینیمم بی اطلاعیم. در حالتهای خاصی ما می توانیم از وجود یک مینیمم مطمئن شویم، حتی اگر ندانیم چگونه آن را بیابیم. قضیهٔ ویرستراس[2] این تضمین را در شرایط خاصی بیان می کند.

قضیه ۳.۱ قضیه ویرستراس ـ وجود مینیمم فراگیر. اگر $f(\mathbf{x})$ در مجموعه قابل قبول غیرتهی S که بسته و کراندار است پیوسته باشد، آن گاه $f(\mathbf{x})$ یک مینیمم فراگیر در S دارد.

برای استفاده از قضیه باید مفهوم مجموعهٔ *بسته* و *کراندار* را بدانیم. یک مجموعه را بسته گویند اگر شامل نقاط مرزی اش نیز باشد و هر دنباله ای از نقاط یک زیر دنباله ای داشته باشد که به یک نقطه در مجموعه همگرا شود. یک مجموعه کراندار است اگر برای هر نقطه $\mathbf{x} \in S$، $\mathbf{x}^T\mathbf{x} < c$، در حالی که c یک عدد محدود است. چون دامنهٔ تابع در شکل (a) ۲ . ۳ بسته نیست و تابع بیکران است، مینیمم و ماکزیمم فراگیر برای تابع تضمین نمی شود.

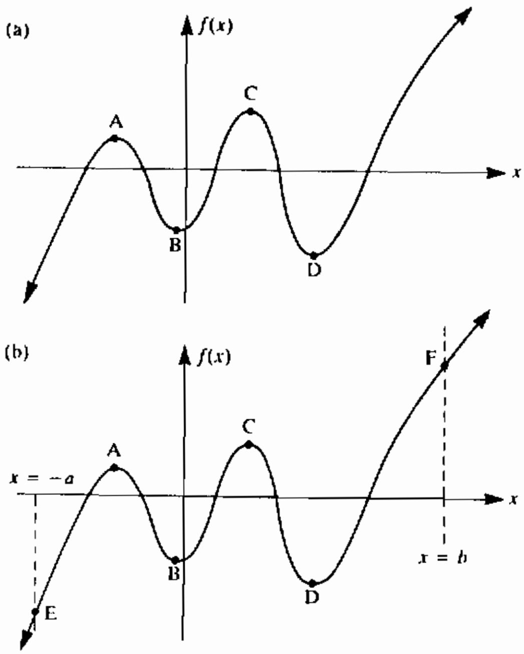
---

1. unbounded

2. Weierstrass

در حقیقت، برای تابع مینیمم و ماکزیمم فراگیر وجود ندارد. ولی در شکل (b) ۳.۲ ، چون ناحیه قابل قبول بسته و کراندار است به $-a \le x \le b$ و تابع پیوسته است، نقطهٔ مینیمم و ماکزیمم فراگیر دارد. مثال بعدی این مفاهیم را بیشتر توضیح می دهد.

مثال ۳.۱ وجود مینیمم فراگیر با استفاده از قضیهٔ ویرستراس. تابع $f(x) = 1/x$ را که روی مجموعهٔ $S = \{x \mid 0 < x \le 1\}$ تعریف شده در نظر بگیرید. مجموعه قابل قبول S بسته نیست، زیرا نقطهٔ مرزی $x = 0$ را شامل نمی شود. شرایط قضیه ویرستراس برآورده نشده، اگرچه تابع f در S پیوسته است، وجود مینیمم فراگیر تضمین نمی شود و در حقیقت نقطه ای مثل x^* که $f(x^*) \le f(x)$ برای $x \in S$ را برآورده کند وجود ندارد. اگر مجموعه را به شکل $S = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$ تعریف کنیم، آن گاه ناحیهٔ قابل قبول بسته و کراندار است. ولی f در $x = 0$ تعریف نشده (بنابراین پیوسته نیست)، بنابراین شرایط قضیه باز هم برآورده نشده و تضمینی برای مینیمم فراگیر برای f روی S وجود ندارد.



شکل ۳.۲ بیان ترسیمی نقاط بهینه. (a) دامنه و تابع بیکران (فقدان بهینه فراگیر). (b) دامنه و تابع کراندار (مینیمم و ماکزیمم فراگیر وجود دارند).

توجه کنید که هرگاه شرایط قضیه ویرستراس برآورده شوند، وجود بهینه فراگیر تضمین شده است. مهم است به این نکته توجه شود که ممکن است جواب فراگیر در صورت برآورده نشدن شرایط وجود داشته باشد. قضیه این امکان را نفی نمی کند. تفاوت در این است که ما نمی توانیم وجود آن را تضمین کنیم. همچنین دقت کنید که قضیه حتی اگر شرایط وجود جواب فراگیر برآورده شده باشد روش یافتن آن را نمی گوید. آن فقط قضیه وجود است. بعداً روشهایی را برای یافتن جواب بهین بحث خواهیم کرد.

۳.۲.۲ بردار گرادیان

چون گرادیان یک تابع هنگام بحث روشهای طرّاحی بهین استفاده می شود ما آن را تعریف و اهمیت هندسی اش را بحث می کنیم. همچنین علامت مشتق که این جا تعریف می شود در سراسر کتاب استفاده می شود. بنابراین باید کاملاً درك شوند.

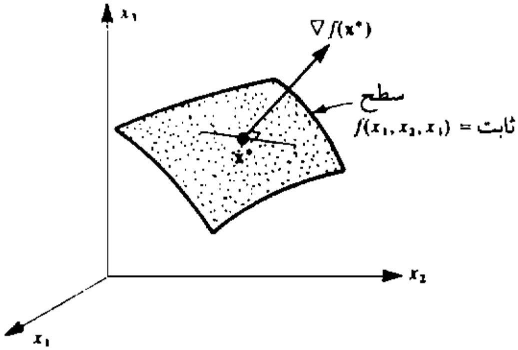
تابع $f(\mathbf{x})$ از n متغیّر x_1، x_2، ...، x_n را در نظر بگیرید. مشتق جزئی تابع نسبت به x_1 در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ به شکل $\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_1$ و نسبت به x_2 به شکل $\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_2$ و غیره تعریف می شود. فرض کنید c_i مشتق جزئی $f(\mathbf{x})$ نسبت به x_i در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ باشد. با استفاده از علایم اندیسی بخش ۱.۷، می توانیم تمام مشتقهای جزئی $f(\mathbf{x})$ را به شکل زیر نشان دهیم،

$$c_i = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}; \qquad i = 1 \text{ to } n \tag{۳.۲}$$

برای راحتی و جمع و جور بودن علایم، مشتقات جزئی $\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_1$، $\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_2$، ...، $\partial f(\mathbf{x}^*)/\partial x_n$ را در یک بردار ستونی مرتب می کنیم و آن را *بردار گرادیان* می نامیم و آن را به یکی از شکلهای زیر نمایش می دهیم: $\mathbf{c}$، ∇f، $\partial f/\partial \mathbf{x}$، grad f. پس گرادیان تابع $f(\mathbf{x})$ متشکل از n متغیّر x_1، x_2، ...، x_n در $\mathbf{x}^*$ به شکل یک بردار ستونی تعریف می شود:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} \; \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \right]^T \tag{۳.۳}$$

که در آن اندیس بالایی T نشانگر ترانهاده بردار سطری است. دقت کنید که تمامی مشتقات جزئی



شکل ۳.۲ بردار گرادیان برای $f(x_1, x_2, x_3)$ در نقطه $\mathbf{x}^*$

در نقطهٔ دادهٔ شدهٔ $\mathbf{x}^*$ محاسبه می‌شوند. یعنی هر مؤلفه از بردار گرادیان تابعی از خودش است که در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ ارزیابی می‌شود.

ازنظر هندسی، بردار گرادیان عمود بر سطح مماس در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ است، همچنان که در شکل ۳ . ۳ برای تابعی از سه متغیّر نشان داده شده است. همچنین جهت آن به طرف *بیشترین افزایش* تابع است. این خواص بسیار مهم هستند و در فصل (۵) بحث و اثبات می‌شوند. آنها در به دست آوردن شرایط بهینگی و روشهای عددی طرّاحی بهین استفاده خواهند شد.

مثال ۳.۲ محاسبهٔ بردار گرادیان. بردار گرادیان تابع

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

را در نقطهٔ $\mathbf{x}^* = (1.8, 1.6)$ محاسبه کنید.

حل. تابع داده شده معادلهٔ دایره‌ای است به مرکز (۱ ، ۱). مقدار تابع در $\mathbf{x}^*$ عبارت است از

$$f(1.8, 1.6) = (1.8 - 1)^2 + (1.6 - 1)^2 = 1$$

بنابراین، نقطهٔ $(1.8, 1.6)$ روی دایره‌ای به شعاع ۱ قرار دارد که به عنوان نقطهٔ A در شکل ۴ . ۳ نشان داده شده. مشتقات جزئی تابع در نقطهٔ $(1.8, 1.6)$ به شکل زیر محاسبه می‌شوند

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(1.8, 1.6) = 2(x_1 - 1) = 2(1.8 - 1) = 1.6$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(1.8, 1.6) = 2(x_2 - 1) = 2(1.6 - 1) = 1.2$$

پس بردار گرادیان $f(\mathbf{x})$ در نقطهٔ $(1.8, 1.6)$ به شکل زیر است

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

موضـوع در شکل ۴ . ۳ نشـان داده شـده است . می توان دید که $\mathbf{c}$ در نقطهٔ $(1.8, 1.6)$ عمود بر دایره است . این مطلب با عمود بودن گرادیان بر سطح هماهنگ است .

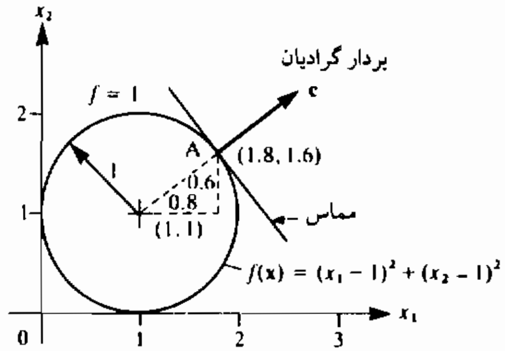
۳.۲.۳ ماتریس هسیان

با یک بار دیگر مشتق گیری از بردار گرادیان (هر مؤلفه از بردار گرادیان نسبت به هر x_i مشتق گرفته می شود)، ماتریسی از مشتقهای دوم برای $f(\mathbf{x})$ به دست می آوریم که *ماتریس هسیان* و یا به طور ساده هسیان نامیده می شود . اگر از هر مؤلفه از بردار گرادیان معادلهٔ (۳ . ۳) نسبت به x_1 ، x_2 ، ... ، x_n مشتق بگیریم داریم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}\,\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{۳ . ۴}$$

در حالی که تمامی مشتقها در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ محاسبه شده اند . هسیان یک ماتریس $n \times n$ است که معمولاً با $\mathbf{H}$ یا $\nabla^2 f$ نشان داده می شود . توجه به *این نکته مهم است که هر عنصر هسیان تابعی از خودش است که در نقطهٔ داده شده* $\mathbf{x}^*$ *ارزیابی شده* . همچنین چون $f(\mathbf{x})$ دو بار پیوسته و مشتق پذیر فرض شده، مشتقهای جزئی زیر با هم مساویند،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}; \qquad i = 1 \text{ to } n,\ j = 1 \text{ to } n$$



شکل ۳.۴ بردار گرادیان برای تابع $f(\mathbf{x})$ از مثال ۳.۲ در نقطهٔ (1.8, 1.6)

بنابراین، هسیان همیشه یک *ماتریس متقارن است*. این ماتریس در شرایط کافی بهینگی که بعداً در همین فصل بحث می شود نقش اساسی ایفا می کند. هسیان به شکل زیر نوشته خواهد شد

$$\mathbf{H} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right]; \qquad i = 1 \text{ to } n,\ j = 1 \text{ to } n \tag{۳.۵}$$

مثال ۳.۳ ارزیابی گرادیان و هسیان یک تابع. برای تابع زیر، بردار گرادیان و ماتریس هسیان را در نقطهٔ (1, 2) محاسبه کنید:

$$f(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2^3 + 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2 + 2x_1 + 4x_2$$

حل. مشتقات جزئی اوّل تابع عبارتند از

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 4x_1 - x_2 + 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 3x_2^2 + 6x_2 - x_1 + 4$$

با جای گذاری نقطهٔ $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ ، بردار گرادیان عبارت است از

$$\nabla f(1, 2) = \begin{bmatrix} 7 \\ 27 \end{bmatrix}$$

مشتقات جزئی دوم تابع به شکل زیر محاسبه می شوند

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 6x_1 + 4; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2} = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1} = -1; \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 6x_2 + 6.$$

بنابراین، ماتریس هسیان در نقطهٔ $(1, 2)$ عبارت است از

$$\mathbf{H}(1,2) = \begin{bmatrix} 10 & -1 \\ -1 & 18 \end{bmatrix}$$

۳.۲.۴ بسط تیلور

یک تابع می‌تواند در همسایگی هر نقطه‌ای برحسب مقدار خودش و مشتقاتش (در صورتی که مشتق داشته باشد) به وسیلهٔ یک چندجمله‌ای با استفاده از بسط تیلور تقریب زده شود. *ابتدا تابع یک متغیّره* $f(x)$ *را در نظر بگیرید.* بسط تیلور در نقطهٔ x^* عبارت است از

$$f(x) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}(x - x^*) + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x^*)}{dx^2}(x - x^*)^2 + R \qquad (۳.۶)$$

در حالی که R جملهٔ *باقی‌مانده* است و ازنظر مقدار کوچکتر از جمله‌های قبلی است، اگر x به اندازهٔ کافی به x^* نزدیک بوده و $x - x^* = d$ (تغییرات کوچکی در x^*) باشد، بسط تیلور (تا درجه ۲) معادلهٔ (۳.۶) به شکل زیر است.

$$f(x^* + d) = f(x^*) + \frac{df(x^*)}{dx}d + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x^*)}{dx^2}d^2 + R \qquad (۳.۷)$$

برای یک *تابع دو متغیّره* $f(x_1, x_2)$، بسط تیلور در نقطهٔ (x_1^*, x_2^*) عبارت است از

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) = f(x_1^*, x_2^*) &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - x_2^*)^2\right] + R \end{aligned}$$

(۳.۸)

در حالی که تمامی مشتقات جزئی در نقطهٔ (x_1^*, x_2^*) محاسبه می‌شوند. برای مختصر بودن علایم، شناسهٔ[1] مشتقات جزئی در معادلهٔ (۳.۸) و دربقیهٔ بخشهای بعدی حذف شده‌اند. بسط تیلور در معادلهٔ (۳.۸) با استفاده از علامت جمع که در فصل (۱) تعریف شده نیز می‌تواند

1. argument

نوشته شود

$$f(x_1, x_2) = f(x_1^*, x_2^*) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i - x_i^*) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - x_i^*)(x_j - x_j^*) + R \qquad (۳.۹)$$

می توان دید که از بسط جمعهای معادلهٔ (۳.۹)، معادلهٔ (۳.۸) به دست می آید. با توجه به مقادیر $\partial f/\partial x_i$ به عنوان مؤلفه های گرادیان تابع که در معادلهٔ (۳.۳) داده شده و $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$ به عنوان هسیان معادله (۳.۵) که در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ ارزیابی شده، بسط تیلور می تواند برحسب علایم *ماتریسی* نیز نوشته شود.

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + R \qquad (۳.۱۰)$$

در حالی که $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ، $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*)$ ، و $\mathbf{H}$ ماتریس ۲ × ۲ هسیان است. دقت کنید که با علایم ماتریسی، بسط تیلور معادلهٔ (۳.۱۰) به راحتی می تواند به یک تابع n متغیّره تعمیم داده شود. در آن صورت، $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}^*$ و ∇f ، بردارهای n بعدی و $\mathbf{H}$ ماتریس هسیان $n \times n$ است. با تعریف $\mathbf{x} - \mathbf{x}^* = \mathbf{d}$ ، معادلهٔ (۳.۱۰) را می توان به شکل زیر نوشت

$$f(\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f^T \mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{H}\mathbf{d} + R \qquad (۳.۱۱)$$

اغلب می خواهیم تغییرات تابع را وقتی که $\mathbf{x}^*$ *به نقطه* $\mathbf{x}$ *در همسایگی خود منتقل شود بدانیم.* تغییرات را با $\Delta f = f(\mathbf{x}^* + \mathbf{d}) - f(\mathbf{x}^*)$ تعریف می کنیم، از معادلهٔ (۳.۱۱) داریم

$$\Delta f = \nabla f^T \mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}^T \mathbf{H}\mathbf{d} + R \qquad (۳.۱۲)$$

یک تغییر مرتبه اوّل $f(\mathbf{x})$ در $\mathbf{x}^*$ (که با δf نشان داده می شود) با نگه داشتن جملهٔ اول از معادلهٔ (۳.۱۲) به دست می آید،

$$\delta f = \nabla f^T \delta \mathbf{x} \qquad (۳.۱۳)$$

در حالی که $\delta \mathbf{x}$ تغییرات کوچکی در $\mathbf{x}^*$ ($\delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$) است. دقت کنید که تغییرات مرتبه اوّل تابع که در معادلهٔ (۳.۱۳) داده شده ضرب نقطه ای بردارهای ∇f و $\delta \mathbf{x}$ است. وقتی $\mathbf{x}$ نزدیک $\mathbf{x}^*$ است، یک تغییر مرتبه اوّل تقریبی قابل قبول برای تغییرات تابع اصلی می باشد.

اکنون چند تابع در نظر گرفته و آنها را در نقطهٔ داده شده $\mathbf{x}^*$ با استفاده از بسط تیلور تقریب می زنیم. باقی ماندهٔ R وقتی از معادلهٔ (۳.۱۱) استفاده می شود حذف می شود.

مثال ۳.۴ بسط تیلور تابع یک متغیّره. تابع $f(x) = \cos x$ را حول نقطهٔ $x^* = 0$ تقریب بزنید.

حل. مشتقات تابع $f(x)$ به شکل زیر است

$$\frac{df}{dx} = -\sin x, \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = -\cos x$$

بنابراین، با استفاده از معادلهٔ (۳.۶)، بسط تیلور مرتبهٔ دو برای تابع $\cos x$ در نقطهٔ $x^* = 0$ به شکل زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}\cos x &\simeq \cos 0 - \sin 0(x-0) + \tfrac{1}{2}(-\cos 0)(x-0)^2 \\ &\simeq 1 - \tfrac{1}{2}x^2\end{aligned}$$

مثال ۳.۵ بسط تیلور تابع دو متغیّره. بسط تیلور مرتبهٔ دو را برای تابع

$$f(\mathbf{x}) = 3x_1^3x_2$$

در نقطهٔ $\mathbf{x}^* = (1 ، 1)$ به دست آورید.

حل. گرادیان و هسیان تابع $f(\mathbf{x})$ در نقطهٔ $\mathbf{x}^* = (1 ، 1)$ با استفاده از معادله های (۳.۳) و (۳.۵) عبارت است از

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1^2x_2 \\ 3x_1^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 18x_1x_2 & 9x_1^2 \\ 9x_1^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

با جایگزین کردن مقادیر فوق در شکل ماتریسی عبارت تیلور که در معادلهٔ (۳.۱۰) داده شده و با استفاده از $\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$، تقریب $\bar{f}(\mathbf{x})$ را برای $f(\mathbf{x})$ به دست می آوریم

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = 3 + \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (x_1-1) \\ (x_2-1) \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (x_1-1) \\ (x_2-1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 18 & 9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (x_1-1) \\ (x_2-1) \end{bmatrix}$$

در حالی که $f(\mathbf{x}^*) = 3$ استفاده شده است. اگر عبارت را با بسط ضرب بردار و ماتریس ساده کنیم، بسط تیلور $f(\mathbf{x})$ را حول نقطهٔ (۱ ، ۱) می یابیم که عبارت است از

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = 9x_1^2 + 9x_1x_2 - 18x_1 - 6x_2 + 9$$

جدول ۳.۱ دقت بسط تیلور مرتبهٔ دو حول نقطه (۱ ، ۱) برای تابع $f(\mathbf{x}) = 3x_1^3 x_2$ مثال ۳.۵

x_1	x_2	$f(\mathbf{x})$	$\bar{f}(\mathbf{x})$	درصد خطا
۱٫۰۰	۱٫۰۰	۳٫۰۰۰۰	۳٫۰۰۰۰	۰٫۰۰۰
۱٫۰۵	۱٫۰۵	۳٫۶۴۶۵	۳٫۶۴۵۰	۰٫۰۴۱
۱٫۱۰	۱٫۱۰	۴٫۳۹۲۳	۴٫۳۸۰۰	۰٫۲۸۰
۱٫۱۵	۱٫۱۵	۵٫۲۴۷۰	۵٫۲۰۵۰	۰٫۸۰۰
۱٫۲۰	۱٫۲۰	۶٫۲۲۰۸	۶٫۱۲۰۰	۱٫۶۲۰
۱٫۲۵	۱٫۲۵	۷٫۳۲۴۲	۷٫۱۲۵۰	۲٫۷۲۰
۱٫۳۰	۱٫۳۰	۸٫۵۶۸۳	۸٫۲۲۰۰	۴٫۰۶۵
۱٫۳۵	۱٫۳۵	۹٫۹۶۴۵	۹٫۴۰۵۰	۵٫۶۱۵
۱٫۴۰	۱٫۴۰	۱۱٫۵۲۴۸	۱۰٫۶۸۰۰	۷٫۳۳۰
۱٫۴۵	۱٫۴۵	۱۳٫۲۶۱۵	۱۲٫۰۴۵۰	۹٫۱۷۳
۱٫۵۰	۱٫۵۰	۱۵٫۱۸۷۵	۱۳٫۵۰۰۰	۱۱٫۱۱۱

این عبارت یک تقریب مرتبهٔ دو برای تابع $3x_1^3 x_2$ حول نقطهٔ $\mathbf{x}^* = (۱ ، ۱)$ است. یعنی در یک همسایگی کوچک $\mathbf{x}^*$، عبارت تقریباً مقداری مشابه به تابع اصلی $f(\mathbf{x})$ می دهد. برای این که ببینیم دقت تقریب $\bar{f}(\mathbf{x})$ با $f(\mathbf{x})$ چقدر است، جدول ۳.۱ مقادیر تقریبی و تابع اصلی را برای نقاط مشابهی از همسایگی (۱ ، ۱) مقایسه کرده است. دیده می شود که حتی تا ۳۰٪ تغییرات در نقطه، تابع تقریب حدود ۴٪ خطا دارد. بعد از آن نقطه، خطا افزایش پیدا می کند. پس، تابع تقریبی $\bar{f}(\mathbf{x})$ با دقت بسیار خوبی در همسایگی نزدیک نقطهٔ (۱ ، ۱) نشان دهندهٔ تابع اصلی است.

مثال ۳.۶ بسط تیلور خطی یک تابع. بسط تیلور خطی تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 4$$

را در نقطهٔ $\mathbf{x}^* = (1, 2)$ به دست آورید. تابع تقریبی و اصلی را در همسایگی نقطه (1, 2) مقایسه کنید.

حل. گرادیان تابع در نقطهٔ (1, 2) عبارت است از

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_1 - 4) \\ (2x_2 - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

چون $f(1, 2) = 1$ ، معادلهٔ (۳ . ۱۰) تقریب سری تیلور خطی برای $f(\mathbf{x})$ را به شکل زیر می دهد

$$\begin{aligned} \bar{f}(\mathbf{x}) &= 1 + [-2 \quad 2]\begin{bmatrix} (x_1 - 1) \\ (x_2 - 2) \end{bmatrix} \\ &= -2x_1 + 2x_2 - 1 \end{aligned}$$

برای دیدن این که $\bar{f}(\mathbf{x})$ با چه دقتی تابع $f(\mathbf{x})$ را در همسایگی $(1, 2)$ تقریب زده، مقادیر تابع را در نقاط مختلفی همچنان که در جدول ۳ . ۲ دیده می شود، محاسبه کرده ایم. می بینیم که تا حدود ۲۰٪ تغییرات در یکی از متغیّرها، بیشترین خطا بین $f(\mathbf{x})$ و $\bar{f}(\mathbf{x})$ فقط ۸٪ است. اگر هر دو متغیّر تا ۲۰٪ تغییر کنند بیشترین خطا ۱۲٫۵٪ است. این میزان خطا در بسیاری از کاربردها پذیرفتنی است. به هر حال دقت کنید که مقدار خطا برای توابع مختلف متفاوت است و می تواند برای توابع بسیار غیرخطی زیادتر باشد.

۳.۲.۵ شکلهای درجهٔ دو و ماتریسهای معین

۳.۲.۵.۱ شکل درجهٔ دو. شکل درجه دو، یک *تابع مخصوص غیرخطی است که فقط* جملات مرتبهٔ دو *دارد*. به عنوان مثال تابع زیر یک تابع به شکل درجهٔ دو است.

$$F(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_1$$

شکلهای درجهٔ دو نقش ممتازی در نظریه و روشهای بهینه سازی دارند. بنابراین، در این قسمت ما نتایجی را که به آنها مربوط می شود بحث می کنیم.

تابع ویژه ای از n متغیّر در نظر بگیرید $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ که به شکل دو علامت جمع (برای بحث علامت جمع مراجعه کنید به فصل (۱)) مطابق زیر نوشته شده :

$$F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_ix_j \qquad (۳ . ۱۴)$$

جدول ۳.۲ دقت تقریب خطی تابع $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 4$
مثال ۳.۶ در نقطه $(1, 2)$

x_1	x_2	$f(\mathbf{x})$	$\bar{f}(\mathbf{x})$	درصد خطا
۱/۰۰	۲/۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۰۰۰
۱/۰۲	۲/۰۰	۰/۹۶۰۴	۰/۹۶۰۰	۰/۰۴۲
۱/۰۴	۲/۰۰	۰/۹۲۱۶	۰/۹۲۰۰	۰/۱۷۴
۱/۰۶	۲/۰۰	۰/۸۸۳۶	۰/۸۸۰۰	۰/۴۰۷
۱/۰۸	۲/۰۰	۰/۸۴۶۴	۰/۸۴۰۰	۰/۷۵۶
۱/۱۰	۲/۰۰	۰/۸۱۰۰	۰/۸۰۰۰	۱/۲۳۵
۱/۱۲	۲/۰۰	۰/۷۷۴۴	۰/۷۶۰۰	۱/۸۶۰
۱/۱۴	۲/۰۰	۰/۷۳۹۶	۰/۷۲۰۰	۲/۶۵۰
۱/۱۶	۲/۰۰	۰/۷۰۵۶	۰/۶۸۰۰	۳/۶۲۸
۱/۱۸	۲/۰۰	۰/۶۷۲۴	۰/۶۴۰۰	۴/۸۱۸
۱/۲۰	۲/۰۰	۰/۶۴۰۰	۰/۶۰۰۰	۶/۲۵۰
۱/۰۰	۲/۰۴	۱/۰۸۱۶	۱/۰۸۰۰	۰/۱۴۸
۱/۰۰	۲/۰۸	۱/۱۶۳۲	۱/۱۶۰۰	۰/۲۷۵
۱/۰۰	۲/۱۲	۱/۲۵۴۴	۱/۲۴۰۰	۱/۱۴۸
۱/۰۰	۲/۱۶	۱/۳۴۵۶	۱/۳۲۰۰	۱/۹۰۳
۱/۰۰	۲/۲۰	۱/۴۴۰۰	۱/۴۰۰۰	۲/۷۷۸
۱/۰۰	۲/۲۴	۱/۵۳۷۶	۱/۴۸۰۰	۳/۷۴۶
۱/۰۰	۲/۲۸	۱/۶۳۸۴	۱/۵۶۰۰	۴/۷۸۵
۱/۰۰	۲/۳۲	۱/۷۴۲۴	۱/۶۴۰۰	۵/۸۷۷
۱/۰۰	۲/۳۶	۱/۸۴۹۶	۱/۷۲۰۰	۷/۰۰۷
۱/۰۰	۲/۴۰	۱/۹۶۰۰	۱/۸۰۰۰	۸/۱۶۳
۱/۰۲	۲/۰۴	۱/۰۴۲۰	۱/۰۴۰۰	۰/۱۹۲
۱/۰۴	۲/۰۸	۱/۰۸۸۰	۱/۰۸۰۰	۰/۷۳۵
۱/۰۶	۲/۱۲	۱/۱۳۸۰	۱/۱۲۰۰	۱/۵۸۲
۱/۰۸	۲/۱۶	۱/۱۹۲۰	۱/۱۶۰۰	۲/۶۸۴
۱/۱۰	۲/۲۰	۱/۲۵۰۰	۱/۲۰۰۰	۴/۰۰۰
۱/۱۲	۲/۲۴	۱/۳۱۲۰	۱/۲۴۰۰	۵/۴۸۸
۱/۱۴	۲/۲۸	۱/۳۷۸۰	۱/۲۸۰۰	۷/۱۱۲
۱/۱۶	۲/۳۲	۱/۴۴۸۰	۱/۳۲۰۰	۸/۸۴۰
۱/۱۸	۲/۳۶	۱/۵۲۲۰	۱/۳۶۰۰	۱۰/۶۴۰
۱/۲۰	۲/۴۰	۱/۶۰۰۰	۱/۴۰۰۰	۱۲/۵۰۰

در حالی که p_{ij} ثابتهای مشخص و ضریب $\frac{1}{2}$ برای راحتی و مطابقت داشتن $F(\mathbf{x})$ با جمله درجهٔ دوم بسط تیلور معادلهٔ (۳ . ۱۱) به کار رفته است. نتایج این قسمت با به کار نبردن ضریب $\frac{1}{2}$ متأثر نخواهد شد، همچنان که در خیلی از کتابها انجام شده است. البته مقدار شکل درجه دو با ضریب $\frac{1}{2}$ متأثر می شود. با قرار دادن $i = 1$ و اجازه تغییرات به j از ۱ تا n و سپس قرار دادن $i = 2$ و j از ۱ تا n و ... معادلهٔ (۳ . ۱۴) را بسط می دهیم، داریم

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}[&(p_{11}x_1^2 + p_{12}x_1x_2 + \ldots + p_{1n}x_1x_n) \\ &+ (p_{21}x_2x_1 + p_{22}x_2^2 + \ldots + p_{2n}x_2x_n) \\ &+ \ldots + (p_{n1}x_nx_1 + \ldots + p_{nn}x_n^2)] \end{aligned} \tag{۳ . ۱۵}$$

دقّت کنید اگر p_{ij} مشخص باشد و x_i داده شود، $F(\mathbf{x})$ در معادلهٔ (۳ . ۱۵) فقط یک عدد (اسکالر) است. تابع یک *شکل* درجه دو نامیده می شود زیرا هر جملهٔ آن درجه دو از یک متغیّر و یا حاصل ضرب دو متغیّر مختلف است.

۳.۲.۵.۲ ماتریس شکل درجهٔ دو. شکل درجهٔ دو را می توان به شکل ماتریسی نوشت. فرض کنید $\mathbf{P} = [p_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$، $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ یک بردار n بعدی، و $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ بردار n بعدی دیگری که از ضرب $\mathbf{P}$ و $\mathbf{x}$ به دست می آید، باشند. با نوشتن $\mathbf{y} = \mathbf{Px}$ برحسب علایم جمع داریم

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j; \qquad i = 1 \text{ to } n \tag{۳ . ۱۶}$$

همچنین می توانیم معادلهٔ (۳ . ۱۴) را به شکل زیر بنویسیم

$$F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j\right) \tag{۳ . ۱۷}$$

با جایگزینی معادلهٔ (۳ . ۱۶) در (۳ . ۱۷)،

$$F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{۳ . ۱۸}$$

ولی جمع طرف راست معادلهٔ (۳ . ۱۸) نشانگر ضرب اسکالر بردارهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ است، یعنی $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$. با جایگزینی $\mathbf{y} = \mathbf{Px}$ در این، شکل ماتریسی $F(\mathbf{x})$ به دست می آید،

$$F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Px} \tag{۳ . ۱۹}$$

P *ماتریس شکل درجهٔ دو تابع* $F(\mathbf{x})$ *نامیده می‌شود*. عناصر **P** ضریب جملات تابع $F(\mathbf{x})$ هستند. برای مثال، در معادلهٔ (۳.۱۵) جزء p_{ij} دو برابر ضریب جمله x_ix_j در $F(\mathbf{x})$ است. می‌بینیم که بجز برای جملات توان دو، هر ضرب $x_ix_j (i \neq j)$ دو بار ظاهر شده است. بنابراین، معادلهٔ (۳.۱۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\{&[p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + \dots + p_{nn}x_n^2] \\ &+ [(p_{12}+p_{21})x_1x_2 + (p_{13}+p_{31})x_1x_3 + \dots + (p_{1n}+p_{n1})x_1x_n] \\ &+ [(p_{23}+p_{32})x_2x_3 + (p_{24}+p_{42})x_2x_4 + \dots + (p_{2n}+p_{n2})x_2x_n] \\ &+ \dots + [(p_{n-1,n}+p_{n,n-1})x_{n-1}x_n]\} \end{aligned} \tag{۳.۲۰}$$

پس، برای $i \neq j$، ضریب x_ix_j عبارت است از $(p_{ij}+p_{ji})$. اگر ضرایب یک ماتریس $n \times n$، **A** را به شکل زیر تعریف کنیم

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}(p_{ij}+p_{ji}), \qquad \text{برای تمامی } i \text{ و } j \tag{۳.۲۱}$$

آن گاه با استفاده از این تعریف، به راحتی می‌توان دید که

$$a_{ij} + a_{ji} = p_{ij} + p_{ji}$$

بنابراین، $(p_{ij}+p_{ji})$ در معادلهٔ (۳.۲۰) می‌تواند با $(a_{ij}+a_{ji})$ جایگزین شود و شکل درجه دو معادلهٔ (۳.۱۹) می‌شود

$$F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x} = \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{۳.۲۲}$$

مقدار شکل درجهٔ دو با تعویض **A** به جای **P** تغییری نمی‌کند. ماتریس **A**، همیشه *متقارن* $(a_{ij} = a_{ji})$ است، در حالی که **P** ممکن است متقارن نباشد. تقارن **A** به سادگی از تعریف a_{ij} معادلهٔ (۳.۲۱) دیده می‌شود، یعنی با تعویض اندیسهای i و j داریم $a_{ji} = a_{ij}$. پس در هر شکل درجهٔ دو $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ می‌توان به جای **P** یک ماتریس متقارن جایگزین کرد. بحث گذشته همچنین نشان می‌دهد که ماتریسهای مختلفی می‌توانند با شکل درجهٔ دو یکسانی مربوط شوند. تمامی آنها ـ بجز یکی ـ نامتقارنند. ماتریس متقارن مربوط به آن همیشه منحصر به فرد و یگانه است. ماتریسهای نامتقارن چندان مفید نیستند. ماتریس متقارن، طبیعت شکل درجهٔ دو را همچنان که بعداً بحث خواهد شد، تعیین می‌کند.

با مقایسه معادلهٔ (۳.۱۱) با معادله (۳.۲۲) می‌بینیم که جمله سوم بسط تیلور یک شکل درجهٔ دو از متغیّر **d** است. بنابراین، هسیان **H** ماتریسی است که مربوط به شکل درجهٔ دو است.

مثال ۳.۷ ماتریس شکل درجهٔ دو. ماتریس مربوط به شکل درجهٔ دوی زیر را مشخص کنید .

$$F(x_1, x_2, x_3) = \tfrac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2)$$

حل . با نوشتن F به شکل ماتریسی $(F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x})$ ، داریم

$$F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{P}$ شکل درجه دو به راحتی از مقایسهٔ عبارت با معادلهٔ (۳ . ۲۰) مشخص می شود . جزء i ام قطر p_{ii} ضریب x_i^2 است . بنابراین $p_{11} = 2$ ، ضریب x_1^2 ؛ $p_{22} = -6$ ، ضریب x_2^2 ، و $p_{33} = 5$ ضریب x_3^2 . ضرایب x_ix_j می توانند به اجزای p_{ij} و p_{ji} از ماتریس $\mathbf{P}$ تقسیم شوند . به هرحال، جمع $p_{ij} + p_{ji}$ باید مساوی با ضریب x_ix_j باشد . در ماتریس بالا ، $p_{12} = 2$ و $p_{21} = 0$ ، و $p_{12} + p_{21} = 2$ که ضریب x_1x_2 است . به طور مشابه ، می توانیم عناصر p_{13} ، p_{31} ، p_{23} و p_{32} را محاسبه کنیم .

چون ضریب x_ix_j می تواند بین p_{ij} و p_{ji} به هر نسبتی تقسیم شود، ماتریسهای مختلفی با شکل درجهٔ دو مربوط می شوند . برای مثال، ماتریس زیر نیز با شکل درجه دو ارتباط دارد .

$$\begin{bmatrix} 2 & 0.5 & 1 \\ 1.5 & -6 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

تقسیم مساوی ضرایب بین p_{ij} و p_{ji} شکل زیر را به دست می دهد

$$F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}[x_1 \quad x_2 \quad x_3]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

هرکدام از عبارات گذشته ، ماتریسی مربوط به شکل درجهٔ دو می دهند . دو ماتریس اوّل نامتقارن و سومی متقارن است . عناصر قطری ماتریس متقارن مانند گذشته از ضرایب x_i^2 به دست می آیند . عناصر غیرقطری با تقسیم مساوی ضریب جملهٔ x_ix_j بین a_{ij} و a_{ji} به دست می آید . این معادلهٔ (۳ . ۲۱) را برآورده می کند .

۳.۲.۵.۳ شکل یک ماتریس. شکل درجهٔ دو $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ ممکن است برای هر $\mathbf{x}$ مشخص مثبت، منفی و یا صفر باشد. **همچنین ممکن است این خاصیت را داشته باشد که همیشه** مثبت باشد [بجز برای $F(0)$]. این شکل را معین مثبت می‌نامند. به طور مشابه، آن را معین منفی می‌نامند اگر برای تمامی $\mathbf{x}$ها بجز $\mathbf{x} = 0$ ، $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < 0$ باشد. اگر یک شکل درجهٔ دو خاصیت $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ داشته باشد، برای همهٔ $\mathbf{x}$ ها و حداقل یک $\mathbf{x} \neq 0$ ($\mathbf{x}$ غیرصفر) با $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ ، آن گاه آن را نیمه معین مثبت می‌نامند. تعریفی مشابه برای نیمه معین منفی با برعکس کردن علامت نامساوی به دست می‌آید. شکل درجه دویی را که برای بعضی بردارهای $\mathbf{x}$ مثبت و برای بعضی دیگر منفی باشد نامعین می‌نامند. یک ماتریس متقارن $\mathbf{A}$ اغلب به‌عنوان معین مثبت، *نیمه معین مثبت*، *معین منفی*، *نیمه معین منفی*، و *نامعین* گفته می‌شود، اگر شکل درجهٔ دو مربوطه آن به ترتیب، معین مثبت، نیمه معین مثبت، معین منفی، نیمه معین منفی، و نامعین باشد.

مثال ۳.۸ تعیین شکل یک ماتریس. شکل ماتریسهای زیر را تعیین کنید:

$$(a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حل. شکل درجه دو مربوط به ماتریس (a) همیشه مثبت است، یعنی

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (2x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2) > 0$$

مگر $(\mathbf{x} = 0)$ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. پس ماتریس معین مثبت است.

شکل درجه دو مربوط به ماتریس (b) نیمه معین منفی است، زیرا

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = (-x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 - x_3^2) = \{-x_3^2 - (x_1 - x_2)^2\} \leqq 0$$

برای همه $\mathbf{x}$ ها، و $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ وقتی $x_3 = 0$ ، و $x_1 = x_2$ باشد [مثل $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$]. دقت کنید که شکل درجهٔ دو معین منفی نیست بلکه نیمه معین منفی است، زیرا ممکن است برای $\mathbf{x}$ غیرصفر مقدار صفر داشته باشد. بنابراین ماتریس مربوطه نیز نیمه معین منفی است.

اکنون روشهای بررسی معین و نیمه معین بودن شکل درجه دو یک ماتریس را بررسی می‌کنیم. چون این کار شامل محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ یک ماتریس است، بخش B.7 پیوست B

در این هنگام باید مرور شود.

قضیه ۳.۲ بررسی مقادیر ویژه برای تشخیص شکل یك ماتریس. فرض کنید $i = 1$ to n ، λ_i ، n مقدار ویژه ماتریس متقارن $n \times n$ ، $\mathbf{A}$ ، مربوط به شکل درجه دو $F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ باشد. نتایج زیر می تواند در ارتباط با شکل درجهٔ دو $F(\mathbf{x})$ ماتریس $\mathbf{A}$ بیان شود:

۱. $F(\mathbf{x})$ معین مثبت است *اگر و تنها اگر* تمامی مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ کاملاً مثبت باشند، یعنی $i = 1$ to n ، $\lambda_i > 0$.

۲. $F(\mathbf{x})$ نیمه معین مثبت است *اگر و تنها اگر* تمامی مقادیر ویژه $\mathbf{A}$ نامنفی باشند، یعنی $i = 1$ to n ، $\lambda_i \geq 0$ (دقت کنید که دست کم باید یک مقدار ویژه صفر باشد تا آن را نیمه معین مثبت بنامند).

۳. $F(\mathbf{x})$ معین منفی است *اگر و تنها اگر* تمامی مقادیر ویژه کاملاً منفی باشد، یعنی $i = 1$ to n ، $\lambda_i < 0$.

۴. $F(\mathbf{x})$ نیمه معین مثبت است *اگر و تنها اگر* همهٔ مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}$ نامثبت باشند، یعنی $i = 1$ to n ، $\lambda_i \leq 0$ (دقت کنید که دست کم باید یک مقدار ویژه صفر باشد تا آن را نیمه معین منفی بنامند).

۵. $F(\mathbf{x})$ *نامعین است اگر* بعضی از $\lambda_i > 0$ و بعضی دیگر $\lambda_i < 0$ باشند.

راه دیگر بررسی شکل یک ماتریس با کمک قضیهٔ زیر انجام می شود:

قضیه ۳.۳ بررسی شکل یك ماتریس با استفاده از ماینرهای اصلی[1]. فرض کنید M_k ، k امین ماینر اصلی ماتریس متقارن $n \times n$ ، $\mathbf{A}$ باشد که به عنوان دترمینان $k \times k$ ماتریسهای کوچکتری که با حذف آخرین ردیف و ستون $(n-k)$ ام ماتریس $\mathbf{A}$ (پیوست B ، بخش B.4) تعریف می شود. فرض کنید هیچ دو ماینر اصلی پیاپی صفر نباشند؛ آن گاه

۱. $\mathbf{A}$ معین مثبت است *اگر و تنها اگر* همه ماینرهای اصلی مثبت باشند یعنی $M_k > 0$ ، $k = 1$ to n .

۲. $\mathbf{A}$ نیمه معین مثبت است *اگر و تنها اگر* $M_k \geq 0$ ، $k = 1$ to n (دقت کنید که حداقل باید یک ماینر اصلی صفر باشد تا آن را نیمه معین مثبت بنامند).

۳. $\mathbf{A}$ معین منفی است *اگر و تنها اگر* $M_k < 0$ برای k های فرد و $M_k > 0$ برای

1. principal minor

kهای زوج.

۴. A نیمه معین منفی است اگر و تنها اگر $M_k \le 0$ برای k های فرد و $M_k \ge 0$ برای kهای زوج (دقت کنید که دست کم باید یک ماینر اصلی صفر باشد تا آن را نیمه معین منفی بنامند).

۵. اگر هیچ کدام از معیارهای قبلی برآورده نشود A نامعین است.

این قضیه تنها وقتی کاربرد دارد که دو ماینر اصلی پیاپی صفر نباشند. وقتی دو ماینر اصلی پیاپی صفر باشند، ما آن را به روش قضیه ۳.۲ بررسی می کنیم. همچنین دقت کنید که *برای یک ماتریس معین مثبت عناصر قطری منفی و یا صفر نباید وجود داشته باشد.*

قضیهٔ شکل درجهٔ دو در شرایط درجه دوم یک نقطهٔ بهینه محلی و همچنین در تعیین تحدب توابع مسائل بهینه سازی استفاده می شود. توابع محدب در تعیین نقطهٔ بهین فراگیر نقش دارند. این عناوین در بخشهای بعدی بحث می شوند.

مثال ۳.۹ تعیین شکل یك ماتریس. شکل ماتریسهای مثال ۳.۸ را تعیین کنید.

حل. برای ماتریس A، مسألهٔ مقدار ویژه (برای جزئیات بیشتر رجوع کنید به بخش B.7 در پیوست B) به صورت $Ax = \lambda x$ تعریف می شود که در آن λ مقدار ویژه و x بردار ویژه است. برای تعیین مقادیر ویژه، عبارت $|(A - \lambda I)| = 0$ را حل می کنیم. برای **ماتریس (a)، این عبارت به شکل زیر است.**

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

سه مقدار ویژه عبارتند از $\lambda_1 = 2$، $\lambda_2 = 3$، و $\lambda_3 = 4$. چون تمامی مقادیر ویژه اکیداً مثبت هستند، ماتریس معین مثبت است. بررسی ماینرهای اصلی قضیه ۳.۳ نیز

برای ماتریس (b)، دترمینان مشخصه مسأله مقدار ویژه عبارت است از

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

با بسط دترمینان حول ردیف سوم، داریم

$$(-1-\lambda)[(-1-\lambda)^2-1]=0$$

بنابراین، سه ریشه مقادیر ویژه را می دهند که عبارتند از $\lambda_1 = -2$ ، $\lambda_2 = -1$ و $\lambda_3 = 0$.
چون تمامی مقادیر ویژه نامثبت هستند، ماتریس نیمه معین منفی است. برای استفاده از قضیه ۳.۳ ، سه ماینر اصلی را محاسبه می کنیم

$$M_1=-1,\qquad M_2=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0,\qquad M_3=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=0$$

چون دو ماینر اصلی متوالی صفر هستند، نمی توانیم از قضیهٔ ۳.۳ استفاده کنیم.

۳.۲.۵.۲ مشتق گیری یك شكل درجه دو. در موارد متعددی می خواهیم گرادیان یا ماتریس هسیان یک شکل درجه دو را بیابیم. شکل درجه دو متقارن معادلهٔ (۳.۲۲) را در نظر گرفته و آن را به شکل علامت جمع می نویسیم

$$F(\mathbf{x})=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{۳.۲۳}$$

برای محاسبهٔ مشتقات $F(\mathbf{x})$ ، ابتدا جمع را بسط می دهیم و سپس عبارت را نسبت به x_i مشتق می گیریم، داریم

$$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \tag{۳.۲۴}$$

با نوشتن مشتقات جزئی معادلهٔ (۳.۲۴) در یک بردار ستونی، *گرادیان* شکل درجه دو را به دست می آوریم

$$\nabla F(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x} \tag{۳.۲۵}$$

با یک بار دیگر مشتق گیری از معادلهٔ (۳.۲۴) نسبت به x_j ، داریم

$$\frac{\partial^2 F(\mathbf{x})}{\partial x_j\,\partial x_i}=a_{ij} \tag{۳.۲۶}$$

معادلهٔ (۳.۲۶) نشان می دهد که عناصر a_{ij} از ماتریس $\mathbf{A}$ ، عناصر *ماتریس هسیان شکل* درجهٔ دو است. دقت کنید که $\mathbf{A}$ باید ماتریس متقارن مربوط به شکل درجه دو باشد.

این را می توان به سادگی با مشتق گیری از $F(\mathbf{x})$ در معادلهٔ (۳.۲۳) ابتدا نسبت به x_i و سپس نسبت به x_j دید.

مثال ۳.۱۰ محاسبهٔ گرادیان و هسیان شکل درجه دو. گرادیان و هسیان شکل درجهٔ دوی زیر را محاسبه کنید.

$$F(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2)$$

حل. با مشتق گیری $F(\mathbf{x})$ نسبت به x_1، x_2 و x_3 مؤلفه های گرادیان را به دست می آوریم، داریم

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 + 2x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 - 6x_2 - 2x_3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

با یک بار مشتق گیری از مؤلفه های گرادیان، عناصر هسیان را به دست می آوریم که عبارتند از

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_2} = 1, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1\,\partial x_3} = 2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_1} = 1, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -6, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2\,\partial x_3} = -2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3\,\partial x_1} = 2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3\,\partial x_2} = -2, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 5$$

شکل درجه دو را اگر به شکل ماتریسی بنویسیم، ماتریس $\mathbf{A}$ مشخص می شود

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ عناصر ماتریس $\mathbf{A}$ و مشتقات جزئی دوم F، مشاهده می کنیم که هسیان $\mathbf{H} = \mathbf{A}$ است. با استفاده از معادلهٔ (۳.۲۵)، گرادیان شکل درجهٔ دو نیز برابر است با

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_1 + x_2 + 2x_3) \\ (x_1 - 6x_2 - 2x_3) \\ (2x_1 - 2x_2 + 5x_3) \end{bmatrix}$$

که مانند گذشته است.

۳.۲.۶ مفهوم شرایط لازم و کافی

در بقیهٔ این فصل، ما شرایط لازم و کافی بهینگی مسائل بهینه سازی مقید و نامقید را تشریح می کنیم. درک معنای عبارات *لازم و کافی* مهم است. این عبارات در تحلیلهای ریاضی معنی عامی دارند. ولی ما آنها را فقط برای مسائل بهینه سازی بحث می کنیم. شرایط بهینگی را با فرض این که در نقطه بهینه هستیم و با مطالعهٔ رفتار تابع و مشتقاتش در آن نقطه به دست می آوریم. *شرایطی را که باید در نقطهٔ بهینه برآورده شوند شرایط لازم می نامند*. به بیان دیگر، *اگر هر نقطه‌ای شرایط لازم را برآورده نکند نمی تواند یک نقطهٔ بهینه باشد*. ولی دقت کنید که برآوردن شرایط لازم یک نقطهٔ بهین را تضمین نمی کند، یعنی، ممکن است نقاط غیربهینه ای نیز همان شرایط را برآورده کنند. این مطلب بیانگر آن است که تعداد نقاطی که شرایط لازم بهینگی را برآورده می کنند می توانند از تعداد و نقاط بهین بیشتر باشند. نقاطی که شرایط لازم را برآورده می کنند، *نامزدهای نقاط بهینه* نامیده می شوند. بنابراین ما باید برای تشخیص نقاط بهینه از غیر بهینه که هر دو شرایط لازم را برآورده می کنند، آزمایشهای دیگری انجام دهیم.

شرایط کافی شرایط آزمایش تشخیص نقاط بهینه از غیر بهینه را تعیین می کند. *اگر یک نقطه نامزد بهینگی شرایط کافی را نیز برآورده کند* آن نقطه در حقیقت بهینه است. آزمایش بیشتری نیاز نداریم. اگر شرایط کافی برآورده نشوند و یا نتوانند استفاده شوند، ما نمی توانیم نتیجه بگیریم که طرّاحی نامزد بهین نیست. نتیجه گیری ما به فرضیات و محدودیتهای استفاده شده در تعریف شرایط کافی بستگی دارد. برای بیان عبارت معینی راجع به بهینگی نقطه نامزد به تحلیل بیشتری مورد نیاز است. به طور خلاصه،

۱. نقاط بهینه باید شرایط لازم را برآورده کنند. نقاطی که آن شرایط را برآورده نکنند نمی توانند بهینه باشند.

۲ . نقطه ای که شرایط لازم را برآورده می کند لزوماً بهینه نیست، یعنی نقاط غیربهینه نیز ممکن است شرایط لازم را برآورده کنند.

۳ . نقطهٔ نامزدی که شرایط کافی را نیز برآورده کند در حقیقت بهینه است.

۴ . اگر شرایط کافی نتوانند استفاده شوند و یا برآورده نشوند، راجع به بهینگی نقطهٔ نامزد هیچ نتیجه ای نمی توانیم بگیریم.

این شرایط را با ذکر مثالهایی در بخشهای آتی و بعد از بیان قضایای مربوط به آن بیشتر تشریح خواهیم کرد.

۳.۳ مسائل طرّاحی بهین نامقید

۳.۳.۱ مقدمه

اکنون آماده ایم قضیه و مفهوم طرّاحی بهین را بحث کنیم. در این بخش، مفاهیمی را برای مسائل نامقید که به شکل زیر تعریف می شوند بیان می داریم: تابع $f(\mathbf{x})$ را بدون هیچ قیدی روی $\mathbf{x}$ مینیمم کنید. این نوع مسائل بندرت در مسائل عملی مهندسی به وجود می آیند. ولی ما آنها را در این جا بدین دلیل مورد توجه قرار می دهیم که شرایط بهینگی مسائل مقید تعمیم منطقی آنها هستند. به علاوه، یک روش عددی حل مسائل مقید (که در فصل ۶ بحث می شود) تبدیل آنها به رشته ای از مسائل نامقید است. بنابراین فهم کامل مفاهیم مسائل نامقید مهم است.

شرایط بهینگی مسائل مقید و نامقید به دو صورت می تواند استفاده شود:

۱ . اگر یک نقطهٔ طرّاحی داده شده باشد، شرایط بهینگی می تواند برای بررسی بهینگی نقطهٔ نامزد به کار رود.

۲ . شرایط بهینگی می توانند برای به دست آوردن نقاط نامزد بهینه استفاده شوند.

۳.۳.۲ مراحل به دست آوردن شرایط بهینگی

شرایط بهینگی می تواند برای به دست آوردن نقاط نامزد مینیمم یک تابع $f(\mathbf{x})$ استفاده شود. ما فقط *شرایط بهینگی محلی* مسائل نامقید را بحث خواهیم کرد. بهینگی فراگیر در بخش ۳.۵ بحث خواهد شد. ابتدا شرایط لازم، سپس شرایط کافی بحث خواهد شد. *شرایط لازم باید در نقطهٔ مینیمم برآورده شود، در غیر این صورت آن نقطه نمی تواند* یک مینیمم

باشد. این شرایط ممکن است در نقطهٔ دیگری نیز برآورده شود که مینیمم نیست. شرایط کافی نقاط مینیمم را از بقیه متمایز می کنند. ما این مفاهیم را با چند مثال به طور مشروحتر بیان خواهیم کرد.

به دست آوردن *شرایط بهینگی بدین صورت است که* فرض می کنیم در نقطهٔ مینیمم $\mathbf{x}^*$ هستیم و آن گاه برای مطالعهٔ خواص تابع و مشتقاتش همسایگی کوچکی را انتخاب می کنیم. چون ما فقط یک همسایگی کوچک را مورد بررسی قرار می دهیم، شرایطی را که به دست می آوریم شرایط محلّی می نامیم.

فرض کنید $\mathbf{x}^*$ یک نقطهٔ مینیمم *محلی* برای $f(\mathbf{x})$ باشد. برای مطالعه و بررسی همسایگی، فرض کنید $\mathbf{x}$ نقطه ای نزدیک $\mathbf{x}^*$ باشد. نمو $\mathbf{d}$ و Δf را در $\mathbf{x}^*$ و $f(\mathbf{x}^*)$ به ترتیب زیر تعریف می کنیم

$$\mathbf{d} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^* \qquad \text{و} \qquad \Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*)$$

چون $f(\mathbf{x})$ یک مینیمم محلی در $\mathbf{x}^*$ دارد، اگر به فاصلهٔ کوچکی تغییر مکان کنیم مقدار آن نمی تواند کمتر شود. بنابراین، تغییری کوچک در تابع برای هر تغییر مکان کوچک همسایگی $\mathbf{x}^*$ باید نامنفی باشد، یعنی مقدار تابع باید یا ثابت بماند یا افزایش یابد. این شرط می تواند با عبارت نامساوی زیر

$$\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \geqq 0 \qquad (۳.۲۷)$$

برای تمامی تغییرات کوچک $\mathbf{d}$ بیان شود. نامساوی می تواند برای به دست آوردن شرایط لازم و کافی یک نقطهٔ مینیمم محلی استفاده شود. چون $\mathbf{d}$ کوچک است، می توانیم Δf را با بسط تیلور در $\mathbf{x}^*$ تقریب بزنیم و شرایط بهینگی را با استفاده از آن به دست آوریم.

۳.۳.۳ شرایط بهینگی برای توابع یک متغیّره

۳.۳.۳.۱ شرایط لازم مرتبه اوّل اجازه دهید ابتدا یک *تابع یک متغیّره* در نظر بگیریم. سری تیلور تابع $f(x)$ در نقطهٔ x^* عبارت است از

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)d + \tfrac{1}{2}f''(x^*)d^2 + R$$

در حالی که R باقی مانده است که شامل جملاتی از مرتبهٔ بالاتری از d است و «پریم» نشان دهندهٔ مرتبهٔ مشتق گیری است. از این معادله، تغییرات تابع در x^*، یعنی،

$\Delta f = f(x) - f(x^*)$ عبارت است از

$$\Delta f = f'(x^*)d + \tfrac{1}{2}f''(x^*)d^2 + R \qquad (۳.۲۸)$$

نامساوی (۳.۲۷) نشان می دهد که عبارت Δf باید نامنفی (≥ 0) باشد، زیرا x^* یک مینیمم محلی است. چون d کوچک است، جملهٔ مرتبهٔ اوّل $f'(x^*)d$ بر دیگر جملات غلبه دارد. با تمرکز روی این جمله می بینیم که Δf در معادلهٔ (۳.۲۸) برحسب این که علامت $f'(x^*)d$ چه باشد، می تواند مثبت یا منفی باشد. بنابراین اگر $f'(x^*) \neq 0$ باشد، جملهٔ $f'(x^*)d$ (و در نتیجه Δf) می تواند منفی شود. برای واضح تر دیدن آن، اجازه بدهید که جمله برای نمو d_1 مثبت باشد که نامساوی (۳.۲۷) را برآورده می کند، یعنی، $\Delta f = f'(x^*)d_1 > 0$. چون نمو d اختیاری است، برگشت پذیر است. بنابراین $d_2 = -d_1$ یک نمو ممکن دیگری است. برای d_2، Δf در معادلهٔ (۳.۲۸) منفی می شود که نامعادلهٔ (۳.۲۷) را نقض می کند. پس، عبارت $f'(x^*)d$ علی رغم علامت $f'(x^*)$ بجز وقتی که $f'(x^*)$ صفر است می تواند منفی شود. این عبارت برای همهٔ d ها در همسایگی x^* تنها در صورتی نامنفی است که

$$f'(x^*) = 0 \qquad (۳.۲۹)$$

معادلهٔ (۳.۲۹) یک شرط لازم *مرتبهٔ اوّل* برای مینیمم محلی $f(x)$ در x^* است. مرتبهٔ اوّل نامیده شدن آن به این خاطر است که تنها مشتق اوّل تابع را شامل می شود. دقت کنید که بحث قبلی برای نشان دادن این که شرط معادلهٔ (۳.۲۹) برای نقاط ماکزیمم محلی نیز صادق است می تواند به کار رود. بنابراین، چون نقاطی که معادله (۳.۲۹) را برآورده می کنند می توانند مینیمم یا ماکزیمم محلی باشند و یا نقاطی باشند که نه ماکزیمم است نه مینیمم (*نقاط عطف و زین اسبی*[1])، آنها را *نقاط ایستا* می نامند.

۳.۳.۳.۲ شرایط کافی. اکنون ما برای تشخیص این که کدام یک از نقاط ایستا مینیمم واقعی است نیاز به شرط کافی داریم. چون نقاط ایستا شرط لازم $f'(x^*) = 0$ را برآورده می کنند، تغییر تابع Δf معادلهٔ (۳.۲۸) به صورت زیر خواهد بود

$$\Delta f = \tfrac{1}{2}f''(x^*)d^2 + R \qquad (۳.۳۰)$$

---

1. saddle points

نقاط زین اسبی یا عطف نقاطی هستند که در آنها مشتقات مرتبهٔ اوّل صفر است ولی ماکزیمم یا مینیمم نیستند.

چون جملهٔ مرتبهٔ دو بر دیگر جملات درجهٔ بالاتر غلبه دارد، توجّه خود را به آن معطوف می کنیم. دقت کنید که جمله برای تمامی $d \neq 0$ می تواند مثبت باشد، اگر

$$f''(x^*) > 0 \tag{۳.۳۱}$$

نقاط ایستایی که نامعادلهٔ (۳.۳۱) را برآورده می کنند باید حداقل مینیمم محلی باشند، زیرا نامعادلهٔ (۳.۲۷) $(\Delta f > 0)$ را برآورده می کنند. آن معادله گویای این است که تابع در نقاط مینیمم شعاع انحنای مثبت دارد. بنابراین نامعادلهٔ (۳.۳۱) برای این که x^* یک مینیمم محلی باشد *کافی* است. پس، اگر نقطه ای مثل x^* داشته باشیم که هر دو شرط معادله های (۳.۲۹) و (۳.۳۱) را برآورده کند، آن گاه دور شدن از آن یا مقدار تابع را افزایش می دهد یا آن را ثابت نگه می دارد. یعنی $f(x^*)$ کمترین مقدار را در همسایگی نزدیک نقطهٔ x^* دارد (مینیمم محلی).

۳.۳.۳.۳ شرط لازم مرتبهٔ دو. اگر نامعادلهٔ (۳.۳۱) برآورده نشود (یعنی $f''(x^*) = 0$)، نمی توانیم نتیجه بگیریم که x^* یک نقطهٔ مینیمم نیست. توجه کنید که از معادله های (۳.۲۷) و (۳.۲۸) روشن است که $f(x^*)$ نمی تواند مینیمم باشد مگر

$$f''(x^*) \geqq 0 \tag{۳.۳۲}$$

این معادله می گوید اگر f'' در نقطهٔ نامزد x^* محاسبه شود و کمتر از صفر باشد، آن گاه x^* یک نقطهٔ مینیمم محلی نیست. نامعادلهٔ (۳.۳۲) به عنوان *شرط لازم* مرتبهٔ دو شناخته می شود. پس هر نقطه ای که آن را نقض کند (یعنی $f''(x^*) < 0$) نمی تواند یک مینیمم محلی باشد.

اگر $f''(x^*) = 0$ باشد، برای مشخص کردن این که نقطهٔ مورد نظر یک مینیمم محلی است یا خیر، نیاز به ارزیابی مشتقات مرتبهٔ بالاتر داریم. با بحثی که برای به دست آوردن معادلهٔ (۳.۲۹) شد، $f'''(x^*)$ باید برای نقطهٔ ایستا صفر (شرط لازم) و $f^{IV}(x^*) \geq 0$ باشد تا x^* یک مینیمم محلی باشد. به طور کلی، *پایین ترین مرتبهٔ مشتق غیرصفر باید برای نقاط ایستا زوج (شرایط لازم)*، و *برای نقاط مینیمم محلی مثبت باشد (شرایط کافی)*. *به عنوان شرط لازم تمامی مشتقات مرتبه های فرد پایین تر از مرتبهٔ مشتق زوج غیرصفر باید صفر باشند.*

مثال ۳.۱۱ به دست آوردن نقاط مینیمم محلی با استفاده از شرایط لازم. مینیمم محلی برای تابع $f(x) = \sin x$ را بیابید.

حل. با دو بار مشتق گیری از تابع،

$$f' = \cos x; \qquad f'' = -\sin x$$

نقاط ایستا ریشه های معادلهٔ $(\cos x = 0)$ $f'(x) = 0$ هستند. اینها عبارتند از

$$x = \pm\pi/2,\ \pm3\pi/2,\ \pm5\pi/2,\ \pm7\pi/2, \ldots$$

مینیمم محلی به صورت زیر مشخص می شود

$$x^* = 3\pi/2,\ 7\pi/2, \ldots; \qquad -\pi/2,\ -5\pi/2, \ldots$$

زیرا این نقاط شرط کافی معادلهٔ (۳.۳۱) را $(f'' = -\sin x > 0)$ برآورده می کنند. مقدار مینیمم تابع $\sin x$ در نقطهٔ x^* ۱ - است. با رسم منحنی تابع $\sin x$ نیز نتایج تأیید می شود. نقاط مینیمم نامحدودی وجود دارند و همه در حقیقت مینیمم فراگیر هستند. نقاط $\pi/2$ ، $5\pi/2$ ، ... و $-3\pi/2$ و $-7\pi/2$ ، ... نقاط ماکزیمم فراگیر هستند و مقدار تابع $\sin x$ ، در آنها ۱ می باشد.

مثال ۳.۱۲ به دست آوردن نقاط مینیمم محلی با استفاده از شرایط لازم. مینیمم محلی تابع

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

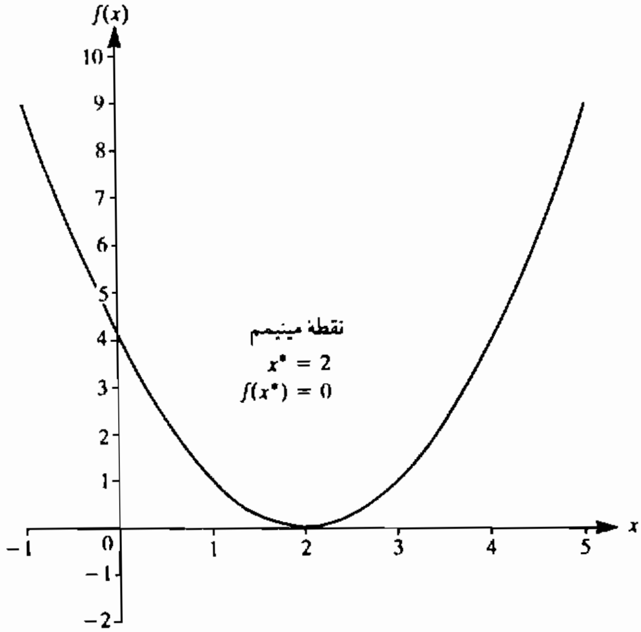
را بیابید.

حل. شکل ۳.۵ ترسیمه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 4$ را نشان می دهد. می توان دید که تابع همیشه مقدار مثبت دارد بجز در $x = 2$ که صفر است. بنابراین، این نقطه مینیمم تابع است. حال ببینیم چگونه این نقطه با استفاده از شرایط لازم و کافی به دست می آید.

با دو بار مشتق گیری از تابع داریم،

$$f' = 2x - 4; \qquad f'' = 2$$

شرط لازم $f' = 0$ به ما $x^* = 2$ را به عنوان نقطه ایستا می دهد. چون در نقطهٔ $x^* = 2$ مقدار $f'' > 0$ است (در حقیقت برای تمامی x ها)، شرط کافی معادله (۳.۳۱) برآورده می شود. بنابراین $x^* = 2$ یک مینیمم محلی برای تابع $f(x)$ است. مقدار این مینیمم در $x^* = 2$ ، 0 است.



شکل ۳.۵ ترسیمه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 4$ مثال ۳.۱۲

مثال ۳.۱۳ به دست آوردن نقاط مینیمم محلی با استفاده از شرایط لازم. مینیمم محلی تابع

$$f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

را بیابید.

حل. شکل ۳.۶ ترسیمهٔ تابع را نشان می دهد. دیده می شود که نقطهٔ A یک نقطهٔ مینیمم محلی و نقطهٔ B یک نقطه ماکزیمم محلی است. ما از شرایط لازم و کافی استفاده می کنیم تا ثابت کنیم این نتایج درست هستند.

مشتقات تابع عبارتند از

$$f' = 3x^2 - 2x - 4; \qquad f'' = 6x - 2$$

برای این مثال دو نقطه وجود دارد که شرط لازم معادلهٔ (۳.۲۹) را برآورده می کند. این نقاط ریشه های معادله $f'(x) = 0$ هستند،

$$x_1^* = \tfrac{1}{6}(2 + 7.211) = 1.535 \qquad \text{(نقطهٔ A)}$$
$$x_2^* = \tfrac{1}{6}(2 - 7.211) = -0.8685 \qquad \text{(نقطهٔ B)}$$

مقدار f'' در این نقاط را محاسبه می کنیم،

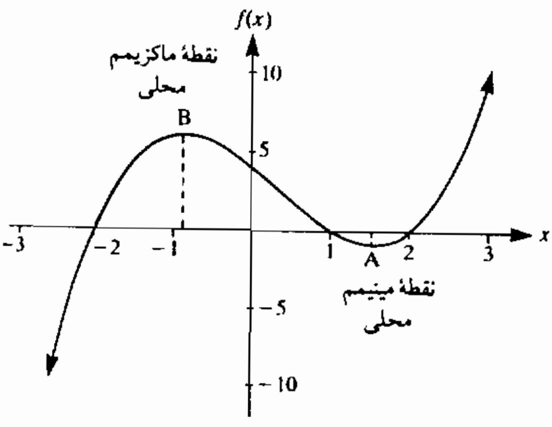
$$f''(1.535) = 7.211 > 0$$
$$f''(-0.8685) = -7.211 < 0$$

می بینیم که فقط x_1^* شرط کافی $(f''>0)$ معادله (۳.۳۱) را برآورده می کند. بنابراین آن نقطه یک نقطه مینیمم محلی است. از ترسیمهٔ $f(x)$ (شکل ۳.۶) می توان دید که مینیمم محلی $f(x_1^*)$ یک مینیمم فراگیر نیست. یک مینیمم *فراگیر* برای $f(x)$ وجود *ندارد*، *زیرا بازه و تابع کراندار نیستند*. مقدار تابع در مینیمم محلی عبارت است از -0.88 که از جایگزینی $x_1^* = 1.535$ در $f(x)$ به دست می آید. دقت کنید که $x_2^* = -0.8685$ یک نقطهٔ ماکزیمم محلی است، زیرا $f''(x_2^*) < 0$ است. مقدار تابع در نقطهٔ ماکزیمم عبارت است از 6.065 . نقطهٔ ماکزیمم فراگیر برای تابع وجود ندارد.

مثال ۳.۱۴ به دست آوردن نقاط مینیمم محلی با استفاده از شرایط لازم. مینیمم تابع $f(x) = x^4$ را بیابید.

حل. با دو بار مشتق گیری از تابع داریم

$$f' = 4x^3; \qquad f'' = 12x^2$$



شکل ۳.۶ ترسیمه تابع $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ مثال ۳.۱۳

شرط لازم به ما $x^* = 0$ را به عنوان نقطه ایستا می دهد. چون $f''(x^*) = 0$ است، از شرط کافی معادله (۳.۳۱) نمی توانیم این نتیجه را بگیریم که x^* یک نقطهٔ مینیمم است. ولی شرط لازم مرتبهٔ دوی معادله (۳.۳۲) برآورده شده است، بنابراین ما نمی توانیم احتمال مینیمم بودن نقطهٔ x^* را نفی کنیم. در حقیقت ترسیم $f(x)$ برحسب x نشان خواهد داد که x^* نقطهٔ مینیمم فراگیر است. $f''' = 24x$ که در $x^* = 0$ صفر است. $f^{IV}(x^*) = 24$ که بزرگتر از صفر است. بنابراین شرط کافی مرتبهٔ چهار برآورده شده و $x^* = 0$ یک نقطه مینیمم است. در حقیقت آن یک نقطه مینیمم فراگیر با $f(0) = 0$ است.

۳.۳.۴ شرایط بهینگی توابع چند متغیّره

برای حالت کلی یک تابع چند متغیّره $f(\mathbf{x})$ که $\mathbf{x}$ یک بردار n بعدی است، می توانیم به دست آوردن *شرایط لازم و کافی* را با استفاده از شکل چند بعدی بسط تیلور تکرار کنیم:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} + R$$

یا، تغییر در تابع عبارت است از

$$\Delta f = \nabla f(\mathbf{x}^*)^T\mathbf{d} + \tfrac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} + R \qquad (۳.۳۳)$$

اگر یک مینیمم محلی در $\mathbf{x}^*$ فرض کنیم آن گاه Δf باید نامنفی باشد، یعنی $\Delta f \geq 0$. اگر فقط روی جملات مرتبهٔ اوّل معادلهٔ (۳.۳۳) تکیه کنیم، می بینیم (مثل گذشته) که Δf وقتی برای تمام مقادیر ممکن $\mathbf{d}$ نامنفی است که

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \qquad (۳.۳۴)$$

یعنی گرادیان تابع در $\mathbf{x}^*$ صفر باشد. برحسب مؤلفه ها این شرط به شکل زیر در می آید

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1 \text{ to } n \qquad (۳.۳۵)$$

نقاطی که معادلهٔ (۳.۳۵) را برآورده می کنند *نقاط ایستا* نامیده می شوند. با توجه به جمله دوم معادلهٔ (۳.۳۳) که در نقطهٔ ایستا ارزیابی می شود، مثبت بودن Δf در صورتی تضمین می شود که برای تمامی $\mathbf{d} \neq 0$ داشته باشیم.

$$\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} > 0 \qquad (۳.۳۶)$$

این وقتی درست خواهد بود که هسیان $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ یک ماتریس معین مثبت باشد (نگاه کنید به بخش ۲ . ۳) که این شرط کافی برای یک مینیمم محلی برای تابع $f(\mathbf{x})$ در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ است.

شرطهای (۳.۳۵) و (۳.۳۶) به ترتیب شکلهای معادل چند بعدی شرایط (۳.۲۹) و (۳.۳۱) هستند. نتایج این بخش را در قضیه زیر خلاصه می کنیم :

قضیه ۳.۴ شرایط لازم و کافی برای مینیمم محلی.

شرط لازم. اگر $f(\mathbf{x})$ یک مینیمم محلی در $\mathbf{x}^*$ داشته باشد، آن گاه

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1 \text{ to } n$$

شرط لازم مرتبهٔ دو. اگر $f(\mathbf{x})$ در $\mathbf{x}^*$ یک مینیمم محلی داشته باشد، آن گاه ماتریس هسیان معادلهٔ (۳.۵)

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\right]_{(n\times n)}$$

در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ نیمه معین مثبت یا معین مثبت است.

شرط کافی مرتبهٔ دو. اگر ماتریس $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$ در نقطهٔ ایستا $\mathbf{x}^*$ معین مثبت باشد، آن گاه $\mathbf{x}^*$ برای تابع $f(\mathbf{x})$ یک مینیمم محلی است.

دقت کنید که این شرایط شامل مشتقات $f(\mathbf{x})$ است و مقدار خود تابع در آن نیست. اگر *مقداری ثابت به $f(\mathbf{x})$ اضافه کنیم*، جواب $\mathbf{x}^*$ مسأله مینیمم یابی بدون تغییر می ماند، اگرچه مقدار تابع هزینه تغییر می کند. در ترسیمهٔ $f(\mathbf{x})$ برحسب $\mathbf{x}$، اضافه کردن یک عدد ثابت به $f(\mathbf{x})$ مرکز مختصات را تغییر می دهد ولی شکل تابع بدون تغییر می ماند. به طور مشابه، اگر $f(\mathbf{x})$ را در عددی مثبت ضرب کنیم، نقطهٔ مینیمم $\mathbf{x}^*$ تغییری نمی کند ولی مقدار $f(\mathbf{x}^*)$ تغییر می کند. در ترسیمه $f(\mathbf{x})$ برحسب $\mathbf{x}$، این معادل تغییر مقیاس محورها برای $f(\mathbf{x})$ است که مجدداً شکل تابع بدون تغییر می ماند. ضرب $f(\mathbf{x})$ با یک عدد منفی مینیمم $\mathbf{x}^*$ را به یک ماکزیمم تغییر می دهد. از این خاصیت می توان برای تبدیل مسائل ماکزیمم یابی به مسائل مینیمم یابی با ضرب $f(\mathbf{x})$ در -1 استفاده کرد.

مثال ۳.۱۵ اثرات مقیاس یا اضافه کردن یک عدد ثابت به یک تابع. اثر تغییرات گذشته را روی تابع زیر بحث کنید

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

حل. ترسیمهٔ شکل ۳.۷ را در نظر بگیرید. شکل (a) ۳.۷ تابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$ را نشـان می‌دهد کـه در نقطهٔ $x^* = 1$ یک مـینیمم دارد. شکـلهای (b) ۳.۷ ، (c) و (d) به ترتیب اثر اضـافـه کـردن یک عـدد به تابع $(f(x) + 1)$ ، ضـرب $f(x)$ در یک عـدد $(2f(x))$ ، و ضـرب آن با یک عـدد منفی $(-f(x))$ را نشـان می‌دهنـد. در همـهٔ مـوارد، نقاط ایستا بدون تغییر می‌مانند.

مثال ۳.۱۶ مخزن کروی با کمترین هزینه با استفاده از شرایط لازم. نتیجهٔ یک رابطه سـازی مسأله در بخش ۲.۶.۵ تابع هزینه‌ای بود که نشان می‌دهد هزینه سرمایش یک مـخزن کروی عایق برای تمام عمر عبارت است از

$$f(x) = ax + b/x$$

که x ضخامت عایق و a و b ثابتهای مثبتی هستند. برای مینیمم کردن f، معادلهٔ زیر را حل می‌کنیم (شرط لازم)

$$f' = a - b/x^2 = 0.$$

جواب $x^* = \sqrt{b/a}$ است. برای بررسی این که ببینیم نقطهٔ ایستا یک مینیـمم محلی است یا نه، باید عبارت زیر را ارزیابی کنیم

$$f''(x^*) = 2b/x^{*3}$$

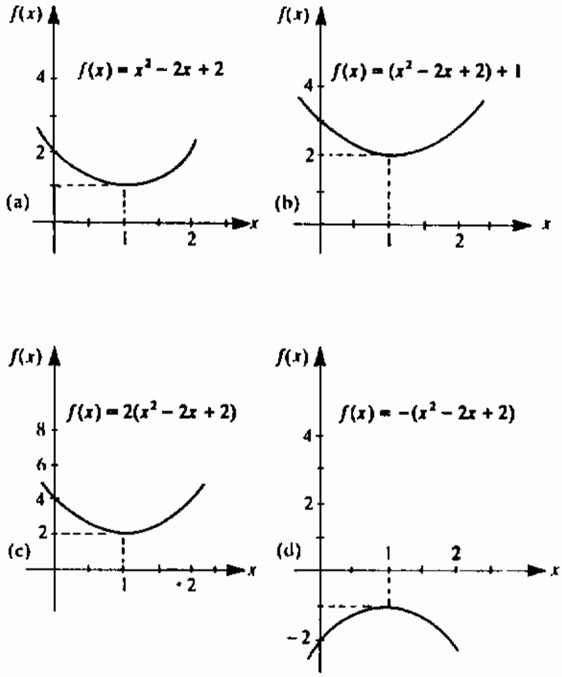
چون b و x^* مثبت هستند، $f''(x^*)$ مثبت و x^* نقطهٔ مینیـمم محلی است. مـقدار تابع در x^* عبارت است از $2\sqrt{ab}$. دقت کنید که چون تابع نمی‌تواند مقدار منفی داشـته باشد، x^* یک مینیمم فراگیر برای مسأله است.

مثال ۳.۱۷ مینیمم محلی تابع دو متغیّره با استفاده از شرایط لازم. نقاط مینیمم محلی تابع زیر را بیابید.

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 8$$

حل. شرایط لازم برای مسأله به ما عبارت زیر را می‌دهد

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} (2x_1 + 2x_2 - 2) \\ (2x_1 + 4x_2 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

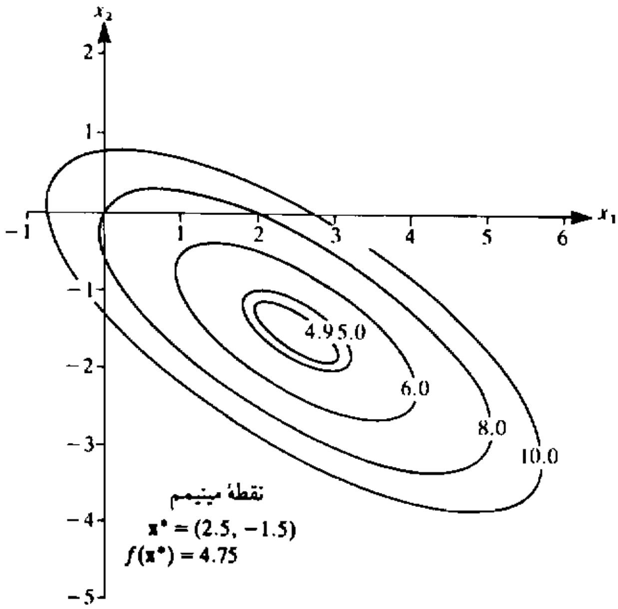


شکل ۳.۷ ترسیمه‌های مثال ۳.۱۵. اثرات تغییر مقیاس و یا اضافه کردن عدد به‌تابع.
(a) ترسیمهٔ $f(x) = x^2 - 2x + 2$. (b) اثر جمع کردن یك عدد با $f(x)$. (c) اثر ضرب $f(x)$ در یك عدد مثبت. (d) اثر ضرب $f(x)$ در -1.

این معادله‌ها برحسب متغیّرهای x_1 و x_2 خطی هستند. اگر جوابی برای سیستم وجود داشته باشد آن‌گاه آن جواب یگانه خواهد بود (پیوست B). حل همزمان معادلات، نقطهٔ ایستا را می‌دهد که عبارت است از $\mathbf{x}^* = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$. برای بررسی این که نقطه ایستا یک مینیمم محلی است یا خیر، مقدار $\mathbf{H}$ را در $\mathbf{x}^*$ محاسبه می‌کنیم.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

با آزمودن به وسیله هریک از قضایای ۳.۲ و یا ۳.۳، $\mathbf{H}$ در نقطهٔ ایستای $\mathbf{x}^*$ معین مثبت است. پس آن یک مینیمم محلی با $f(\mathbf{x}^*) = 4.75$ است. شکل ۳.۸ چند خط هزینه ثابت را برای تابع این مسأله نشان می‌دهد. دیده می‌شود که نقطهٔ $(2.5, -1.5)$ مینیمم تابع است.



شکل ۳.۸ خطوط هزینه ثابت تابع مثال ۳.۱۷

مثال ۳.۱۸ طرّاحی مخزن استوانه‌ای با استفاده از شرایط لازم. در بخش ۲.۶.۶ ، مسأله مخزن ذخیره استوانه‌ای با کمترین هزینه رابطه سازی شده است. مخزن از دو طرف بسته است و باید حجم V داشته باشد. شعاع R و طول l به عنوان متغیّرهای طرّاحی انتخاب شده‌اند. طرّاحی مخزنی که سطح آن مینیمم باشد خواسته شده است. تابع هزینه را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد

$$\bar{f} = R^2 + Rl \qquad \text{(الف)}$$

قید حجم یک قید از نوع مساوی است،

$$h = \pi R^2 l - V = 0 \qquad \text{(ب)}$$

این قید در صورتی که هریک از R یا l صفر باشند برآورده نمی‌شود. پس ممکن است که ما از نامنفی بودن قیود R و l در صورتی که ریشه مثبت را انتخاب کنیم، صرف نظر کنیم. می‌توانیم از قید مساوی (ب) برای حذف l از تابع هزینه استفاده کنیم،

$$l = \frac{V}{\pi R^2} \qquad \text{(پ)}$$

بنابراین، تابع هزینه معادله (الف) می شود

$$\bar{f} = R^2 + \frac{V}{\pi R} \qquad \text{(ت)}$$

این یک مسأله بدون قید است که برحسب R است که شرط لازم رابطه زیر را می دهد

$$\frac{d\bar{f}}{dR} = 2R - \frac{V}{\pi R^2} = 0 \qquad \text{(ث)}$$

حل آن عبارت است از

$$R^* = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3} \qquad \text{(ج)}$$

با استفاده از معادلهٔ (پ)، داریم

$$l^* = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3} \qquad \text{(چ)}$$

با استفاده از معادلهٔ (ث)، مشتق دوم $\bar{f}$ نسبت به R در نقطهٔ ایستا عبارت است از

$$\frac{d^2\bar{f}}{dR^2} = \frac{2V}{\pi R^3} + 2 = 6 \qquad \text{(ح)}$$

چون مشتق دوم برای تمامی مقادیر مثبت R مثبت است جوابهای معادله (ج) و (چ) یک مینیمم محلی است. با استفاده از معادله های (الف) یا (ت) تابع هزینه در نقطهٔ بهین عبارت است از

$$\bar{f}(R^*, l^*) = 3\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}$$

مثال ۳.۱۹ حل عددی شرایط لازم. برای تابع زیر نقطهٔ ایستا را یافته و شرط کافی را بررسی کنید.

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^2 + \cos x \qquad \text{(الف)}$$

حل. تابع در شکل ۳.۹ رسم شده است. دیده می شود که سه نقطهٔ ایستا وجود دارد: $x = 0$ (نقطه A)، x بین ۱ و ۲ (نقطه C)، و x بین ۱- و ۲- (نقطه B). نقطهٔ $x = 0$ یک ماکزیمم محلی برای تابع و دو نقطه دیگر مینیمم هستند.

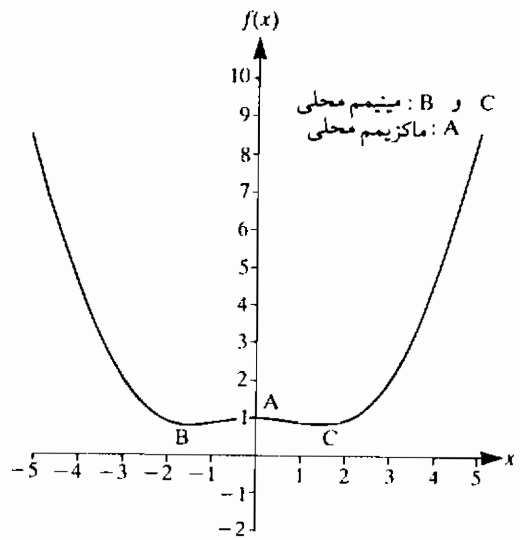
شرط لازم عبارت است از

$$f'(x) \equiv \frac{2x}{3} - \sin x = 0 \qquad \text{(ب)}$$

می توان دید کـه $x = 0$ مـعـادله (ب) را برآورده می کند، لذا یک نـقطهٔ ایستـاست. باید ریشه های دیگر معادلهٔ (ب) را بیابیم. حل تحلیلی معادله مشکل است، بنابراین باید از روشهای عددی استفاده کنیم. می توانیم یا $f'(x)$ را در یک کاغذ رسم برحسب x ترسیم کنیم و نقطه ای را کـه در آن $f'(x) = 0$ است تعـیین کنیم، یا از روش عـددی برای حل معـادلهٔ غیرخطی استـفاده کنیم. یک روش عددی برای حل چنین معادله ای به نام روش نیوتن ـ رافسون در پیوست C آمده است. با هر دو روش، نقاط $x^* = 1.496$ و -1.496 را می یابیم که $f'(x) = 0$ معادله (ب) را برآورده می کند. برای این که بررسی کنیم آنها مینیمم یا مـاکزیمم محلی یا نقاط عطف هستند یا خیر، باید f'' را در نقاط ایستا به دست آوریم و از شرایط کافی قضیهٔ ۴ . ۳ استفاده کنیم. چون $f'' = \frac{2}{3} - \cos x$ ، داریم،

۱ . $x^* = 0$ ، $f'' = -\frac{1}{3} < 0$ ، بنابراین x^* یک ماکزیمم محلی با $f(0) = 1$ است.

۲ . $x^* = 1.496$ ، $f'' = 0.592 > 0$ ، بنابراین x^* یک مینیمم محلی با $f(1.496) = 0.821$ است.



شکل ۳.۹ رسم $f(x) = x^2/3 + \cos x$ مثال ۳.۹

۳. $x^* = -1.496$، $f'' = 0.592 > 0$، بنابراین x^* یک مینیمم محلی با $f(-1.496) = 0.821$ است.

این نتایج با حل ترسیمی که در شکل ۳.۹ دیده می شود تطبیق می کند. توجه کنید که $x^* = 1.496$ و -1.496 در حقیقت نقاط مینیمم فراگیر تابع هستند.

مثال ۳.۲۰ مینیمم محلی برای تابعی دو متغیّره با استفاده از شرایط لازم. نقطه مینیمم محلی را برای تابع زیر بیابید

$$f(\mathbf{x}) = x_1 + \frac{(4.0E+06)}{x_1 x_2} + 250x_2$$

حل. شرایط لازم برای بهینگی عبارتند از

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \qquad 1 - \frac{(4.0E+06)}{x_1^2 x_2} = 0 \tag{الف}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0; \qquad 250 - \frac{(4.0E+06)}{x_1 x_2^2} = 0 \tag{ب}$$

از معادله های (الف) و (ب) روابط زیر به دست می آید

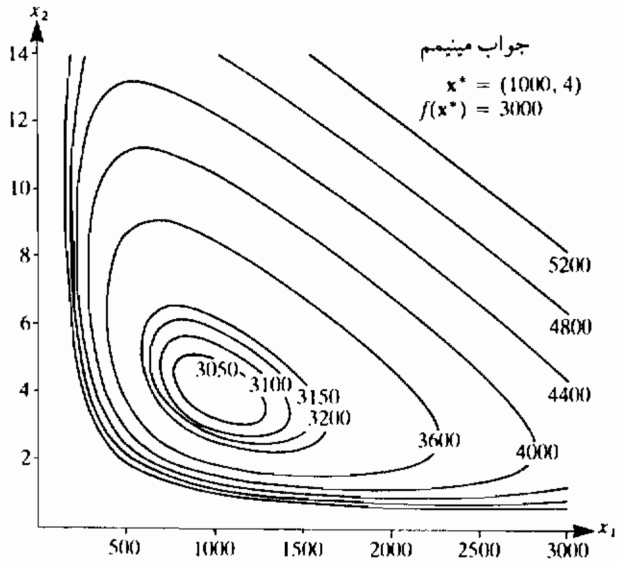
$$x_1^2 x_2 - (4.0E+06) = 0$$
$$250x_1 x_2^2 - (4.0E+06) = 0$$

از این معادله ها داریم

$$x_1^2 x_2 = 250x_1 x_2^2, \qquad \text{یا} \qquad x_1 x_2(x_1 - 250x_2) = 0$$

چون x_1 و x_2 نمی توانند صفر باشند (تابع در $x_1 = 0$ ، یا $x_2 = 0$ دارای نقطه منفرد است)، معادلهٔ قبلی به ما $x_1 = 250x_2$ را می دهد. با جایگزینی این در معادله (ب)، $x_2 = 4$ به دست می آوریم. بنابراین، $x_1^* = 1000$ و $x_2^* = 4$ نقطهٔ ایستا برای تابع $f(\mathbf{x})$ است. با استفاده از معادله های (الف) و (ب)، ماتریس هسیان $f(\mathbf{x})$ عبارت است از

$$\mathbf{H} = \frac{(4.0E+06)}{x_1^2 x_2^2} \begin{bmatrix} \dfrac{2x_2}{x_1} & 1 \\ 1 & \dfrac{2x_1}{x_2} \end{bmatrix}$$



شکل ۳.۱۰ خطوط هزینهٔ ثابت برای تابع مثال ۳.۱۰

هسیان در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ عبارت است از

$$\mathbf{H}(1000, 4) = \frac{(4.0\text{E}+06)}{(4000)^2}\begin{bmatrix} 0.008 & 1 \\ 1 & 500 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژهٔ هسیان فوق (بدون ثابت $\frac{1}{4}$) عبارت است از $\lambda_1 = 0.006$ و $\lambda_2 = 500.002$. چون هر دو مقدار ویژه مثبت هستند، هسیان $f(\mathbf{x})$ در $\mathbf{x}^*$ معین مثبت است. بنابراین، $\mathbf{x}^* = (1000, 4)$ یک نقطهٔ مینیمم محلی با $f(\mathbf{x}^*) = 3000$ است. شکل ۳.۱۰ چند خط هزینهٔ ثابت تابع این مسأله را نشان می‌دهد. دیده می‌شود که $x_1 = 1000$ و $x_2 = 4$ نقطهٔ مینیمم است. (دقت کنید که مقیاس افقی و عمودی در شکل ۳.۱۰ کاملاً متفاوتند؛ این کار به این خاطر انجام شده تا خطوط هزینهٔ ثابت معقولی را به دست آوریم.)

۳.۴ مسائل طرّاحی بهین مقیّد

۳.۴.۱ مقدّمه

در فصل (۲) دیدیم که اغلب مسائل طرّاحی قیودی روی متغیّرهای طرّاحی و عملکرد

سیستم دارند . این بخش مفاهیمی در ارتباط با مسائل بهینه سازی مقید را تشریح می کند . شرایط لازم بیان شده و با مثالهایی تشریح می شوند . تمامی طرّاحیهای بهین باید این شرایط را برآورده کنند .

الگوی عمومی بهینه سازی طرّاحی (تعریف شده در فصل ۲) عبارت است از پیدا کردن بردار متغیّر طرّاحی $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ که تابع هزینه زیر را

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{۳ . ۳۷}$$

با قیود مساوی

$$h_i(\mathbf{x}) = 0; \qquad i = 1 \text{ to } p \tag{۳ . ۳۸}$$

و قیود نامساوی

$$g_i(\mathbf{x}) \leqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۳ . ۳۹}$$

مینیمم کند . از قیود نامساوی معادلهٔ (۳ . ۳۹) ابتدا صرف نظر می شود تا قضیه لاگرانژ را که در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال آمده بحث کنیم . آن گاه قضیه برای قیود نامساوی تعمیم داده می شود تا شرایط لازم کان ـ تاکر برای الگوی عمومی تعریف شده در معادله های (۳ . ۳۷) تا (۳ . ۳۹) به دست آید .

براساس بحث مسائل بهینه سازی نامقیّد ، کسی ممکن است چنین نتیجه گیری کند که برای مسائل مقید نیز تنها طبیعت تابع هزینه $f(\mathbf{x})$ محل نقطه مینیمم را به دست خواهد داد . این مطلب صحیح نیست ؛ توابع قیود نقش تعیین کننده ای در به دست آوردن جواب بهین ایفا می کنند . مثالهای زیر این موقعیتها را تشریح می کنند .

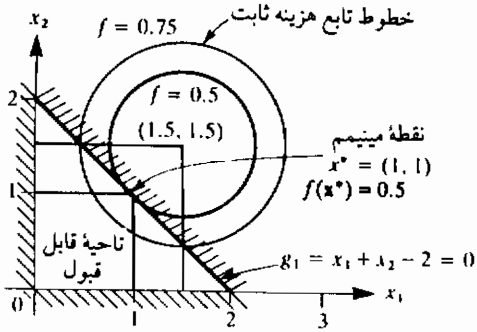
مثال ۳.۲۱ نقطهٔ بهین مقید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$$

را به شرط

$$g_1(\mathbf{x}) \equiv x_1 + x_2 - 2 \leqq 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) \equiv -x_1 \leqq 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) \equiv -x_2 \leqq 0$$

مینیمم کنید .



شکل ۳.۱۱ بیان ترسیمی مثال ۳.۲۱. نقطهٔ بهین مقیّد

حل. مجموعه قیـد مسأله یک ناحیهٔ مثلثی است که در شکل ۱۱ . ۳ نشـان داده شده است. اگر از قیود صرف نظر شود، $f(\mathbf{x})$ مینیممی در نقطهٔ (1.5, 1.5) دارد که قید g_1 را نقض می کند. دقت کنید که ترازهای $f(\mathbf{x})$ ثابت، دایره هستند. با افزایش $f(\mathbf{x})$ قطر آنها افزایش پیدا می کند. روشن است که مقدار مینیمم $f(\mathbf{x})$ مربوط به محل تقاطع دایره ای با کمترین شعاع با ناحیهٔ قابل قبول (مجموعهٔ قیود) می باشد. این نقطهٔ (1, 1) است که در آن جا $f(\mathbf{x}) = 0.5$ است و نقطه روی مرز ناحیه قابل قبول است. پس موقعیت نقطهٔ بهین برای این مسأله به قیود مربوط می شود.

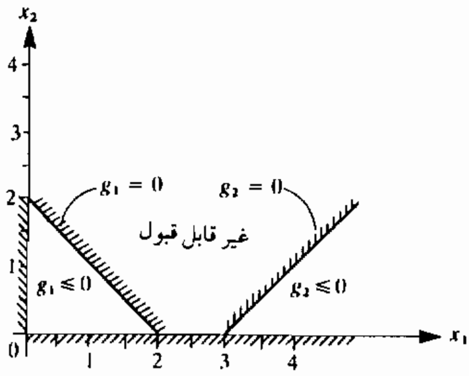
مثال ۳.۲۲ نقطه بهین نامقیّد برای یك مسأله مقید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2$$

را با شرط قیود مثال ۲۱ . ۳ مینیمم کنید.

حل. مجموعه قید مانند مثال ۲۱ . ۳ است ولی تابع هزینه تغییر کرده است. اگر از قیود صرف نظر شود، $f(\mathbf{x})$ در (0.5, 0.5) یک مینیمم دارد. چون نقطه تمامی قیود را نیز برآورده می کند، آن نقطه جواب بهین نیز هست. جواب این مسأله در داخل ناحیهٔ قابل قبول قرار می گیرد و قیود نقشی را در محل آن ایفا نمی کنند.

دقت کنید که ممکن است *جوابی برای مسأله بهینه سازی مقید وجود نداشته باشد*. این حالت وقتی اتفاق می افتد که سیستم بیش از اندازه مقید شده باشد. محدودیتها ممکن است طوری متداخل شده باشند که ساختن سیستمی که بتواند آنها را برآورده کند ناممکن باشد.



شکل ۳.۱۲ ترسیمهٔ قیود مثال ۳.۲۳. مسأله غیر قابل قبول

در چنین مواقعی باید در رابطه سازی مسأله تجدید نظر کنیم و یک یا چند قید را از بین ببریم. مثال بعدی این موقعیت را تشریح می کند.

مثال ۳.۲۳ مسأله غیر قابل قبول. تابع

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

را با شرایط

$$g_1(\mathbf{x}) \equiv x_1 + x_2 - 2 \leqq 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) \equiv -x_1 + x_2 + 3 \leqq 0$$
$$g_3(\mathbf{x}) \equiv -x_1 \leqq 0$$
$$g_4(\mathbf{x}) \equiv -x_2 \leqq 0$$

مینیمم کنید.

حل. شکل ۳.۱۲ ترسیمهٔ قیود مسأله را نشان می دهد. دیده می شود طرحی که تمامی قیود را برآورده کند وجود ندارد. مجموعهٔ قیود مسأله تهی است و جوابی وجود ندارد (یعنی طرح قابل قبولی نیست).

۳.۴.۲ شرایط لازم : قیود مساوی

ابتدا شرایط لازم را برای مسائل مینیمم سازی مقید با قید مساوی بحث می کنیم.

درست مثل مورد نامقید، حل این شرایط نقاط نامزد مینیمم را می دهند. شرایط کافی ـ که بعداً در این فصل بحث می شود ـ می تواند برای مشخص کردن این که نقطهٔ نامزد، مینیمم محلی هستند یا خیر، استفاده شود. تعمیم این شرایط برای قیود نامساوی در زیربخشهای بعدی تشریح می شوند.

۳.۴.۲.۱ نقطهٔ منظّم. قبل از بحث شرایط لازم، ما یک *نقطهٔ منظّم* از فضای طرّاحی (ناحیهٔ قابل قبول) را تعریف می کنیم. مسأله بهینه سازی مینیمم کردن $f(\mathbf{x})$ را با قیود $h_i(\mathbf{x}) = 0$ ، $i = 1$ to p در نظر بگیرید. به نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ که قید $\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ را برآورده می کند یک *نقطه منظّم* از فضای طرّاحی می گویند، اگر بردار گرادیان همه قیود در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ به طور خطی مستقل باشند. *استقلال خطی* (پیوست B) یعنی هیچ دو گرادیانی با هم موازی نباشند، و هیچ گرادیانی نتواند به صورت ترکیب خطی بقیه بیان شود. هنگامی که قیود نامساوی هم در تعریف مسأله باشند، آن گاه برای منظّم بودن نقطه، گرادیان قیود فعال نیز باید به طور خطی مستقل باشند.

۳.۴.۲.۲ ضرایب لاگرانژ و شرایط لازم. هر قید یک ضریب اسکالر مربوط به خود دارد که ضریب لاگرانژ نام دارد. این ضرایب نقش اساسی در نظریهٔ بهینه سازی و روشهای عددی که در فصلهای (۴) تا (۸) بحث شده اند دارند. ضرایب یاد شده هم معنی هندسی و هم معنی فیزیکی دارند و مقدارشان به شکل توابع هزینه و قید بستگی دارد. این موضوع را در بخش ۳.۷ بحث خواهیم کرد.

جهت معرفی پندارهٔ ضرایب لاگرانژ، مثال زیر را که مینیمم سازی یک تابع هزینه دو متغیّره با یک قید مساوی است، در نظر می گیریم.

مثال ۳.۲۴ معرفی ضرایب لاگرانژ و معنی هندسی آنها. x_1 و x_2 را برای مینیمم سازی

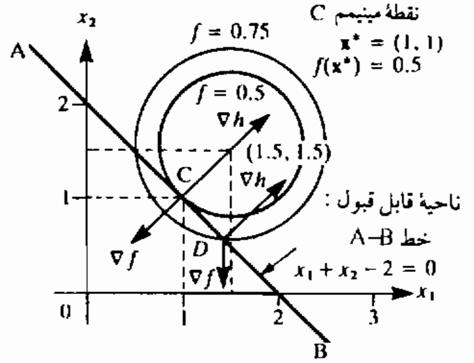
$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2 \qquad \text{(الف)}$$

با شرط

$$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2 = 0 \qquad \text{(ب)}$$

به دست آورید.

حل. مسأله دو متغیّر دارد و می تواند به سادگی از روش ترسیمی حل شود. شکل ۳.۱۳ نمایش ترسیمی مسأله را نشان می دهد. خط مستقیم A–B نشان دهندهٔ قید مساوی و



شکل ۳.۱۳ حل ترسیمی مثال ۳.۲۴ . تعبیر هندسی شرایط لازم

ناحیهٔ قابل قبول مسأله است . بنابراین جواب بهین باید روی خط A–B قرار داشته باشد . تابع هزینه معادلهٔ دایره ای است به مرکز (1.5, 1.5) . خطوط هزینه ثابت با مقادیر 0.5 و 0.75 در شکل نشان داده شده اند . دیده می شود که نقطهٔ C به مختصات (1, 1) جواب بهین مسأله است . تراز تابع هزینه 0.5 درست بر خط A–B مماس است . بنابراین ، این مقدار مینیمم تابع هزینه است .

معرفی ضرایب لاگرانژ. اکنون ببینیم ازنظر ریاضی چه چیزهایی در نقطهٔ C برآورده شده اند . فرض کنید نقطه بهین با (x_1^*, x_2^*) نشان داده شود . برای به دست آوردن شرایط و معرفی ضرایب لاگرانژ ، ابتدا فرض می کنیم قید مساوی می تواند برای یک متغیّر حل شود (دست کم به شکل نمادی) و متغیّر دیگر را برحسب آن به دست آورد . یعنی می توانیم بنویسیم

$$x_2 = \phi(x_1) \qquad \text{(پ)}$$

که ϕ تابع مناسبی از x_1 است . در بسیاری از مسائل ممکن است تابع صریحی برای $\phi(x_1)$ نتوان نوشت ، ولی به قصد یافتن روابط وجود آن را فرض می کنیم . بعداً خواهید دید که در حقیقت شکل صریح تابع مورد نیاز نیست . برای مثال فعلی ، $\phi(x_1)$ از معادلهٔ (ب) عبارت است از

$$\phi(x_1) = -x_1 + 2 \qquad \text{(ت)}$$

با جایگزینی معادلهٔ (پ) در (الف)، x_2 را از تابع هزینه حذف و مسأله مینیمم سازی نامقید برحسب x_1 تنها به دست می آید :

$$\text{minimize } f(x_1, \phi(x_1)) \quad \text{(ث)}$$

برای مثال فعلی، با جایگزینی معادلهٔ (ت) در (الف)، x_2 را حذف و مسأله مینیمم سازی برحسب x_1 تنها عبارت است از

$$f(x_1) = (x_1 - 1.5)^2 + (-x_1 + 2 - 1.5)^2$$

شرط لازم $df/dx_1 = 0$ به ما $x_1^* = 1$ را می دهد. آن گاه از معادلهٔ (ت)، $x_2^* = 1$ و تابع هزینه در نقطهٔ $(1, 1)$ ، 0.5 است. می توان بررسی کرد که شرط کافی $d^2f/dx^2 > 0$ برآورده شده، بنابراین همچنان که در شکل ۱۳ . ۳ دیده می شود، نقطه در حقیقت یک مینیمم محلّی است.

اگر فرض کنیم شکل صریح تابع $\phi(x_1)$ نمی تواند به دست آورده شود (که معمولاً این طوری است)، آن گاه روشهای دیگری باید اتخاذ شود تا جواب بهین به دست آید. ما این روش را در این جا عمل می کنیم و می بینیم که ضرایب لاگرانژ برای قیود در طی مراحل به طور طبیعی تعریف می شوند. با استفاده از قانون زنجیره ای مشتق گیری، شرط لازم $df/dx_1 = 0$ برای مسأله تعریف شده در معادلهٔ (ث) عبارت است از

$$\frac{df(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1} = 0$$

با جایگزینی معادلهٔ (پ)، معادلهٔ فوق را در نقطهٔ بهین (x_1^*, x_2^*) می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}\frac{d\phi}{dx_1} = 0 \quad \text{(ج)}$$

چون ϕ نامعلوم است، باید $d\phi/dx_1$ را از معادلهٔ (ج) حذف کنیم. برای این کار، از معادلهٔ قید $h(x_1, x_2) = 0$ در نقطهٔ (x_1^*, x_2^*) مشتق می گیریم

$$\frac{dh(x_1^*, x_2^*)}{dx_1} = \frac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}\frac{d\phi}{dx_1} = 0$$

از این رابطه $d\phi/dx_1$ را به دست می آوریم

$$\frac{d\phi}{dx_1} = -\frac{\partial h(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial h(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} \quad (چ)$$

اگر $d\phi/dx_2$ از معادلهٔ (چ) را در معادله (ج) جایگزین کنیم، داریم

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}\left(\frac{\partial h(x_1^*, x_2^*)/\partial x_1}{\partial h(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2}\right) = 0 \quad (ح)$$

اگر کمیت v را به شکل زیر تعریف کنیم

$$v = -\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2}{\partial h(x_1^*, x_2^*)/\partial x_2} \quad (خ)$$

و آن را در معادلهٔ (ح) جایگزین کنیم، داریم

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} + v\frac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0 \quad (د)$$

معادلهٔ (خ) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} + v\frac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \quad (ذ)$$

معادله های (د) و (ذ) همراه قید مساوی $h(x_1, x_2) = 0$ شرایط لازم بهینگی اند. هر نقطه ای که این شرایط را نقض کند نمی تواند یک نقطه مینیمم برای مسأله باشد. کمیت اسکالر v که در معادلهٔ (خ) تعریف شده ضریب لاگرانژ نامیده می شود. اگر نقطهٔ مینیمم معلوم باشد، معادلهٔ (خ) برای به دست آوردن مقدار آن می تواند استفاده شود. برای مثال فعلی، $\partial f(1, 1)/\partial x_2 = -1$ و $\partial h(1, 1)/\partial x_2 = 1$ ؛ بنابراین، از معادلهٔ (خ) داریم $v^* = 1$ که ضریب لاگرانژ در نقطهٔ بهینه است.

یادآور می شود که شرایط لازم می تواند برای یافتن نقطهٔ نامزد مینیمم استفاده شود؛ یعنی معادلات (د)، (ذ) و $h(x_1, x_2) = 0$ می توانند برای به دست آوردن x_1، x_2 و v حل شوند. برای مثال فعلی، این معادله ها عبارتند از

$$2(x_1 - 1.5) + v = 0$$
$$2(x_2 - 1.5) + v = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2 = 0$$

که از حل آنها داریم $x_1^* = 1$، $x_2^* = 1$ و $v^* = 1$.

معنی هندسی ضرایب لاگرانژ. برای نوشتن شرایط لازم رسم براین است که از تابعی به نام لاگرانژ استفاده شود. تابع لاگرانژ با L نشان داده می‌شود و با استفاده از توابع هزینه و قید به صورت زیر نوشته می‌شود

$$L(x_1, x_2, v) = f(x_1, x_2) + vh(x_1, x_2) \tag{ر}$$

دیده می‌شود که شرایط لازم معادله‌های (د) و (ذ) برحسب L به صورت زیر است

$$\frac{\partial L(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} = 0, \qquad \frac{\partial L(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \tag{ز}$$

یا برحسب علایم برداری می‌بینیم که گرادیان L در نقطهٔ نامزد مینیمم صفر است. یعنی $\nabla L(x_1^*, x_2^*) = \mathbf{0}$. اگر این شرط را با استفاده از معادلهٔ (ر) بنویسیم و یا معادلات (د) و (ذ) را به شکل برداری بنویسیم، داریم

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + v\nabla h(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \tag{ژ}$$

که گرادیان تابع هزینه و قید عبارتند از

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \qquad \nabla h = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial h(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

معادلهٔ (ژ) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = -v\nabla h(\mathbf{x}^*) \tag{س}$$

معادلهٔ اخیر معنی هندسی شرایط لازم را بازگو می‌کند. آن معادله نشان می‌دهد که *در نقطهٔ نامزد مینیمم، گرادیان تابع هزینه و قید در امتداد یک خط و متناسب با یکدیگرند، ضریب لاگرانژ v ضریب تناسب است.*

برای مثال فعلی، گرادیان توابع هزینه و قید در نقطهٔ نامزد بهین عبارتند از

$$\nabla f(1, 1) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \nabla h(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

این بردارها در نقطهٔ C شکل ۱۳ . ۳ نشان داده شده است. می‌توان دید که آنها در امتداد یک خط هستند. برای هر نقطهٔ قابل قبول روی خط A–B به غیر از نقطهٔ نامزد مینیمم، مثلاً (0.4, 1.6)، گرادیان توابع هزینه و قید در امتداد یک خط نیستند، همچنان که

در زیر دیده می شود :

$$\nabla f(0.4,\ 1.6) = \begin{bmatrix} -2.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \qquad \nabla h(0.4,\ 1.6) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به عنوان مثالی دیگر، نقطهٔ D در شکل ۳.۱۳ یک نامزد مینیمم نیست، زیرا گرادیان توابع هزینه و قید در امتداد یک خط نیستند. به علاوه تابع هزینه در این نقاط مقدار بیشتری نسبت به نقطهٔ مینمم دارد، یعنی می توانیم از نقطهٔ D به طرف نقطهٔ C حرکت کنیم و تابع هزینه را کاهش دهیم.

به این نکتهٔ جالب توجه کنید که قید مساوی بدون متأثر کردن نقطهٔ مینیمم می تواند در ۱- ضرب شود، یعنی قید می تواند به شکل $-x_1 - x_2 + 2 = 0$ نوشته شود. جواب مینیمم $x_1^* = 1$ ، $x_2^* = 1$ و $f(\mathbf{x}^*) = 0.5$ یکی است؛ ولی علامت ضریب لاگرانژ عوض می شود، یعنی $v^* = -1$. این نشان می دهد که *ضریب لاگرانژ برای قیود مساوی از نظر علامت آزاد است*، یعنی علامت با شکل تابع قید مشخص می شود.

به نکتهٔ جالب دیگری نیز توجه کنید که هر حرکت کوچکی از نقطهٔ C در ناحیهٔ قابل قبول (یعنی در امتداد خط A–B) مقدار تابع هزینه را افزایش می دهد، و *کاهش بیشتر تابع هزینه همراه نقض قید است*. پس نقطهٔ C شرط کافی را برای نقطهٔ مینیمم محلی برآورده می کند، زیرا کمترین مقدار را در همسایگی نقطهٔ C دارد. لذا آن یک نقطه مینیمم محلی است.

مفهوم ضرایب لاگرانژ کاملاً عمومی است و در کاربردهای مهندسی بسیاری به غیر از طرّاحی بهین وارد شده است. *ضریب لاگرانژ برای یک قید می تواند به منزلهٔ نیرویی برای تحمیل قید تعبیر شود*. ما یک معنی فیزیکی برای ضرایب لاگرانژ در بخش ۳.۷ ارائه خواهیم داد.

پندارهٔ ضریب لاگرانژ برای یک قید مساوی می تواند برای تعداد قیود مساوی بیشتری تعمیم داده شود. برای قیود نامساوی نیز می تواند تعمیم داده شود. ما ابتدا شرایط لازم را برای چند قید مساوی بحث می کنیم و پس از آن تعمیم آنها را برای دربرگرفتن قیود نامساوی در زیربخش بعدی تشریح می کنیم.

قضیه ۳.۵ قضیهٔ ضریب لاگرانژ. مسأله مینیمم سازی $f(\mathbf{x})$ را مشروط به قیود $h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1 \text{ to } p$ در نظر بگیرید. فرض کنید $\mathbf{x}^*$ یک نقطهٔ منظّم است که برای

مسأله یک مینیمم محلی است. آن گاه ضرایب لاگرانژ $j = 1 \text{ to } p$ ، υ_j^* وجود خواهند داشت به نحوی که

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p} \upsilon_j^* \frac{\partial h_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1 \text{ to } n \qquad (۳ . ۴۰)$$
$$h_j(\mathbf{x}^*) = 0; \qquad j = 1 \text{ to } p$$

این شرایط را می توان برحسب تابع لاگرانژ که به صورت زیر تعریف می شود به راحتی نوشت

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \upsilon_j h_j(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) \qquad (۳ . ۴۱)$$

آن گاه معادلهٔ (۳ . ۴۰) می شود

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) = \mathbf{0}, \quad \text{or} \quad \frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*)}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1 \text{ to } n \qquad (۳ . ۴۲)$$

با مشتق گیری $L(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ نسبت به υ_j ، می توانیم قیود مساوی را دوباره به دست آوریم

$$\frac{\partial L(\mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*)}{\partial \upsilon_j} = h_j(\mathbf{x}^*) = 0; \qquad j = 1 \text{ to } p \qquad (۳ . ۴۳)$$

معادله های به شکل مشتق (۳ . ۴۲) و (۳ . ۴۳) نشان می دهند که تابع لاگرانژ نسبت به $\mathbf{x}$ *و* $\mathbf{v}$ *ایستاست*. بنابراین برای به دست آوردن نقاط ایستا می شود آن را به عنوان یک تابع نامقیّد برحسب متغیّرهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{v}$ محسوب کرد. دقت کنید که *هر نقطه‌ای که شرایط قضیه را برآورده نکند نمی‌تواند یک مینیمم محلی باشد*. از طرف دیگر، نقطه ای که شرایط را برآورده کند لزوماً یک نقطهٔ مینیمم نیست بلکه تنها یک نقطهٔ نامزد است که می تواند نقطهٔ عطف یا ماکزیمم باشد. شرایط لازم و کافی مرتبهٔ دو که در بخش ۳ . ۶ خواهد آمد نقاط مینیمم، ماکزیمم و عطف را متمایز می کند.

n متغیّر $\mathbf{x}$ و p ضریب $\mathbf{v}$ مجهولات و شرایط لازم معادلات (۳ . ۴۲) و (۳ . ۴۳) برای حل آنها کافی است. دقت کنید که ضرایب لاگرانژ υ_j ازنظر علامت آزاد هستند. یعنی می توانند مثبت، منفی یا صفر باشند. این برخلاف ضرایب لاگرانژ قیود نامساوی است که بعداً خواهیم دید که آنها باید نامنفی باشند.

شرط گرادیان معادله (۳ . ۴۰) می تواند به شکل زیر مرتب شود

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^{\ell} v_j^* \frac{\partial h_j(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i}; \qquad i = 1 \text{ to } n$$

این شکل نشان می دهد که *مشتق تابع هزینه یک ترکیب خطی از گرادیان قیود در نقطهٔ نامزد مینیمم است* . ضرایب لاگرانژ v_j^* به عنوان اسکالرهای ترکیب خطی عمل می کنند . این شکل ترکیب خطی از شرایط لازم، عمومیت دادن به مفهومی است که در مثال ۳.۲۴ برای یک قید بحث کردیم : "در نقطه نامزد مینیمم مشتق توابع هزینه و قید در امتداد یک خط هستند" .

مثال ۳.۲۵ طرّاحی مخزن استوانه ای ـ استفاده از ضرایب لاگرانژ برای مسائل با قید مساوی. ما مسأله مخزن استوانه ای (مثال ۳.۱۸) را این بار با استفاده از ضرایب لاگرانژ حل خواهیم کرد. مسأله عبارت است از یافتن شعاع R و طول l استوانه برای مینیمم ساختن

$$\bar{f} = R^2 + Rl$$

مشروط به

$$h \equiv \pi R^2 l - V = 0$$

حل. تابع لاگرانژ L برای مسأله به شکل زیر است .

$$L = R^2 + Rl + v(\pi R^2 l - V)$$

شرایط لازم ضریب لاگرانژ قضیهٔ ۳.۵ روابط زیر را می دهد .

$$\frac{\partial L}{\partial R} \equiv 2R + l + 2\pi v R l = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} \equiv R + v\pi R^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial v} \equiv \pi R^2 l - V = 0$$

اینها سه معادله برای سه مجهول v ، R و l هستند . دقت کنید که آنها غیرخطی اند . ولی به راحتی با فرآیند حذفی می توانند حل شوند . داریم

$$R^* = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{1/3}$$

$$l^* = \left(\frac{4V}{\pi}\right)^{1/3}$$

$$v^* = -\frac{1}{\pi R} = -\left(\frac{2}{\pi^2 V}\right)^{1/3}$$

این جواب مشابه جوابی است که در مثال ۱۸ . ۳ به عنوان یک مسأله نامقید به دست آورده شد. می توان نشان داد که مشتقات توابع هزینه و قید در نقطهٔ بهین در امتداد یک خط قرار دارند.

اغلب، *شرایط لازم قضیه ضریب لاگرانژ به دستگاه معادلات غیرخطی می انجامد که نمی تواند به صورت تحلیلی حل شود. در این موارد، باید روشی عددی مثل نیوتن ـ رافسون (پیوست C) استفاده شود تا ریشه های آنها و نقاط مینیمم نامزد به دست آیند.*

۳.۴.۳ شرایط لازم: قیود نامساوی

رابطه سازیهای مسائل طرّاحی در فصل (۲) اغلب شامل قیدهای نامساوی به شکل زیر می شد.

$$g_i(\mathbf{x}) \leqq 0, \qquad i = 1 \text{ to } m$$

ما می توانیم یک قید نامساوی را با اضافه کردن متغیّری جدید به آن به قید مساوی تبدیل کنیم. این متغیّر جدید را متغیّر کمبود[1] می نامند. چون قید از نوع «≤» است، مقدارش منفی یا صفر است. پس متغیّر کمبود باید همیشه نامنفی (یعنی مثبت یا صفر) باشد تا نامساوی را به یک مساوی تبدیل کند. قید نامساوی $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ معادل قید مساوی $g_i(\mathbf{x}) + s_i = 0$ است که در آن $s_i \ge 0$ یک متغیّر کمبود است. متغیّرهای s_i در کنار سایر متغیّرها به عنوان مجهولات مسأله طرّاحی هستند. مقادیرشان به عنوان قسمتی از حل مسأله به دست آورده می شود. وقتی متغیّر s_i مقدار صفر دارد، قید نامساوی مربوطه در حالت مساوی اش برآورده شده است. چنین قید نامساوی را قید *فعال (محکم)* می نامند یعنی متغیّر "کمبود" در قید نیست. برای $s_i > 0$، قید مربوطه کاملاً نامساوی است. آن را قید *غیرفعال* می نامند و s_i مقدار کمبود آن است.

دقت کنید که در راه حل گذشته، باید یک متغیّر طرّاحی اضافی s_i و یک قید اضافی $s_i \ge 0$ برای هر قید نامساوی معرفی کنیم. این کار ابعاد مسأله طرّاحی را افزایش می دهد. قید $s_i \ge 0$ را می توان با به کار بردن s_i^2 به جای s_i به عنوان متغیّر کمبود حذف کرد. بنابراین، نامساوی $g_i \le 0$ به یک مساوی مثل

$$g_i + s_i^2 = 0 \qquad (۳ . ۴۴)$$

1. Slack variable

تبدیل می شود که در آن s_i می تواند هر مقدار حقیقی را دارا باشد. این شکل می تواند در قضیهٔ ضرایب لاگرانژ برای قیود نامساوی به کار رود و شرایط لازم مربوطه را به دست آورد. m معادلهٔ جدید مورد نیاز برای به دست آوردن متغیّرهای کمبود با مشتق گیری لاگرانژین L نسبت به متغیّر کمبود و مساوی صفر قرار دادن آن به دست می آید $(\partial L/\partial \mathbf{s} = \mathbf{0})$.

دقت شود که به مجرد این که یک نقطهٔ طرّاحی مشخص شود، معادلهٔ (۳.۴۴) را می توان برای محاسبهٔ متغیّر کمبود s_i^2 استفاده کرد. اگر قید در آن نقطه برآورده شده باشد (یعنی $g_i \le 0$)، آن گاه $s_i^2 \ge 0$. اگر نقض شده باشد، آن گاه s_i^2 منفی است که غیر قابل قبول است، یعنی نقطه یک نقطه نامزد مینیمم نیست.

یک شرط لازم دیگر برای ضرایب لاگرانژ قیود «نوع ≤» وجود دارد که عبارت است از

$$u_j^* \geqq 0; \qquad j = 1 \text{ to } m \tag{۳.۴۵}$$

که u_j^* ضرایب لاگرانژ j امین قید نامساوی است. پس، *ضرایب لاگرانژ هر قید نامساوی «≤» باید نامنفی باشد.* اگر قید در نقطهٔ بهین غیرفعال باشد، ضریب لاگرانژ مربوطه صفر است. اگر قید فعال باشد $(g_i = 0)$ ، آن گاه ضریب مربوطه باید نامنفی باشد. شرط معادلهٔ (۳.۴۵) را در بخش ۳.۷ از دیدگاه فیزیکی تشریح خواهیم کرد.

مثال ۳.۲۶ مسائل با قیود نامساوی ـ استفاده از شرایط لازم. مثال ۳.۲۴ را با قید نامساوی دوباره حل می کنیم. مسأله عبارت است از مینیمم کردن

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$$

با شرط

$$g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 \leqq 0$$

حل. نمایش ترسیمی مسأله درست مثل شکل ۳.۱۳ برای مثال ۳.۲۴ است، با این تفاوت که ناحیهٔ قابل قبول بزرگتر شده، این ناحیه عبارت است از خط A–B و ناحیه زیر آن. نقطه مینیمم برای مسأله نیز مانند قبل است یعنی، $x_1^* = 1$ ، $x_2^* = 1$ ، $f(\mathbf{x}^*) = 0.5$.

با معرفی متغیّر کمبود s^2 برای نامساوی، لاگرانژین مسأله به شکل زیر تعریف می شود.

$$L = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2 + u(x_1 + x_2 - 2 + s^2)$$

شرایط لازم قضیهٔ لاگرانژ (با در نظر گرفتن x_1 ، x_2 ، u و s به عنوان متغیّرهای مجهول) عبارت است از :

(الف)
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} \equiv 2(x_1 - 1.5) + u = 0$$

(ب)
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} \equiv 2(x_2 - 1.5) + u = 0$$

(پ)
$$\frac{\partial L}{\partial u} \equiv x_1 + x_2 - 2 + s^2 = 0$$

(ت)
$$\frac{\partial L}{\partial s} \equiv 2us = 0$$

اینها چهار معادله برای چهار مجهول x_1 ، x_2 ، u و s هستند. این معادله ها باید به صورت همزمان حل شوند و مجهولات محاسبه گردند. دقت شود که چون معادلات غیرخطی اند، بنابراین می توانند ریشه های متعددی داشته باشند.

یکی از جوابها با صفر قرار دادن s برای برآوردن شرط $2us = 0$ در معادلهٔ (ت) به دست می آید. اگر معادله های (الف) تا (پ) حل شوند، داریم :

$$x_1^* = x_2^* = 1, \qquad u^* = 1, \qquad s = 0$$

وقتی $s = 0$ است، قید نامساوی فعال است. x_1 ، x_2 و u از سایر معادلات (الف) تا (پ) که برحسب متغیّرها خطی هستند به دست می آیند. این نقطه ای ایستا برای L است و بنابراین یک نقطه نامزد مینیمم است. با دقت در شکل ۱۳ . ۳ می توان دید که آن در حقیقت نقطه مینیمم است، زیرا هر حرکت و جابه جایی از $\mathbf{x}^*$ یا قید را نقض می کند یا مقدار تابع هزینه افزایش پیدا می کند.

نقطهٔ ایستای دوم با قرار دادن $u = 0$ در معادلهٔ (ت) و حل دیگر معادله ها برای x_1 ، x_2 و s به دست می آید، این حالت مقادیر زیر را می دهد :

$$x_1^* = x_2^* = 1.5, \qquad u^* = 0, \qquad s^2 = -1$$

این جواب معتبر نیست، زیرا قید در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ نقض شده است، $g = -s^2 = 1 > 0$.

جالب است که تعبیر هندسی شرایط لازم را برای مسائل با قید نامساوی فعال بدانیم. گرادیان توابع هزینه و قید در نقطه $(1, 1)$ محاسبه می شوند و عبارتند از

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 2(x_2 - 1.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \qquad \nabla g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

این گرادیانها چنان که در شکل ۱۳ . ۳ دیده می شود، در امتداد یک خط ولی در جهات مختلف قرار دارند، همچنین مشاهده می شود هر حرکت کوچکی از نقطهٔ C یا تابع هزینه را افزایش می دهد یا با کاهش تابع هزینه طرّاحی را به ناحیهٔ غیر قابل قبول می برد. پس، نقطه (۱، ۱) در حقیقت یک نقطهٔ مینیمم محلی است. این شرط هندسی *شرط کافی* برای یک نقطهٔ مینیمم محلی است.

شرط لازم $u \geq 0$ *تضمین می کند که گرادیان توابع هدف و قید در جهات متضاد با هم باشند*. بدین طریق f نمی تواند با پیش رفتن در جهت منفی گرادیان بدون نقض قید کاهش یابد. یعنی هر کاهش در تابع هزینه در نقطه نامزد مینیمم به ترک ناحیهٔ قابل قبول منجر می شود. این موضوع را می توان در شکل ۱۳ . ۳ مشاهده کرد.

شرایط لازم برای قیود مساوی و نامساوی مجموعاً به عنوان *شرایط لازم کان ـ تاکر*[۱] (*K-T*) مشهورند. اگرچه این شرایط می توانند به اشکال مختلف بیان شوند، در این جا تنها دو شکل از آنها را بحث می کنیم، یکی با متغیّرهای کمبود و دیگری بدون آنها. شرایط با و بدون متغیّرهای کمبود کاملاً معادلند. این معادل بودن را در آینده تشریح می کنیم.

قضیه ۳.۶ شرایط لازم کان ـ تاکر (K-T). فرض کنید $\mathbf{x}^*$ یک نقطهٔ منظّم از مجموعه قید باشد که یک مینیمم محلی برای $f(\mathbf{x})$ است به شرط قیود

$$h_i(\mathbf{x}) = 0; \qquad i = 1 \text{ to } p$$
$$g_i(\mathbf{x}) \leqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } m$$

تابع لاگرانژ را برای مسأله به شکل زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{s}) &= f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2) \\ &= f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2) \end{aligned} \tag{۳.۴۶}$$

آن گاه ضرایب لاگرانژ $\mathbf{v}^*$ (یک بردار p تایی) و $\mathbf{u}^*$ (یک بردار m تایی) وجود خواهند داشت که لاگرانژین نسبت به x_j ، v_i ، u_i و s_i ایستاست، یعنی

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0; \qquad j = 1 \text{ to } n \tag{۳.۴۷}$$

---

1. Kuhn-Tucker

$$h_i(\mathbf{x}^*) = 0; \qquad i = 1 \text{ to } p \tag{۳.۴۸}$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^2 = 0; \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۳.۴۹}$$

$$u_i^* s_i = 0; \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۳.۵۰}$$

$$u_i^* \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۳.۵۱}$$

در حالی که همهٔ مشتقها در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$ ارزیابی می شوند.

شرایط گذشته را گاهی *شرایط لازم مرتبهٔ اوّل* می نامند. دانستن کاربرد آنها در (i) بررسی احتمال بهینگی نقطه داده شده و (ii) به دست آوردن نقاط نامزد مینیمم محلی مهم است. ابتدا دقت کنید که از معادله های (۳.۴۸) و (۳.۴۹) معلوم می شود که *نقطه نامزد مینیمم باید قابل قبول باشد*، پس باید از برآورده شدن تمامی قیود مطمئن شویم. شرایط گرادیان معادلهٔ (۳.۴۷) نیز باید همزمان برآورده شود. این شرایط یک *معنی هندسی* دارند. برای دیدن آن، معادلهٔ (۳.۴۷) را دوباره به شکل زیر می نویسیم،

$$-\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{p} v_i^* \frac{\partial h}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}; \qquad j = 1 \text{ to } n \tag{۳.۵۲}$$

که نشان می دهد در نقطهٔ ایستا، جهت منفی گرادیان (جهت تندترین کاهش) برای تابع هزینه ترکیب خطی گرادیانهای قیود است و ضرایب لاگرانژ به عنوان پارامترهای اسکالر این ترکیب خطی اند.

m شرط معادلهٔ (۳.۵۰) به عنوان *شرایط سویچی*[1] یا *شرایط کمبود مکمل* خوانده می شوند. آنها می توانند یا با قرار دادن $s_i = 0$ (کمبود صفر نشان دهندهٔ فعال بودن نامساوی یعنی $g_i = 0$ است) و یا $u_i = 0$ (در این صورت g_i باید $0 \leq$ باشد تا قابل قبول بودن را برآورده کند) برآورده شوند. این شرایط حالتهای متعددی در محاسبات به وجود خواهند آورد که کاربرد آن باید کاملاً درک شود. در مثال ۳.۲۶، تنها یک شرط سویچی وجود داشت که دو حالت ممکن را می داد، حالت اوّل وقتی متغیّر کمبود صفر بود و حالت دوم وقتی ضریب لاگرانژ u مربوط به قید نامساوی صفر بود. هرکدام از آن دو حالت جداگانه برای یافتن مجهولات در نظر گرفته شده بودند. در حالت کلی، در معادله (۳.۵۰) بیشتر از یک شرط سویچی وجود دارد. تعداد شرایط سویچی برابر با تعداد قیود نامساوی مسأله است. ترکیبهای مختلف این شرایط می توانند

---

1. switching

به جوابهای متفاوتی ختم شوند. در حالت کلی، با m قید نامساوی، شرایط سویچی به 2^m حالت جواب متفاوت معمولی ختم می شود (حالت غیرمعمول حالتی است که هم $u_i = 0$ و هم $s_i = 0$). برای هر حالت، ما باید بقیهٔ معادلات شرایط لازم را برای نقاط نامزد مینیمم حل کنیم. بسته به توابع مسأله، ممکن است نتوان شرایط لازم هرحالت را تحلیلی حل کرد. اگر توابع غیرخطی باشند، باید از روشهای عددی برای پیدا کردن ریشه ها استفاده کنیم به علاوه، هر حالت ممکن است نقاط نامزد مینیمم متعددی بدهد.

ما استفاده از شرایط (K-T) را در مسائل نمونه مختلفی تشریح خواهیم کرد. در مثال ۳.۲۶ تنها دو متغیّر، یک ضریب لاگرانژ و یک متغیّر کمبود وجود داشت. برای مسائل کلی، مجهولات $\mathbf{x}$، $\mathbf{u}$، $\mathbf{s}$ و $\mathbf{v}$ است. این بردارها n، m، m و p بعدی اند. پس $(n + 2m + p)$ متغیّر مجهول وجود دارد و ما $(n + 2m + p)$ معادله برای به دست آوردن آنها نیاز داریم. این معادلات مورد نیاز از شرایط لازم (K-T) در دسترسند. اگر تعداد معادله ها را در معادلات (۳.۴۷) تا (۳.۵۱) بشماریم می‌بینیم که $(n + 2m + p)$ معادله است، این معادلات باید برای به دست آوردن نقاط نامزد مینیمم محلی به طور همزمان حل شوند. بعد از حل، سایر شرایط لازم باقی مانده معادلات (۳.۵۱) باید بررسی شوند. شرایط معادلهٔ (۳.۴۹) قابل قبول بودن نقاط نامزد مینیمم محلی را نسبت به قید نامساوی $i = 1$ to m ، $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ تضمین می کند. و شرایط معادله های (۳.۵۱) می گویند که ضرایب لاگرانژ مربوط به قیود نامساوی "نوع $\le$" باید نامنفی باشند.

دقت کنید که محاسبهٔ s_i در حقیقت محاسبهٔ تابع $g_i(\mathbf{x})$ است زیرا $s_i^2 = -g_i(\mathbf{x})$. بدین طریق محاسبهٔ s_i به ما این امکان را می دهد که قابل قبول بودن نقاط نامزد را نسبت به قید $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ بررسی کنیم.

مهم است به این موضوع توجه کنید که اگر قید نامساوی $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ در نقطه نامزد مینیمم غیرفعال باشد (یعنی $g_i(\mathbf{x}^*) < 0$، یا $s_i^2 > 0$)، آن گاه باید ضریب لاگرانژ مربوطه $u_i^* = 0$ باشد تا شرط سویچی معادله های (۳.۵۰) برآورده شوند. اگر قید فعال باشد (یعنی $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$)، آن گاه، ضرایب لاگرانژ باید نامنفی، $u_i^* \ge 0$، باشند. این شرط تضمین می کند که جهتهای قابل قبولی نسبت به i امین قید $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ در نقطهٔ نامزد مینیمم $(\mathbf{x}^*)$ وجود ندارد که در امتداد آنها تابع هزینه بتواند کاهش یابد. به بیان دیگر، این شرط تضمین می کند که کاهش بیشتر تابع هزینه در نقطهٔ $\mathbf{x}^*$، تنها هنگامی میسر است که در ناحیهٔ غیر قابل قبول قید $g_i(\mathbf{x}) \le 0$

قدم بگذاریم.

همچنین دقت کنید که *شرایط لازم معادله های (۳.۴۷) تا (۳.۵۱) به طور کلی برحسب متغیّرهای* x ، u ، s و v سیستم *معادلات غیرخطی هستند*. حل تحلیلی آنها ممکن است آسان نباشد. بنابراین، ممکن است مجبور شویم از روشهای عددی مثل روش نیوتن ـ رافسون[1] (پیوست C) برای به دست آوردن ریشه های سیستم معادله ها استفاده کنیم. خوشبختانه در بیشتر کتابخانه های رایانه ای برنامه های حل معادلات غیرخطی وجود دارد. این برنامه ها در به دست آوردن نقاط نامزد مینیمم محلی کمک شایانی می کنند.

نکات مهم زیر باید نسبت به شرایط لازم کان ـ تاکر مرتبهٔ اوّل مورد توجه قرار گیرد:

۱. شرایط K-T در نقاطی که منظّم نیستند *اعمال نمی‌شود*.

۲. نقطه ای که شرایط K-T را برآورده نکند نمی تواند یک نامزد مینیمم محلی باشد، مگر آن نقطه یک نقطهٔ نامنظّم باشد (که شرایط K-T به کار نمی روند). نقاطی که شرایط را برآورده کنند، نقاط کان ـ تاکر نامیده می شوند.

۳. *نقاطی که شرایط K-T را برآورده می کنند ممکن است مقیّد یا نامقیّد باشند*. وقتی هیچ قید مساوی وجود نداشته باشد و همهٔ قیود نامساوی غیرفعال باشند به آنها نامقیّد می گویند. اگر نقطهٔ نامزد نامقید باشد، بسته به ماتریس هسیان تابع هزینه، ممکن است نقطه مینیمم محلی، ماکزیمم محلی یا نقطه عطف باشد (رجوع کنید به بخش ۳.۳ برای شرایط لازم و کافی مسائل نامقید).

۴. *اگر قیدهای مساوی وجود داشته و قیود نامساوی جملگی غیرفعّالند* (یعنی $u = 0$)، *آن گاه نقاطی که شرایط K-T را برآورده می کنند فقط ایستا هستند*. آنها می توانند نقاط ماکزیمم یا مینیمم یا عطف باشند.

۵. *اگر بعضی از قیود نامساوی فعال هستند و ضرایب آنها مثبت است، آن گاه نقاطی که شرایط K-T را برآورده می کنند نمی توانند نقاط ماکزیمم محلی برای تابع هزینه باشند* (البته اگر قیود نامساوی فعال ضرایب صفر داشته باشند ممکن است نقاط ماکزیمم محلی باشند). آنها ممکن است مینیمم محلی هم نباشند، این امر به شرایط لازم و کافی مرتبهٔ دو بستگی دارد که در بخش ۳.۶ بحث شده است.

۶. مهم است که به مقدار ضریب *لاگرانژ* هر قید که به شکل تابع قید بستگی دارد توجه کنید.

---

1. Newton-Rafhson

به عنوان مثال، ضریب لاگرانژ قید $10 - x/y \le 0$ با شرط $(y > 0)$ با ضریب لاگرانژ همین قید وقتی به صورت $x - 10y \le 0$ یا $0.1x/y - 1 \le 0$ نوشته شود متفاوت است. جواب بهین مسأله با تغییر شکل قید تغییر نمی‌کند، ولی ضریب لاگرانژ متفاوت خواهد بود. این مطلب را در بخش ۳.۷ بیشتر توضیح می‌دهیم.

این نکات در مثال سادهٔ زیر تشریح می‌شوند.

مثال ۳.۲۷ جوابهای متفاوت شرایط لازم کان ـ تاکر. برای مسأله زیر، شرایط لازم K-T را نوشته و آنها را حل کنید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}(b + c)x^2 + bcx + f_0$$

را به شرط

$$a \leqq x \leqq d$$

مینیمم کنید در حالی که $0 < a < b < c < d$ و f_0 ثابتهای مشخصی هستند (طرّاحی شده به وسیلهٔ وای اس ریو[1]).

حل. ترسیمهٔ تابع در شکل ۳.۱۴ نشان داده شده است. می‌توان دید که نقطه A یک مینیمم مقیّد، نقطه B یک ماکزیمم نامقیّد، نقطهٔ C یک مینیمم نامقیّد، و نقطه D یک ماکزیمم مقید است. ما نشان خواهیم داد که چگونه شرایط K-T این نقاط را از یکدیگر تمیز می‌دهد.

دو قید نامساوی وجود دارد،

$$g_1 \equiv a - x \leqq 0$$
$$g_2 \equiv x - d \leqq 0$$

پس لاگرانژین برای این مسأله عبارت است از

$$L = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}(b + c)x^2 + bcx + f_0 + u_1(a - x + s_1^2) + u_2(x - d + s_2^2)$$

در حالی که u_1 و u_2 ضرایب لاگرانژ و s_1 و s_2 متغیّرهای کمبود به ترتیب برای $g_1 \equiv a - x \le 0$ و $g_2 \equiv x - d \le 0$ هستند. شرایط K-T عبارت است از

$$\frac{\partial L}{\partial x} = x^2 - (b + c)x + bc - u_1 + u_2 = 0 \qquad \text{(الف)}$$

1. Y. S. Ryu

$$(a-x)+s_1^2=0; \qquad (x-d)+s_2^2=0 \tag{ب}$$

$$u_1s_1=0; \qquad u_2s_2=0 \tag{پ}$$

$$u_1 \geqq 0; \qquad u_2 \geqq 0 \tag{ت}$$

شرایط سویچی در معادله های (پ) برای حل شرایط K-T چهار حالت را می دهد. هر حالت جداگانه در نظر گرفته شده و مسأله حل می شود.

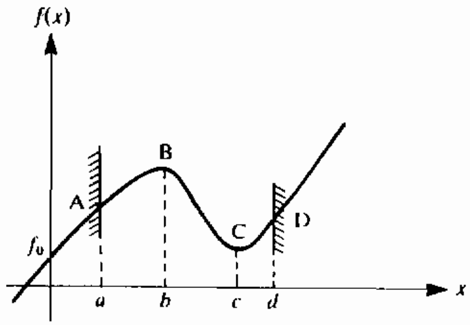
حالت ۱ : $u_1=0$ ، $u_2=0$. برای این حالت، معادلهٔ (الف) دو جواب دارد، $x=b$ و $x=c$. برای این نقاط هر دو نامساوی کاملاً برآورده می شوند، زیرا متغیّرهای کمبود که از معادله های (ب) محاسبه می شوند عبارتند از

$$\text{for } x=b: \qquad s_1^2=b-a>0; \qquad s_2^2=d-b>0$$
$$\text{for } x=c: \qquad s_1^2=c-a>0; \qquad s_2^2=d-c>0$$

پس تمامی شرایط K-T برآورده شده اند، و اینها نامز نقاط مینیمم هستند. چون نقاط نامقیدند، بنابراین آنها در واقع نقاط ایستا هستند. می توانیم شرط کافی را با محاسبه انحنای تابع هزینه در دو نقطهٔ نامزد بررسی کنیم:

$$x=b; \qquad \frac{d^2f}{dx^2}=2x-(b+c)=b-c<0$$

چون $b<c$ ، d^2f/dx^2 منفی است. بنابراین، شرط کافی برای مینیمم محلی بودن نقض شده است، در واقع، شرط لازم مرتبهٔ دو معادلهٔ (۳.۳۲) نیز نقض شده، پس نقطه



شکل ۳.۱۴ نمایش ترسیمی مثال ۳.۲۷. نقطه A ، مینیمم محلی مقید؛ B ماکزیمم محلی نامقید؛ C ، مینیمم محلی نامقید؛ D ، ماکزیمم محلی مقید.

نمی تواند یک مینیمم محلی برای تابع باشد. در حقیقت آن یک نقطه ماکزیمم محلی است، زیرا شرط کافی آن را برآورده می کند و در شکل ۱۴ . ۳ نیز دیده می شود.

$$x = c; \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = c - b > 0$$

چون $b < c$ است، d^2f/dx^2 مثبت است. بنابراین، شرط کافی مرتبهٔ دو معادلهٔ (۳۱ . ۳) برآورده شده و این یک نقطهٔ مینیمم است، چنان که در شکل ۱۴ . ۳ دیده می شود.

حالت ۲ : $u_1 = 0$ ، $s_2 = 0$. معادلهٔ $s_2 = 0$ ایجاب می کند که g_2 فعال باشد و بنابراین، $x = d$.

از معادلهٔ (الف) داریم

$$u_2 = -[d^2 - (b + c)d + bc] = -(d - c)(d - b)$$

چون $d > c > b$ است $u_2 < 0$ خواهد بود. در حقیقت جملهٔ داخل کروشه شیب تابع در نقطهٔ $x = d$ نیز هست که مثبت است (شکل ۱۴ . ۳)، پس $u_2 < 0$ است. شرایط لازم K-T نقض شده اند، پس برای این حالت جوابی وجود ندارد، یعنی x = d یک نقطه نامزد مینیمم نیست. درستی این مدّعا با مشاهدهٔ نقطهٔ D در شکل ۱۴ . ۳ نیز تأیید می گردد.

حالت ۳ : $s_1 = 0$ ، $u_2 = 0$. معادلهٔ $s_1 = 0$ ایجاب می کند g_1 فعال باشد، بنابراین، $x = a$.

از معادله (الف) داریم

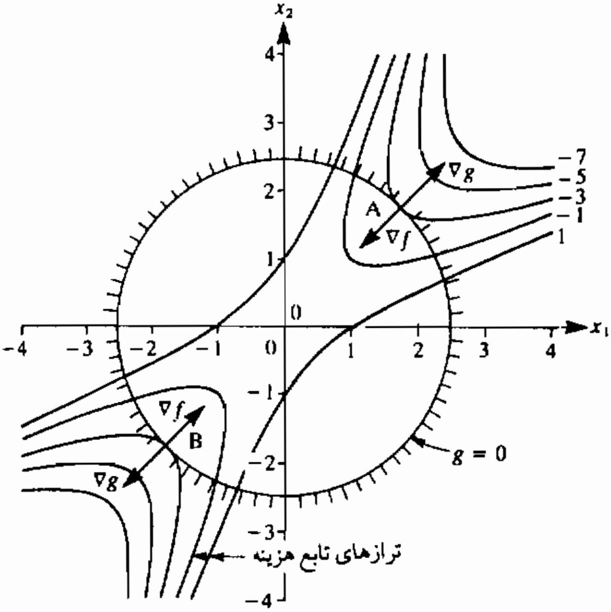
$$u_1 = a^2 - (b + c)a + bc = (a - b)(a - c) > 0$$

همچنین، چون u_1 برابر با شیب تابع در نقطهٔ $x = a$ است (شکل ۱۴ . ۳)، مثبت بوده و تمامی شرایط K-T برآورده شده اند، پس $x = a$ یک نقطهٔ نامزد مینیمم است. در حقیقت $x = a$ یک مینیمم محلی است، زیرا یک حرکت قابل قبول از این نقطه تابع هزینه را افزایش می دهد. این یک شرط کافی است که در بخش ۶ . ۳ بحث خواهد شد.

حالت ۴ : $s_1 = 0$ ، $s_2 = 0$. این حالت که در آن هر دو قید فعّالند، هیچ جواب معتبری نمی دهد، زیرا x نمی تواند همزمان مساوی a و d باشد.

مثال ۳.۲۸ حل شرایط لازم کان ـ تاکر. مسألهٔ بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$



شکل ۳.۱۵ حل ترسیمی مثال ۳.۲۸ . نقاط مینیمم محلی، A و B

را طوری مینیمم کنید که

$$g = x_1^2 + x_2^2 - 6 \leqq 0$$

حل. ناحیهٔ قابل قبول برای مسأله دایره‌ای است به مرکز $(0, 0)$ و شعاع $\sqrt{6}$. این دایره در شکل ۳ . ۱۵ رسم شده و چند تابع هزینه ثابت نیز نشان داده شده است. می توان دید که نقاط A و B مقدار مینیممی برای تابع هزینه می دهند. مشتقات توابع هزینه و قید در این نقاط در امتداد یک خط ولی در جهات مخالف هم هستند، پس شرایط لازم K-T برآورده شده‌اند. این مطلب را با نوشتن این شرایط و حل آنها برای به دست آوردن نقاط مینیمم محلی نشان خواهیم داد.

تابع لاگرانژ مسأله عبارت است از

$$L = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + u(x_1^2 + x_2^2 - 6 + s^2)$$

چون فقط یک قید برای مسأله وجود دارد، تمامی نقاط ناحیهٔ قابل قبول منظّمند و شرایط لازم کان ـ تاکر را می توان به کار برد. این شرایط عبارتند از

(الف) $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 3x_2 + 2ux_1 = 0$

(ب) $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 3x_1 + 2ux_2 = 0$

(پ) $x_1^2 + x_2^2 - 6 + s^2 = 0$

(ت) $us = 0$

(ث) $u \geqq 0$

معادله های (الف) تا (ت) چهار معادله برحسب چهار مجهول x_1 ، x_2 ، s و u هستند. پس، در اصل، برای به دست آوردن مجهولات تعداد معادله ها کافی است. سیستم معادلات غیرخطی هستند، اما حل آنها به طور تحلیلی امکان پذیر است. سه راه ممکن برای برآوردن شرط سویچی معادلهٔ (ت) وجود دارد : (i) $u = 0$ ، (ii) $s = 0$ ، که ایجاب می کند g فعال باشد، یا (iii) $u = 0$ و $s = 0$. ما هر حالت را جداگانه در نظر گرفته و برای یافتن ریشه ها از معادلات شرایط لازم اقدام می کنیم.

حالت ۱ : $u = 0$. در این حالت، قید نامساوی ممکن است در نقطهٔ جواب غیرفعال باشد. ما x_1 و x_2 را به دست آورده سپس قید را آزمایش می کنیم.
معادله های (الف) و (ب) خلاصه می شوند به

$$2x_1 - 3x_2 = 0$$
$$-3x_1 + 2x_2 = 0$$

این یک سیستم معادلات خطی همگن ۲ × ۲ است (طرف راست صفر است). چنین سیستمی وقتی جواب معنی دار غیرصفری دارد که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد. چون دترمینان ماتریس ۵- است، سیستم تنها جوابهای صفر $x_1 = x_2 = 0$ دارد. می توان سیستم معادلات را با استفاده از روش حذفی گوسی نیز حل کرد. این حل به ما $s^2 = 6$ را از معادلهٔ (پ) می دهد، بنابراین نامساوی فعال نیست. پس نقطهٔ نامزد مینیمم برای این حالت عبارت است از

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ u^* = 0,\ f(0, 0) = 0$$

حالت ۲ : $s = 0$. در این حالت، $s = 0$ ایجاب می کند که نامعادله فعال باشد. ما باید معادله های (الف) تا (پ) را برای به دست آوردن x_1 ، x_2 و u به طور همزمان حل

کنیم. دقت کنید که این مجموعه معادلات غیرخطی هستند، لذا ممکن است ریشه های چندگانه وجود داشته باشد. از معادلهٔ (الف) داریم

$$u = -1 + 3x_2/2x_1$$

اگر در معادله (ب) به جای u جایگزین کنیم، داریم

$$x_1^2 = x_2^2$$

اگر این جواب را در معادلهٔ (پ) گذاشته و x_1 و x_2 را به دست آورده و آن گاه u را محاسبه کنیم، چهار ریشهٔ معادله های (الف)، (ب) و (پ) عبارتند از

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \sqrt{3}, &\qquad u = \tfrac{1}{2} \\ x_1 = x_2 = -\sqrt{3}, &\qquad u = \tfrac{1}{2} \\ x_1 = -x_2 = \sqrt{3}, &\qquad u = -\tfrac{5}{2} \\ x_1 = -x_2 = -\sqrt{3}, &\qquad u = -\tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

دو ریشهٔ آخر شرایط لازم کان ـ تاکر معادلهٔ (ث) را برآورده نمی کنند، زیرا $u < 0$. بنابراین، دو نقطهٔ نامزد مینیمم برای این حالت وجود دارد. در شکل ۳.۱۵ اوّلین نقطهٔ مربوط به نقطهٔ A و دومین نقطه مربوط به نقطهٔ B می شود.

حالت ۳: $u = 0$ و $s = 0$. با این شرایط، از معادله های (الف) و (ب) داریم $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$. با جایگزینی این مقادیر در معادلهٔ (پ) داریم $s_2 = 6 \neq 0$. بنابراین، تمامی شرایط K-T را نمی توان برآورده کرد.

حالتی که هم u و هم s صفر باشند معمولاً در مسائل عملی اتفاق نمی افتد. این مطلب را می توان از تعبیر فیزیکی ضرایب لاگرانژ که بعداً در همین فصل خواهد آمد نیز استنباط کرد. ضریب u برای یک قید $g \le 0$ در حقیقت مشتق اوّل تابع هزینه نسبت به تغییرات طرف راست قید یعنی $u = -(\partial f/\partial e)$ را به ما می دهد که در آن e تغییر کوچکی در حدود قید است مانند $g \le e$. بنابراین، $u = 0$ در حالتی که $g = 0$ است گویای این است که هر تغییری در طرف راست قید $g \le 0$ تأثیری روی مقدار بهین تابع هزینه نمی گذارد. ولی در عمل معمولاً این چنین نیست، یعنی وقتی طرف راست یک قید تغییر می کند، ناحیهٔ قابل قبول برای مسأله تغییر می کند و معمولاً روی جواب بهین تأثیر می گذارد.

بالاخره، نقاطی که شرایط لازم کان ـ تاکر را برآورده می کنند به صورت جدول

زیر خلاصه می شوند :

	x_1^*	x_2^*	u^*	f	نقطه در شکل ۳.۱۵
(1)	0	0	0	0	0
(2)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	-3	A
(3)	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	-3	B

جالب است که دقت کنید به این که نقاط A و B شرط کافی برای مینیمم محلی را برآورده می کنند. همچنان که از شکل ۳.۱۵ می توان دید، هر حرکت قابل قبول از نقاط به افزایش تابع هزینه منجر شده، و کاهش بیشتر تابع هزینه به نقض قید می انجامد. همچنین می توان دید که نقطهٔ 0 شرط کافی را برآورده نمی کند، زیرا جهتهای قابل قبولی که تابع هزینه را کم کند وجود دارد. بنابراین، نقطهٔ 0 تنها نقطهٔ ایستاست. شرایط کافی برای این مسأله را بعداً در بخش ۳.۶ بررسی خواهیم کرد.

دو مثال گذشته، مراحل حل شرایط لازم کان ـ تاکر را برای به دست آوردن نقاط نامزد مینیمم تشریح می کند. فهم این مراحل بسیار مهم است. مثال دوم تنها یک قید نامساوی داشت. شرط سویچی معادله (ت) فقط دو حالت معمول را داد ـ یا $u = 0$ و یا $s = 0$ (حالت غیرمعمول $u = 0$ و $s = 0$ بندرت نقاط نامزد اضافی می دهد، بنابراین از آن صرف نظر خواهد شد). هرحالت نقطهٔ نامزد مینیمم x^* را می دهد. برای حالت ۱ $(u = 0)$، فقط یک نقطه x^* وجود داشت که معادله های (الف)، (ب) و (پ) را برآورده می کرد. اما برای حالت ۲ $(s = 0)$، چهار ریشه برای معادله های (الف)، (ب) و (پ) وجود داشت. دو تا از ریشه ها شرایط نامنفی بودن ضرایب لاگرانژ را برآورده نمی کردند. بنابراین، آن دو ریشه نامزد نقاط مینیمم محلی نبودند.

روش گفته شده برای مسائل کلی تر بهینه سازی غیرخطی نیز معتبر است. آن روش را در مثالی که دو متغیر طرّاحی و دو قید نامساوی دارد تشریح می کنیم.

مثال ۳.۲۹ حل شرایط لازم کان ـ تاکر. تابع

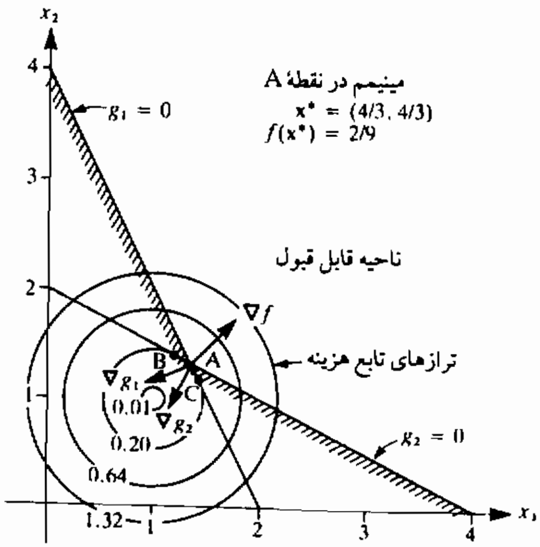
$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$

را نسبت به

$$g_1 \equiv -2x_1 - x_2 + 4 \leqq 0$$
$$g_2 \equiv -x_1 - 2x_2 + 4 \leqq 0$$

مینیمم کنید.

حل. شکل ۳.۱۶ نمایش ترسیمی مسأله را نشان می دهد. دو تابع قید رسم شده و ناحیه قابل قبول مشخص شده است. دیده می شود که نقطهٔ $A(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$، جایی که هر دو قید فعال هستند، جواب بهین مسأله است. چون یک مسأله دو متغیّره است، فقط دو بردار می توانند به طور خطی مستقل باشند. از شکل ۳.۱۶ می توان دید که گرادیان قیود، ∇g_1 و ∇g_2 به طور خطی مستقلند (بنابراین نقطهٔ بهین منظّم است)، پس هر بردار می تواند به عنوان ترکیب خطی از آنها بیان شود. بویژه، $-\nabla f$ (بردار گرادیان تابع هزینه) می تواند برحسب ترکیب خطی ∇g_1 و ∇g_2 بیان شود، با اعداد مثبت به عنوان ضرایب خطی ترکیب که این دقیقاً شرط لازم کان ـ تاکر معادلهٔ (۳.۴۷) است. در زیر این شرایط را نوشته و معادلات را حل می کنیم تا درستی جواب ترسیمی را بررسی کنیم.



شکل ۳.۱۶ حل ترسیمی مثال ۳.۱۹

تابع لاگرانژ مسأله عبارت است از

$$L = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 + u_1(-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2) + u_2(-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2)$$

شرایط لازم کان ـ تاکر عبارتند از

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 - 2u_1 - u_2 = 0 \qquad \text{(الف)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 - u_1 - 2u_2 = 0 \qquad \text{(ب)}$$

$$g_1 \equiv -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0 \qquad \text{(پ)}$$

$$g_2 \equiv -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 = 0 \qquad \text{(ت)}$$

$$\begin{array}{ll} u_1 s_1 = 0, & u_2 s_2 = 0 \\ u_1 \geqq 0, & u_2 \geqq 0 \end{array} \qquad \text{(ث)}$$

معادله های (الف) تا (ث) شش معادله برحسب شش مجهول x_1 ، x_2 ، s_1 ، s_2 ، u_1 و u_2 هستند. باید آنها را همزمان حل کنیم تا نقاط نامزد بهین محلی را بیابیم. یک راه برای برآوردن شرایط سویچی معادله های (ث) در نظر گرفتن حالتهای مختلف و یافتن ریشه های معادلات است. چهار حالت وجود دارد :

1. $u_1 = 0$, $\quad u_2 = 0$
2. $u_1 = 0$, $\quad s_2 = 0$ (or $g_2 = 0$)
3. $s_1 = 0$ (or $g_1 = 0$), $\quad u_2 = 0$
4. $s_1 = 0$ (or $g_1 = 0$), $\quad s_2 = 0$ (or $g_2 = 0$)

ما هر حالت را جداگانه در نظر گرفته و مجهولات را می یابیم.

حالت ۱ : $u_1 = 0$ ، $u_2 = 0$. از معادلات (الف) و (ب) داریم $x_1 = x_2 = 1$. این یک جواب معتبر نیست، زیرا $s_1^2 = -1$ (و یا $g_1 = 1$)، $s_2^2 = -1$ (و یا $g_2 = 1$) و از معادلات (پ) و (ت) می بینیم که دو نامعادله نقض شده اند، بنابراین $x_1 = 1$ و $x_2 = 1$ یک جواب قابل قبول نیست. پس این حالت هیچ نقطه نامزد مینیمم محلی نمی دهد.

حالت ۲ : $u_1 = 0$ ، $s_2 = 0$. با این شرایط از معادله های (الف)، (ب) و (ت) داریم

$$2x_1 - 2 - u_2 = 0 \qquad \text{(ج)}$$

(چ)
$$2x_2 - 2 - 2u_2 = 0$$

(ح)
$$-x_1 - 2x_2 + 4 = 0$$

اینها سه معادله خطی برحسب سه مجهول x_1 ، x_2 و u_2 هستند. هر روش حل برای سیستم معادلات خطی مثل حذفی گوسی[1]، یا روش دترمینان (قاعده کرامر[2])، را می‌توان برای به دست آوردن ریشه‌ها به کار برد. ما از روش ساده حذفی استفاده می‌کنیم. از ضرب معادلهٔ (ح) در ۲ و کم کردن آن از معادلهٔ (چ) داریم

(خ)
$$-4x_1 + 2x_2 + 2 = 0$$

از جمع معادله‌های (ح) و (خ) داریم $x_1 = 1.2$. با استفاده از معادلهٔ (خ) داریم $x_2 = 1.4$ و از معادله (ح) و یا (چ)، $u_2 = 0.4$. بنابراین جواب این حالت عبارت است از

$$x_1 = 1.2,\ x_2 = 1.4; \quad u_1 = 0,\ u_2 = 0.4; \quad f = 0.2$$

قبل از ادعای نامزدی نقطهٔ مینیمم محلی باید قابل قبول بودن آن را از نظر قید g_1 بررسی کنیم. با جایگزینی $x_1 = 1.2$ و $x_2 = 1.4$ درمعادلهٔ (پ)، داریم$s_1^2 = -0.2 < 0$ که ناممکن است. پس این نقطه یک نقطهٔ قابل قبول نیست، زیرا قید g_1 (یا $g_1 = 0.2$) نقض شده است. بنابراین، این حالت نقطهٔ نامزدی برای مینیمم محلی نمی‌دهد. از شکل ۳.۱۶ می‌توان دید که نقطهٔ(1.2, 1.4) متعلق به نقطهٔ B است که در ناحیهٔ قابل قبول نیست.

حالت ۳ : $s_1 = 0$ ، $u_2 = 0$. با این شرایط از معادله‌های (الف)، (ب) و (پ) داریم

$$2x_1 - 2 - 2u_1 = 0$$
$$2x_2 - 2 - u_1 = 0$$
$$-2x_1 - x_2 + 4 = 0$$

دوباره می‌بینیم که یک دستگاه معادلات خطی برحسب متغیّرهای x_1 ، x_2 و u_1 داریم. از حل آنها داریم

$$x_1 = 1.4,\ x_2 = 1.2; \quad u_1 = 0.4,\ u_2 = 0; \quad f = 0.2$$

---

1. Gaussian elimination
2. Cramer's rule

طرح را برای قابل قبول بودن نسبت به قید g_2 بررسی می‌کنیم که از معادلهٔ (ت) $s_2^2 = -0.2 < 0$ (یا $g_2 = 0.2$). این یک طرح قابل قبول نیست. بنابراین حالت ۳ نیز نقطه نامزد مینیمم محلی نمی دهد. از شکل ۳.۱۶ نیز می توان دید که نقطهٔ (1.4, 1.2) متعلق به نقطه (C) است که در ناحیهٔ قابل قبول نیست.

حالت ۴ : $s_1 = 0$ و $s_2 = 0$. برای این حالت معادلات (الف) تا (ت) باید برای چهار مجهول x_1 ، x_2 ، u_1 و u_2 حل شوند. این دستگاه معادلات مجدداً خطی است و به راحتی حل می شود. با استفاده از روش حذفی، مثل گذشته، از دو معادلهٔ (پ) و (ت) داریم $x_1 = \frac{4}{3}$ ، $x_2 = \frac{4}{3}$. از معادلات (الف) و (ب) مقدار u_1 و u_2 را به دست می آوریم $u_1 = \frac{2}{9}$ ، $u_2 = \frac{2}{9}$. چون هر دو ضریب لاگرانژ نامنفی هستند و هر دو قید برآورده شده اند، جواب اخیر نقطهٔ نامزد مینیمم محلی است. جواب متعلق به نقطهٔ A در شکل ۳.۱۶ است. تابع هزینه در این نقطه $\frac{2}{9}$ است.

می توان در شکل ۳.۱۶ مشاهده کرد که بردار $-\nabla f$ می تواند به عنوان ترکیبی خطی از بردارهای ∇g_1 و ∇g_2 در نقطهٔ A بیان شود. این شرط لازم معادلهٔ (۳.۵۲) را برآورده می کند. در شکل همچنین دیده می شود که نقطهٔ A یک نقطهٔ مینیمم محلی است، زیرا هر کاهشی در تابع هزینه فقط وقتی ممکن است که داخل ناحیه غیر قابل قبول برویم. هر حرکت قابل قبول نیز باعث افزایش تابع هزینه می شود.

در تمامی مثالهایی که تاکنون در نظر گرفتیم به طور ضمنی فرض شده بود که شرایط قضیهٔ ۳.۶ کان ـ تاکر یا قضیه ۳.۵ لاگرانژ برآورده شده‌اند. به طور مشخص فرض کرده ایم که x^* یک نقطه منظّم از ناحیه قابل قبول (مجموعه قید) است. این یعنی، گرادیان همهٔ قیود فعال در x^* به طور خطی مستقلند (یعنی آنها نه با هم موازیند و نه گرادیان یکی می تواند از ترکیب خطی بقیهٔ گرادیانها نوشته شود). باید توجه کرد که شرایط لازم فقط وقتی کاربرد دارند که فرض منظّم بودن x^* صحیح باشد. برای این که نشان داده شود که شرایط لازم برای نقطه ای مثل x^* که منظّم نیست کاربرد ندارد، مثال زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۳.۳۰ شرایط کان ـ تاکر را در نقاط نامنظّم آزمایش کنید. تابع

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 + 4$$

را با شرایط

$$g_1 \equiv -x_1 \leqq 0$$
$$g_2 \equiv -x_2 \leqq 0$$
$$g_3 \equiv x_2 - (1-x_1)^3 \leqq 0$$

مینیمم کنید. بررسی کنید که آیا نقطهٔ مینیمم $(1, 0)$ شرایط K-T را برآورده می کند یا خیر [مک کورمیک[1]، ۱۹۶۷].

حل. با استفاده از روش حل ترسیمی (شکل ۳.۱۷) می بینیم که مینیمم فراگیر در نقطهٔ $\mathbf{x}^* = (1, 0)$ اتفاق می افتد. حال ببینیم که این جواب شرایط لازم کان ـ تاکر را برآورده می کند یا خیر. لاگرانژین مسأله عبارت است از

شرایط لازم کان ـ تاکر عبارتند از

(الف) $$\frac{\partial L}{\partial x_1} \equiv 2x_1 - 4 - u_1 + u_3(3)(1-x_1)^2 = 0$$

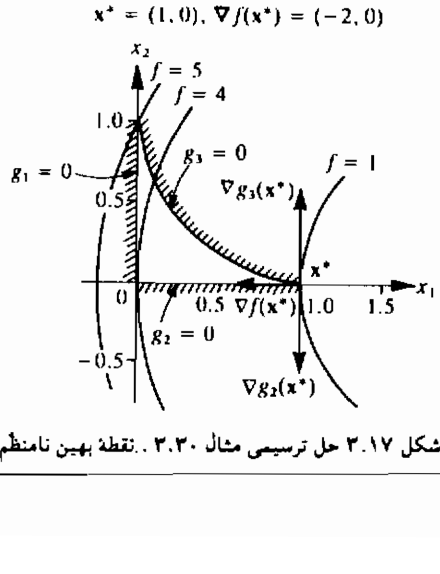
(ب) $$\frac{\partial L}{\partial x_2} \equiv 2x_2 - u_2 + u_3 = 0$$

(پ) $$-x_1 + s_1^2 = 0$$

(ت) $$-x_2 + s_2^2 = 0$$

(ث) $$x_2 - (1-x_1)^3 + s_3^2 = 0$$

(ج) $$u_i \geqq 0; \quad u_i s_i = 0; \quad i = 1 \text{ to } 3$$



شکل ۳.۱۷ حل ترسیمی مثال ۳.۳۰. نقطهٔ بهین نامنظّم

---

1. McCormick

در نقطهٔ $\mathbf{x}^* = (1, 0)$ قید اول (g_1) غیرفعال و قید دوم و سوم فعال هستند. شرایط سویچی (f) این حالت را بدین شکل بیان می کند

$$u_1 = 0; \quad s_2 = 0; \quad s_3 = 0$$

با جایگزینی اینها در معادله (الف)، می بینیم که برآورده نمی شود. پس شرایط لازم K-T برآورده نشده اند.

این نقض آشکار با توجه به این نکته که در $\mathbf{x}^* = (1, 0)$ گرادیانهای قیود فعال g_2 و g_3،

$$\nabla g_2(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \nabla g_3(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردارهای مستقلی نیستند نیز می تواند نتیجه شود. همچنان که در شکل ۳.۱۶ نشان داده شده آنها در امتداد یک خط ولی در جهات مخالف هم قرار دارند. پس $\mathbf{x}^*$ یک نقطهٔ منظّم از ناحیهٔ قابل قبول نیست. چون منظّم بودن در شرایط K-T فرض شده لذا استفاده از آن در این جا معتبر نیست. دقت کنید که تعبیر هندسی شرایط K-T نیز نقض شده ـ یعنی ∇f در $(1, 0)$ نمی تواند به عنوان ترکیب خطی گرادیانهای قیود فعال g_2 و g_3 نوشته شود. در حقیقت ∇f به ∇g_2 و ∇g_3 عمود است همچنان که در شکل دیده می شود.

مثال ۳.۳۱ آزمایش شرایط کان ـ تاکر. یک مسأله بهینه سازی، یک قید مساوی h و یک قید نامساوی g دارد. از نقطهٔ بهین اطلاعات زیر در دست است :

$$h = 0, \; g = 0, \; \nabla f = (2, 3, 2),$$
$$\nabla h = (1, -1, 1), \; \nabla g = (-1, -2, -1)$$

ببینید که این نقطه شرایط K-T را برآورده می کند یا خیر.

حل. در نقطه نامزد مینیمم، گرادیان h و g به طور خطی مستقلند، پس نقطه منظّم است. شرایط K-T عبارت است از

$$\nabla L = \nabla f + v\nabla h + u\nabla g = 0$$
$$us = 0, \; u \geqq 0, \; g + s^2 = 0, \quad \text{و} \quad h = 0$$

با جایگزینی ∇f ، ∇h و ∇g داریم

$$2 + v - u = 0$$
$$3 - v - 2u = 0$$
$$2 + v - u = 0$$

از حل آنها داریم $u = \frac{5}{3}$ ، $\upsilon = -\frac{1}{3}$. بنابراین تمامی شرایط K-T برآورده شده اند.

۳.۴.۳.۱ شکل جایگزین شرایط کان ـ تاکر

برای شرایط لازم کان ـ تاکر شکل جایگزینی که کاملاً با آن معادل است وجود دارد. در این شکل، متغیّر کمبود به قیود نامساوی اضافه نمی شوند و شرایط کان ـ تاکر معادله های (۳.۴۷) تا (۳.۵۱) بدون آنها نوشته می شوند. می توان دید که در شرایط لازم معادله های یاد شده، متغیّر کمبود s_i^2 تنها در دو معادله ظاهر شده: معادله (۳.۴۹)، $g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^2 = 0$ و معادلهٔ (۳.۵۰)، $u_i^* s_i = 0$. این دو معادله می توانند به شکل معادلی بدون متغیّر کمبود s_i^2 نوشته شوند. که در زیر نشان داده می شود.

ابتدا معادلهٔ (۳.۴۹)، $g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^2 = 0$ for $i = 1$ to m را در نظر بگیرید. مقصود از این معادله این است که مطمئن شویم در نقطهٔ نامزد مینیمم، همه قیود برآورده شده اند. معادله می تواند به شکل $s_i^2 = -g_i(\mathbf{x}^*)$ نوشته شود و چون $s_i^2 \geq 0$ برآوردن قید را تضمین می کند، داریم $-g_i(\mathbf{x}^*) \geq 0$ یا $g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ for $i = 1$ to m . پس معادلهٔ (۳.۴۹)، $g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^2 = 0$ بسادگی می تواند با $g_i(\mathbf{x}^*) \leq 0$ جایگزین شود.

معادلهٔ دومی (معادله (۳.۵۰)) که متغیّر کمبود دارد $u_i^* s_i = 0$ ، $i = 1$ to m است. اگر معادله را در s_i ضرب کنیم داریم $u_i^* s_i^2 = 0$. حال $s_i^2 = -g_i(\mathbf{x}^*)$ را جایگزین می کنیم، داریم $u_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ ، $i = 1$ to m . بدین طریق متغیّر کمبود از معادلات حذف شده و شرایط سویچی معادله (۳.۵۰) می تواند به شکل $u_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ ، $i = 1$ to m نوشته شود. این شرایط را می توان برای تعریف حالتهای مختلف یعنی $u_i = 0$ یا $g_i = 0$ (به جای $s_i = 0$) به کار برد.

برای نوشتن شکل جایگزین شرایط کان ـ تاکر، تابع لاگرانژ به شکل زیر تعریف می شود

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \upsilon_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x})$$
$$= f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \qquad (۳.۵۳)$$

ایستا بودن لاگرانژین نسبت به متغیّرهای طرّاحی یعنی $\nabla L = \mathbf{0}$ به ما روابط زیر را می دهد

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} \upsilon_i \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0; \qquad j = 1 \text{ to } n \qquad (۳.۵۴)$$

که مشابه معادلهٔ (۳.۴۷) است. قیود $h_i(\mathbf{x}^*) = 0$ معادله (۳.۴۸) و نامنفی بودن ضرایب لاگرانژ در معادلهٔ (۳.۵۱) برای قیود نامساوی همچنان باید برآورده شوند. شرایط لازم باقی مانده عبارتند از

$$g_i(\mathbf{x}^*) \leqq 0, \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۳.۵۵}$$

$$u_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۳.۵۶}$$

مثال ۳.۳۲ استفاده از شکل جایگزین شرایط K-T. مثال ۳.۲۹ را در نظر بگیرید و شکل جایگزین شرایط K-T را بنویسید.

حل. لاگرانژین معادلهٔ (۳.۵۳) به شکل زیر تعریف می شود

$$L = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 + u_1(-2x_1 - x_2 + 4) + u_2(-x_1 - 2x + 4)$$

شرایط K-T جایگزین عبارتند از

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 - 2u_1 - u_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 - u_1 - 2u_2 = 0$$

$$g_1 = -2x_1 - x_2 + 4 \leqq 0$$

$$g_2 = -x_1 - 2x_2 + 4 \leqq 0$$

$$u_1 g_1 = 0, \qquad u_2 g_2 = 0$$

$$u_1 \geqq 0, \qquad u_2 \geqq 0$$

شرایط سویچی $u_i g_i = 0$ حالتهای زیر را می دهد

(1) $u_1 = 0,$ $\qquad u_2 = 0$
(2) $u_1 = 0,$ $\qquad g_2 = 0$ (or $s_2 = 0$)
(3) $g_1 = 0$ (or $s_1 = 0$), $\qquad u_2 = 0$
(4) $g_1 = 0$ (or $s_1 = 0$), $\qquad g_2 = 0$ (or $s_2 = 0$)

این حالتهای چهارگانه دقیقاً همان چهار حالتی است که در مثال ۳.۲۹ مشخص شد.

به طور خلاصه، نکات زیر در رابطه با شرایط لازم مرتبهٔ اوّل کان ـ تاکر باید مورد توجه قرار گیرد:

۱. *شرایط می توانند برای بررسی این که* نقطهٔ داده شده یک نامزد مینیمم هست یا نه استفاده شوند؛ آن نقطه باید قابل قبول باشد، گرادیان لاگرانژین نسبت به متغیّرهای طرّاحی باید

صفر باشد، و ضرایب لاگرانژ برای قیود نامساوی باید نامنفی باشند.

۲. برای یک مسأله، *شرایط می‌تواند برای یافتن نقاط نامزد مینیمم استفاده شود*. حالتهای مختلف که از شرایط سویچی تعریف می‌شود باید در نظر گرفته شده و حل شوند. هر حالت می‌تواند جوابهای چندگانه بدهد.

۳. شرایطی که *با* متغیّرهای کمبود و *یا* بدون آنها نوشته می‌شوند *کاملاً معادل* هم هستند و جوابهای مشابهی ختم می‌شوند.

۴. برای هر حالت جواب، به‌خاطر بسپارید که

(i) تمام قیود نامساوی را برای قابل قبول بودن (یعنی $s_i^2 \geq 0$ یا $g_i \leq 0$) بررسی کنید؛

(ii) تمام ضرایب لاگرانژ را محاسبه کنید؛ و

(iii) مطمئن شوید که تمامی ضرایب لاگرانژ قیود نامساوی نامنفی هستند.

۳.۵ بهینگی فراگیر

در طرّاحی بهین سیستمها، سؤال بهین فراگیر همیشه وجود دارد. این سؤال می‌تواند به دو صورت پاسخ داده شود:

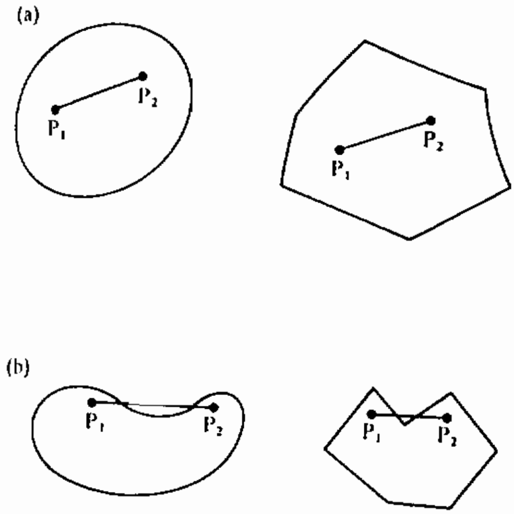
۱. اگر تابع هزینه $f(\mathbf{x})$ روی ناحیه‌ای بسته و کراندار، پیوسته باشد، آن‌گاه قضیه ویرستراس ۳.۱ وجود مینیمم فراگیر را تضمین می‌کند. برای این حالت، اگر بتوانیم تمامی نقاط بهین را محاسبه کنیم، آن‌گاه جوابی که کمترین مقدار را برای تابع هزینه بدهد انتخاب می‌کنیم.

۲. نشان دادن این که مسأله بهینه سازی یک مسألهٔ محدب است، زیرا در آن صورت هر مینیمم محلی یک مینیمم فراگیر نیز هست.

هر دو روش نیاز به محاسبات قابل توجهی دارد. ما موضوعات تحدب و مسائل برنامه‌ریزی محدب را در این بخش بحث می‌کنیم. چنین مسائلی برحسب مجموعه‌های محدّب و توابع محدّب تعریف می‌شوند. بنابراین، ما این مفاهیم را معرفی و چند نتیجه آن را که مربوط به جواب بهین فراگیر می‌شود به بحث می‌گذاریم.

۳.۵.۱ مجموعه‌های محدّب

یک مجموعهٔ محدّب S مجموعه‌ای از نقاطی (بردارهای $\mathbf{x}$) است که خاصیت زیر را دارا

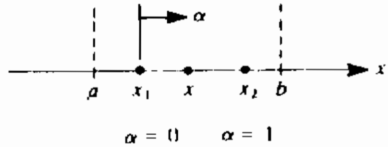


شکل ۳.۱۸ (a) مجموعه‌های محدب، (b) مجموعه‌های غیرمحدب

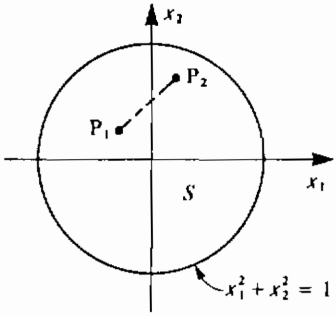
باشند : اگر P_1 و P_2 نقاط دلخواهی در S باشند، آن گاه تمامی قطاع خط P_1–P_2 نیز در S است. شکل ۳.۱۸ چند مثال از تحدب و مجموعه های محدب را نشان می دهد. *برای تشریح بیشتر مجموعه های محدب، نقاطی را روی خطی حقیقی در امتداد محور x در نظر بگیرید* (۳.۱۹). نقاط در هر بازه خط نشانگر یک مجموعه محدب است. بازه‌ای را بین نقاط a و b چنان که در شکل ۳.۱۹ دیده می شود، در نظر بگیرید. برای این که نشان دهیم این بازه یک مجموعه محدب است، اگر x_1 و x_2 دو نقطه در بازه باشند، قطاع خط بین نقاط می توانند به شکل زیر نوشته شود

$$x = \alpha x_2 + (1-\alpha)x_1; \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1 \tag{۳.۵۷}$$

در حالی که وقتی $\alpha = 0$ است $x = x_1$ و وقتی $\alpha = 1$ است، $x = x_2$. واضح است که خطی که در معادله (۳.۵۷) تعریف شده، در بازهٔ $[a, b]$ است.



شکل ۳.۱۹ بازهٔ محدب بینa و b روی یك خط حقیقی



شکل ۳.۲۰ مجموعهٔ محدّب S مثال ۳.۳۳

در حالت کلی، برای فضای n بعدی، قطاع خط بین هر دو نقطه $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ می‌تواند به شکل زیر نوشته شود

$$\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}^{(2)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(1)}; \qquad 0 \leqq \alpha \leqq 1 \tag{۳.۵۸}$$

اگر تمامی قطاع خط معادلهٔ (۳.۵۸) در مجموعه S باشد، آن گاه آن یک مجموعهٔ محدّب است. معادلهٔ (۳.۵۸) شکل تعمیم یافتهٔ معادلهٔ (۳.۵۷) است و *نمایش پارامتری* یک *قطاع خط* بین نقاط $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ نامیده می‌شود.

مثال ۳.۳۳ بررسی تحدّب یک مجموعه. تحدّب مجموعهٔ زیر را نشان دهید

$$S = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 - 1.0 \leqq 0\}$$

حل. برای نمایش هندسی مجموعه S، ابتدا قید را به عنوان یک مساوی رسم می‌کنیم که دایره‌ای است به شعاع ۱ و به مرکز (۰ ، ۰) (شکل ۳.۲۰). نقاط داخل و یا روی دایره در S هستند. ازنظر هندسی می‌بینیم که برای هر دو نقطه روی دایره، قطاع خط بین آنها نیز در داخل دایره است. بنابراین، S یک مجموعهٔ محدّب است. برای نشان دادن تحدّب S، از معادلهٔ (۳.۵۸) نیز می‌توانیم استفاده کنیم. برای این کار دو نقطه $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ در مجموعه S را در نظر می‌گیریم. استفاده از معادلهٔ (۳.۵۸) برای محاسبه $\mathbf{x}$ و شرط این که فاصله بین $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ نامنفی است ($\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| \geq 0$)، نشان خواهد داد که $\mathbf{x} \in S$. این تحدّب S را ثابت خواهد کرد که برای تمرین باقی گذاشته می‌شود.

۳.۵.۲ توابع محدّب

تابع یک متغیّره $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید. در شکل ۳.۲۱ ترسیمهٔ این تابع نشان داده شده است. دقت کنید که اگر خط مستقیمی بین هر دو نقطه $(x_1, f(x_1))$ و $(x_2, f(x_2))$ روی منحنی رسم شود، خط به ازای تمامی نقاط بین x_1 و x_2 بالای منحنی $f(x)$ قرار می گیرد. این ویژگی تحدّب توابع را مشخص می کند.

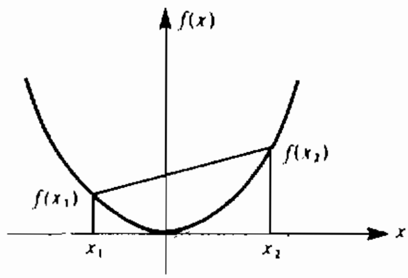
یک *تابع محدّب* $f(x)$ *روی یک مجموعهٔ محدب تعریف می شود*، یعنی، متغیّر مستقل x باید در مجموعهٔ محدّب قرار داشته باشد. تابع $f(x)$ را روی مجموعهٔ محدّب S محدّب گویند اگر زیر هر خطی که دو نقطه آن را به هم متصل می کند قرار داشته باشد. شکل ۳.۲۲ نمایش هندسی یک تابع محدب را نشان می دهد. با استفاده از هندسه، تعریف قبلی تابع محدب می تواند با نامساوی $f(x) \le \alpha f(x_2) + (1-\alpha) f(x_1)$ بیان شود. چون $x = \alpha x_2 + (1-\alpha)x_1$ است، نامساوی برای $0 \le \alpha \le 1$ تبدیل به

$$f(\alpha x_2 + (1-\alpha)x_1) \leqq \alpha f(x_2) + (1-\alpha)f(x_1) \qquad (۳.۵۹)$$

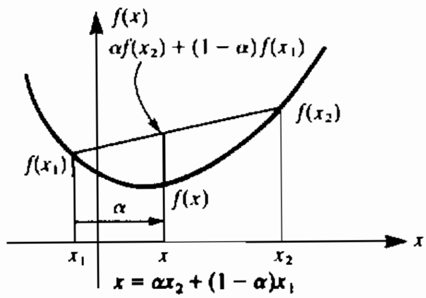
می شود. این تعریف می تواند به یک تابع n متغیّره تعمیم داده شود. تابع $f(\mathbf{x})$ که روی مجموعهٔ محدّب S تعریف می شود اگر نامساوی

$$f(\alpha \mathbf{x}^{(2)} + (1-\alpha)\mathbf{x}^{(1)}) \leqq \alpha f(\mathbf{x}^{(2)}) + (1-\alpha)f(\mathbf{x}^{(1)}) \qquad (۳.۶۰)$$

برای $0 \le \alpha \le 1$ را برای هر دو نقطه $\mathbf{x}^{(1)}$ و $\mathbf{x}^{(2)}$ در S برآورده کند محدّب است. دقت کنید که مجموعهٔ محدّب S یک ناحیه در فضای n بعدی است که شرط تحدب را برآورده می کند.



شکل ۳.۲۱ تابع محدب $f(x) = x^2$



شکل ۳.۲۲ توصیف ویژگیهای یك تابع محدب

معادله های (۳.۵۹) و (۳.۶۰) *شرایط لازم و کافی را برای تحدّب توابع* می دهند. اما در عمل استفاده از آنها مشکل است، زیرا باید بی نهایت جفت نقطه را بررسی کنیم. خوشبختانه، قضیهٔ زیر راه ساده تری را برای بررسی تحدّب یک تابع نشان می دهد.

قضیهٔ ۳.۷ بررسی تحدّب یك تابع. تابع n متغیّرهٔ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ که درمجموعهٔ محدب S تعریف می شود اگر و تنها اگر در تمامی نقاط مجموعه S ماتریس هسیان آن معین مثبت یا نیمه معین مثبت باشد محدّب است.

اگر ماتریس هسیان برای تمامی نقاط مجموعه معین مثبت باشد آن گاه f تابع محدّب **قطعی** نامیده می شود. (دقت کنید که عکس این موضوع درست نیست، یعنی، یک تابع محدّب قطعی ممکن است در بعضی نقاط ماتریس هسیان نیمه معین مثبت داشته باشد، مانند $f(x) = x^4$ که تابع محدب قطعی است ولی مشتق دومش در $x = 0$ صفر است.)

در یک بعدی، بررسی قضیه ۳.۷ منتهی به شرط نامنفی بودن مشتق دوم می شود. ترسیمهٔ چنین تابعی شعاع انحنای نامنفی دارد، همچنان که در توابع شکلهای ۳.۲۱ و ۳.۲۲ این گونه بود. قضیه را با نوشتن بسط تیلور برای تابع $f(\mathbf{x})$ و آن گاه استفاده از تعاریف معادله های (۳.۵۹) و (۳.۶۰) می توان اثبات کرد.

مثال ۳.۳۴ بررسی تحدّب یك تابع. تحدّب تابع زیر را بررسی کنید

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

حل. محدودهٔ تابع (که همه مقادیر x_1 و x_2 است) محدّب است. گرادیان و هسیان تابع

عبارت است از

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

با نحوهٔ بررسی که در قضایای ۲ . ۳ و یا ۳ . ۳ گفته شد می بینیم که H همه جا معین مثبت است . بنابراین، f یک تابع محدّب قطعی است

مثال ۳.۳۵ بررسی تحدب یك تابع. تحدّب تابع

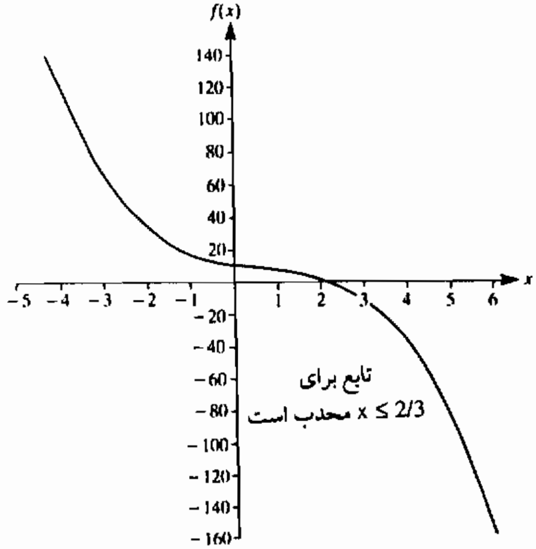
$$f(\mathbf{x}) = 10 - 4x + 2x^2 - x^3$$

را بررسی کنید.

حل. مشتق دوم تابع عبارت است از

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 4 - 6x$$

تابعی محدب است که مشتق دوم آن، $d^2f/dx^2 \geq 0$ باشد. پس تابع وقتی محدب است که $4 - 6x \geq 0$ یا $x \leq \frac{2}{3}$. *بررسی تحدب در حقیقت دامنه ای را مشخص می کند که درآن تابع محدب است* . تابع $f(x)$ درشکل ۳ . ۲۳ رسم شده است. می توان دید که تابع برای $x \leq \frac{2}{3}$ محدّب و برای $x \geq \frac{2}{3}$ مقعر (تابع $f(x)$ را مقعر گویند اگر $-f(x)$ محدب باشد) است.



شکل ۳.۲۳ ترسیمهٔ تابع $f(x) = 10 - 4x + 2x^2 - x^3$ **مثال ۳.۳۵**

۳.۵.۳ مسائل برنامه‌ریزی محدّب

اگر تابع $g_i(\mathbf{x})$ محدب باشد، آن‌گاه مجموعهٔ $g_i(\mathbf{x}) \le e_i$ محدّب است، در حالی که e_i یک عدد ثابت است. اگر توابع $g_i(\mathbf{x})$ for $i = 1$ to m محدب باشند، آن‌گاه مجموعه‌ای که با $g_i(\mathbf{x}) \le e_i$ for $i = 1$ to m تعریف می‌شود نیز محدّب است. مجموعهٔ $g_i(\mathbf{x}) \le e_i$ for $i = 1$ to m فصل مشترك مجموعه‌هایی را گویند که با قیود $g_i(\mathbf{x}) \le e_i$ تعریف می‌شوند. بنابراین، تلاقی مجموعه‌های محدّب خود یک مجموعهٔ محدّب است. می‌توانیم تحدب توابع و مجموعه‌ها را با قضیهٔ زیر به‌هم مربوط کنیم :

قضیه ۳.۸ توابع محدب و مجموعه‌های محدب. اگر یک مجموعه S با قیود مسأله بهینه سازی عمومی بخش ۲.۷ تعریف شود داریم

$$S = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leqq 0,\ i = 1 \text{ to } m;\ h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1 \text{ to } p\} \tag{۳.۶۱}$$

آن‌گاه S یک مجموعهٔ محدّب است اگر توابع g_i محدب و h_i ها خطی باشند.

مجموعهٔ S مثال ۳.۳۳ محدب است، زیرا با یک تابع محدب تعریف می‌شود. به این نکته مهم باید توجه کرد که *اگر ما قیود مساوی غیرخطی $h_i(\mathbf{x}) = 0$ داشته باشیم، آن‌گاه مجموعهٔ قید S همیشه غیرمحدب است*. این موضوع به سادگی از تعریف مجموعهٔ محدّب معلوم می‌شود. برای یک قید مساوی، مجموعهٔ S مجموعه‌ای از نقاط است که روی سطح $h_i(\mathbf{x}) = 0$ قرار دارند. اگر هر دو نقطه روی سطح را در نظر بگیریم، خط مستقیمی که آن دو را به هم متصل می‌کند نمی‌تواند روی سطح باشد، مگر آن که سطح صفحه مستوی باشد (قیود خطی). بنابراین، مجموعه‌ای که با قید مساوی غیرخطی تعریف شود همیشه غیرمحدب است. برعکس، *قیدی که با یک مساوی یا نامساوی خطی تعریف می‌شود، همیشه محدب است*.

اگر تمامی توابع قید نامساوی برای یک مسأله طرّاحی بهین محدب و تمامی قیود مساوی خطی باشند، آن‌گاه براساس قضیهٔ ۳.۸ مجموعه قید محدب است. اگر تابع هزینه نیز روی S محدب باشد، آن‌گاه ما یک *مسأله برنامه ریزی محدب* داریم. این مسائل خاصیت بسیار مفیدی دارند که شرایط لازم کان ـ تاکر کافی نیز هستند و هر مینیمم محلی، مینیمم فراگیر نیز هست. این مطلب در قضیهٔ ۳.۹ خلاصه خواهد شد.

به این نکتهٔ مهم توجه کنید که قضیهٔ ۳.۸ نمی‌گوید که اگر تابع $g_i(\mathbf{x})$ محدب نباشد، مجموعهٔ قابل قبول S نمی‌تواند محدّب باشد، یعنی این یک قضیه "اگر و تنها اگر" نیست.

بعضی از مسائل توابع قید نامساوی دارند و در آزمایش تحدّب رد می شوند، ولی ناحیهٔ قابل قبول هنوز محدب است. پس شرط محدّب بودن $g_i(\mathbf{x})$ برای ناحیه $g_i(\mathbf{x}) \le 0$ فقط یک شرط کافی است نه لازم.

قضیهٔ ۳.۹ مینیمم فراگیر. اگر $f(\mathbf{x}^*)$ برای تابع محدب $f(\mathbf{x})$ که روی مجموعهٔ محدّب S تعریف شده یک مینیمم محلی باشد، آن یک مینیمم فراگیر خواهد بود.

اثبات. می توانیم با برهان خلف قضیه را ثابت کنیم. اگر $\mathbf{x}^*$ یک مینیمم محلی $f(\mathbf{x})$ در مجموعهٔ S باشد و فرض کنیم $f(\mathbf{x})$ در $\mathbf{x}'$ در مجموعه S یک مینیمم محلی دیگر دارد که رابطه زیر بین آنها برقرار است.

$$f(\mathbf{x}') < f(\mathbf{x}^*) \qquad \text{(الف)}$$

چون S مجموعه ای محدّب است، قطاع خط $\mathbf{x}^{(\alpha)} = \alpha\mathbf{x}' + (1-\alpha)\mathbf{x}^*$ for $0 \le \alpha \le 1$ روی مجموعهٔ S قرار دارد. همچنین با تحدب $f(\mathbf{x})$ می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}^{(\alpha)}) &\leqq \alpha f(\mathbf{x}') + (1-\alpha) f(\mathbf{x}^*) \\ &= f(\mathbf{x}^*) + \alpha[f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}^*)] \end{aligned} \qquad \text{(ب)}$$

با استفاده از معادله های (الف) و (ب) داریم

$$f(\mathbf{x}^{(\alpha)}) < f(\mathbf{x}^*) \qquad \text{(پ)}$$

بنابراین برای یک α مثبت کوچک، $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ در همسایگی $\mathbf{x}^*$ قرار دارد که رابطهٔ (پ) برقرار است. یعنی، مقدار تابع در $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ از مقدار تابع در $\mathbf{x}^*$ کوچکتر است. این خلاف فرضی است که گفتیم $\mathbf{x}^*$ یک مینیمم محلی برای $f(\mathbf{x})$ است. بنابراین، برای یک مسأله محدّب نمی توان دو مینیمم محلی با دو مقدار متفاوت تابع هزینه داشت.

به این نکتهٔ مهم باید توجه کرد که قضیه نمی گوید اگر توابع مسأله محدب نباشد، $\mathbf{x}^*$ نمی تواند یک مینیمم فراگیر باشد. نقطه می تواند حقیقتاً یک مینیمم فراگیر باشد ولی با قضیهٔ ۳.۹ نمی توانیم ادعای بهینه فراگیر بودن کنیم و باید از روشهای دیگری مانند روش یک جست وجوی کامل استفاده کنیم.

مثال ۳.۳۶ بررسی تحدب یك مساله. تحدب مسأله زیر را بررسی کنید. تابع

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_2^3$$

را به شرط $x_1 \geq 0$ و $x_2 \leq 0$ مینیمم کنید.

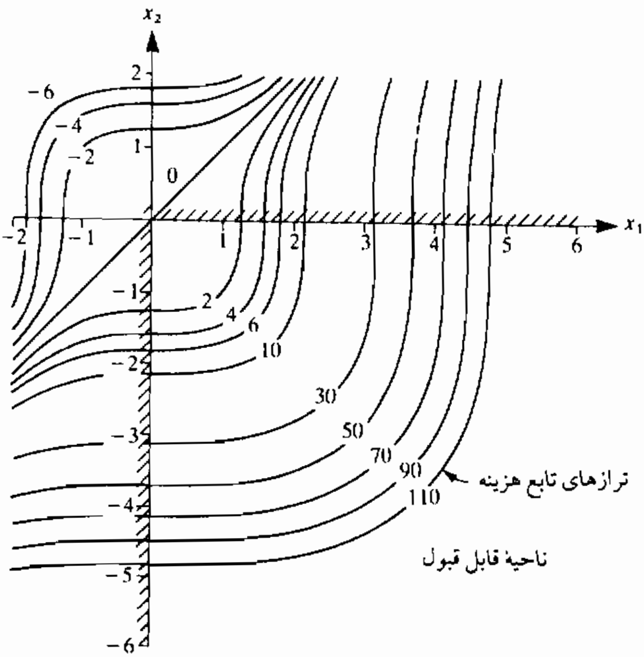
حل. قیود در حقیقت دامنه تابع $f(\mathbf{x})$ را تعریف می کنند که ربع چهارم یک صفحه است (در شکل ۳.۲۴ نشان داده شده). دامنه محدب است. هسیان f عبارت است از

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & -6x_2 \end{bmatrix}$$

هسیان در بازه ای که توسط قیود تعریف شده ($x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$) نیمه معین مثبت یا معین مثبت است. بنابراین، تابع هزینه محدّب و مسأله محدّب است. دقت کنید اگر قیود $x_1 \geq 0$ و $x_2 \leq 0$ اعمال نشوند مسأله محدب نیست. این را می توان در شکل ۳.۲۴ که خطوط هزینه ثابت نشان داده شده است نیز دید. پس، شرط نیمه معین مثبت بودن هسیان می تواند بازه ای را تعریف کند که تابع در آن محدب است

مثال ۳.۳۷ بررسی تحدّب یک مسأله. تحدّب مسألهٔ زیر را بررسی کنید. تابع

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$$



شکل ۳.۲۴ نمایش ترسیمی مثال ۳.۳۶

را به شرط

$$x_1 + 3x_2 \leqq 6$$
$$5x_1 + 2x_2 \leqq 10$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

حل. چون قیود برحسب متغیّرهای x_1 و x_2 خطی هستند، ناحیهٔ قابل قبول (مجموعه قید) مسأله محدب است. اگر تابع هزینه $f(x_1, x_2)$ نیز محدب باشد آن‌گاه مسأله محدب است. هسیان تابع هزینه عبارت است از

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -6x_1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $\mathbf{H}$ عبارتند از $-6x_1$ و -4. چون اوّلین مقدار ویژه برای $x_1 \geq 0$ نامثبت است، و دومین مقدار ویژه منفی است، تابع محدب نیست (قضیه ۳.۷) و بنابراین مسأله را نمی‌توان در زمرهٔ مسائل برنامه‌ریزی محدب دسته‌بندی کرد. بهینه فراگیر بودن مینیمم محلی تضمین نمی‌شود. شکل ۳.۲۵ ناحیه قابل قبول مسأله را همراه چند خط هزینه ثابت نشان می‌دهد. دیده می‌شود که ناحیهٔ قابل قبول محدّب است، ولی تابع هزینه محدب نیست.

مثال ۳.۳۸ بررسی تحدب یک مسأله. تحدّب مسأله زیر را بررسی کنید. تابع

$$f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 18x_1x_2 + 13x_2^2 - 4$$

را به شرط

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \geqq 16$$

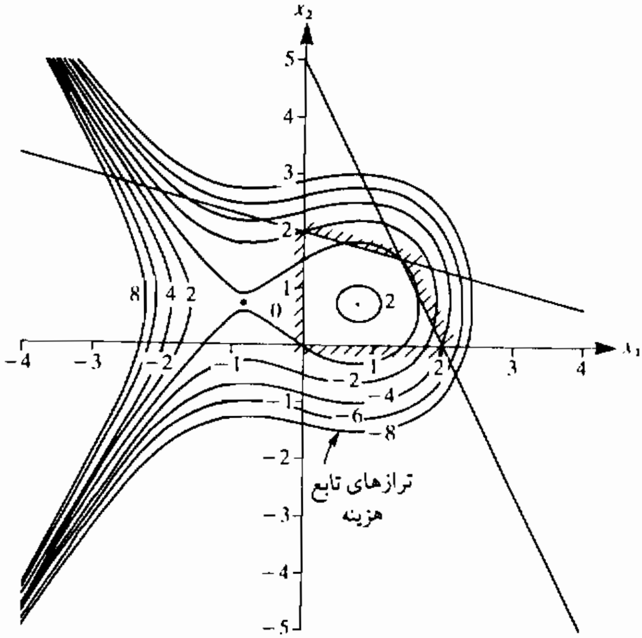
مینیمم کنید.

حل. برای بررسی تحدب مسأله، باید قید را به شکل استاندارد بنویسیم

$$g(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 16 \leqq 0$$

هسیان $g(\mathbf{x})$ عبارت است از

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$



شکل ۳.۲۵ نمایش ترسیمی مثال ۳.۳۷

مقادیر ویژه هسیان عبارتند از -2 و -2 . چون هسیان نه معین مثبت و نه نیمه معین مثبت است، $g(\mathbf{x})$ غیرمحدب است (در حقیقت، هسیان معین منفی است بنابراین $g(\mathbf{x})$ مقعر است). بنابراین مسأله نمی تواند یک مسأله برنامه ریزی محدّب باشد. بهینگی فراگیر برای مسأله براساس قضیه ۹ . ۳ تضمین نمی شود.

۳.۵.۴ تبدیل قید

یک قید را می توان به شکل معادل دیگری تبدیل کرد، یعنی محدوده و ناحیهٔ قابل قبول مسأله تغییر نکند ولی شکل تابع عوض شود. به هر حال تبدیل یک قید ممکن است تحدب آن را تحت تأثیر قرار دهد، یعنی قیود محدب ممکن *است* غیرمحدب شوند و برعکس. تحدب ناحیه قابل قبول با تبدیل تغییری نمی کند.

برای تشریح اثرات تبدیل، فرض کنید قید زیر را داریم :

$$g_1 \equiv \frac{a}{x_1 x_2} - b \leqq 0$$

با $x_1 > 0$ ، $x_2 > 0$ و a و b دو ثابت مثبت. برای بررسی تحدب قید، ماتریس هسیان را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\nabla^2 g_1 = \frac{2a}{x_1^2 x_2^2} \begin{bmatrix} \dfrac{x_2}{x_1} & 0.5 \\ 0.5 & \dfrac{x_1}{x_2} \end{bmatrix}$$

هر دو مقدار ویژه ماتریس فوق مثبت قطعی هستند، پس ماتریس معین مثبت است، و تابع قید g_1 محدّب است. ناحیه قابل قبول برای g_1 نیز محدّب است.

حال اگر قید را با ضرب کردن در $x_1 x_2$ تبدیل کنیم (چون $x_1 > 0$ ، $x_2 > 0$. پس جهت نامساوی عوض نمی‌شود) داریم

$$g_2 \equiv a - b x_1 x_2 \leqq 0$$

قیود g_1 و g_2 معادلند و حل بهین مشابهی برای مسأله می‌دهند. برای بررسی تحدّب تابع قید، ماتریس هسیان قید را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\nabla^2 g_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس فوق عبارتند از $\lambda_1 = -b$ و $\lambda_2 = b$. بنابراین براساس قضیهٔ ۲ . ۳ ماتریس نامعین و براساس قضیهٔ ۷ . ۳ تابع قید g_2 غیرمحدب است. پس، ما تحدب تابع را از دست داده و نمی‌توانیم تحدب ناحیهٔ قابل قبول را براساس قضیهٔ ۸ . ۳ ادعا کنیم. چون مسأله را نمی‌توان محدّب در نظر گرفت نمی‌توانیم از نتایج مربوط به مسائل برنامه‌ریزی محدب استفاده کنیم.

نتایج اصلی این بخش را به شکل زیر خلاصه می‌کنیم:

۱ . *تابع را محدّب* گویند اگر و تنها اگر هسیان در تمامی نقاط بازه تابع حداقل نیمه معین مثبت یا معین مثبت باشد؛ در صورتی که هسیان معین مثبت باشد تابع را *محدّب اکید* گویند.

۲ . یک *قید مساوی یا نامساوی خطی* همیشه یک ناحیهٔ قابل قبول محدّب را برای مسأله تعریف می‌کند.

۳ . یک *قید مساوی غیرخطی* همیشه یک ناحیه قابل قبول غیرمحدّب را برای مسأله تعریف می‌کند.

۴. اگر تمامی توابع قیود مساوی خطی باشند و همه قیود نامساوی یک مسأله به شکل استاندارد (مینیمم سازی تابع با قید مساوی و نامساوی از «نوع ≤») محدب باشند، ناحیهٔ قابل قبول محدّب و در غیر این صورت ممکن است محدّب یا غیرمحدب باشد.
۵. اگر تابع هزینه در ناحیهٔ قابل قبول محدّب، محدّب باشد، مسألهٔ، *مسألهٔ برنامه ریزی محدّب* نامیده می شود.
۶. برای یک مسأله برنامه ریزی محدب، *شرایط لازم مرتبهٔ اوّل کان ـ تاکر کافی نیز هستند و* هر مینیمم محلی یک مینیمم فراگیر نیز هست.
۷. مسائل غیرمحدب نیز می توانند نقاط مینیمم فراگیر داشته باشند.

۳.۶* شرایط مرتبه ـ دو برای بهینه سازی مقیّد

حل شرایط لازم، طرحهای نامزد مینیمم محلی را به دست می دهند. شرایط کافی، مینیمم بودن طرح نامزد را مشخص می کنند. در این بخش، شرایط لازم و کافی مرتبهٔ ـ دو را برای مسائل بهینه سازی مقید بحث می کنیم. مانند مسائل نامقیّد، این شرایط نیز به کمک هسیان تابع بیان می شوند. ابتدا شرایط کافی برای مسائل برنامه ریزی محدّب، سپس برای مسائل بهینه سازی کلی را بحث می کنیم.

۳.۶.۱ شرط کافی برای مسائل محدب

برای مسائل برنامه ریزی محدب، شرایط لازم مرتبهٔ یک کان ـ تاکر قضیهٔ ۳.۶ کافی نیز هستند. پس، اگر بتوانیم تحدب مسأله را نشان دهیم، هر جواب شرایط لازم به طور خودکار شرایط کافی را نیز برآورده می کند. به علاوه، براساس قضیه ۳.۹ جواب مینیمم فراگیر خواهد بود.

قضیه ۳.۱۰ شرط کافی برای مسألهٔ محدب. اگر $f(\mathbf{x})$ تابع محدبی باشد که در ناحیه قابل قبول (مجموعهٔ قید) محدّب تعریف شده باشد، آن گاه شرایط مرتبهٔ یک کان ـ تاکر برای یک مینیمم فراگیر هم شرایط لازمند و هم شرایط کافی.

برای استفاده از قضیه باید نشان دهیم که مجموعه قید S که به شکل زیر تعریف می شود برای مسأله محدّب است

$$S = \{\mathbf{x} \mid h_i(\mathbf{x}) = 0,\ i = 1 \text{ to } p;\ g_i(\mathbf{x}) \leqq 0,\ i = 1 \text{ to } m\}$$

همچنان که در بخش ۲ . ۵ . ۳ اشاره شد، برای تحدّب S ، باید تمامی توابع قیود مساوی $h_i(\mathbf{x})$ خطی و هسیان تمامی توابع قیود نامساوی $g_i(\mathbf{x})$ معین مثبت یا نیمه معین مثبت باشند. بنابراین، اگر هر مسأله مقیدی قید مساوی غیرخطی داشته باشد، نمی‌توانند محدّب باشند. اگر تمامی توابع مسأله خطی باشند، آن گاه مسأله محدب است. وقتی که تحدّب S را نشان دادیم، ضرورت دارد که نشان دهیم $f(\mathbf{x})$ روی S نیز محدب است تا بتوانیم تحدّب مسأله را تضمین کنیم. برای چنین مسائلی، هر نقطه که شرایط لازم کان ـ تاکر را برآورده کند یک طرح مینیمم فراگیر را به ما می‌دهد. مانند مراحل ذکر شده در بخش ۳ . ۴ ، حالتهای مختلفی را که با شرایط سویچی معادله های (۳ . ۵۰) تعریف شده‌اند در نظر می‌گیریم تا جواب پیدا شود. وقتی جواب پیدا شد چون جواب یک *طرح بهین فراگیر* است همان جا محاسبات را قطع می‌کنیم.

مثال ۳.۳۹ آزمون تحدب یك مسأله. دوباره مثال ۳ . ۲۶ را در نظر می‌گیریم و تحدب آن را بررسی می‌کنیم. تابع

$$f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$$

را به شرط

$$g(\mathbf{x}) \equiv x_1 + x_2 - 2 \leqq 0$$

مینیمم کنید.

حل. شرایط لازم کان ـ تاکر نامزد مینیمم محلی را می‌دهد. داریم

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1; \text{ and } u = 1$$

تابع قید $g(\mathbf{x})$ خطی است، پس محدب است. چون تابع قید نامساوی محدب است و قید مساوی وجود ندارد، مجموعه قید S محدب است. ماتریس هسیان تابع هزینه عبارت است از

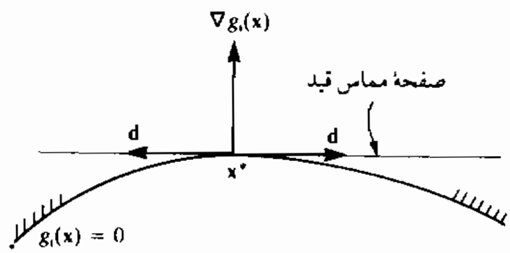
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

چون $\mathbf{H}$ با توجه به روش ارائه شده در قضیه ۲ . ۳ یا ۳ . ۳ همه جا معین مثبت است، تابع هزینه با توجه به قضیهٔ ۷ . ۳ محدب اکید است. بنابراین، مسأله محدب است و جواب $x_1 = x_2 = 1$ شرط کافی قضیه ۱۰ . ۳ را برآورده می‌کند و آن یک نقطه مینیمم فراگیر قطعی برای مسأله است.

۳.۶.۲ شرایط مرتبهٔ دو برای مسائل کلّی

اکنون آماده بحث شرایط مرتبهٔ دو برای مسأله بهینه سازی کلّی هستیم. مانند حالت نامقید، ما می توانیم از *اطلاعات* مرتبهٔ دو توابع (یعنی شعاع انحنا) در نقطهٔ نامزد $\mathbf{x}^*$ استفاده کنیم و مشخص کنیم آیا آن در حقیقت یک مینیمم محلی است یا خیر. به یاد بیاورید که برای مسائل نامقید، کفایت محلی بودن قضیه ۴ . ۳ ، بیان می کرد که جمله مرتبه دو بسط تیلور در نقطه $\mathbf{x}^*$ باید برای هر تغییرات غیرصفر $\mathbf{d}$ مثبت باشد. در *حالت مقید نیز ما باید قیود فعال* در $\mathbf{x}^*$ *را مورد توجه قرار* دهیم تا تغییرات قابل قبول $\mathbf{d}$ را مشخص کنیم. ما فقط نقطه $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{d}$ را در همسایگی $\mathbf{x}^*$ که معادله قیود فعال را برآورده می کند در نظر می گیریم. هر $\mathbf{d} \neq 0$ که *قیود فعال را تا مرتبهٔ یک برآورده می کند باید در صفحه مماس بر قید باشد* (به شکل ۲۶ . ۳ نگاه کنید). پس چنین $\mathbf{d}$ هایی عمود بر بردار گرادیان قیود فعال هستند (گرادیان قیود عمود بر صفحه مماس قید هستند). بنابراین، ضرب نقطه ای $\mathbf{d}$ در هر یک از گرادیانهای قیود ∇h_i و ∇g_i باید صفر باشد، یعنی $\nabla h_i^T \mathbf{d} = 0$ و $\nabla g_i^T \mathbf{d} = 0$. پس جهتهای $\mathbf{d}$ برای تعریف ناحیهٔ قابل قبول اطراف $\mathbf{x}^*$ مشخص می شوند. دقت کنید تنها قیود فعال نامساوی $(g_i = 0)$ برای به دست آوردن $\mathbf{d}$ استفاده شده اند. در شکل ۲۶ . ۳ برای یک قید نامساوی این حالت نمایش داده شده است.

برای به دست آوردن شرایط مرتبهٔ دو، بسط تیلور تابع لاگرانژ را نوشته و فقط $\mathbf{d}$ هایی را در نظر می گیریم که شرط فوق را برآورده می کنند. پس *اگر جمله مرتبهٔ دو بسط تیلور برای همهٔ $\mathbf{d}$ ها در صفحات مماس قید مثبت باشد،* $\mathbf{x}^*$ *یک نقطه مینیمم محلی است.* به عنوان شرط لازم، جمله مرتبهٔ دو باید نامنفی باشد. این نتایج را به طور دقیق در قضیهٔ زیر خلاصه می کنیم.



شکل ۳.۲۶ جهت $\mathbf{d}$ که در شرایط کافی مسائل مقیّد به‌کار می‌رود.

قضیهٔ ۳.۱۱ شرط لازم مرتبهٔ دو برای مسائل مقید کلی. اگر $\mathbf{x}^*$ شرایط لازم مرتبهٔ یک K-T را برای مسائل عمومی مقید برآورده کند و هسیان تابع لاگرانژ L در $\mathbf{x}^*$ به شکل زیر تعریف شود

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \nabla^2 h_i + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla^2 g_i \qquad (۳.۶۲)$$

و جهتهای قابل قبولی ($\mathbf{d} \neq 0$) وجود داشته باشند که سیستم معادلات خطی زیر را در نقطه $\mathbf{x}^*$ برآورده کنند :

$$\nabla h_i^T \mathbf{d} = 0; \qquad i = 1 \text{ to } p \qquad (۳.۶۳)$$

(۳.۶۴) برای تمامی قیود نامساوی فعال (یعنی برای i هایی با $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$) $\nabla g_i^T \mathbf{d} = 0$

آن گاه اگر $\mathbf{x}^*$ یک نقطه مینیمم محلی برای مسأله بهینه سازی طرّاحی باشد باید نامعادله زیر صادق باشد

$$Q = \mathbf{d}^T \nabla^2 L(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} \quad \text{در حالی که} \quad Q \geqq 0 \qquad (۳.۶۵)$$

دقت کنید که هر نقطه که شرایط لازم مرتبهٔ دو را برآورده نکند نمی‌تواند یک نقطه مینیمم محلی باشد.

قضیه ۳.۱۲ شرایط کافی برای مسائل مقید کلی. فرض کنید $\mathbf{x}^*$ شرایط لازم K-T مرتبهٔ یک را در یک مسأله عمومی بهینه سازی برآورده کند. هسیان تابع لاگرانژ L در $\mathbf{x}^*$ از معادلهٔ (۳.۶۲) تعریف می شود. جهتهای قابل قبول غیرصفر ($\mathbf{d} \neq 0$) را به عنوان جوابهای سیستم معادله های خطی زیر تعریف می کنیم

$$\nabla h_i^T \mathbf{d} = 0; \qquad i = 1 \text{ to } p \qquad (۳.۶۶)$$

(۳.۶۷) برای قیود نامساوی فعال با $u_i > 0$ ؛ $i = 1 \text{ to } m$ ، $\nabla g_i^T \mathbf{d} = 0$

همچنین فرض کنید $\nabla g_i^T \mathbf{d} \leq 0$ برای قیدهایی با $u_i = 0$. اگر

$$Q = \mathbf{d}^T \nabla^2 L(\mathbf{x}^*) \mathbf{d} \quad \text{در حالی که} \quad Q > 0, \qquad (۳.۶۸)$$

آن گاه $\mathbf{x}^*$ یک نقطه مینیمم محلی منحصر به فرد است (منحصر به فرد یعنی نقاط مینیمم محلی دیگری در همسایگی $\mathbf{x}^*$ وجود ندارد).

ابتـدا به اختـلاف شـرایط برای جهـتهـای d در معـادلهٔ (۳.۶۴) برای شـرط لازم و معادلهٔ (۳.۶۷) برای شرط کافی توجه کنید. درمعادلهٔ (۳.۶۴) همهٔ نامعادلات فعال با ضرایب نامنفی وارد شده اند، در حالی که درمعادله های (۳.۶۷) فقط نامعادلات فعال با ضرایب مثبت وجود دارند.

معـادله های (۳.۶۶) و (۳.۶۷) بیـان می دارند که ضـرب نقطه ای بردارهای ∇h_i و d و همچنین ∇g_i (آنهایی که $u_i > 0$ دارند) و d باید صفر بـاشد. پس، فقط d های عمود بر گرادیان قیود مساوی و قیود نامساوی فعال (با $u_i > 0$) در نظر گرفته می شـوند. به عبارت دیگر، فقط d های مماس بر صفحه قیود فعال در نقطه نامزد مینیمم در نظر گرفته می شوند. معادلهٔ (۳.۶۸) می گوید هسیان لاگرانژین برای همه d هایی که در صـفحه مماس به قیـد قرار دارند معین مثبت است. دقت کنید ∇h_i ، ∇g_i و $\nabla^2 L$ در نقطهٔ نامزد مینیمم محلی x^* که شـرایط لازم K-T را برآورده می کنند محاسبه می شوند.

به این مهم توجه کنید که اگر ماتریس $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*)$ معین مثبت باشد (یعنی Q در معادله (۳.۶۸) برای هر $\mathbf{d} \neq 0$ مثبت باشد) آن گاه $\mathbf{x}^*$ شرط کافی یک مینیمم محلی منحصر به فرد را برآورده می کند و نیازی به بررسی بیشتر نیست. دلیل آن این است که اگر $\nabla^2 L$ معین مثبت باشد، آن گاه برای d هایی که معادله های (۳.۶۶) و (۳.۶۷) را برآورده می کنند نیز معین مثبت است. اما اگر $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*)$ *معین مثبت نباشد آن گاه ما نمی توانیم نتیجه بگیریم که* $\mathbf{x}^*$ یک مینیمم محلی منحصر به فرد نیست. باید d ای را که معادله های (۳.۶۶) و (۳.۶۷) را برآورده می کند محاسبه کرده و بررسی کفایت را که با قضیه ۳.۱۲ است نیز انجام دهیم. این نتایج در زیر خلاصه شده است:

قضیه ۳.۱۳ شرط کافی قوی. فرض کنید $\mathbf{x}^*$ شـرط لازم مرتبهٔ یک K-T را برای مسأله بهینه سازی طرّاحی کلی برآورده کند. هسیان $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*)$ برای تابع لاگرانژ در $\mathbf{x}^*$ مطابق معادلهٔ (۳.۶۲) تعریف می شود. آن گاه اگر $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*)$ معین مثبت باشد، $\mathbf{x}^*$ یک نقطه مینیمم منحصر به فرد است.

همچنین باید تأکید شود که اگر معادلهٔ (۳.۶۸) برآورده نشود، نمی توانیم نتیجه بگیریم که $\mathbf{x}^*$ مینیمم محلی نیست. ممکن است مینیمم محلی باشد ولی یک مینیمم محلی منحصر به فرد نیست. دقت شود که قضیه برای $\mathbf{x}^*$ هایی که مفروضات را برآورده نکنند به کار نمی رود.

در این حالت، هیچ نتیجه ای برای نقطه x^* نمی توان گرفت. این نکات را با مثال در این بخش و بخش ۳.۸ تشریح می کنیم.

یک حالت که در بعضی از کاربردها به وجود می آید باید مورد توجه خاص قرار گیرد. این حالت وقتی است که تعداد کل قیود فعال (با حداقل یک غیرمساوی) در نقطهٔ x^* با تعداد متغیّرهای طرّاحی مستقل برابر باشد. چون x^* شرایط K-T را برآورده می کند، گرادیان تمامی قیود فعال به طور خطی مستقلند. پس تنها جواب سیستم معادلات (۳.۶۶) و (۳.۶۷) عبارت است از $d = 0$ و قضیه ۳.۱۲ نمی تواند استفاده شود. اما چون $d = 0$ تنها جواب است، هیچ جهت قابل قبولی که بتواند تابع هزینه را کاهش دهد در همسایگی وجود ندارد. بنابراین، نقطهٔ x^* در حقیقت یک مینیمم محلی برای تابع هزینه است.

ما مثالهای متعددی را در نظر می گیریم تا استفاده از شرایط لازم و کافی بهینگی را تشریح کنیم.

مثال ۳.۴۰ آزمون شرایط کافی. شرط کافی را برای مثال ۳.۲۷ بررسی کنید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}(b + c)x^2 + bcx + f_0$$

را به شرط

$$a \leqq x \leqq d$$

در حالی که $0 < a < b < c < d$ و f_0 ثابتهای معینی هستند، مینیمم کنید.

حل. فقط یک نقطهٔ مقید نامزد مینیمم محلی $x = a$ وجود دارد. چون تنها یک متغیّر طرّاحی و یک قید فعال وجود دارد، شرط $\nabla g_1 \bar{d} = 0$ معادله (۳.۶۷) به ما تنها جواب $\bar{d} = 0$ را می دهد (دقت کنید که چون d به عنوان ثابت در مسأله استفاده شده است جهت برای آزمایش کفایت عبارت است از $\bar{d}$.) بنابراین، قضیه ۳.۱۲ نمی تواند برای بررسی کفایت مورد استفاده قرار گیرد. همچنین دقت کنید که در $x = a$، $d^2L/dx^2 = 2a - b - c$ منفی است. پس، از شعاع انحنای هسیان برای بررسی شرط کفایت (کفایت قوی قضیه ۳.۱۳) نمی توان استفاده کرد. ولی از شکل ۳.۱۴ مشاهده می کنیم که $x = a$ در حقیقت نقطهٔ مینیمم محلی منحصر به فرد است. از این مثال می توان نتیجه گرفت که اگر تعداد قیود نامساوی فعال برابر با تعداد متغیّرهای طرّاحی مستقل باشد و تمامی شرایط K-T برآورده شده باشند، نقطهٔ نامزد در حقیقت یک طرح مینیمم محلی است.

مثال ۳.۴۱ آزمون شرط کفایت. مسأله بهینه سازی مثال ۳.۲۸ را در نظر بگیرید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

را به شرط

$$g \equiv x_1^2 + x_2^2 - 6 \leqq 0$$

مینیمم کنید.

شرط کفایت نقاط نامزد مینیمم را بررسی کنید.

حل. نقاطی که شرایط لازم کان ـ تاکر را برآورده می کنند عبارتند از

	x_1^*	x_2^*	u^*
(1)	0	0	0
(2)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$
(3)	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$

قبلاً در مثال ۳.۲۸ و شکل ۳.۱۵ دیده شد که نقطهٔ (0, 0) شرط کافی را برآورده نمی کند و دو نقطه دیگر برآورده می کنند. آن مشاهدات، ازنظر ریاضی با استفاده از قضیهٔ کفایت بهینگی تأیید می شود.

ماتریس هسیان برای توابع هزینه و قید عبارتند از

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \ \nabla^2 g = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

با روش پیوست B ، مقادیر ویژهٔ $\nabla^2 g$ عبارتند از $\lambda_1 = 2$ و $\lambda_2 = 2$. چون هر دو مقدار ویژه مثبت است، تابع g محدّب است. پس مجموعه قید $g(\mathbf{x}) \le 0$ طبق قضیه ۳.۸ محدب است. اما چون مقادیر ویژه $\nabla^2 f$ عبارتند از 1− و 5 ، f محدب نیست. بنابراین، مسأله یک مسأله برنامه ریزی محدب نیست و شرط کافی بودن قضیه ۳.۱۰ را نمی توان به کار برد. باید از شرایط کافی عمومی قضیه ۳.۱۲ استفاده کنیم. هسیان لاگرانژین عبارت است از

$$\begin{aligned} \nabla^2 L &= \nabla^2 f + u\nabla^2 g \\ &= \begin{bmatrix} 2+2u & -3 \\ -3 & 2+2u \end{bmatrix} \end{aligned}$$

برای اوّلین نقطه $x_1^* = x_2^* = 0$ ، $\mathbf{u}^* = 0$ ، $\nabla^2 L$ تبدیل به $\nabla^2 f$ می شود (قید $g(\mathbf{x}) \le 0$ فعال نیست). در این حالت مسأله نامقید و شرط کافی محلی ایجاب می کند که برای تمامی $\mathbf{d}$ ها $\mathbf{d}^T(\nabla^2 f(\mathbf{x}^*))\mathbf{d} > 0$ باشد، یا $\nabla^2 f$ باید در $\mathbf{x}^*$ معین مثبت باشد. چون هر دو مقدار ویژه $\nabla^2 f$ مثبت نیستند، نتیجه می گیریم که شرط بالا برآورده نمی شود. بنابراین، $x_1^* = x_2^* = 0$ *شرط کافی مرتبهٔ دو* را برآورده نمی کند. دقت کنید که چون $\lambda_1 = -1$ و $\lambda_2 = 5$ ، ماتریس $\nabla^2 f$ در $\mathbf{x}^*$ نامعین است. بنابراین نقطه $x_1 = 0$ ، $x_2 = 0$ شرط کافی قضیه ۳.۴ را که ایجاب می کند $\nabla^2 f$ در نقطه نامزد مینیمم نیمه معین مثبت یا معین مثبت باشد نیز نقض می کند. پس $x_1^* = 0$ و $x_2^* = 0$ نمی تواند یک مینیمم محلی باشد. این نتایج با مشاهدات ترسیمی که در مثال ۳.۲۸ داشتیم تطبیق می کند.

در نقطه های $x_1^* = x_2^* = \sqrt{3}$ و $x_1^* = x_2^* = -\sqrt{3}$ با $u^* = \frac{1}{2}$ داریم

$$\nabla^2 L(\mathbf{x}^*) = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g = \pm(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}) = \pm 2\sqrt{3}(1, 1)$$

می توان با بررسی نشان داد که $\nabla^2 L$ در هیچ کدام از دو نقطه فوق معین مثبت نیست. بنابراین، نمی توانیم از قضیه ۳.۱۳ برای تشخیص این که $\mathbf{x}^*$ یک نقطه مینیمم است استفاده کنیم. باید $\mathbf{d}$ را طوری بیابیم که معادله های (۳.۶۶) و (۳.۶۷) را برآورده کند. اگر $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ باشد، آن گاه از $\nabla g^T \mathbf{d} = 0$ داریم

$$\pm 2\sqrt{3}[1\ 1]\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = 0; \qquad \text{یا} \qquad d_1 + d_2 = 0$$

پس، $d_1 = -d_2 = c$ که $c \ne 0$ یک عدد ثابت اختیاری است و یک $\mathbf{d} \ne 0$ که معادلهٔ $\nabla g^T \mathbf{d} = 0$ را برآورده کند عبارت است از

$$\mathbf{d} = c(1, -1)$$

از شرط کافی معادلهٔ (۳.۶۸) داریم

$$Q = \mathbf{d}^T(\nabla^2 L)\mathbf{d} = c[1 \quad -1]\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= 12c^2 > 0 \quad \text{برای } c \ne 0$$

نقاط $x_1^* = x_2^* = \sqrt{3}$ و $x_1^* = x_2^* = -\sqrt{3}$ شرط کافی را برآورده می کنند. بنابراین آنها نقاط مینیمم محلی منحصر به فرد هستند همچنان که ازطریق ترسیمی نیز در مثال ۳.۲۸ و شکل ۳.۱۵ دیده شد. برای این مثال می بینیم که $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*)$ معین مثبت نیست، ولی $\mathbf{x}^*$ همچنان نقطهٔ مینیمم منحصر به فرد است.

دقت کنید چون f پیوسته و ناحیهٔ قابل قبول کراندار و بسته است، ما وجود مینیمم فراگیر را طبق قضیهٔ ویرستراس ۳.۱ تضمین می کنیم. همچنین هر نقطهٔ احتمالی که شرایط لازم را برآورده کند آزمایش کرده ایم. بنابراین، باید از راه حذفی نتیجه بگیریم که $x_1^* = x_2^* = \sqrt{3}$ و $x_1^* = x_2^* = -\sqrt{3}$ نقاط مینیمم فراگیر هستند. مقدار تابع هزینه برای هر دو نقطه عبارت است از $f(\mathbf{x}^*) = -3$.

مثال ۳.۴۲ آزمون شرایط کافی. مثال ۳.۲۶ را در نظر بگیرید. تابع

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$

را مشروط به

$$g_1 \equiv -2x_1 - x_2 + 4 \leqq 0$$
$$g_2 \equiv -x_1 - 2x_2 + 4 \leqq 0$$

مینیمم کنید. شرط کافی را برای نقطه نامزد مینیمم بررسی کنید.

حل. شرایط کان ـ تاکر برای نقطهٔ زیر برآورده می شوند

$$x_1^* = \tfrac{4}{3},\ x_2^* = \tfrac{4}{3},\ u_1^* = \tfrac{2}{9},\ u_2^* = \tfrac{2}{9}$$

چون تابع همهٔ قیود خطی است، ناحیهٔ قابل قبول (مجموعهٔ قید S) محدّب و هسیان تابع هزینه معین مثبت است. بنابراین تابع هزینه نیز محدّب و مسأله محدّب است. با توجه به قضیه ۳.۱۰، $x_1^* = x_2^* = \frac{4}{3}$ *شرایط کافی یک مینیمم فراگیر را برآورده می کند و مقدار تابع هزینه* $f(\mathbf{x}^*) = \frac{2}{9}$ *است*.

دقت کنید که کفایت محلی نمی تواند با روش قضیهٔ ۳.۱۲ نشان داده شود. دلیل آن این است که شرایط معادلهٔ (۳.۶۷) روابط زیر را به ما می دهد

$$-2d_1 - d_2 = 0 \qquad (\nabla g_1^T \mathbf{d} = 0)$$
$$-d_1 - 2d_2 = 0 \qquad (\nabla g_2^T \mathbf{d} = 0)$$

این یک سیستم معادلات همگن با ماتریس ضرایب غیرمنفرد[1] است. بنابراین، تنها جوابش عبارت است از $d_1 = d_2 = 0$. پس نمی‌توانیم یک $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ برای استفاده در شرایط (۳.۶۸) پیدا کنیم و قضیه ۳.۱۲ نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. در هر حال، قبلاً دیده‌ایم و در شکل ۳.۱۶ نیز دیده می‌شود که نقطه در حقیقت یک نقطه مینیمم فراگیر منحصر به فرد است. چون یک مسأله دو متغیّره داریم و در نقطه کان ـ تاکر دو قید فعال وجود دارند، شرط کافی برای مینیمم محلی برآورده شده است.

۳.۷ تحلیل پس بهینگی : مفهوم فیزیکی ضرایب لاگرانژ

مطالعهٔ تغییرات جواب بهین نسبت به تغییر بعضی از پارامترهای مسألهٔ اوّلیه به عنوان *تحلیل پس بهینگی* یا *تحلیل حساسیت* شناخته می‌شود: این موضوعی مهم در زمینه طرّاحی بهین است و در حال حاضر به شکل فزاینده‌ای رو به گسترش است (وندرپلاتز[2]، ۱۹۸۴ ؛ وندرپلاتز و یاشیدا[3]، ۱۹۸۵). تغییرات جواب بهین (تابع هزینه و متغیّرهای طرّاحی) در اثر تغییر پارامترهای مختلفی می‌تواند مورد مطالعه قرار گیرد. ولی ما روی سؤال حساسیت تابع هزینه نسبت به تغییرات حدود قیود تأکید خواهیم کرد. فرض خواهیم کرد که مسأله مینیمم سازی با $h_i(\mathbf{x}) = 0$ و $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ حل شده، یعنی با حدود فعلی قیود که صفر هستند. می خواهیم بدانیم که وقتی حدود قیود از صفر تغییر کنند چه اتفاقی برای تابع هزینهٔ بهین می افتد.

ضرایب لاگرانژ $(\mathbf{v}^*, \mathbf{u}^*)$ در طرح بهین اطلاعاتی را برای سؤال حساسیت فوق فراهم می کنند. بحث این سؤال به تعبیر فیزیکی ضرایب لاگرانژ ختم می شود که در کاربردهای عملی می تواند بسیار مفید باشد. تعبیر فیزیکی نیز نشان خواهد داد که چرا ضرایب لاگرانژ قیود "نوع $\leq$" باید نامنفی باشند. به علاوه ضرایب می توانند برای *مطالعهٔ معایب محدودکردن دامنه قیود یا مزایای گسترش آنها استفاده شوند* ؛ گسترش، ناحیهٔ قابل قبول (مجموعهٔ قید) را بزرگ، در صورتی که محدود کردن دامنه آن را کوچکتر می سازد. نتایج حساسیت در قالب یک قضیه بیان می شود.

---

1. nonsingular
2. Vanderplaats
3. Vanderplaats and Yoshida

بعداً در این بخش ما دربارهٔ این که وقتی توابع هزینه و قید در عددی ضرب شوند چه اتفاقی برای ضرایب لاگرانژ می افتد نیز بحث خواهیم کرد.

۳.۷.۱ اثرات تغییر در حدود قیود

برای بحث تغییرات تابع هزینه نسبت به حدود قیود، ما مسألهٔ تغییر یافتهٔ مینیمم سازی $f(\mathbf{x})$ را نسبت به قیود

$$h_i(\mathbf{x}) = b_i; \qquad i = 1 \text{ to } p \tag{۳.۶۹}$$

و

$$g_j(\mathbf{x}) \leqq e_j; \qquad j = 1 \text{ to } m \tag{۳.۷۰}$$

مورد توجه قرار می دهیم، در حالی که b_i و e_j تغییرات کوچکی در همسایگی صفر هستند. روشن است که نقطهٔ بهین برای مسأله جدید به بردارهای $\mathbf{b}$ و $\mathbf{e}$ بستگی دارد که به شکل $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{b}, \mathbf{e})$ می تواند نوشته شود. همچنین، مقدار بهین تابع هزینه به $\mathbf{b}$ و $\mathbf{e}$ بستگی دارد، یعنی $f = f(\mathbf{b}, \mathbf{e})$. ولی بستگی صریح تابع هزینه به $\mathbf{b}$ و $\mathbf{e}$ معلوم نیست، یعنی عبارتی برای f که برحسب b_i و e_j باشد در دست نیست. قضیهٔ زیر راهی را برای محاسبهٔ مشتقات جزئی $\partial f/\partial b_i$ و $\partial f/\partial e_j$ به ما نشان می دهد. *اینها مشتقات ضمنی f نسبت به b_i و e_j یعنی نسبت به پارامترهای طرف راست هستند. مشتقات می توانند برای محاسبهٔ تغییرات تابع هزینه وقتی b_i و e_j تغییر کنند، به کار روند.*

قضیهٔ ۳.۱۴ قضیه حساسیت تغییر قید. فرض کنید $f(\mathbf{x})$، $i = 1$ to p، $h_i(\mathbf{x})$، و $g_j(\mathbf{x})$، $j = 1$ to m تا دو مرتبه مشتق پیوسته داشته باشند. همچنین فرض کنید $\mathbf{x}^*$ یک نقطهٔ منظّم باشد که همراه ضرایب u_j^* و v_i^*، هم شرایط لازم کان ـ تاکر و هم شرایط کافی قضیهٔ ۳.۱۲ را برای یک نقطهٔ مینیمم محلی منحصر به فرد برای مسأله ای که در معادله های (۳.۳۷) تا (۳.۳۹) تعریف شد، برآورده می کند. اگر برای هر $g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ درست باشد که بگوییم $u_j^* > 0$، آن گاه جواب $\mathbf{x}^*(\mathbf{b}, \mathbf{e})$ مسأله بهینه سازی فوق، که در معادله های (۳.۶۹) تا (۳.۷۰) تعریف شده، یک تابع پیوسته مشتق پذیر از $\mathbf{b}$ و $\mathbf{e}$ در همسایگی $\mathbf{b} = 0$ و $\mathbf{e} = 0$ خواهد بود. به علاوه

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(0, 0))}{\partial b_i} = -v_i^*; \qquad i = 1 \text{ to } p \tag{۳.۷۱}$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*(0,0))}{\partial e_j} = -u_j^*; \qquad j = 1 \text{ to } m \tag{۳.۷۲}$$

قضیه مقدار مشتقهای مرتبهٔ اوّل ضمنی تابع هزینه نسبت به پارامترهای طرف راست قیود را می‌دهد. دقت کنید قضیه وقتی به کار می رود که قیود نامساوی به شکل "$\le$" نوشته شوند. با استفاده از این قضیه می توان تغییرات تابع هزینه را با تغییر طرف راست قیود در همسایگی صفر حدس زد. بدین منظور، بسط تیلور تابع هزینه برحسب b_i و e_j می تواند استفاده شود. فرض کنید می خواهیم طرف راست b_i و e_j را از i امین قید مساوی و j امین قید نامساوی تغییر دهیم. بسط سری تیلور مرتبهٔ اوّل تابع هزینه حول نقطه $b_i = 0$ و $e_j = 0$ عبارت است از

$$f(b_i, e_j) = f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial b_i} b_i + \frac{\partial f(0,0)}{\partial e_j} e_j$$

اگر از معادله های (۳.۷۱) و (۳.۷۲) نیز جایگزین کنیم، داریم

$$f(b_i, e_j) = f(0,0) - v_i^* b_i - u_j^* e_j \tag{۳.۷۳}$$

در حالی که $f(0, 0)$ مقدار تابع هزینه بهین با $b_i = 0$ و $e_j = 0$ است. از معادلهٔ (۳.۷۳)، تغییرات تابع هزینه Δf در اثر تغییرات کوچک b_i و e_j عبارت است از

$$\Delta f = f(b_i, e_j) - f(0,0) = -v_i^* b_i - u_j^* e_j \tag{۳.۷۴}$$

برای مقادیر b_i و e_j داده شده، مقدار جدید تابع هزینه را می توانیم از رابطه (۳.۷۴) حدس بزنیم. اگر بخواهیم طرف راست قیود بیشتری را تغییر دهیم، به سادگی آنها را در معادلهٔ (۳.۷۴) وارد می کنیم و تغییرات تابع را به دست می آوریم؛ خواهیم داشت

$$\Delta f = -\sum_i v_i^* b_i - \sum_j u_j^* e_j \tag{۳.۷۵}$$

توجه به این نکته مفید است که اگر شرایط قضیهٔ ۳.۱۴ برآورده نشوند، وجود مشتقهای *ضمنی معادلات (۳.۷۱) و (۳.۷۲) با این قضیه نفی نمی‌شود.* یعنی، *مشتقات ممکن است وجود داشته باشند ولی وجودشان را با قضیه ۳.۱۴ نمی‌توان تضمین کرد.* این مطلب را بعداً در مثالی خواهیم دید.

معادلهٔ (۳.۷۴) می تواند برای نشان دادن این که ضرایب لاگرانژ مربوط به قیود "نوع $\le$" باید نامنفی باشند نیز به کار رود. برای دیدن آن، فرض کنید یک قید نامساوی $g_i \le 0$ را که در نقطهٔ بهین فعال است ($g_i = 0$) می خواهیم آزاد کنیم، یعنی $e_j > 0$ را انتخاب می کنیم. وقتی

قیدی آزاد گشت، ناحیهٔ قابل قبول (مجموعه قید) برای مسأله طرّاحی گسترده تر می شود. ما طرحهای قابل قبول بیشتری را برای نامزدی نقطهٔ مینیمم خواهیم داشت. بنابراین، با گسترش ناحیهٔ قابل قبول باید بتوانیم مقدار بهین تابع هزینه را بهبود ببخشیم، یعنی، بتوانیم آن را کاهش دهیم یا بدون تغییر نگه داریم. از معادلهٔ (۳.۷۴) مشاهده می کنیم که اگر $u^*_j > 0$ باشد، آن گاه آزاد ساختن قید $(e_j > 0)$ باعث افزایش در هزینه $(\Delta f = -u^*_j e_j > 0)$ می شود. این یک مورد نقض است، زیرا ایجاب می کند که جریمه ای برای آزاد کردن قید بپردازیم. بنابراین، ضرایب لاگرانژ مربوط به قید "نوع ≤" باید نامنفی باشند.

مثال ۳.۴۳ اثرتغییر حدود قید روی تابع هزینه بهین. برای تشریح استفاده از قضیه حساسیت تغییر قید، مسأله زیر را که در مثال ۳.۲۸ حل کردیم در نظر می گیریم و اثر تغییرات حدود قید را بحث می کنیم. تابع

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

را مشروط به

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 6 \leqq 0$$

مینیمم کنید.

حل. حل ترسیمی مسأله در شکل ۳.۱۵ داده شده است. یک نقطه که هم شرایط لازم و هم شرایط کافی را برآورده می کند عبارت است از

$$x_1^* = x_2^* = \sqrt{3}, \qquad u^* = \tfrac{1}{2}, \qquad f(\mathbf{x}^*) = -3$$

می خواهیم ببینیم اگر طرف راست قید را به جای صفر به "e" تغییر دهیم چه اتفاقی می افتد. دقت کنید که قید $g(x_1, x_2) \leq 0$ یک ناحیهٔ قابل قبول دایره ای شکل به مرکز $(0, 0)$ و شعاع $\sqrt{6}$ می دهد، همچنان که در شکل ۳.۱۵ نشان داده شده است. از قضیهٔ ۳.۱۴ داریم

$$\frac{\partial f}{\partial e} = -u^* = -\tfrac{1}{2}$$

اگر $e = 1$ باشد، مقدار جدید تابع هزینه از معادلهٔ (۳.۷۳) تقریباً ۳٫۵- می شود. این با مجموعهٔ قید سازگار است، زیرا با $e = 1$ ، شعاع دایره $\sqrt{7}$ می شود و ناحیهٔ قابل قبول گسترش می یابد (شکل ۳.۱۵). باید مقدار کاهش در تابع هزینه را انتظار داشته باشیم.

اگر $e=-1$ قرار دهیم، آن گاه اثر برعکس است. ناحیه قابل قبول کوچکتر شده و تابع هزینه به ۲/۵- افزایش پیدا می کند. این نیز مجدداً با استفاده از رابطه (۳.۷۳) به دست آمد.

از بحث گذشته و مثال می بینیم که ضرایب لاگرانژ بهین اطلاعات مفیدی می دهند. طراح می تواند مقدار ضرایب را برای قیود فعال مقایسه کند. در ضرایبی با مقادیر نسبتاً بزرگ اگر پارامتر قیود مربوطه عوض شوند، اثر قابل توجهی روی هزینه بهین می گذارند. هرچه *مقدار ضریب لاگرانژ بزرگتر باشد، مزایای آزاد کردن قید، یا زیان و جریمه ای که از محدود کردن قید به وجود می آید بیشتر است*. با دانستن این موضوع، طراح می تواند چند قید بحرانی که بیشترین اثر را روی تابع هزینه دارند انتخاب کند، سپس تحلیل کند و ببیند آیا این قیود می توانند برای کاهش بیشتر مقدار تابع هزینه بهین آزاد شوند یا خیر.

۳.۷.۲ اثر مقیاس بندی تابع هزینه روی ضرایب لاگرانژ

بسیاری از اوقات، تابع هزینهٔ مسأله در یک عدد ثابت ضرب می شود. همچنان که در بخش ۳.۴ گفته شد، مقیاس بندی تابع هزینه نقطهٔ بهین را تغییر نمی دهد. ولی مقدار بهین تابع هزینه مسلماً عوض می شود. مقیاس بندی معادله های (۳.۷۱) و (۳.۷۲) را که مشتقات ضمنی تابع هزینه نسبت به پارامترهای طرف راست قیود هستند نیز تغییر می دهد. *از این معادلات مشاهده می کنیم که ضرایب لاگرانژ نیز در همان ثابت ضرب می شوند*. فرض کنید u_i^* و v_j^* به ترتیب ضرایب لاگرانژ قیود نامساوی و مساوی، و $f(\mathbf{x}^*)$ مقدار بهین تابع هزینه در نقطهٔ جواب $\mathbf{x}^*$ باشد. همچنین فرض کنید تابع هزینه به شکل $\bar{f}(\mathbf{x})=Kf(\mathbf{x})$ مقیاس بندی شده باشد، در حالی که $K>0$ یک عدد ثابت و $\bar{u}_i^*$ و $\bar{v}_j^*$ به ترتیب ضرایب لاگرانژ بهین برای قیود نامساوی و مساوی برای مسأله تغییر یافته است. آن گاه جواب بهین برای مسألهٔ تغییر یافته $\mathbf{x}^*$ است و ضرایب لاگرانژ دو مسأله به شکل زیر به هم مربوط می شوند

$$\bar{u}_i^* = Ku_i^*; \qquad i=1 \text{ to } m$$
$$\bar{v}_j^* = Kv_j^*; \qquad i=1 \text{ to } p \tag{۳.۷۶}$$

مثال ۳.۴۳ اثر مقیاس بندی تابع هزینه روی ضرایب لاگرانژ آن. مثال ۳.۲۸ را در نظر بگیرید. تابع

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

را به شرط

$$g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 6 \leqq 0$$

مینیمم کنید. اثرات مقیاس بندی تابع هزینه با ثابت $K > 0$ را روی جواب بهین بررسی کنید.

حل. حل ترسیمی مسأله در شکل ۱۵ . ۳ داده شده است. یک نقطه که هم شرایط لازم و هم شرایط کافی را برآورده می کند عبارت است از

$$x_1^* = x_2^* = \sqrt{3},\ u^* = \tfrac{1}{2},\ f(\mathbf{x}^*) = -3$$

بگذارید مسأله مقیاس بندی شده را با نوشتن شرایط K-T حل کنیم. لاگرانژین مسأله عبارت است از

$$L = K(x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2) + \bar{u}(x_1^2 + x_2^2 - 6 + \bar{s}^2)$$

شرایط لازم معادله های زیر را می دهد

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2Kx_1 - 3Kx_2 + 2\bar{u}x_1 = 0 \qquad \text{(الف)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2Kx_2 - 3Kx_1 + 2\bar{u}x_2 = 0 \qquad \text{(ب)}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 6 + \bar{s}^2 = 0 \qquad \text{(پ)}$$

$$\bar{u}\bar{s} = 0, \qquad \bar{u} \geqq 0$$

مانند مثال ۲۸ . ۳ ، حالت $\bar{s} = 0$ نقطه نامزد مینیمم را می دهد. با حل معادلات (الف) تا (پ) داریم

$$x_1^* = x_2^* = \sqrt{3}, \qquad \bar{u}^* = K/2, \qquad \bar{f}(\mathbf{x}^*) = -3K$$
$$x_1^* = x_2^* = -\sqrt{3}, \qquad \bar{u}^* = K/2, \qquad \bar{f}(\mathbf{x}^*) = -3K$$

بنابراین، مشاهده می کنیم که $\bar{u}^* = Ku^*$.

۳.۷.۳ اثر مقیاس بندی یك قید روی ضریب لاگرانژ آن

مواقع زیادی، یک قید با یک عدد مثبت مقیاس بندی می شود. می خواهیم ببینیم اثر این مقیاس بندی روی ضرایب لاگرانژ قید چیست. باید یادآور شد که مقیاس بندی یک قید مرز قید را تغییر نمی دهد، بنابراین روی جواب بهین اثری نمی گذارد. *تنها ضرایب لاگرانژ قید*

مقیاس بندی شده متأثر می شود. با توجه به مشتقهای ضمنی تابع هدف نسبت به پارامترهای طرف راست قید، مشاهده می کنیم که ضرایب لاگرانژ قید مقیاس بندی شده به پارامتر مقیاس بندی شده تقسیم شده است. فرض کنید $M_j > 0$ و P_i دو پارامتر مقیاس برای j امین قید نامساوی و i امین قید مساوی باشند و u_j^* و v_i^* و $\bar{u}_j^*$ و $\bar{v}_i^*$ به ترتیب ضرایب لاگرانژ قیود اصلی و مقیاس بندی شده باشند. آن گاه برای ضرایب لاگرانژ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\bar{u}_j^* = u_j^*/M_j$$
$$\bar{v}_i^* = v_i^*/P_i \qquad (۳.۷۷)$$

مثال ۳.۳۵ اثر مقیاس بندی قید روی ضرایب لاگرانژ. مثال ۳.۲۸ را در نظر گرفته و اثر ضرب قید نامساوی در $M > 0$ را مطالعه کنید.

حل. تابع لاگرانژ مسأله به صورت زیر است

$$L = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + \bar{u}[M(x_1^2 + x_2^2 - 6) + \bar{s}^2]$$

شرایط K-T معادله های زیر را می دهد

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 3x_2 + 2\bar{u}Mx_1 = 0 \qquad \text{(الف)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 3x_1 + 2\bar{u}Mx_2 = 0 \qquad \text{(ب)}$$

$$M(x_1^2 + x_2^2 - 6) + \bar{s}^2 = 0 \qquad \text{(پ)}$$
$$\bar{u}\bar{s} = 0,\ \bar{u} \geqq 0$$

مانند مسأله ۳.۲۸، فقط حالت $\bar{s} = 0$ نقطه نامزد مینیمم را می دهد. با حل این حالت داریم

$$x_1^* = x_2^* = \sqrt{3}, \qquad \bar{u}^* = \frac{1}{2M}, \qquad f(\mathbf{x}^*) = -3$$

$$x_1^* = x_2^* = -\sqrt{3}, \qquad \bar{u}^* = \frac{1}{2M}, \qquad f(\mathbf{x}^*) = -3$$

بنابراین می بینیم که $\bar{u}^* = u^*/M$ است.

۳.۸ مثالهای طرّاحی مهندسی

مراحلی که در بخشهای گذشته تشریح شد برای حل دو مثال طرّاحی مهندسی استفاده می شوند. مسائل رابطه سازی شده و تحدّب آنها بررسی می شود و با نوشتن، شرایط لازم K-T

حل می شوند. آن گاه شرایط کافی بررسی شده و قضیه حساسیت تغییر قید استفاده می شود تا تغییرات حدود قید مطالعه شوند.

۳.۸.۱ طرّاحی یک آویز دیواری

برای تحمل بار $W = 1.2$ MN یک آویز دیواری مانند شکل ۳.۲۷ باید طرّاحی شود. مصالح آویز باید در مقابل نیروهای میله ها مقاوم باشند. این با قیود تنش زیر بیان می شود

میلهٔ ۱ : $\sigma_1 \leqq \sigma_a$

میلهٔ ۲ : $\sigma_2 \leqq \sigma_a$

در حالی که

σ_a = تنش مجاز مصالح (16000 N/cm^2)،

σ_1 = تنش در میلهٔ ۱ که عبارت است از F_1/A_1 (N/cm^2)،

σ_2 = تنش در میلهٔ ۲ که عبارت است از F_2/A_2 (N/cm^2)،

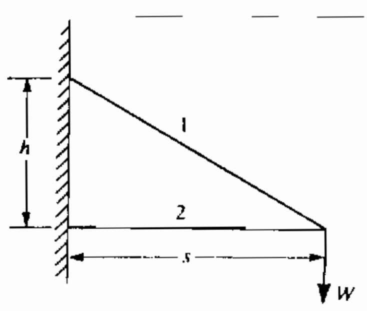
A_1 = مساحت سطح مقطع میله ۱ (cm^2)،

A_2 = مساحت سطح مقطع میله ۲ (cm^2)،

F_1 = نیرو در اثر بار W در میله ۱ (N)، و

F_2 = نیرو در اثر بار W در میله ۲ (N).

حجم آویز باید مینیمم شود.



شکل ۳.۲۷ آویز دیواری. $h = 30$ cm، $s = 40$ cm، و $W = 1.2$ MN

۳.۸.۱.۱ رابطه سازی مسأله. مساحت سطح مقطعهای A_1 و A_2 دو متغیّر طرّاحی هستند و تابع هزینه مسأله حجم است که عبارت است از

$$f(A_1, A_2) = l_1 A_1 + l_2 A_2, \qquad \text{cm}^3 \tag{الف}$$

در حالی که $l_1 = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,\text{cm}$ طول میله ۱ ، و $l_2 = 40\,\text{cm}$ طول میله ۲ است. برای نوشتن قید تنش، به مقدار نیرو در اعضا نیاز داریم که با استفاده از تحلیل تعادل ایستایی به دست می آیند. این مقدار عبارت است از $F_1 = (2.0\text{E}+06)\ \text{N}$ و $F_2 = (1.6\text{E}+06)\ \text{N}$. بنابراین قیود تنش به شکل زیر است

$$g_1 = \frac{(2.0\text{E}+06)}{A_1} - 16\,000 \leqq 0 \tag{ب}$$

$$g_2 = \frac{(1.6\text{E}+06)}{A_2} - 16\,000 \leqq 0 \tag{پ}$$

مساحتهای سطح مقطع باید نامنفی باشند :

$$g_3 \equiv -A_1 \leqq 0, \qquad g_4 \equiv -A_2 \leqq 0 \tag{ت}$$

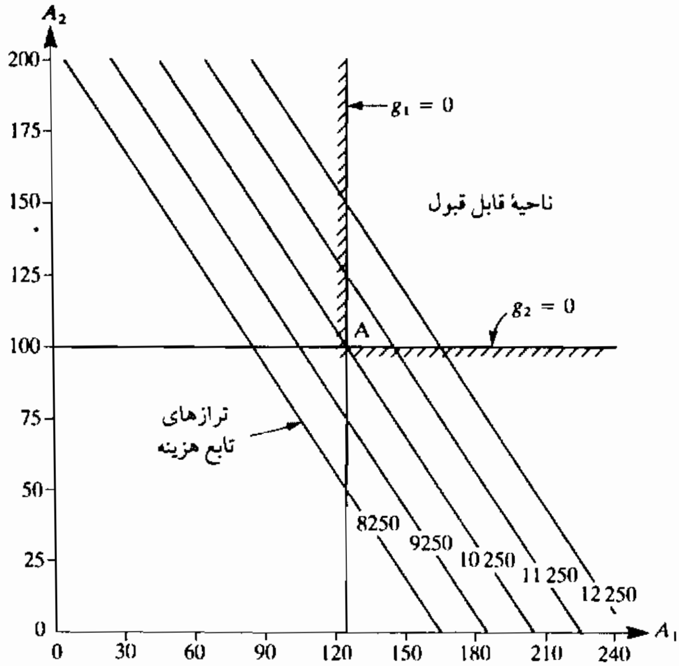
قیود مسأله در شکل ۳.۲۸ رسم شده اند و ناحیهٔ قابل قبول مشخص شده و تعدادی از خطوط هزینهٔ ثابت نیز نشان داده شده است. می توان دید که جواب بهین در نقطهٔ A با $A_1 = 125\ \text{cm}^2$ ، $A_2 = 100\ \text{cm}^2$ ، و $f = 10250\ \text{cm}^3$ است.

۳.۸.۱.۲ تحدّب. چون تابع هزینهٔ معادلهٔ (الف) برحسب متغیّرهای طرّاحی خطی است، محدب است. ماتریس هسیان قید g_1 عبارت است از

$$\nabla^2 g_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{(4.0\text{E}+06)}{A_1^3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که برای $A_1 > 0$ نیمه معین مثبت است، پس g_1 محدب است. به طور مشابه، g_2 نیز محدّب است و چون g_3 و g_4 خطی هستند، آنها نیز محدبند. پس مسأله محدب و شرایط لازم کان ـ تاکر، براساس قضیه ۳.۱۰ کافی نیز هستند. هر طرّاحی که شرایط K-T را برآورده کند یک بهین فراگیر است.

۳.۸.۱.۳ شرایط کان ـ تاکر. برای استفاده از شرایط K-T ، متغیّرهای کمبود را برای قیود تعریف می کنیم و تابع لاگرانژ را برای مسأله به شکل زیر می نویسیم



شکل ۳.۲۸ حل ترسیمی مسأله آویز دیواری

$$L = (l_1 A_1 + l_2 A_2) + u_1\left[\frac{(2.0\text{E}+06)}{A_1} - 16\,000 + s_1^2\right] + u_2\left[\frac{(1.6\text{E}+06)}{A_2} - 16\,000 + s_2^2\right]$$
$$+ u_3(-A_1 + s_3^2) + u_4(-A_2 + s_4^2) \qquad \text{(ث)}$$

شرایط لازم عبارتند از (دقت کنید که گرادیان قیود به طور خطی مستقلند و لذا نقاط قابل قبول منظم هستند)

$$\frac{\partial L}{\partial A_1} = l_1 - u_1 \frac{(2.0\text{E}+06)}{A_1^2} - u_3 = 0 \qquad \text{(ج)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_2} = l_2 - u_2 \frac{(1.6\text{E}+06)}{A_2^2} - u_4 = 0 \qquad \text{(چ)}$$

$$u_i s_i = 0,\ u_i \geqq 0,\ g_i + s_i^2 = 0; \qquad i = 1 \text{ to } 4 \qquad \text{(ح)}$$

شرایط سویچی در معادله های (ح)، ۱۶ حالت زیر را می دهند :

1. $u_1=0,\ u_2=0,\ u_3=0,\ u_4=0$
2. $u_1=0,\ s_2=0,\ u_3=0,\ u_4=0$
3. $s_1=0,\ u_2=0,\ u_3=0,\ u_4=0$
4. $s_1=0,\ s_2=0,\ u_3=0,\ u_4=0$
5. $u_1=0,\ u_2=0,\ u_3=0,\ s_4=0$
6. $u_1=0,\ u_2=0,\ s_3=0,\ u_4=0$
7. $u_1=0,\ u_2=0,\ s_3=0,\ s_4=0$
8. $u_1=0,\ s_2=0,\ s_3=0,\ u_4=0$
9. $s_1=0,\ u_2=0,\ s_3=0,\ u_4=0$
10. $s_1=0,\ u_2=0,\ u_3=0,\ s_4=0$
11. $u_1=0,\ s_2=0,\ u_3=0,\ s_4=0$
12. $u_1=0,\ s_2=0,\ s_3=0,\ s_4=0$
13. $s_1=0,\ u_2=0,\ s_3=0,\ s_4=0$
14. $s_1=0,\ s_2=0,\ u_3=0,\ s_4=0$
15. $s_1=0,\ s_2=0,\ s_3=0,\ u_4=0$
16. $s_1=0,\ s_2=0,\ s_3=0,\ s_4=0$

دقت کنید که هر حالتی که شامل $s_3 = 0$ است (یعنی $g_3 = 0$) مساحت سطح مقطع A_1 را صفر می سازد. برای چنین حالتی قید g_1 معادلهٔ (ب) نقض می شود. بنابراین نامزد جواب نیست. به طور مشابه، $s_4 = 0$ ، باعث $A_2 = 0$ می شود که قید معادله (پ) را نقض می کند. به علاوه، A_1 و A_2 نمی توانند منفی باشند، زیرا جواب مربوطه معنی فیزیکی ندارد. بنابراین، تمامی حالتهایی که شامل $s_3 = 0$ و یا $s_4 = 0$ می شوند جواب نامزدی نمی دهند، و نیاز به در نظر گرفتن آنها نیست. با این کار تنها حالتهای ۱ تا ۴ باقی می ماند که باید در نظر گرفته شوند و ما آنها را در زیر حل می کنیم (هر حالتی که $A_1 < 0$ یا $A_2 < 0$ می دهد نیز کنار گذاشته شده است) :

حالت ۱ : $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0$. این حالت به ما $l_1 = 0$ و $l_2 = 0$ را از معادلات (ج) و (چ) می دهد که قابل قبول نیست.

حالت ۲ : $u_1 = 0,\ s_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0$. این حالت از معادله (ج) به ما $l_1 = 0$ را می دهد که قابل قبول نیست.

حالت ۳ : $s_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0$. این حالت از معادلهٔ (چ) به ما $l_2 = 0$ را می دهد که قابل قبول نیست.

حالت ۴ : $s_1 = 0,\ s_2 = 0, u_3 = 0,\ u_4 = 0$. این حالت از معادله های (ب) و (پ) به ما،

$A_1 = 125\ \text{cm}^2$ و $A_2 = 100\ \text{cm}^2$ را می دهد. معادلات (ج) و (چ) ضرایب لاگرانژ را می دهند که عبارتند از $u_1 = 0.391$ و $u_2 = 0.25$ و چون هر دو نامنفی هستند، تمامی شرایط K-T برآورده شده اند. تابع هزینه در بهین $f = 50(125) + 40(100)$ یا $f = 10250\ \text{cm}^3$ خواهد بود.

۳.۸.۱.۴ تحلیل حساسیت. می خواهیم بدانیم که اگر تنش مجاز از 16000 به $16500\ \text{N/cm}^2$ تغییر کند، تابع هزینه چگونه تغییر خواهد کرد. با استفاده از معادلهٔ (۳.۷۴) تغییرات تابع هزینه عبارت است از

$$\Delta f = -u_1 e_1 - u_2 e_2$$

در حالی که $e_1 = e_2 = 16500 - 16000 = 500\ \text{N/cm}^2$. بنابراین تغییر تابع هزینه عبارت است از

$$\begin{aligned}\Delta f &= -0.391(500) - 0.25(500)\\ &= -320.5\ \text{cm}^3\end{aligned}$$

پس حجم آویز به $320.5\ \text{cm}^3$ کاهش می یابد.

۳.۸.۲ طرّاحی تیر مکعب مستطیل

در بخش ۲.۸.۵ یک مسأله طرّاحی تیر مکعب مستطیل رابطه سازی و از راه ترسیمی حل شد. ما همان مسأله را با استفاده از شرایط لازم کان ـ تاکر حل خواهیم کرد. مسأله مانند زیر رابطه سازی می شود. b و d را طوری بیابید که

(الف) $$f(b, d) = bd$$

مشروط به قیود نامساوی

(ب) $$g_1 \equiv \frac{(2.40E+08)}{bd^2} - 10 \leqq 0$$

(پ) $$g_2 \equiv \frac{(2.25E+05)}{bd} - 2 \leqq 0$$

(ت) $$g_3 \equiv d - 2b \leqq 0$$

(ث) $$g_4 \equiv -b \leqq 0, \qquad g_5 \equiv -d \leqq 0$$

مینیمم شود.

۳.۸.۲.۱ تحدب. قیدهای g_3 ، g_4 و g_5 برحسب b و d خطی بوده و بنابراین محدب هستند.

هسیان قید g_1 عبارت است از

$$\nabla^2 g_1 = \frac{(4.80\text{E}+08)}{b^3 d^4}\begin{bmatrix} d^2 & bd \\ bd & 3b^2 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس به ازای $b > 0$ و $d > 0$ معین مثبت است، g_1 یک تابع محدّب اکید است. هسیان قید g_2 عبارت است از

$$\nabla^2 g_2 = \frac{(2.25\text{E}+05)}{b^3 d^3}\begin{bmatrix} 2d^2 & bd \\ bd & 2b^2 \end{bmatrix}$$

چون این ماتریس نیز به ازای $b > 0$ و $d > 0$ معین مثبت است، g_2 هم محدب اکید است. چون تمامی قیود مسأله محدّبند، مجموعهٔ قید (ناحیهٔ قابل قبول) محدب است.

خوب است به این نکته توجه کنید که قیود g_1 و g_2 می توانند به شکل زیر تبدیل شوند (چون $b > 0$ و $d > 0$، جهت نامساوی تغییر نمی کند) :

$$\bar{g}_1 \equiv (2.40\text{E}+08) - 10bd^2 \leqq 0 \qquad \text{(ج)}$$
$$\bar{g}_2 \equiv (2.25\text{E}+05) - 2bd \leqq 0 \qquad \text{(چ)}$$

هسیان توابع $\bar{g}_1$ و $\bar{g}_2$ عبارتند از

$$\nabla^2 \bar{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -20d \\ -20d & -20b \end{bmatrix}; \qquad \nabla^2 \bar{g}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که هیچ کدام از ماتریسها نیمه معین مثبت نیستند. بنابراین، توابع قیود $\bar{g}_1$ و $\bar{g}_2$ معادله های (ج) و (چ) محدب نیستند. این نشان می دهد که تحدّب یک تابع ممکن است با تبدیل آن به شکل دیگری از دست برود. این مشاهده ای مهم است و نشان می دهد که ما در تبدیل توابع قیود باید دقت کنیم. ولی توجه کنید که تبدیل قیود جواب بهین را تغییر نمی دهد آنچه قطعاً تغییر خواهد یافت مقدار ضرایب لاگرانژ قیود است، همچنان که در بخش ۳.۷.۳ بحث شد.

برای بررسی تحدب تابع هزینه، هسیان آن را می نویسیم.

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(ح)}$$

این ماتریس نامعین است، بنابراین تابع هزینه غیرمحدب است. چون مسأله شرایط آزمایش تحدب قضیه ۳.۸ را برآورده نمی کند، نمی توانیم از قضیهٔ ۳.۹ بهینگی فراگیر را برای جواب

تضمین کنیم. دقت کنید که این نتیجه نمی گوید یک جواب محلی نمی تواند مینیمم فراگیر باشد. بلکه ممکن است مینیمم فراگیر باشد، ولی با استفاده از قضیهٔ ۹ . ۳ نمی توان آن را تضمین کرد.

۳.۸.۲.۲ شرایط کان ـ تاکر. برای استفاده از شرایط K-T ، متغیّرهای کمبود را برای تعریف تابع لاگرانژ مسأله به شکل زیر معرفی می کنیم

$$L = bd + u_1\left(\frac{(2.40\text{E}+08)}{bd^2} - 10 + s_1^2\right) + u_2\left(\frac{(2.25\text{E}+05)}{bd} - 2 + s_2^2\right) + u_3(d - 2b + s_3^2)$$
$$+ u_4(-b + s_4^2) + u_5(-d + s_5^2)$$

شرایط لازم معادله های زیر را می دهد

$$\frac{\partial L}{\partial b} = d + u_1\frac{(-2.40\text{E}+08)}{b^2d^2} + u_2\frac{(-2.25\text{E}+05)}{b^2d} - 2u_3 - u_4 = 0 \qquad (\text{خ})$$

$$\frac{\partial L}{\partial d} = b + u_1\frac{(-4.80\text{E}+08)}{bd^3} + u_2\frac{(-2.25\text{E}+05)}{bd^2} + u_3 - u_5 = 0 \qquad (\text{د})$$

$$u_is_i = 0, \quad u_i \geqq 0, \quad g_i + s_i^2 = 0; \quad i = 1 \text{ to } 5 \qquad (\text{ذ})$$

شرایط سویچی معادله های (ذ)، ۳۲ حالت را برای شرایط لازم می دهد. ولی دقت کنید که حالتهایی که در آنها $s_4 = 0$ یا $s_5 = 0$ یا هر دو وجود داشته باشد، نقطهٔ نامزد بهینی نمی دهند، زیرا قیدهای معادلهٔ (ب) و (پ) یا (ت) را نقض می کنند. بنابراین، با حذف حالتهایی که نباید مورد توجه قرار گیرند و با قرار دادن $u_4 = 0$ و $u_5 = 0$ در دیگر حالتها، حالتهای ممکن به هشت حالت به شرح زیر ختم خواهند شد که باید در نظر گرفته شوند :

1. $u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0$
2. $u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ s_3 = 0,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0$
3. $u_1 = 0,\ s_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0$
4. $s_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0$
5. $u_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0$
6. $s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ u_3 = 0,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0$
7. $s_1 = 0,\ u_2 = 0,\ s_3 = 0,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0$
8. $s_1 = 0,\ s_2 = 0,\ s_3 = 0,\ u_4 = 0,\ u_5 = 0$

هر دفعه یک حالت را در نظر می گیریم و برای به دست آوردن نقطهٔ نامزد بهین آن را حل

می کنیم. دقت کنید هر جوابی که به $b < 0$ یا $d < 0$ ختم شود به ترتیب قیود g_4 و g_5 را نقض می کند و باید آن را کنار گذاشت.

حالت ۱ : $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0$. از معادله های (خ) و (د) داریم $d = 0$ ، $b = 0$. بنابراین، این حالت جوابی نمی دهد.

حالت ۲ : $u_1 = 0, u_2 = 0, s_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0$. معادلهٔ (ت)، $d = 2b$ را می دهد. معادله های (ح) و (د)، $d - 2u_3 = 0$ و $b + u_3 = 0$ را می دهند. از این سه معادله داریم $b = 0$ و $d = 0$ که قابل قبول نیست.

حالت ۳ : $u_1 = 0, s_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0$. از معادله های (خ) ، (د) و (پ) داریم

$$d - u_2 \frac{(2.25\text{E}+05)}{b^2 d} = 0$$

$$b - u_2 \frac{(2.25\text{E}+05)}{b d^2} = 0$$

$$\frac{(2.25\text{E}+05)}{bd} - 2 = 0$$

این معادله ها جواب $u_2 = (5.625\text{E} + 03)$ و $bd = (1.125\text{E} + 05)$ را می دهند. چون $u_2 > 0$ است، این جواب معتبر است. در حقیقت، جوابهای بی شماری که با $bd = (1.125\text{E} + 05)$ مشخص می شوند وجود دارند و با هر d ، b از این معادله پیدا می شود. اما برای معتبر بودن این جوابها باید محدودیتهایی روی مقادیر b و d باشد. این محدودیت با شرطهای $s_1^2 \geq 0$ و $s_3^2 \geq 0$ ، یا $g_1 \leq 0$ و $g_3 \leq 0$ به دست می آیند.

با جایگزینی $b = (1.125\text{E} + 05)/d$ در g_1 (معادلهٔ ب) داریم

$$\frac{(2.40\text{E}+08)}{(1.125\text{E}+05)d} - 10 \leqq 0, \quad \text{یا} \quad d \geqq 213.33 \text{ mm} \qquad (\text{ر})$$

با جایگزینی $b = (1.125\text{E} + 05)/d$ در g_3 (معادلهٔ ت) داریم

$$d - \frac{(2.25\text{E}+05)}{d} \leqq 0; \quad \text{یا} \quad d \leqq 474.34 \text{ mm} \qquad (\text{ز})$$

این محدودیتی در ضخامت d است. حدود پهنای b با جایگزینی معادله های (ر) و (ز) در $bd = (1.125\text{E} + 05)$ به دست می آید:

$$d \geqq 213.33, \qquad b \leqq 527.34$$

$$d \leqq 474.33, \qquad b \geqq 237.17$$

بنابراین، جوابهای ممکن برای این حالت عبارتند از

$$237.17 \leqq b \leqq 527.34 \text{ mm}; \qquad 213.33 \leqq d \leqq 474.33 \text{ mm}$$
$$bd = (1.125\text{E}+05) \text{ mm}^2$$

حالت ۴ : $s_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0$. از معادله های (خ) و (د) داریم

$$d - \frac{(2.40\text{E}+08)}{b^2d^2} = 0; \qquad \text{یا} \quad b^2d^3 = (2.40\text{E}+08)$$

$$b - \frac{(4.80\text{E}+08)}{bd^3} = 0; \qquad \text{یا} \quad b^2d^3 = (4.80\text{E}+08)$$

چون دو معادلهٔ فوق با هم ناسازگارند، برای این حالت جوابی وجود ندارد.

حالت ۵ : $u_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0$. معادله های (پ) و (ت) را می توان برای به دست آوردن b و d حل کرد. به عنوان مثال با جایگزینی $d = 2b$ از معادلهٔ (ت) در معادلهٔ (پ)، $b = 237.17$ mm به دست می آید. بنابراین، $d = 2\ (237.17) = 474.34$ mm . ما می توانیم از معادله های (خ) و (د)، u_2 و u_3 را محاسبه کنیم و داریم $u_2 = (5.625\text{E} + 04)$ ، $u_3 = 0$. با جایگزینی b و d در معادلهٔ (ب)، $g_1 = -5.5 < 0$ به دست می آید. بنابراین قید برآورده شده (یعنی $s_1^2 \geq 0$). چون همه شرایط لازم برآورده شده اند، این یک جواب معتبر است. حساسیت قید قضیهٔ ۱۴ . ۳ و معادلهٔ (۳ . ۷۲) به ما می گوید که چون $u_3 = 0$ ، می توانیم بدون متأثر کردن مقدار تابع هزینه بهین از آن قید در ناحیهٔ قابل قبول دور شویم، این را از شکل ۱۱ . ۲ نیز که جواب ترسیمی مسأله است می توان مشاهده کرد. در شکل، نقطهٔ B نمایش جواب این حالت است. می توانیم نقطهٔ B را به طرف A ترك کنیم و همچنان روی قید $g_2 = 0$ برای طرّاحی بهین باقی بمانیم.

حالت ۶ : $s_1 = 0, s_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0$. معادله های (ب) و (پ) می توانند برای یافتن b و d به کار روند، داریم $b = 527.34$ mm و $d = 213.33$ mm . از معادله های (خ) و (د)، u_1 و u_2 به دست می آید، $u_1 = 0$ و $u_2 = (5.625\text{E} + 04)$. با جایگزینی b و d در معادلهٔ (ت) داریم $g_3 = -841.35 < 0$ ، پس قید برآورده شده (یعنی $s_3^2 \geq 0$). چون تمامی شرایط K-T برآورده شده اند، این یک جواب معتبر است. این جواب کاملاً شبیه جواب حالت ۵ است. جواب در شکل ۱۱ . ۲ با نقطه A مشخص شده است. اگر قید $g_1 = 0$ را ترك کرده (نقطه A) و روی منحنی A–B حرکت کنیم، طرّاحیهای بهین دیگر نزدیک به نقطهٔ A را خواهیم داشت.

حالت ۷ : $s_1 = 0, u_2 = 0, s_3 = 0, u_4 = 0, u_5 \equiv 0$. معادله های (ب) و (ت) می توانند

برای به دست آوردن $b = 181.71$ mm و $d = 363.42$ mm به کار روند. معادله های (خ) و (د) ضرایب لاگرانژ را می دهند که عبارتند از $u_1 = 4402.35$ و $u_3 = -60.57$. چون $u_3 < 0$ ، این حالت جواب معتبری نمی دهد.

حالت ۸: $s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0, u_4 = 0, u_5 = 0$. این حالت سه معادله برای دو مجهول می دهند (سیستم فرامعین)[1] که جوابی ندارد.

۳.۸.۲.۳ بررسی شرط کافی. حالتهای ۳ ، ۵ و ۶ جوابهایی داشتند که شرایط K-T را برآورده می کرد. حالتهای ۵ و ۶ دو قید فعال دارند، ولی معادلهٔ (۳ . ۶۷) قضیهٔ کفایت، تنها قیود با $u_i > 0$ را مورد توجه قرار می دهد، پس تنها قید g_2 باید برای بررسی شرایط کافی بودن مورد توجه قرار گیرد. بنابراین در هر سه حالت برای بررسی کفایت باید یک چیز و آن هم قید g_2 مورد نظر قرار گیرد.

باید هسیان تابع هزینه و قید دوم را محاسبه کنیم :

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \nabla^2 g_2 = \frac{(2.25\text{E}+05)}{b^3 d^3} \begin{bmatrix} 2d^2 & bd \\ bd & 2b^2 \end{bmatrix}$$

چون $bd = (1.125\text{E} + 05)$ ، $\nabla^2 g_2$ عبارت خواهد بود از

$$\nabla^2 g_2 = 2 \begin{bmatrix} \dfrac{2}{b^2} & (1.125\text{E}+05)^{-1} \\ (1.125\text{E}+05)^{-1} & \dfrac{2}{d^2} \end{bmatrix}$$

هسیان لاگرانژین عبارت است از

$$\nabla^2 L = \nabla^2 f + u_2 \nabla^2 g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \dfrac{(1.125\text{E}+05)}{b^2} & 0.5 \\ 0.5 & \dfrac{(1.125\text{E}+05)}{d^2} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} \dfrac{(1.125\text{E}+05)}{b^2} & 1.0 \\ 1.0 & \dfrac{1.125\text{E}+05}{d^2} \end{bmatrix}$$

1. overdetermined

دترمینان $\nabla^2 L$ برای $db = (1.125E+05)$ صفر است. بنابراین، آن یک ماتریس معین مثبت نیست. پس، قضیه ۱۳ . ۳ نمی تواند برای نشان دادن شرط کافی $\mathbf{x}^*$ مورد استفاده قرار گیرد. باید شرط کافی بودن معادلهٔ (۶۸ . ۳) را بررسی کنیم. برای این کار، باید $\mathbf{y}$ که معادلهٔ (۶۷ . ۳) را برآورده می کند بیابیم. گرادیان g_2 عبارت است از

$$\nabla g_2 = \left[\frac{-(2.25E+05)}{b^2 d}, \frac{(-2.25E+05)}{bd^2}\right]$$

و از $\nabla g_2^T \mathbf{y} = 0$ داریم

$$y_1/b + y_2/d = 0, \qquad \text{یا} \quad y_2 = -(d/b)y_1$$

بنابراین، بردار $\mathbf{y}$ عبارت است از

$$\mathbf{y} = (1, -d/b)c; \qquad c = y_1 \text{ یک عدد ثابت است}$$

با استفاده از $\nabla^2 L$ و $\mathbf{y}$ ، Q معادلهٔ (۶۸ . ۳) عبارت خواهد بود از

$$Q = \mathbf{y}^T \nabla^2 L \mathbf{y} = 0$$

پس شرط کفایت قضیه ۱۲ . ۳ برآورده نمی شود. نقاطی که از $bd = (1.125E+05)$ به دست می آیند لازم نیست که نقطهٔ مینیمم منحصر به فرد باشند. این نتیجه البته از شکل ۱۱ . ۲ هم به دست می آید. دقت کنید که چون $Q = 0$ است، شرط لازم مرتبهٔ دو قضیه ۱۱ . ۳ برآورده شده است.

توجه به این نکته مهم است که این مسأله شرط مسائل برنامه ریزی محدّب را برآورده نمی کند، بنابراین نقاطی که شرایط K-T را برآورده می کند، شرط کفایت برای مینیمم منحصر به فرد بودن را ندارند. تمام نقاط در حقیقت طرحهای بهین فراگیر هستند. از این مثال دو نتیجه گرفته می شود:

۱ . مسائلی که در زمرهٔ مسائل برنامه ریزی محدّب نیستند می توانند *جوابهای بهین فراگیر* داشته باشند. ما بهینگی فراگیر را نمی توانیم نشان دهیم مگر همه جوابهای بهین محلی را پیدا کنیم.
۲ . *اگر شرایط کافی برآورده نشوند*، تنها نتیجه ای که می تواند گرفته شود این است که نقطه نامزد لازم نیست مینیمم منحصر به فرد باشد. ممکن است چند بهین محلی در همسایگی داشته باشد و ممکن است همه آنها در حقیقت جوابهای فراگیر باشند.

۳.۸.۲.۴ تحلیل حساسیت. هیچ کدام از نقاط نامزد مینیمم (نقاط A ، B و منحنی A-B در شکل

۱۱ . ۲) شرایط کافی را برآورده نمی کنند . بنابراین، وجود مشتقهای جزئی تابع هزینه نسبت به پارامترهای طرف راست معادله های (۳ . ۷۱) و (۳ . ۷۲)، از قضیهٔ ۳ . ۱۴ تضمین نمی شود. اما چون حل ترسیمی مسأله را در شکل ۲ . ۱۱ داریم، می توانیم بررسی کنیم که اگر قضیه حساسیت را به کار ببریم چه پیش می آید.

برای نقطهٔ A در شکل ۲ . ۱۱ (حالت ۶)، قیود g_1 و g_2 فعال بوده و $b = 527.34$ mm ، $d = 213.33$ mm ، $u_1 = 0$ و $u_2 = (5.625\text{E} + 04)$. چون $u_1 = 0$ است از معادلهٔ (۳ . ۷۲) داریم $\partial f/\partial e_1 = 0$. این یعنی با هر تغییر کوچک در حدود قید مقدار بهین تابع هزینه تغییر نمی کند. این درست است و در شکل ۲ . ۱۱ نیز می توان دید. نقطهٔ بهین عوض می شود، ولی قید g_1 همچنان فعال است؛ یعنی $bd = (1.125\text{E} + 05)$ باید برآورده شود. هر تغییر در g_2 ، قید را به موازات خودش جابه جا می کند و حل بهین را تغییر می دهد (متغیّرهای طرّاحی و تابع هزینه). چون $u_2 = (5.625\text{E} + 04)$ ، از معادلهٔ (۳ . ۷۲) داریم $\partial f/\partial e_2 = (-5.625\text{E} + 04)$. از این جا مسلم می شود که ضرایب حساسیت تغییرات درست تابع هزینه را پیش بینی می کند.

به همین ترتیب می توان دید که دو جواب حالتهای دیگر (۳ و ۵) نیز مقادیر درستی برای ضرایب حساسیت می دهند.

تمرینهای فصل ۳

بخش ۳.۲ مفاهیم اساسی

۳ . ۱ *با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید*

۱ . یک تابع می تواند در یک همسایگی کوچک از $\mathbf{x}^*$ نقاط مینیمم محلی متعددی داشته باشد.

۲ . یک تابع نمی تواند بیش از یک نقطهٔ مینیمم فراگیر داشته باشد.

۳ . مقدار تابعی که در نقاط متعددی مینیمم فراگیر دارد، باید در تمامی آن نقاط یکسان باشد.

۴ . تابعی که روی یک مجموعهٔ باز تعریف شده نمی تواند مینیمم فراگیر داشته باشد.

۵ . گرادیان تابعی مثل $f(\mathbf{x})$ در یک نقطه عمود است بر سطحی که با ثابت = $f(\mathbf{x})$ تعریف شود.

۶ . گرادیان یک تابع در یک نقطه جهت محلی بیشترین کاهش را در تابع می دهد.

۷ . ماتریس هسیان یک تابع پیوسته مشتق پذیر می تواند نامتقارن باشد.

۸ . ماتریس هسیان یک تابع تنها با استفاده از مشتق اول تابع محاسبه می شود.

۹ . بسط تیلور برای یک تابع در یک نقطه، از مقدار تابع و مشتقاتش استفاده می کند .

۱۰ . بسط تیلور می تواند در نقطه ای که تابع گسسته است نوشته شود .

۱۱ . بسط تیلور یک تابع پیچیده آن را با یک تابع چندجمله ای در یک نقطه جایگزین می کند .

۱۲ . بسط تیلور خطی یک تابع پیچیده در یک نقطه، تنها یک تقریب محلی خوب برای تابع است .

۱۳ . یک شکل درجه دو می تواند جملات مرتبه اوّل از متغیّرها داشته باشد .

۱۴ . برای یک **x** داده شده، شکل درجه دو یک بردار تعریف می کند .

۱۵ . هر شکل درجه دو یک ماتریس متقارن مربوط به خود دارد .

۱۶ . یک ماتریس متقارن در صورتی معین مثبت است که مقادیر ویژه اش نامنفی باشند .

۱۷ . یک ماتریس در صورتی نیمه معین مثبت است که بعضی از مقادیر ویژه اش منفی و بقیه نامنفی باشند .

۱۸ . تمامی مقادیر ویژه یک ماتریس معین منفی، منفی هستند .

۱۹ . شکل درجه دو به عنوان یک جمله از جملات بسط تیلور یک تابع است .

۲۰ . یک شکل درجه دو معین مثبت باید برای هر $\mathbf{x} \neq 0$ مقدار مثبت داشته باشد .

برای توابع زیر بسط سری تیلور را تا جملات مرتبه دو بنویسید :

۳.۲ $\cos x$ حول نقطهٔ $x^* = \pi/4$

۳.۳ $\cos x$ حول نقطهٔ $x^* = \pi/3$

۳.۴ $\sin x$ حول نقطهٔ $x^* = \pi/6$

۳.۵ $\sin x$ حول نقطهٔ $x^* = \pi/4$

۳.۶ e^x حول نقطهٔ $x^* = 0$

۳.۷ e^x حول نقطهٔ $x^* = 2$

۳.۸ $f(x_1, x_2) = 10x_1^4 - 20x_1^2x_2 + 10x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 + 5$ حول نقطهٔ $(1, 1)$. مقدار تقریبی و دقیق تابع را در نقطهٔ $(1.2, 0.8)$ با هم مقایسه کنید .

شکل توابع درجه دوی زیر را تعیین کنید :

۳.۹ $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 7x_2^2 - 6x_2x_3 + 5x_3^2$

۳.۱۰ $F(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_1x_2$

۳.۱۱ $F(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$

۳.۱۲ $F(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$

۳.۱۳ $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$

۳.۱۴ $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$

۳.۱۵ $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$

۳.۱۶ $F(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$

بخش ۳.۳ مسائل طرّاحی بهین نامقیّد

۳.۱۷ *با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید*

۱. برای یک مسأله نامقید، اگر شرط لازم مرتبه اوّل در یک نقطه برآورده شود، آن نقطه می تواند ماکزیمم محلی تابع باشد.

۲. برای یک تابع نامقید، نقطه ای که شرایط لازم مرتبه اوّل را برآورده می کند ممکن است مینیمم محلی نباشد.

۳. مقدار یک تابع در نقطه ماکزیمم آن می تواند منفی باشد.

۴. اگر به تابعی یک عدد ثابت اضافه شود، موقعیت نقطهٔ مینیمم آن تغییر می کند.

۵. اگر تابعی در یک عدد مثبت ضرب شود، موقعیت نقطهٔ مینیمم آن تغییری نمی کند.

۶. اگر شعاع انحنای یک تابع نامقید یک متغیّره در نقطهٔ x^* صفر باشد، آن گاه آن نقطه یک مینیمم محلی تابع است.

۷. شعاع انحنای یک تابع نامقید یک متغیّره در نقطه مینیمم آن منفی است.

۸. هسیان یک تابع نامقید در نقطهٔ مینیمم محلی آن باید نیمه معین مثبت باشد.

۹. هسیان یک تابع نامقید در نقطهٔ مینیمم آن معین منفی است.

۱۰. اگر هسیان یک تابع نامقید در نقطهٔ نامزد نامعین باشد، نقطه ممکن است یک مینیمم یا ماکزیمم محلی باشد.

برای توابع زیر نقاط ایستا را بیابید (اگر نیاز بود از روشهای عددی مثل نیوتن ـ رافسون که در پیوست C آمده استفاده کنید). همچنین نقاط مینیمم محلی، ماکزیمم محلی و عطف تابع را بیابید (نقاط عطف نقاط ایستایی هستند که نه ماکزیمم‌اند و نه مینیمم):

۳.۱۸ $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 7$

۳.۱۹ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3$

۳.۲۰ $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 12x_1x_2^2 + 2x_2^2 + 5x_1^2 + 3x_2$

۳.۲۱ $f(x_1, x_2) = 5x_1 - \frac{1}{16}x_1^2x_2 + \frac{1}{4x_1}x_2^2$

۳.۲۲ $f(x) = \cos x$

۳.۲۳ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

۳.۲۴ $f(x) = x^2e^{-x}$

۳.۲۵ $f(x_1, x_2) = x_1 + \frac{10}{x_1x_2} + 5x_2$

۳.۲۶ $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + 4x_2^2 - 8x_2 + 6$

۳.۲۷ $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2$

۳.۲۸ هزینهٔ کارکرد سالانه U برای یک شبکهٔ برق‌رسانی با عبارت زیر بیان می‌شود

$$U = \frac{(21.9\text{E}+07)}{V^2C} + (3.9\text{E}+06)C + (1.0\text{E}+03)V$$

در حالی که V = ولتاژ خط برحسب کیلووات و C = قابلیت هدایت خط برحسب موس[1] است. نقاط ایستای تابع را بیابید، و V و C را برای مینیمم شدن هزینهٔ کارکرد به دست آورید.

بخش ۳.۴ مسائل طرّاحی بهین مقید

۳.۲۹ *با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید*

۱. یک نقطه منظّم از ناحیهٔ قابل قبول به شکل زیر تعریف می‌شود: نقطه‌ای که گرادیان تابع هزینه در آن مستقل از گرادیان قیود فعال است.

۲. برای یک مسأله طرّاحی بهین کلّی، نقطه‌ای که شرایط K-T را برآورده کند می‌تواند برای تابع هزینه یک ماکزیمم محلی باشد.

۳. در نقطهٔ بهین تعداد قیود مستقل فعال همیشه بیشتر از تعداد متغیّرهای طرّاحی است.

---

1. mhos

۴ . در رابطه سازی مسأله طرّاحی بهین کلّی، تعداد قیود مساوی مستقل باید "≤" با تعداد متغیّرهای طرّاحی باشد.

۵ . در رابطه سازی مسأله طرّاحی بهین کلّی، تعداد قیدهای نامساوی نمی تواند از تعداد متغیّرهای طرّاحی تجاوز کند.

۶ . در نقطه بهین، ضرایب لاگرانژ برای قیود نامساوی از "نوع ≤" باید نامنفی باشند.

۷ . در نقطه بهین، ضرایب لاگرانژ برای قیود "نوع ≤" می تواند صفر باشد.

۸ . هنگام حل یک مسأله طرّاحی بهین با شرایط K-T ، هر حالتی که از شرایط سویچی تعریف می شود می تواند جوابهای چندگانه داشته باشد.

۹ . در رابطه سازی مسأله طرّاحی بهین، قیود "نوع ≥" نمی تواند در نظر گرفته شود.

۱۰ . نقاط طرح بهین برای مسائل بهینه سازی مقید، مشتق تابع لاگرانژ را نسبت به متغیّرهای طرّاحی صفر می کنند.

۱۱ . نقاط طرح بهین که دست کم یک قید فعال دارند مشتق تابع هزینه را صفر می کنند.

۱۲ . در یک نقطه طرّاحی بهین مقید منظّم، گرادیان تابع هزینه به طور خطی به گرادیان توابع قیود فعال وابسته است.

۱۳ . اگر مقدار متغیّر کمبود در نقطهٔ بهین صفر باشد، قید نامساوی غیرفعال است.

۱۴ . گرادیان قیود نامساوی که در نقطهٔ بهین فعّالند باید صفر باشد.

۱۵ . در مسائل طرّاحی با قیود مساوی گرادیان تابع هزینه در نقطهٔ بهین صفر است.

نقاطی را که شرایط لازم کان ـ تاکر را برآورده می کنند برای مسائل زیر بیابید. منظّم بودن نقاط را بررسی کنید:

۳.۳۰ تابع $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_1x_2 - 8x_1$ را نسبت به قید $x_1 + x_2 = 4$ مینیمم کنید.

۳.۳۱ تابع $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 18x_1x_2 + 13x_2^2 - 4$ را نسبت به قید $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 16$ مینیمم کنید.

۳.۳۲ تابع $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ را نسبت به قید $x_1 + x_2 - 4 = 0$ مینیمم کنید.

۳.۳۳ مسأله زیر را با قیود مساوی در نظر بگیرید: تابع

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

را نسبت به قیود $x_1 + x_2 - 4 = 0$ و

$x_1 - x_2 - 2 = 0$ مینیمم کنید.

۱. آیا این یک مسأله بهینه سازی معتبر است؟ توضیح دهید.

۲. توضیح دهید که چگونه مسأله را حل می کنید؟ آیا برای یافتن جواب بهین شرایط لازم مورد نیاز است؟

۳.۳۴ تابع $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$ را نسبت به قیدهای

$$x_1 + 3x_2 \le 6$$

$$5x_1 + 2x_2 \le 10$$

$x_1, x_2 \ge 0$ مینیمم کنید.

۳.۳۵ تابع $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 - 8x_1$ را با قید

$x_1 + x_2 \le 4$ مینیمم کنید.

۳.۳۶ تابع $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 6$ را باقید

$x_1 + x_2 \ge 4$ مینیمم کنید.

۳.۳۷ تابع $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 18x_1 + 9x_2$ را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \le 10$$

$4x_1 - 3x_2 \le 20; \quad x_i \ge 0; i = 1, 2$ مینیمم کنید.

۳.۳۸ تابع $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ را با قید

$x_1 + x_2 - 4 \le 0$ مینیمم کنید.

۳.۳۹ تابع $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ را با قیود

$$x_1 + x_2 - 4 \le 0$$

$x_1 - x_2 - 2 \le 0$ مینیمم کنید.

۳.۴۰ تابع $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$ را با قیود

$$x_1 + x_2 - 4 \le 0$$

$2 - x_1 \le 0$ مینیمم کنید.

۳.۴۱ تابع $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 18x_1x_2 + 13x_2^2 - 4$ را با قید

$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \ge 16$ مینیمم کنید.

۳.۴۲ تابع $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$ را با قیود

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 - 3x_2 = 1$ مینیمم کنید.

۳.۴۳ تابع $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 16x_1 + 2x_2 - 3x_2^2$ را با قید $x_1 + x_2 \le 3$ مینیمم کنید.

۳.۴۴ تابع $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2$ را با قید $x_1^2 - x_2^2 + 8x_2 \le 16$ مینیمم کنید.

۳.۴۵ طرّاحی یک قوطی نوشابه را که در بخش ۲.۶.۲ رابطه سازی شد در نظر بگیرید :

تابع $f(D, H) = \pi DH + \frac{\pi}{2}D^2, \quad \mathrm{cm}^2$

را با قیود $\frac{\pi}{4}D^2H \ge 400, \quad \mathrm{cm}^3$

$3.5 \le D \le 8, \quad \mathrm{cm}$

$8 \le H \le 18, \quad \mathrm{cm}$

مینیمم کنید. شرایط K-T را نوشته و آنها را حل کنید. شرایط لازم را در نقاط جواب به طور ترسیمی توجیه کنید.

۳.۴۶ یک مسأله مینیمم سازی وزن ستون استوانهٔ توخالی در بخش ۲.۶.۷ به شکل زیر رابطه سازی شد : شعاع متوسط R و ضخامت t را طوری بیابید که

جرم $= 2\rho l\pi Rt$

با در نظر گرفتن قید تنش

$$\frac{P}{2\pi Rt} \leqq \sigma_a$$

و قید بار کمانش

$$P \leqq \frac{\pi^3 ER^3 t}{4l^2}$$

و نامنفی بودن متغیّرهای طرّاحی

$$R \ge 0, \quad t \ge 0$$

مینیمم شود. شرایط K-T را برای مسأله با اضافه کردن قید دیگر $R/t \le 50$ و با داده های : $P = 50$ kN, $l = 5.0$ m, $E = 210$ GPa, $\sigma_a = 250$ MPa, $\rho = 7850$ kg/m^3 حل کنید. شرایط لازم را در نقاط جواب به طور ترسیمی توجیه کنید.

۳.۴۷ یک مسأله مینیمم سازی وزن ستون استوانه ای توخالی در بخش ۲.۶.۷ به شکل زیر رابطه سازی شد: شعاع خارجی R_o و شعاع داخلی R_i را برای مینیمم سازی جرم

$$\text{جرم} = \pi\rho l(R_o^2 - R_i^2)$$

مشروط به قیود تنش

$$\frac{P}{\pi(R_o^2 - R_i^2)} \leqq \sigma_a$$

و بار کمانش

$$P \leqq \frac{\pi^3 E}{16l^2}(R_o^4 - R_i^4)$$

و نامنفی بودن متغیّرهای طرّاحی

$$R_o \geqq 0, \qquad R_i \geqq 0$$

بیابید. شرایط K-T را با اضافه کردن قید $0.5(R_o + R_i)/(R_o - R_i) \leq 50$ حل کنید. از داده های مشابه تمرین ۳.۴۶ استفاده کنید. شرایط لازم را در نقاط جواب به طور ترسیمی توجیه کنید.

۳.۴۸ یک مسأله طرّاحی مهندسی به شکل زیر رابطه سازی شده است. تابع

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 320x_1x_2$$

را مشروط به قیود

$$\frac{1}{60x_2}x_1 - 1 \leqq 0$$
$$1 - \tfrac{1}{3600}x_1(x_1 - x_2) \leqq 0$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید. شرایط لازم K-T را نوشته و با حل آنها نامزدهای طرّاحی مینیمم را به دست آورید. درستی جوابها را به طور ترسیمی نیز بررسی کنید. شرایط K-T را روی ترسیمه مسأله توجیه کنید.

۳.۴۹ برای ساختن یک دفتر چند طبقه، زمینی به مساحت 100×100 m در دسترس است. مساحت مورد نیاز کل طبقات باید حداقل $20000\ \text{m}^2$ باشد. براساس دستورالعمل تراکم منطقه حداکثر ارتفاع ساختمان می تواند 21 m باشد. همچنین مساحت توقفگاه خارج از ساختمان باید حداقل 25% سطح کل طبقات باشد. تصمیم گرفته شده که ارتفاع

طبقات 3.5 m باشد. هزینهٔ ساختمان برحسب میلیون دلار به شکل $(0.6h + 0.001A)$ تخمین زده می شود که در آن A مساحت سطح مقطع ساختمان برای هر طبقه و h ارتفاع ساختمان است. مسألهٔ طرّاحی مینیمم هزینه را رابطه سازی نموده و حل کنید (مانند تمرین ۱ . ۲). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کنید و گرادیان هزینه و توابع قیود را روی ترسیمه نشان دهید.

۳ . ۵۰ یک پالایشگاه دو نوع نفت خام دارد:

قیمت نفت خام A ، (bbl) بشکه / $30 و 20000 bbl موجود است.

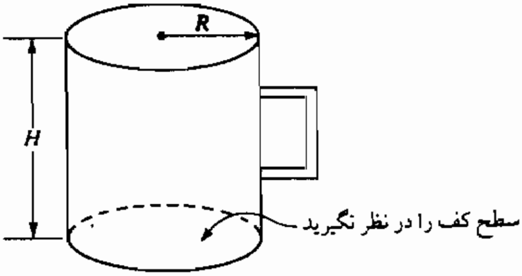
قیمت نفت خام B ، $36/bbl و 30000 bbl موجود است.

پالایشگاه از نفتهای خام، بنزین و روغن تولید می کند. مقدار نفت خام مورد نیاز و قیمت فروش برای هر بشکه از محصولات و میزان سفارش در جدول ۳ . ۳ نشان داده شده است. پالایشگاه به چه میزان باید از نفتهای خام استفاده کند تا سودش ماکزیمم شود؟ مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کرده و از راه ترسیمی حل کنید (مانند تمرین ۲ . ۲). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کنید و گرادیان توابع هزینه و قیود را روی ترسیمه نشان دهید.

جدول ۳.۳ داده های عملکرد پالایشگاه

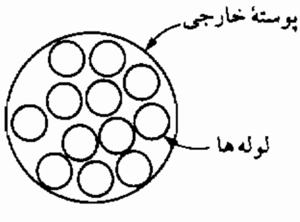
محصول	مقدار مورد نیاز برای تولید یک بشکه محصول		قیمت فروش هر بشکه	سفارش (بشکه)
	نفت خام A	نفت خام B		
بنزین	۰٫۶	۰٫۸	$۵۰	۲۰۰۰۰
روغن	۰٫۴	۰٫۲	$۱۲۰	۱۰۰۰۰

۳ . ۵۱ یک لیوان بزرگ نوشابه مانند شکل E3.51 طوری طرّاحی کنید که ظرفیت آن ماکزیمم باشد. ارتفاع و شعاع آن نباید از ۲۰ cm بیشتر باشد. شعاع لیوان باید حداقل ۵ cm باشد. مساحت سطح جانبی لیوان نباید از ۹۰۰ cm^2 بیشتر باشد (از سطح قاعده و دستهٔ لیوان صرف نظر کنید). مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کرده و از راه ترسیمی حل کنید. شرایط K-T را بررسی کرده و گرادیان توابع هزینه و قید را روی ترسیمه نشان دهید.



شکل E3.51 لیوان نوشابه

۳.۵۲ شرکتی برای افزایش انتقال حرارت، مبدلهای پوسته و لوله ای تولیدی اش به طول l را می خواهد دوباره طرّاحی کند. مقطع مبدل در شکل E3.52 نشان داده شده است. محدودیتهایی در مسأله طرّاحی وجود دارد: کمترین شعاع لوله های داخلی مبدل که در دسترس است ۰٫۵ cm و همه لوله ها باید یک اندازه باشند. به علاوه مساحت سطح مقطع تمامی لوله ها نباید از ۲۰۰۰ cm^2 بیشتر باشد تا فضایی مناسب داخل پوسته باقی بماند. برای ماکزیمم شدن سطح لوله ها در مبدل مسأله را رابطه سازی کرده و حل کنید و تعداد لوله ها و شعاع هر لوله را به دست آورید (شبیه تمرین ۲.۴). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کنید و گرادیان توابع هزینه و قید را روی ترسیمه نشان دهید.



شکل E3.52 سطح مقطع مبدل حرارتی

۳.۵۳ پیشنهاد ساخت یک توقفگاه در ناحیهٔ بازسازی شدهٔ مرکز شهر به مناقصه گذاشته شده است. قیمت زمین عبارت است از $200W + 100D$، که W عرض توقفگاه در طرف خیابان و D عمق توقفگاه به متر می باشد. ماکزیمم عرض توقفگاه در خیابان 100 m و حداکثر عمق آن 200 m می باشد. می خواهیم حداقل مساحت توقفگاه $10000\ m^2$

باشد. برای زیبایی توقفگاه، ضلع بزرگتر آن نباید از دو برابر ضلع کوچکتر بیشتر باشد. مسأله طرّاحی مینیمم شدن هزینه را رابطه سازی نموده و از راه ترسیمی حل کنید (مانند تمرین ۲.۵). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کرده و گرادیان توابع هزینه و قیود را روی ترسیمه نشان دهید.

۳.۵۴ کارخانه‌ای محصولات A و B را می‌فروشد. عایدی از فروش A، 10/kg$، و از B، 8/kg$ است. مواد خام در دسترس برای تولید عبارتند از: 100 kg از C و 80 kg از D. برای تولید یک کیلوگرم از A، 0.4 kg از C و 0.6 kg از D مورد نیاز است. برای تولید یک کیلوگرم از B، 0.5 kg از C و 0.5 kg از D مورد نیاز است. تقاضای بازار برای A، 70 kg و برای B، 110 kg است. چه مقدار از A و B باید تولید شود تا سود ماکزیمم گردد؟ مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی نموده و از راه ترسیمی حل کنید (مانند تمرین ۲.۶). شرایط K-T را درنقاط جواب بررسی نموده و گرادیان توابع هزینه و قیود را روی ترسیمه نشان دهید.

۳.۵۵ یک برنامهٔ غذایی از شیر و نان طرّاحی کنید که روزانه حداقل ۵ واحد از ویتامین A و ۴ واحد از ویتامین B داشته باشد. مقدار ویتامینهای A و B در یک کیلوگرم از شیر و نان و قیمت هر کیلوگرم از آنها در جدول ۳.۴ داده شده است. مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کرده و از راه ترسیمی حل کنید طوری که بتوانیم حداقل ویتامین مورد نیاز را گرفته و کمترین هزینه را صرف کنیم (مانند تمرین ۲.۷). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کنید و گرادیان توابع هزینه و قیود را روی ترسیمه نشان دهید.

جدول ۳.۴ داده‌های مسأله برنامهٔ غذایی

ویتامین	نان	شیر
A	۱	۲
B	۳	۲
قیمت/kg	۲	۱

۳.۵۶ دانشجویان رشته مهندسی شیمی دستگاهی را ساخته اند که می تواند هر هفته ۲۲۵ بطری الکل خالص تولید کند. آنها با الکل دو نوع محلول A و B تولید می کنند: (i) محلول A، با مقاومت ۲۰ و (ii) محلول B با مقاومت ۸۰. یادآور می شود که مقاومت الکل

خالص ۲۰۰ است. آنان آب به اندازه کافی دارند، ولی هر هفته تنها ۸۰۰ بطری خالی می توانند داشته باشند. شکر موجود در هر هفته فقط برای ۶۰۰ بطری محلول A و یا ۱۲۰۰ بطری محلول B کافی است. سود فروش هر بطری محلول A ، ۱ دلار و محلول B ، ۲ دلار است. آنان هر چه تولید کنند می توانند به فروش برسانند. برای ماکزیمم شدن سود چند بطری از محلول A و محلول B باید تولید کنند؟ مسأله بهینه سازی طرّاحی را رابطه سازی کرده و از راه ترسیمی حل کنید (مانند تمرین ۲.۸). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کرده و گرادیان توابع هزینه و قید را روی ترسیمه نشان دهید.

۳.۵۷ قوطی نوشابه ای که تنها یک طرف آن بسته است طرّاحی کنید که برای گنجایش $600\ cm^3$ مساحت ورق مصرفی مینیمم شود. قوطی به شکل استوانه ای است به ارتفاع h و شعاع r. نسبت ارتفاع به قطر نباید کمتر از ۱ و بیشتر از ۱٫۵ باشد. ارتفاع نیز نباید بیشتر از ۲۰ cm باشد. مسأله بهینه سازی طرّاحی را رابطه سازی کرده و از راه ترسیمی حل کنید (مانند تمرین ۲.۹). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کرده و گرادیان توابع هزینه و قیود را روی ترسیمه نشان دهید.

۳.۵۸ یک کانتینر حمل کالا به ابعاد $b \times b \times h$ طوری طرّاحی کنید که نسبت زیر مینیمم شود: (هزینه حمل بار برای یک راه) / (هزینه حمل خود کانتینر برای رفت و برگشت). از داده های زیر استفاده کنید:

سطح/جرم کانتینر : $80\ kg/m^2$

ماکزیمم b : ۱۰ m

ماکزیمم h : ۱۸ m

هزینه حمل یک طرف پر یا خالی : ۱۸$ برای هر kg جرم خالص

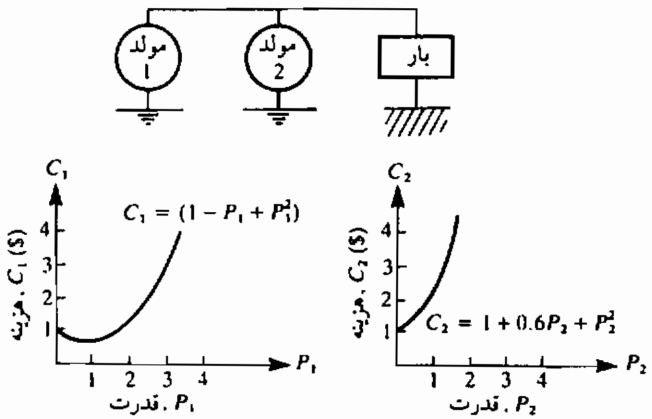
جرم بار : $150\ kg/m^3$

مسأله طرّاحی بهین را رابطه سازی کرده و از راه ترسیمی حل کنید (مانند تمرین ۲.۱۰). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کرده و گرادیان توابع هزینه و قیود را روی ترسیمه نشان دهید.

۳.۵۹ مخزن استوانه ای شکلی طرّاحی کنید که دو طرف آن بسته و حجم آن $150\ m^3$ باشد. هزینهٔ ساخت متناسب با مساحت ورق مصرفی و عبارت است از $\$400/m^2$. مخزن قرار است در انباری که سقف آن شیب دار است قرار داده شود. بنابراین ارتفاع H مخزن

با رابطهٔ $H \le 10 - D/2$ محدود می شود که در آن D قطر مخزن است. مسأله طرّاحی مینیمم کردن هزینه را رابطه سازی کرده و از راه ترسیمی حل کنید (مانند تمرین ۱۲ . ۲). شرایط K-T را در نقاط جواب بررسی کرده و گرادیان توابع هزینه و قیود را روی ترسیمه نشان دهید.

۳ . ۶۰ دو مولّد الکتریکی به هم متصل شده اند تا توان کلی مورد نیاز بار را تولید کنند. هزینهٔ هر مولّد همچنان که در شکل E3.60 نشان داده شده است، تابعی از توان خروجی آن است. تمامی هزینه ها و توانها براساس یک واحد بیان شده است. توان مورد نیاز حداقل ۶۰ واحد می باشد. مسأله طرّاحی مینیمم کردن هزینه را رابطه سازی کرده و از راه ترسیمی حل کنید (مانند تمرین ۱۴ . ۲). شرایط K-T را در نقاط جواب ... گرادیان توابع هزینه و قیود را روی ترسیمه نشان دهید.



شکل E3.60 مولّد برق

بخش ۲.۵ بهینگی فراگیر

۳ . ۶۱ *با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید*

۱ . یک قید نامساوی خطی همیشه یک ناحیهٔ قابل قبول محدّب تعریف می کند.

۲ . یک قید مساوی خطی همیشه یک ناحیهٔ قابل قبول محدّب تعریف می کند.

۳ . یک قید مساوی غیرخطی نمی تواند یک ناحیهٔ قابل قبول محدّب بدهد.

۴ . یک تابع محدب است اگر و تنها اگر هسیان آن همه جا معین مثبت باشد.

۵. یک مسأله طرّاحی بهین در صورتی محدّب است که همه قیدها خطی و تابع هزینه محدّب باشد.
۶. یک مسأله برنامه ریزی محدب همیشه یک جواب بهین دارد.
۷. جواب بهین یک مسأله برنامه ریزی محدب همیشه منحصر به فرد است.
۸. یک مسأله برنامه ریزی غیرمحدب نمی تواند جواب بهین فراگیر داشته باشد.
۹. برای یک مسأله طرّاحی محدب، هسیان تابع هزینه باید همه جا نیمه معین مثبت باشد.
۱۰. بررسی تحدّب یک تابع در حقیقت بازه ای را مشخص می کند که روی آن تابع ممکن است محدب باشد.

۳.۶۲ با استفاده از تعریف قطاع خط که در معادلهٔ (۳.۵۸) داده شده نشان دهید که مجموعهٔ زیر محدّب است

$$S = \{\mathbf{x} \mid x_1^2 + x_2^2 - 1.0 \leqq 0\}$$

۳.۶۳ بازه‌ای را پیدا کنید که روی آن توابع زیر محدب باشند: (i) $\sin x$، (ii) $\cos x$.

تحدّب توابع زیر را بررسی کنید. اگر تابع همه جا محدب نیست، بازه‌ای (مجموعه S) را به دست آورید که روی آن تابع محدب باشد:

۳.۶۴ $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 7$

۳.۶۵ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 + 3$

۳.۶۶ $f(x_1, x_2) = x_1^3 + 12x_1x_2^2 + 2x_2^2 + 5x_1^2 + 3x_2$

۳.۶۷ $f(x_1, x_2) = 5x_1 - \frac{1}{16}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{4x_1}x_2^2$

۳.۶۸ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

۳.۶۹ تحدّب مسألهٔ زیر را بررسی کنید (تمرین ۳.۴۵)

تابع

$$f(D, H) = \pi DH + \frac{\pi}{2}D^2$$

را با قیود

$$\frac{\pi}{4}D^2H \geqq 400$$
$$3.5 \leqq D \leqq 8.0$$
$$8.0 \leqq H \leqq 18.0$$

مینیمم کنید.

۳.۷۰ تحدب مسألهٔ زیر را بررسی کنید (تمرین ۳.۲۸)

$$U(V, C) = \frac{(21.9E+07)}{(V^2C)} + (3.9E+06)C + (1.0E+03)V$$

مسائل زیر را رابطه سازی کرده و تحدب آنها را بررسی کنید :

۳.۷۱ تمرین ۳.۴۹

۳.۷۲ تمرین ۳.۵۱

۳.۷۳ تمرین ۳.۵۲

۳.۷۴ تمرین ۳.۵۳

۳.۷۵ تمرین ۳.۵۷

۳.۷۶ تمرین ۳.۵۸

۳.۷۷ تمرین ۳.۵۹

۳.۷۸ تمرین ۳.۶۰

۳.۷۹ طرّاحی یک خرپای سه عضوی متقارن شکل ۲.۵ برای داشتن حداقل وزن به شکل زیر تعریف می شود :

تابع

$$f(x_1, x_2) = 2\sqrt{2}x_1 + x_2$$

را با قیود

$$g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{P_u}{x_1} + \frac{P_v}{(x_1 + \sqrt{2}\,x_2)}\right] - 20\,000 \leqq 0$$

$$g_2 = \frac{\sqrt{2}P_v}{(x_1 + \sqrt{2}\,x_2)} - 20\,000 \leqq 0$$

$$g_3 = -x_1 \leqq 0$$

$$g_4 = -x_2 \leqq 0$$

مینیمم کنید، در حالی که x_1 سطح مقطع عضو ۱ و ۳ (سازه متقارن) و x_2 سطح مقطع عضو ۲ ، $P_u = P\sin\theta$ ، $P_v = P\cos\theta$ با $P > 0$ و $0 \leq \theta \leq 90$. برای $\theta = 60°$ تحدّب تابع را بررسی کنید.

۳.۸۰ برای مسأله خرپای سه میله ای تمرین ۳.۷۹ ، حالتی از شرایط K-T را در نظر بگیرید که فقط g_1 فعال است. شرایط را برای جواب بهین حل کرده و بازه‌ای از زاویهٔ بار θ را مشخص کنید که در آن جواب معتبر است.

۳.۸۱ برای مسأله خرپای سه میله ای تمرین ۳.۷۹ ، حالتی از شرایط K-T را در نظر بگیرید که

g_1 و g_2 فعالند. شرایط را برای یافتن جواب بهین حل کرده و بازه‌ای از زاویهٔ بار θ را مشخص کنید که در آن جواب معتبر است.

۳.۸۲ برای مسأله خرپای سه میله‌ای تمرین ۳.۷۹، حالتی از شرایط K-T را در نظر بگیرید که فقط g_2 فعال است. شرایط را برای یافتن جواب بهین حل کرده و بازه‌ای از زاویه بار θ را مشخص کنید که در آن جواب معتبر است.

۳.۸۳ برای مسألهٔ خرپای سه میلیه ای تمرین ۳.۷۹، حالتی از شرایط K–T را در نظر بگیرید که g_1 و g_4 فعالند. شرایط را برای یافتن جواب بهین حل کرده و بازه‌ای از زاویه بار θ را مشخص کنید که در آن جواب معتبر است.

بخش ۳.۶ شرایط مرتبهٔ دو برای بهینه‌سازی مقید

۳.۸۴ *با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید*

۱. یک مسأله برنامه‌ریزی محدب همیشه یک نقطه مینیمم فراگیر منحصر به فرد دارد.

۲. برای یک مسأله برنامه‌ریزی محدب، شرایط لازم K-T کافی نیز هستند.

۳. هسیان تابع لاگرانژ در نقاط مینیمم مقید باید معین مثبت باشد.

۴. برای یک مسأله مقید، اگر شرایط کافی قضیهٔ ۳.۱۲ نقض شود، امکان مینیمم بودن نقطهٔ نامزد $\mathbf{x}^*$ منتفی نیست.

۵. اگر هسیان تابع لاگرانژ در $\mathbf{x}^*$، $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*)$، معین مثبت باشد، مسأله طرّاحی بهین محدب است.

۶. برای یک مسأله مقید، شرایط کافی در $\mathbf{x}^*$ در صورتی برآورده می‌شود که در همسایگی $\mathbf{x}^*$ جهت قابل قبولی که در آن امتداد تابع هزینه کاهش یابد وجود نداشته باشد.

مسائل زیر را از راه ترسیمی حل کنید. برای نقاط نامزد مینیمم محلی، شرایط لازم و کافی را بررسی نموده و درستی آنها را از روی ترسیمه مطمئن شوید.

۳.۸۵ تابع $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 - 8x_1$
را با قید $x_1 + x_2 = 4$ مینیمم کنید.

۳.۸۶ تابع $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 18x_1x_2 + 13x_2^2 - 4$ را با قید
$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 = 16$ مینیمم کنید.

۳.۸۷ تابع $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^3 - 2x_2^2$ را با قیود
$x_1 + 3x_2 \le 6$
$5x_1 + 2x_2 \le 10$
$x_1, x_2 \ge 0$ مینیمم کنید.

۳.۸۸ تابع $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 5x_1x_2 - 8x_1$ را با قید
$x_1 + x_2 \le 4$ مینیمم کنید.

۳.۸۹ تابع $f(x_1, x_2) = 9x_1^2 - 18x_1x_2 + 13x_2^2 - 4$ را با قید
$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \ge 16$ مینیمم کنید.

۳.۹۰ تابع $f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2$ را با قیدهای
$x_1 + x_2 \le 4$ و
$x_1 - 3x_2 = 1$ مینیمم کنید.

۳.۹۱ تابع $f(x_1, x_2) = x_1^3 - 16x_1 + 2x_2 - 3x_2^2$ را با قید
$x_1 + x_2 \le 3$ مینیمم کنید.

۳.۹۲ تابع $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 8x_2$ را با قید
$x_1^2 - x_2^2 + 8x_2 \le 16$ مینیمم کنید.

۳.۹۳ یک تیر یک سر گیردار تحت تأثیر بار متمرکز P (kN) قرار دارد، همچنان که در شکل E3.93 دیده می‌شود. گشتاور خمشی ماکزیمم در تیر Pl (kN.m) و نیروی برشی ماکزیمم P (kN) است. مسأله طرّاحی کمترین جرم را رابطه‌سازی نموده و به روش ترسیمی حل کنید. سطح مقطع را دایره توخالی در نظر بگیرید. شرایط لازم و کافی را در نقطهٔ بهین بررسی کنید.

مصالح نباید تحت تنشهای خمشی و برشی تسلیم شوند. تنش خمشی ماکزیمم از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

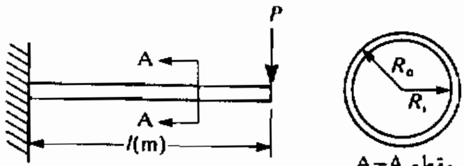
$$\sigma = \frac{PlR_o}{I}$$

که در آن I = گشتاور ماند سطح مقطع است. تنش برشی ماکزیمم از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\tau = \frac{P}{3I}(R_0^2 + R_0R_i + R_i^2)$$

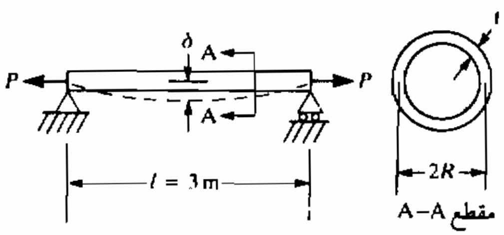
داده های مسأله عبارت است از $P = 10$ kN ؛ $l = 5$ m ؛ ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa ؛ تنش خمشی مجاز، $\sigma_a = 250$ MPa ؛ تنش برشی مجاز، $\tau_a = 90$ MPa ؛ و چگالی، $\rho = 7850\ \text{kg/m}^3$.

$0 \leqq R_0 \leqq 20$ cm; $\quad 0 \leqq R_i \leqq 20$ cm



شکل E3.93 تیر یک‌سر گیردار

۳.۹۴ یک تیر ستونی استوانه ای توخالی مانند شکل E3.94 طرّاحی کنید برای دو حالت زیر : وقتی که $P = 50$ (kN) است، تنش محوری σ باید از σ_a کمتر باشد، هنگامی که $P = 0$ است، خیز δ در اثر وزن تیر رابطه $\delta \leq 0.001l$ را برآورده کند. حدود ابعاد عبارتند از، $t = 0.10–1.0$ cm ، $R = 2.0–20.0$ cm و $R/t \geq 20$. مسألهٔ طرّاحی کمترین وزن را رابطه سازی کرده و به روش ترسیمی حل کنید. شرایط لازم و کافی را در نقاط جواب بررسی کرده و از راه ترسیمی امتحان کنید. داده های مسأله عبارتند از $\delta = \dfrac{5wl^4}{384EI}$ ، (N/m) طول / نیروی وزن تیر = w ؛ $\sigma_a = 250$ MPa ؛ ضریب ارتجاعی، $E = 210$ GPa ؛ چگالی، $\rho = 7800\ \text{kg/m}^3$ ؛ و $\sigma = P/A$ ؛ شتاب ثقل، $g = 9.80\ \text{m/s}^2$.



شکل E3.94 تیر استوانه‌ای توخالی

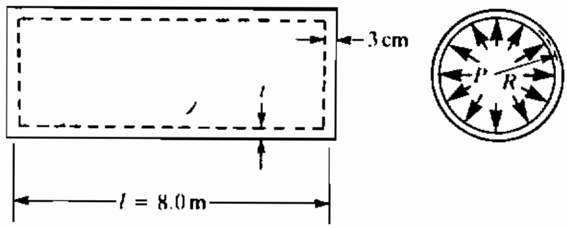
۳.۹۵ در طرّاحی یک مخزن استوانه‌ای جدار نازك تحت فشار مانند شکل E3.95 ، تابع هدف عبارت است از انتخاب شعاع متوسط R و ضخامت جداره t برای مینیمم کردن جرم کل. مخزن باید گنجایش حداقل $25\ m^3$ گاز با فشار 3.5 MPa را داشته باشد. لازم است که تنش محیطی مخزن از 210 MPa تجاوز نکند و کرنش محیطی از (1.0E−03) بیشتر نشود. تنش و کرنش محیطی از روابط زیر به دست می‌آیند

$$\sigma_c = \frac{PR}{t}, \qquad \varepsilon_c = \frac{PR(2-\nu)}{2Et}$$

که در آن ρ = چگالی ($7850\ kg/m^3$) ، σ_c = تنش محیطی (Pa) ، ε_c = کرنش محیطی ، P = فشار داخلی (Pa) ، E = ضریب ارتجاعی (210 GPa) و ν = نسبت پواسان (0.3) است.

۱. مسأله طرّاحی را رابطه سازی کرده و به روش ترسیمی حل کنید.

۲. شرایط لازم و کافی را در نقاط جواب بررسی کرده و از روی ترسیمه امتحان کنید.



شکل E3.95 مخزن تحت فشار استوانه‌ای

جواب بهین را برای مسائل زیر به روش ترسیمی پیدا کنید. شرایط لازم و کافی را در نقاط جواب بررسی کرده و آنها را روی ترسیمه امتحان کنید.

۳.۹۶ تمرین ۳.۴۶

۳.۹۷ تمرین ۳.۴۷

۳.۹۸ تمرین ۳.۴۵

۳.۹۹ تمرین ۳.۴۹

۳.۱۰۰* تمرین ۲.۴۸

۳.۱۰۱* تمرین ۲.۴۹

۳.۱۰۲* تمرین ۲.۵۰
۳.۱۰۳* تمرین ۲.۶۵

بخش ۳.۷ معنی فیزیکی ضرایب لاگرانژ

مسائل زیر را به روش ترسیمی حل کرده و شرایط لازم و کافی را در نقاط جواب امتحان کنید. اثر تغییرات طرف راست قیود را روی تابع هزینه نیز بررسی کنید.

۳.۱۰۴ تمرین ۳.۸۵
۳.۱۰۵ تمرین ۳.۸۶
۳.۱۰۶ تمرین ۳.۸۷
۳.۱۰۷ تمرین ۳.۸۸
۳.۱۰۸ تمرین ۳.۸۹
۳.۱۰۹ تمرین ۳.۹۰
۳.۱۱۰ تمرین ۳.۹۱
۳.۱۱۱ تمرین ۳.۹۲

بخش ۳.۸ مثالهای طرّاحی مهندسی

۳.۱۱۲ *با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید.*

۱. نقاط نامزد مینیمم برای یک مسأله مقید که شرایط کافی مرتبهٔ دو را برآورده نمی کنند می توانند طرحهای مینیمم فراگیر باشند.
۲. ضرایب لاگرانژ ممکن است برای محاسبهٔ ضرایب حساسیت تابع هزینه نسبت به پارامتر طرف راست استفاده شود، حتّی اگر قضیه ۳.۱۴ نتواند مورد استفاده قرار گیرد.
۳. بزرگی نسبی ضرایب لاگرانژ اطلاعات مفیدی برای مسائل طرّاحی عملی می دهند.

۳.۱۱۳ یک مخزن استوانه ای که دو انتهای آن بسته است باید طوری ساخته شود که حجم آن $250\pi\ m^3$ باشد. هزینهٔ ساخت متناسب است با سطح ورق فلزی مصرف شده و عبارت است از $\$400/m^2$. مخزن باید زیر سقف شیب داری جاسازی شود که محدودیت زیر را ایجاب می کند $H \le 8D$، که در آن H ارتفاع و D قطر مخزن است.

مسأله به شکل زیر رابطه سازی می شود. تابع

$$f = 400(0.5\pi D^2 + \pi DH)$$

را با قیود

$$\frac{\pi}{4} D^2 H = 250\pi, \qquad \text{و} \quad H \leqq 8D$$

مینیمم کنید. از قیود دیگر صرف نظر کنید.

۱. تحدب مسأله را بررسی کنید.

۲. شرایط لازم کان ـ تاکر را بنویسید.

۳. شرایط لازم کان ـ تاکر را برای به دست آوردن نقاط مینیمم محلی حل کنید. شرایط کافی را بررسی کرده و آن شرایط را از راه ترسیمی آزمایش کنید.

۴. اگر حجم لازم به جای $250\pi\ \mathrm{m}^3$ به $255\pi\ \mathrm{m}^3$ تغییر یابد، تغییر تابع هزینه چقدر خواهد بود.

۳.۱۱۴ یک خرپای سه میله ای متقارن (سطح مقطع عضو ۱ مانند عضو ۳ است) برای تحمل بار P باید طرّاحی شود مانند شکل ۲.۵ . علایم زیر استفاده می شود:

$S_1 = P\cos\theta\,(\mathrm{N})$

$S_2 = P\sin\theta\,(\mathrm{N})$

A_1 = مساحت سطح مقطع عضو ۱ و ۳ (m^2)

A_2 = مساحت سطح مقطع عضو ۲ (m^2)

σ_1 = تنش در عضو ۱ (Pa)

σ_2 = تنش در عضو ۲ (Pa)

σ_a = تنش مجاز (Pa)

ρ = چگالی مصالح

تنش در اعضا از روابط زیر محاسبه می شوند

$$\sigma_1 = \frac{S_1}{\sqrt{2}A_1} + \frac{S_2}{\sqrt{2}(A_1 + \sqrt{2}A_2)}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}S_2}{A_1 + \sqrt{2}A_2}$$

۱. مسأله طرّاحی کمترین جرم را با در نظر گرفتن A_1 و A_2 به عنوان متغیّرهای

طرّاحی رابطه سازی کنید.

۲. تحدب مسأله را بررسی کنید.

۳. شرایط لازم کان ـ تاکر را برای مسأله بنویسید.

۴. مسأله طرّاحی بهین را با داده های $P = 50$ kN، $\theta = 30°$، $\rho = 7800$ kg/m^3، $\sigma_a = 150$ MPa حل کنید. جواب را از راه ترسیمی توجیه کنید و شرایط لازم را روی ترسیمه بحث کنید.

۵. اگر σ_a به 152 MPa افزایش یابد اثر آن روی تابع هزینه چقدر خواهد بود؟

مسائل زیر را رابطه سازی نموده و به روش ترسیمی حل کنید؛ شرایط لازم و کافی را در نقاط جواب بررسی کنید، شرایط را روی ترسیمه بحث کرده و اثرات تغییر حدود قیود را روی تابع هزینه مطالعه کنید.

۳.۱۱۵	تمرین ۳.۴۹	۳.۱۱۶	تمرین ۳.۵۱
۳.۱۱۷	تمرین ۳.۵۲	۳.۱۱۸	تمرین ۳.۵۳
۳.۱۱۹	تمرین ۳.۵۷	۳.۱۲۰	تمرین ۳.۵۸
۳.۱۲۱	تمرین ۳.۵۹	۳.۱۲۲	تمرین ۳.۶۰
۳.۱۲۳	تمرین ۳.۹۳	۳.۱۲۴	تمرین ۳.۹۴
۳.۱۲۵	تمرین ۳.۴۶	۳.۱۲۶	تمرین ۳.۹۷
۳.۱۲۷	تمرین ۳.۴۵	۳.۱۲۸	تمرین ۳.۹۵
۳.۱۲۹*	تمرین ۲.۴۸	۳.۱۳۰*	تمرین ۲.۴۹
۳.۱۳۱*	تمرین ۲.۵۰	۳.۱۳۲*	تمرین ۲.۵۳
۳.۱۳۳*	تمرین ۲.۵۴	۳.۱۳۴*	تمرین ۲.۵۵
۳.۱۳۵*	تمرین ۲.۵۷	۳.۱۳۶*	تمرین ۲.۵۸
۳.۱۳۷*	تمرین ۲.۵۹	۳.۱۳۸*	تمرین ۲.۶۰
۳.۱۳۹*	تمرین ۲.۶۱	۳.۱۴۰*	تمرین ۲.۶۲
۳.۱۴۱*	تمرین ۲.۶۳	۳.۱۴۲*	تمرین ۲.۶۴
۳.۱۴۳*	تمرین ۲.۶۵		

فصل چهارم

روشهای برنامه ریزی خطّی برای طرّاحی بهین

۴.۱ مقدّمه

هر مسألهٔ طرّاحی بهین که توابع هزینه و قید آن برحسب متغیّرهای طرّاحی خطّی باشند یک *مسأله برنامه ریزی خطّی* نامیده می شود. ما شکل خلاصهٔ LP را برای مسائل برنامه ریزی خطّی استفاده خواهیم کرد. مسائل برنامه ریزی خطّی در بسیاری از زمینه های مهندسی مانند منابع آب، مهندسی سیستمها، کنترل جریان عبور و مرور، مدیریت منابع، مهندسی حمل و نقل، و مهندسی برق کاربرد دارد. در زمینه های هوا ـ فضا، خودرو، سازه، یا طرّاحی سیستمهای مکانیکی، بیشترِ مسائل خطّی نیستند. ولی مسائل طرّاحی سازه ای که از مفاهیم پلاستیک یا تحلیل حد استفاده می کنند می توانند به شکل مسائل برنامه ریزی خطّی رابطه سازی شوند. به علاوه، یک روش حل مسائل برنامه ریزی غیرخطّی این است که آنها را به صورت رشته ای از برنامه های خطّی تبدیل کنیم (فصل ۶). بسیاری از روشهای برنامه ریزی غیرخطّی نیز در هر چرخه یک مسألهٔ برنامه ریزی خطّی را حل می کنند. بنابراین روشهای برنامه ریزی خطّی در زمینه های بسیاری مفید بوده و باید بخوبی فرا گرفته شوند. این فصل به تشریح نظریهٔ اساسی و مفاهیم حل چنین مسائلی می پردازد.

در بخش ۲.۷ ، یک الگوی ریاضی کلّی برای طرّاحی بهین تعریف شد که هدف یافتن بردار متغیّرهای طرّاحی x برای مینیمم شدن تابع هزینه

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (۴.۱)$$

مشروط به قیود مساوی

$$h_j(\mathbf{x}) \equiv h_j(x_1, \ldots, x_n) = 0; \qquad j = 1 \text{ to } p \quad (۴.۲)$$

و قیود نامساوی

(۴.۳)

بود. در فصل ۳ ، یک نظریهٔ عمومی طرّاحی بهین برای حل الگو تشریح شد. آن نظریه برای حل مسائل LP نیز می تواند به کار رود. امّا، روشهای عددی بسیار مؤثرتری برای حل مستقیم مسائل LP وجود دارد. از آن جا که مسائل LP بی شماری در دنیای واقع وجود دارد، ارزش دارد که روشهای خاصی را به طور مفصّل برای آنها تشریح کنیم.

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \equiv \sum_{i=1}^{n} c_ix_i = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad (۴.۴)$$

در حالی که $i = 1, 2, \ldots, n$ ، c_i اعداد ثابت هستند. تمامی توابع مسائل LP می تواند به شکل فوق نشان داده شود. بنابراین، الگوی کلّی بهینه سازی معادله های (۴.۱) تا (۴.۳) در این فصل با شکلی خطّی جایگزین شده و یک شکل استاندارد برای آن تعریف می شود. یک الگوریتم سیمپلکس[1] دوگامی برای حل مسائل LP به دست آورده می شود و با مثالهای عددی ساده ای تشریح می شود. نظریه برنامه ریزی خطّی دوگانی و تحلیل پس بهینگی نیز بحث می شوند.

یادآور می شود که موضوع برنامه ریزی خطّی در سطح بسیار خوبی مدوّن شده و کتابهای مفصّل بسیار خوب و مقالات علمی متعدّدی در این باره در دسترس است [هادلی[2] ، ۱۹۶۱ ؛ اکف و سسینی[3]، ۱۹۶۸ ؛ راندولف و میکس[4]، ۱۹۷۸]. این مآخذ برای اثبات و فهم دقیق نتایجی که در این فصل از آنها استفاده شده می توانند مورد استفاده قرار گیرند.

برای نشان دادن مراحلی که برای حل مسائل LP نیاز است جزئیات روش سیمپلکس تشریح می شود. قبل از این که در جهت تبدیل الگوریتم به برنامهٔ رایانه ای کوشش شود، باید نرم افزارهای استاندارد حل مسائل LP موجود را شناسایی کرد. بسیاری از کتابخانه های مراکز رایانه ای دست کم یک نرم افزار برای چنین مسائلی دارند، به عنوان مثال

1. Simplex
2. Hadley
3. Ackoff and Sasieni
4. Randolph and Meeks

لیندو[1] [شریج[2]، ۱۹۸۱]. استفاده از نرم‌افزارهای در دسترس، بسیار اقتصادی‌تر از تهیّه نرم‌افزار جدید است.

خلاصه‌ای از مطالب این فصل در زیر می‌آید.

بخش ۴.۲ *تعریف یک مسأله برنامه‌ریزی خطّی (LP) استاندارد*. یک شکل استاندارد LP که مینیمم کردن تابع هزینه‌ای مشروط به قیود مساوی است تعریف می‌شود که در آن متغیّرهای طرّاحی نامنفی است. هر مسألهٔ LP دیگری می‌تواند به شکل استاندارد تبدیل شود. این تبدیلها با ذکر مثالهایی تشریح می‌شوند.

بخش ۴.۳ *خواص مسائل برنامه‌ریزی خطّی*. چند خاصیت اساسی مسائل LP بحث می‌شود و عبارات مختلفی که بعداً در این فصل به کار خواهد رفت تعریف می‌شود. نشان داده می‌شود که جواب بهین برای هر مسألهٔ LP همیشه روی مرز ناحیهٔ قابل قبول (مجموعهٔ قید) قرار دارد. به علاوه، آن جواب حداقل روی یکی از رأسهای ناحیهٔ قابل قبول محدّب (چند ضلعی مجموعهٔ قید) قرار دارد. چند قضیه LP بیان و اهمیت آنها بحث می‌شود. معنی هندسی حل بهین نیز ارائه می‌گردد.

بخش ۴.۴ *روش سیمپلکس*. اصول روش سیمپلکس برای حل مسائل LP تشریح می‌شود. پندارهٔ شکل کانونی، گام لولایی، سطر لولا، ستون لولا و عنصر لولا معرفی می‌شود. جدول سیمپلکس معرفی و علایم آن تشریح می‌گردد. روش به عنوان توسعهٔ فرآیند حذفی گوس ـ جردن[3] استاندارد برای حل سیستم معادلات خطّی $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ در حالی که $\mathbf{A}$ یک ماتریس $m \times n$ ($m < n$)، $\mathbf{x}$ برداری n بعدی و $\mathbf{b}$ برداری m بعدی است تشریح می‌شود. روش برای قیود "نوع $\le$" تدوین و تشریح می‌شود.

بخش ۴.۵ *جواب قابل قبول اصلی اوّلیه ـ متغیّرهای مصنوعی*. روش اساسی سیمپلکس بخش ۴.۴ برای در بر گرفتن قیود "نوع $\ge$" و مساوی بسط داده می‌شود. یک جواب قابل قبول اساسی برای شروع فرآیند حل مورد نیاز است. چنین جوابی اگر فقط قیود "نوع $\le$" وجود داشته باشند بلافاصله مشخص می‌شود. امّا برای قیود "نوع $\ge$" و مساوی باید متغیّرهای مصنوعی معرفی کرده و یک مسأله مینیمم سازی LP جانبی تعریف کنیم، سپس آن را حل کنیم. روش سیمپلکس استاندارد می‌تواند برای حل مسأله جانبی استفاده شود. این را گام I روش

1. LINDO
2. Schrage
3. Gauss-Jordan

سیمپلکس گویند. در پایان گام I، یک جواب قابل قبول اصلی برای مسألهٔ اصلی پیدا می شود. آن گاه گام II برای پیدا کردن جواب مسألهٔ LP ادامه می یابد.

یک شکل جایگزین روش سیمپلکس که به مراحل دوگامی فوق نیاز نداشته باشد نیز به بحث گذاشته می شود. این روش تابع هزینه اصلی را با اضافه کردن عبارت جریمه تغییر می دهد که گاهی به آن روش بیگ ام[1] می گویند.

یادآور می شود که روش سیمپلکس به یک مسألهٔ LP یک جواب کامل می دهد. به ما می گوید (۱) که آیا جوابی برای مسأله وجود دارد یا خیر (مسألهٔ قابل قبول و غیرقابل قبول)، (۲) و آیا مسأله بیکران است یا خیر، (۳) اگر جوابی وجود دارد روش آن را می یابد، و (۴) آیا جوابهای چندگانه برای مسأله وجود دارد یا خیر. این روش با ذکر مثالهایی تشریح می شود.

بخش ۶ .۴ *تحلیل پس بهینگی*. در مسائل طرّاحی مهندسی، همیشه راجع به پارامترهای مسأله نوعی عدم اطمینان وجود دارد. بنابراین مطالعهٔ حساسیت جواب نسبت به تغییر پارامترها مفید است. این نوع تحلیل عنوان بخش ۶ .۴ است. *ضرایب لاگرانژ* قیود را می توان از آخرین جدول LP به دست آورد. قضیهٔ ۱۴ .۳ حساسیت تغییرات قید که در فصل ۳ گفته شد نشان می دهد که ضرایب لاگرانژ مشتقهای ضمنی تابع هزینه نسبت به پارامترهای طرف راست قیود (حدود منابع) هستند. قضیه برای مطالعهٔ اثرات تغییرات حدود منابع روی تابع هزینه می تواند استفاده شود. برای یافتن حدود پارامترهای طرف راست، ضرایب هزینه و ماتریس ضرایب نیز روشهایی تشریح می شود. جدول نهایی می تواند برای یافتن تمامی محدوده ها به کار رود. اگر تغییرات پارامترها در محدودهٔ مشخصی باشد، آن گاه اطّلاعات جواب فعلی می تواند برای پیدا کردن جواب جدید به کار رود. در غیر این صورت، مسأله باید دوباره حل شود. روشها با ذکر مثالهایی تشریح می شوند.

بخش ۷ .۴ *دوگانی در برنامه ریزی خطی*. در ارتباط با هر مسأله LP مسألهٔ دیگری به نام *دوگان* وجود دارد. LP اصلی مسأله ابتدایی نامیده می شود. در تحلیل حساسیت، نظریهٔ دوگانی نقش مهمّی بازی می کند. چند قضیه دربارهٔ دوگان و مسألهٔ ابتدایی بیان و تشریح می شود. متغیّرهای دوگان به ضرایب لاگرانژ قیود مسألهٔ ابتدایی مربوط می شوند. جواب مسألهٔ دوگان می تواند از جواب نهایی مسألهٔ ابتدایی استخراج شود. یا، جواب مسألهٔ ابتدایی می تواند از جواب نهایی مسألهٔ دوگان استخراج شود. بنابراین، یک کدام از آنها باید حل شوند. این مطلب

---

1. Big-M

را با مثالهایی تشریح می کنیم.

۴.۲ تعریف مسأله برنامه ریزی خطّی استاندارد

مسائل برنامه ریزی خطّی ممکن است هم قیود مساوی و هم قیود نامساوی داشته باشند. همچنین بسیاری از مسائل، ماکزیمم سازی تابعی را دنبال می کنند در حالی که بعضی دیگر مینیمم سازی تابع را. مسألهٔ LP استاندارد می تواند به روشهای متعدد به صورت معادل تعریف شود و راههای عددی مشابهی می تواند برای رابطه سازیهای مختلف ارائه گردد. در این کتاب، *ما مسائل LP را به عنوان مینیمم سازی یک تابع با قیود مساوی و متغیّرهای طرّاحی نامنفی رابطه سازی می کنیم*. این شکل برخلاف ظاهرش آن قدرها هم محدودکننده نیست؛ زیرا تمامی مسائل LP دیگر به راحتی به آن تبدیل می شوند. ما فرآیند تبدیل یک مسأله LP را به شکل استاندارد توضیح خواهیم داد.

۴.۲.۱ قیدهای خطّی

i امین قید مساوی یا نامساوی که k متغیّر طرّاحی $y_j, j = 1 \text{ to } k$ دارد به یکی از سه شکل زیر نوشته می شود:

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{ik} y_k \{ \lesseqqgtr \} b_i \qquad (۴.۵)$$

در حالی که a_{ij} و b_i اعداد ثابت معلومی هستند. همچنین b_i ها، که حدود *منابع* نامیده می شوند، فرض می شود که همیشه نامنفی باشند، یعنی $b_i \geq 0$. همیشه در صورت نیاز می توان b_i ها را با ضرب کردن ۱- در دو طرف معادله (۴.۵) نامنفی ساخت. دقت کنید که ضرب کردن در ۱- جهت نامساوی را عوض می کند، یعنی "نوع $\leq$" را به "نوع$\geq$" و برعکس تبدیل می کند. به عنوان مثال قید $y_1 + 2y_2 \leq -2$ باید تبدیل به $-y_1 - 2y_2 \geq 2$ شود تا طرف راست آن عدد مثبت باشد.

چون در شکل استاندارد LP فقط قیدهای مساوی وجود دارند، لذا قیدهای نامساوی معادله (۴.۵) باید به مساوی تبدیل شوند. این محدودیت واقعی نیست، زیرا هر نامساوی با معرّفی متغیّر کمبود *یا زیادتی*[1] نامنفی می تواند به یک مساوی تبدیل شود، همچنان که در بند

1. surplus

زیر تشریح می شود. دقّت کنید که چون b_i ها نیز در معادلهٔ (۴.۵) باید نامنفی باشند، همیشه تبدیل نامساوی " $\geq$ " به شکل " $\leq$ " و نگه داشتن $b_i \geq 0$ امکان پذیر نیست. در فصلهای (۲) و (۳) شکل بهینه سازی استاندارد فقط با قیود "نوع $\leq$" تعریف شد. امّا در این فصل ما ناگزیر از کاربرد نامساویهای خطّی "نوع $\geq$" هستیم. بعداً دیده می شود که قیود "نوع $\geq$" چاره جویی خاصی را در روشهای LP نیاز دارند.

برای i امین قید "نوع $\leq$"، متغیّر کمبود نامنفی $s_i \geq 0$ را معرّفی و آن را به یک مساوی تبدیل می کنیم. داریم

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{ik} y_k + s_i = b_i \qquad (۴.۶)$$

در فصل (۳) نیز ما پندارهٔ متغیّرهای کمبود را مطرح کردیم. در آن جا به جای s_i از s_i^2 استفاده شد. آن جا به خاطر اجتناب از قید اضافی $s_i \geq 0$ این کار انجام شد. امّا در مسائل LP ما نمی توانیم از s_i^2 به عنوان متغیّر کمبود استفاده کنیم، زیرا مسأله را غیرخطّی می کند. بنابراین ما از s_i به عنوان متغیّر کمبود و قید اضافی $s_i \geq 0$ استفاده خواهیم کرد. برای مثال، قید $2y_1 - y_2 \leq 4$ به $2y_1 - y_2 + s_1 = 4$ تبدیل می شود با $s_i \geq 0$ به عنوان متغیّر کمبود.

به طور مشابه، قید i ام "نوع $\geq$" با کم کردن یک متغیّر زیادتی نامنفی $s_i \geq 0$ تبدیل به یک مساوی می شود، داریم

$$a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{ik} y_k - s_i = b_i \qquad (۴.۷)$$

پندارهٔ متغیّر زیادتی بسیار شبیه متغیّر کمبود است. برای قید "نوع $\geq$" طرف چپ همیشه باید بزرگتر یا مساوی طرف راست باشد، بنابراین برای تبدیل به یک مساوی ما باید یک متغیّر نامنفی از آن کم کنیم. برای مثال، قید $-y_1 + 2y_2 \geq 2$ تبدیل به $-y_1 + 2y_2 - s_1 = 2$ می شود با $s_i \geq 0$ به عنوان متغیّر زیادتی.

دقت کنید متغیّر زیادتی و کمبود مجهولات *اضافی* هستند و در فرآیند حل باید آنها را به دست آورد.

۴.۲.۲ متغیّرهای نامحدود

در مسائل LP استاندارد علاوه بر این که قیود باید از نوع مساوی باشند همهٔ متغیّرهای طرّاحی نیز باید نامنفی باشند، یعنی $y_i \geq 0, i = 1 \text{ to } k$. متغیّرهای طرّاحی مهندسی معمولاً

مقادیر کمیتهای فیزیکی مانند مساحت سطح مقطع، قطر سیم، و ضخامت مصالح هستند. بنابراین، منطقی است که برای آنها مقادیر نامنفی فرض کنیم. اگر متغیّر طرّاحی y_j ازنظر علامت محدودیت نداشته باشد، همیشه می تواند به عنوان تفاوت دو متغیّر نامنفی نوشته شود، یعنی $y_j = y_j^+ - y_j^-$ با $y_j^+ \geq 0$ و $y_j^- \geq 0$. این ترکیب در همهٔ معادلات جایگزین می شود و y_j^+ و y_j^- به عنوان مجهولات مسأله خواهند بود. در بهین، اگر $y_j^+ \geq y_j^-$، آن گاه y_j نامنفی است، و اگر $y_j^+ \leq y_j^-$ آن گاه y_j نامثبت است. با این تدبیر به ازای هر متغیّر آزاد، به ابعاد بردار طرّاحی یکی اضافه می شود.

۴.۲.۳ تعریف LP استاندارد

برای واضح بودن علایم، فرض کنید x بردار n بعدی باشد که k متغیّر طرّاحی اصلی و $(n-k)$ متغیّر کمبود، زیادتی، یا متغیّرهای دیگر دارد. مسألهٔ LP استاندارد را به عنوان مسألهٔ یافتن بردار n بعدی x برای مینیمم ساختن تابع هزینه خطی

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{۴.۸}$$

مشروط به قیود مساوی

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ldots \quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{۴.۹}$$

و متغیّرهای طرّاحی نامنفی

$$x_j \geqq 0; \qquad j = 1 \text{ to } n \tag{۴.۱۰}$$

تعریف می کنیم. فرض می کنیم مقادیر $b_i \geq 0$، $c_j\ (i = 1 \text{ to } m, j = 1 \text{ to } n)$ و a_{ij} اعداد ثابت معلوم و m و n اعداد صحیح مثبت باشند. دقت کنید که فقط b_i ها باید نامنفی باشند.

مسألهٔ LP استاندارد می تواند برحسب علایم جمع نیز نوشته شود، یعنی مینیمم کردن

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_ix_i \tag{۴.۱۱}$$

مشروط به قیود

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i; \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۴.۱۲}$$

$$x_j \geqq 0; \qquad j = 1 \text{ to } n$$

علایم *ماتریسی نیز می‌تواند برای تعریف مسألهٔ LP* به کار رود، یعنی مینیمم کردن

$$f = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{۴.۱۳}$$

مشروط به قیود

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{۴.۱۴}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \tag{۴.۱۵}$$

در حالی که $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ ، $\mathbf{c}$ و $\mathbf{x}$ بردارهای n بعدی، و $\mathbf{b}$ بردار m بعدی است.

رابطه سازی ای که در معادله های (۴.۸) تا (۴.۱۵) ارائه شدند بسیار عمومی تر از آنچه در ابتدا به نظر می رسیدند هستند، زیرا همهٔ مسائل LP می توانند به شکل آنها تبدیل شوند. تبدیل نامساوی "نوع ≤" و "نوع ≥" به مساوی با استفاده از متغیّرهای کمبود و زیادتی قبلاً تشریح شد. متغیّرنامحدود(آزاد)می تواند به صورت ترکیب‌دومتغیّرنامنفی نوشته شود. *ماکزیمم سازی تابع* نیز طبق معمول انجام می شود. به عنوان مثال، اگر هدف ماکزیمم سازی تابع (به جای مینیمم سازی) است، ما منفی آن را مینیمم می کنیم. ماکزیمم سازی تابع $z = (d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n)$ معادل مینیمم سازی منفی آن است، $f = -(d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n)$. دقت کنید که *تابعی که باید ماکزیمم شود در این فصل با z نشان داده می‌شود*. از این جا به بعد فرض می شود که مسألهٔ LP به شکل استاندارد معادلات (۴.۸) تا (۴.۱۵) تبدیل شده است. یادآور می شود که طرفهای راست (حدود منابع) b_i همه معادلات در شکل LP استاندارد باید نامنفی باشند.

مثال ۴.۱ تبدیل به شکل LP استاندارد. مسألهٔ زیر را به شکل LP استاندارد تبدیل کنید.

تابع

$$z = 2y_1 + 5y_2$$

را مشروط به

$$3y_1 + 2y_2 \leqq 12$$

$$2y_1 + 3y_2 \geqq 6$$

y_2 ازنظر علامت نامحدود است $y_1 \geqq 0,$

ماکزیمم کنید.

حل. برای تبدیل مسأله به شکل LP استاندارد، گامهای زیر را بر می داریم:

۱. چون y_2 ازنظر علامت نامحدود است، آن را به دو قسمت مثبت و منفی می شکنیم $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ با $y_2^+ \geq 0, y_2^- \geq 0$.

۲. با جای گزینی تعریف جدید y_2 در مسأله، داریم

تابع

$$z = 2y_1 + 5(y_2^+ - y_2^-)$$

را مشروط به

$$3y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) \leqq 12$$
$$2y_1 + 3(y_2^+ - y_2^-) \geqq 6$$
$$y_1, y_2^+, y_2^- \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۳. طرف راست هر دو قید نامنفی است، پس آنها شکل استاندارد را دارند و نیازی به تغییر آنها نداریم.

۴. با تبدیل مسأله به مینیمم سازی مشروط به قیود مساوی، شکل استاندارد مسأله عبارت می شود از

تابع

$$f = -2y_1 - 5(y_2^+ - y_2^-)$$

را مشروط به

$$3y_1 + 2(y_2^+ - y_2^-) + s_1 = 12$$
$$2y_1 + 3(y_2^+ - y_2^-) - s_2 = 6$$
$$y_1, y_2^+, y_2^-, s_1, s_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید. در حالی که s_1 = متغیّر کمبود برای قید اوّل و s_2 = متغیّر زیادتی برای قید دوم است.

۵ . می توانیم متغیّرها را مجدداً تعریف کنیم

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_2^+,\ x_3 = y_2^-,\ x_4 = s_1,\ x_5 = s_2$$

و شکل استاندارد را دوباره بنویسیم . داریم

تابع

$$f = -2x_1 - 5x_2 + 5x_3$$

را مشروط به

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 = 6$$
$$x_i \geqq 0, \qquad i = 1 \text{ to } 5$$

مینیمم کنید .

با مقایسهٔ روابط اخیر با معادله های (۴ . ۱۳) تا (۴ . ۱۵)، متغیّرهای زیر را می توان تعریف کرد :

$m = 2$ (تعداد معادله ها)

$n = 5$ (تعداد متغیرها)

$$\mathbf{x} = [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5]^T$$
$$\mathbf{c} = [-2\ \ -5\ \ 5\ \ 0\ \ 0]^T$$
$$\mathbf{b} = [12\ \ 6]^T$$
$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{2\times 5} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

۴.۳ مفاهیم اساسی مربوط به مسائل برنامه ریزی خطّی

مفاهیم و عبارات متعدّدی در ارتباط با مسائل برنامه ریزی خطّی وجود دارد . از آن جا که در سراسر این فصل از آنها استفاده می شود ، در این بخش آنها را تعریف و تشریح می کنیم . فهم و به خاطر سپردن آنها برای استفاده های بعدی مفید خواهد بود .

۴.۳.۱ مفاهیم اساسی

چون تمامی توابع هر مسألهٔLP خطّی هستند ، ناحیهٔ قابل قبول (مجموعهٔ قید) تعریف شده

توسّط مساویها یا نامساویها محدب هستند (بخش ۳.۵). تابع هزینه نیز خطّی است، پس آن هم محدّب است. بنابراین مسألهٔ LP محدّب است و اگر جواب *بهینی* وجود داشته باشد، براساس قضیه ۳.۹ *فراگیر* است.

دقت کنید که حتی وقتی قیود نامساوی نیز در یک مسأله LP وجود دارند، *جواب اگر وجود داشته باشد حتماً روی مرز ناحیهٔ قابل قبول قرار خواهد داشت*؛ یعنی همیشه بعضی از قیود در بهین فعّال هستند. این را می توان با نوشتن شرایط لازم قضیهٔ ۳.۴ برای یک بهین نامقید دید. این شرایط یعنی $\partial f/\partial x_i = 0$ وقتی برای تابع هزینه معادلهٔ (۴.۸) نوشته شود به ما $c_i = 0$ برای $i = 1$ to n را می دهد. این امکان پذیر نیست، چون تمامی c_i ها نمی توانند صفر باشند (اگر تمامی c_i ها صفر باشند تابع هزینه ای وجود ندارد). بنابراین، از برهان خلف، *جواب هر مسألهٔ LP باید روی مرز ناحیهٔ قابل قبول باشد*. این مسأله برخلاف مسائل غیرخطّی عمومی است که بهین می توانست داخل و یا روی مرز ناحیهٔ قابل قبول باشد.

هر جواب بهین مسألهٔ LP باید قیدهای مساوی معادله های (۴.۹) را نیز برآورده سازد، در آن صورت است که جواب می تواند قابل قبول باشد. بنابراین برای داشتن یک مسألهٔ طرّاحی بهین معنی دار، معادلات (۴.۹) باید بیشتر از یک جواب داشته باشند. ما در میان آنها به دنبال جواب قابل قبولی می گردیم که کمترین هزینه را داشته باشد. برای داشتن چند جواب، تعداد معادلات مستقل خطّی (۴.۹) باید از n (تعداد متغیّرهای مسأله LP) کمتر باشد. (به بخش B.5 در پیوست B برای بحث بیشتر در حل عمومی m معادله و n مجهول مراجعه کنید.) در بحث زیر فرض می شود که همهٔ m سطر ماتریس $\mathbf{A}$ در معادله های (۴.۱۴) (یا معادله های ۴.۹) به طور خطّی مستقلّند و $m < n$ است. این یعنی معادله تکراری وجود ندارد. بنابراین معادله های (۴.۹) بی نهایت جواب دارند و ما دنبال جوابی قابل قبول هستیم که تابع هزینه را مینیمم کند. یک روش برای حل معادلات همزمان (۴.۹) روش حذفی گوسی است که در پیوست B تشریح شده است. روش سیمپلکس برای LP که بعداً در این فصل تشریح می شود از گامهای روش حذفی گوسی استفاده می کند. بنابراین، آن روش باید قبل از مطالعه روش سیمپلکس کاملاً مرور شود.

ما از مثال زیر برای توضیح پنداره های گذشته استفاده می کنیم. برای معرّفی اصطلاحات LP و گامهای اساسی روش سیمپلکس نیز از این مثال استفاده خواهد شد.

مثال ۴.۲ مسألهٔ ماکزیمم سازی سود ـ ویژگیهای جواب مسائل LP. به عنوان مثالی از حل

معادله های قیود، ما مسأله ماکزیمم سازی را که به روش ترسیمی در بخش ۱ . ۸ . ۲ حل شد در نظر می گیریم. مسأله عبارت است از یافتن x_1 و x_2 برای مینیمم ساختن

$$f = -400x_1 - 600x_2 \tag{الف}$$

مشروط به

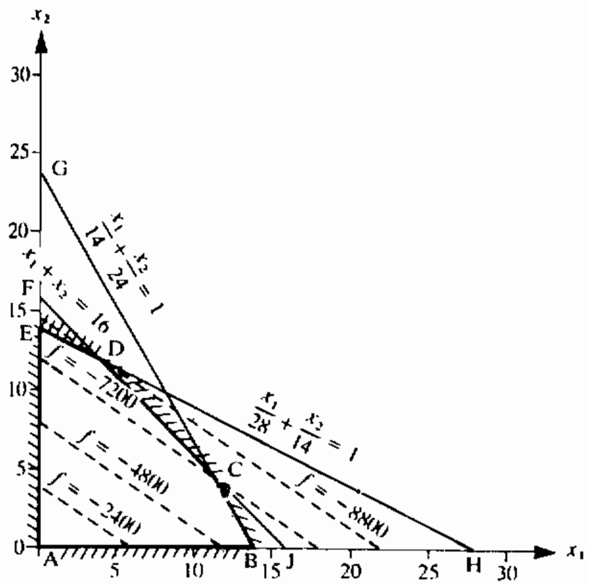
$$x_1 + x_2 \leqq 16 \tag{ب}$$

$$\tfrac{1}{28}x_1 + \tfrac{1}{14}x_2 \leqq 1 \tag{پ}$$

$$\tfrac{1}{14}x_1 + \tfrac{1}{24}x_2 \leqq 1 \tag{ت}$$

$$x_1, x_2 \geqq 0 \tag{ث}$$

حل. حل ترسیمی مسأله درشکل ۱ . ۴ ارائه شده است. تمامی قیدهای معادله های (ب) تا (ث) و چند خط هزینهٔ ثابت رسم شده اند. هر نقطهٔ ناحیه محصور در چند ضلعی ABCDE تمامی قیدهای معادله های (ب) تا (ت) و شرایط نامنفی معادلهٔ (ث) را برآورده می سازد. از شکل ۱ . ۴ دیده می شود که رأس D جواب بهین را می دهد.



شکل ۴.۱ حل ترسیمی مسأله LP ماکزیمم‌سازی سود. نقطهٔ بهین = (4, 12) ، هزینهٔ بهین = 8800 −

با معرفی متغیّرهای کمبود برای قیود معادله های (ب) تا (ت) و نوشتن مسأله به شکل استاندارد LP ، داریم

تابع

$$f = -400x_1 - 600x_2$$

را مشروط به

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 = 16 \\ & \tfrac{1}{28}x_1 + \tfrac{1}{14}x_2 + x_4 = 1 \\ & \tfrac{1}{14}x_1 + \tfrac{1}{24}x_2 + x_5 = 1 \\ & x_i \geqq 0, \qquad i = 1 \text{ to } 5 \end{aligned} \qquad \text{(ج)}$$

مینیمم کنید، در حالی که x_3 ، x_4 و x_5 به ترتیب متغیّرهای کمبود برای قیود اوّل، دوم و سوم هستند.

دقت کنید که هر سه معادلهٔ (ج) به طور خطّی مستقلّند. چون تعداد متغیّرها (۵) از تعداد معادلات (۳) بیشتر است، جواب یگانه ای برای معادلات (ج) وجود ندارد (به پیوست B مراجعه کنید). در حقیقت بی نهایت جواب وجود دارد. برای دیدن این، حل عمومی معادلات را با انتقال متغیّرهای x_1 و x_2 به طرف راست معادلات (ج) می نویسیم. داریم

$$\begin{aligned} & x_3 = 16 - x_1 - x_2 \\ & x_4 = 1 - \tfrac{1}{28}x_1 - \tfrac{1}{14}x_2 \\ & x_5 = 1 - \tfrac{1}{14}x_1 - \tfrac{1}{24}x_2 \end{aligned} \qquad \text{(چ)}$$

در این معادله ها x_1 و x_2 نقش متغیّرهای مستقل را دارند که می توانند هر مقداری داشته باشند، و x_3 ، x_4 و x_5 نقش متغیّرهای وابسته به آنها را ایفا می کنند. مقادیر مختلف x_1 و x_2 ، مقادیر مختلفی را برای x_3 ، x_4 و x_5 می دهد.

یک جواب جالب برای LP با صفر قرار دادن p متغیّر و به دست آوردن بقیهٔ متغیّرها حاصل می شود که p تفاوت تعداد متغیّرها (n) و تعداد معادلات قیود (m) ، یعنی $p = n - m$ است (به عنوان مثال در مورد معادلات (ج)، $p = 2$ است). با صفر قرار دادن دو متغیّر، جواب یگانه ای برای معادلات (ج) برای سه متغیّر باقی مانده به دست می آید. جوابی که *با صفر قرار دادن p متغیّر به دست می آید جواب اصلی* نامیده می شود.

برای مثال، یک جواب اصلی برای معادلات (ج) یا (چ)، با $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ به دست می‌آید که عبارت است از $x_3 = 16$ ، $x_4 = 1$ ، $x_5 = 1$. یک جواب اصلی دیگر با $x_1 = 0$ و $x_3 = 0$ حاصل می‌شود که عبارت است از $x_2 = 16$ ، $x_4 = -\frac{2}{7}$ و $x_5 = \frac{1}{3}$.

جدول ۱ . ۴ ، ۱۰ جواب اصلی برای مثال فعلی را که با روش ذکر شده در بند فوق به دست آمده است نشان می‌دهد. دقت کنید که از ۱۰ جواب دقیقاً ۵ تا (شماره‌های ۱ ، ۲ ، ۶ ، ۸ و ۹) متعلق به رؤوس چندضلعی شکل ۱ . ۴ اند، و ۵ تای دیگر شرط نامنفی بودن را نقض می‌کنند. بنابراین، تنها ۵ تا از ۱۰ جواب قابل قبول هستند. با حرکت خطوط هزینهٔ ثابت به موازات خودشان، براحتی دیده می‌شود که جواب بهین در نقطهٔ D است. دقت کنید جواب بهین در یکی از رؤوس چندضلعی قیود است. این را به عنوان خاصیت عمومی مسألهٔ LP بعداً مشاهده می‌کنیم. یعنی اگر یک LP جوابی داشته باشد، آن جواب دست کم یکی از رؤوس ناحیهٔ قابل قبول است.

جدول ۴.۱ ده جواب اصلی برای مسأله ماکزیمم‌سازی سود

شماره	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f	موقعیت در شکل ۱ . ۴
۱	۰	۰	۱۶	۱	۱	۰	A
۲	۰	۱۴	۲	۰	$\frac{۵}{۱۲}$	-۸۴۰۰	E
۳	۰	۱۶	۰	$-\frac{۲}{۷}$	$\frac{۱}{۳}$	–	غیرقابل قبول
۴	۰	۲۴	-۸	$-\frac{۵}{۷}$	۰	–	غیرقابل قبول
۵	۱۶	۰	۰	$\frac{۳}{۷}$	$-\frac{۲}{۷}$	–	غیرقابل قبول
۶	۱۴	۰	۲	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۵۶۰۰	B
۷	۲۸	۰	-۱۲	۰	-۱	–	غیرقابل قبول
۸	۴	۱۲	۰	۰	$\frac{۳}{۱۴}$	-۸۸۰۰	D
۹	۱۱٫۲	۴٫۸	۰	$\frac{۱}{۵}$	۰	-۷۳۶۰	C
۱۰	$\frac{۱۳۰}{۱۷}$	$\frac{۱۶۸}{۱۷}$	$-\frac{۲۶}{۱۷}$	۰	۰	–	غیرقابل قبول

۴.۳.۴ اصطلاحات LP

اکنون ما تعاریف و عبارات مربوط به LP را معرفی می کنیم. تعاریف مجموعه های محدّب، تابع محدب و قطاع خط که قبلاً در بخش ۵ . ۳ ارائه شدند در این جا نیز استفاده می شوند.

نقطهٔ رأس (فرین)[1]. نقطه ای از مجموعه است که روی قطاع خطّی که دو نقطهٔ دیگر مجموعه را به هم متصل می کند قرار نمی گیرد. به عنوان مثال، هر نقطه روی محیط دایره و هر رأس یک چندضلعی شرط یک نقطهٔ رأس را برآورده می کنند.

جواب قابل قبول . هر جواب معادلات قید که شرط نامنفی بودن را برآورده کند یک جواب قابل قبول است. در مثال ماکزیمم سازی سود شکل ۱ . ۴ ، هر نقطه ای که با چندضلعی ABCDE محدود شده، یک جواب قابل قبول است.

جواب اصلی . جوابی از معادلات قیود است که با صفر قرار دادن "تعداد اضافی" ($n - m$) متغیّر طرّاحی و حل همزمان آنها برای یافتن بقیه به دست می آید. متغیّرهایی که صفر قرار داده می شوند غیر اصلی ، و بقیه را اصلی می نامند. در مسألهٔ ماکزیمم سازی سود، هریک از ۱۰ جواب جدول ۱ . ۴ اصلی هستند (ولی فقط A ، B ، C ، D و E اصلی و قابل قبول هستند).

جواب قابل قبول اصلی. یک جواب اصلی که شرایط نامنفی بودن متغیّرها را برآورده کند، جواب قابل قبول اصلی نامیده می شود. دقت کنید جوابهای ۱ ، ۲ ، ۶ ، ۸ و ۹ در جدول ۱ . ۴ جوابهای قابل قبول اصلی هستند.

جواب اصلی تباهیده. اگر یک متغیّر اصلی مقدارش صفر شود، جواب را یک جواب اصلی تباهیده گویند.

جواب قابل قبول اصلی تباهیده. اگر یک متغیّر اصلی مقدارش صفر باشد جواب قابل قبول اصلی مربوطه را تباهیده گویند.

جواب بهین. جواب قابل قبولی که تابع هزینه را مینیمم سازد جواب بهین نامیده می شود.

جواب اصلی بهین . جواب قابل قبول اصلی که در آن مقدار تابع بهین است را جواب اصلی بهین گویند. از جدول ۱ . ۴ و شکل ۱ . ۴ روشن است که فقط جواب ۸ جواب اصلی بهین است.

چندضلعی محدّب. اگر ناحیهٔ قابل قبول (مجموعهٔ قید) برای یک مسألهٔ LP کراندار باشد، آن را چندضلعی محدّب می نامند.

---

1. Extreme

پایه. ستونهای مربوط به متغیّرهای اصلی ماتریس ضرایب A معادلات قیود پایه ای برای فضای برداری m ـ بعدی تشکیل می دهند. هر بردار m ـ بعدی می تواند به عنوان ترکیب خطّی از بردارهای پایه بیان شود.

مثال ۴.۳ به دست آوردن جواب اصلی. برای مسألهٔ زیر همهٔ جوابهای اصلی را یافته و جوابهای قابل قبول اصلی را روی شکل مجموعهٔ قید مشخص کنید:

تابع

$$z = 4x_1 + 5x_2$$

را مشروط به

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leqq 4 \\ x_1 + x_2 &\leqq 6 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

حل. ناحیهٔ قابل قبول برای مسأله در شکل ۴.۲ نشان داده شده است. با معرفی متغیّرهای کمبود x_3 و x_4 در معادله های قیود و تبدیل ماکزیمم سازی z به مینمم سازی، مسأله به شکل استاندارد LP به صورت زیر نوشته می شود

تابع

$$f = -4x_1 - 5x_2 \qquad \text{(الف)}$$

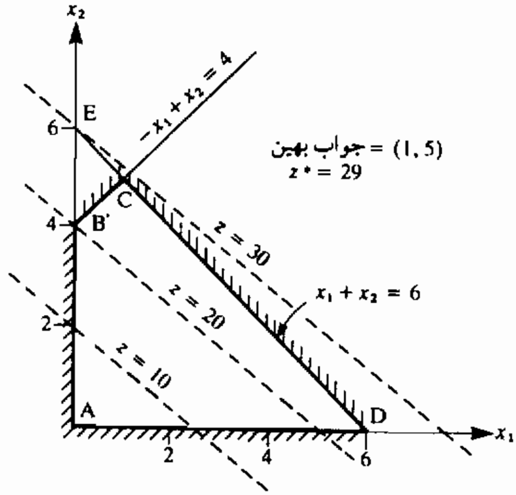
را مشروط به

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \end{aligned} \qquad \text{(ب)}$$

$$x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 4 \qquad \text{(پ)}$$

مینیمم کنید.

چون $n = 4$ و $m = 2$، مسألهٔ ۶ جواب اصلی دارد. این جوابها از معادلات (ب) با انتخاب دو متغیّر غیراصلی و دو متغیّر باقی مانده به عنوان متغیّر اصلی به دست می آیند. برای مثال، x_1 و x_2 را ممکن است به عنوان متغیّر غیراصلی، انتخاب کنیم یعنی $x_1 = 0$، $x_2 = 0$. آن گاه از معادلات (ب) داریم $x_3 = 4$، $x_4 = 6$. با $x_1 = 0$ و



شکل ۴.۲ حل ترسیمی مسألهٔ LP مثال ۴.۳ . نقطهٔ بهین = (1, 5) ، $z^* = 29$

$x_3 = 0$ نیـز از معـادلات (ب) داریم $x_2 = 4$ و $x_4 = 2$ کـه جـواب اصلی دیگری است . به طریق مشابه، سایر جوابهای اصلی می تواند به دست آید.

شش جواب اصلی مسأله به همراه مقدار تابع هزینهٔ مربوطه آنها در جدول ۴.۲ خلاصه شـده است . جـوابهـای قـابل قبـول اصلی عـبارتند از ۱ ، ۲ ، ۵ و ۶ . اینها در شکل ۴.۲ به ترتیب نقاط (0, 0) ، (0, 4) ، (6, 0) و (1, 5) هستند. مقدار مینیمم تابع هزینه درنقطهٔ (1, 5) به دست می‌آید که عبارت است از $f = -29$ (مقدار ماکزیمم $z = 29$) .

جدول ۴.۲ جوابهای اصلی مثال ۴.۳

شماره	x_1	x_2	x_3	x_4	f	موقعیت در شکل ۴.۲
۱	۰	۰	۴	۶	۰	A
۲	۰	۴	۰	۲	−۲۰	B
۳	۰	۶	−۲	۰	−	غیرقابل قبول
۴	−۴	۰	۰	۱۰	−	غیرقابل قبول
۵	۶	۰	۱۰	۰	−۲۴	D
۶	۱	۵	۰	۰	−۲۹	C

۴.۳.۳ جواب بهین مسائل LP

اکنون چند قضیهٔ مهم که جواب بهین را برای مسائل LP تعریف می کنند بیان شده و تشریح می شوند.

قضیهٔ ۴.۱ نقاط رأس و جواب قابل قبول اصلی. مجموع جوابهای قابل قبول مسألهٔ LP یک مجموعهٔ محدّب را تشکیل می دهند که نقاط رأس جوابهای قابل قبول اصلی است.

قضیهٔ *نقاط رأس چندضلعی محدّب را به جوابهای قابل قبول اصلی مربوط می کند*. این نتیجه ای مهم است که به جوابهای قابل قبول اصلی معنی هندسی می دهد؛ آنها رأسهای چندضلعی مجموعه قید هستند. به عنوان مثال، جوابهای قابل قبول اصلی در جدول ۱ . ۴ رأسهای مجموعهٔ قید شکل ۱ . ۴ هستند.

قضیه زیر اهمیت جوابهای قابل قبول اصلی را بیان می کند.

قضیهٔ ۴.۲ قضیهٔ اصلی برنامه ریزی خطّی. فرض کنید ماتریس ضرایب A معادلات قید، $m \times n$ و رتبه سطر کاملی دارد، یعنی m = رتبه (A)؛ آن گاه

۱ . اگر جواب قابل قبولی وجود داشته باشد، جواب قابل قبول اصلی است، و

۲ . اگر جواب قابل قبول بهینی وجود داشته باشد، آن جواب قابل قبول اصلی بهین است.

قسمت (۱) قضیه می گوید اگر جواب قابل قبولی برای مسألهٔ LP وجود داشته باشد، آن گاه باید آن جواب دست کم یک نقطهٔ فرین یا رأس از *ناحیهٔ قابل قبول محدّب باشد*. قسمت (۲) قضیه می گوید اگر مسألهٔ LP جوابی داشته باشد، آن گاه آن جواب یکی از رأسهای چندضلعی محدّب جوابهای قابل قبول است. اگر تابع هزینه موازی یکی از قیود باشد، ممکن است بیشتر از یک جواب وجود داشته باشد. همان طور که قبلاً گفته شد، مسألهٔ LP در این صورت بی نهایت طرح قابل قبول دارد. ما طرح قابل قبولی که تابع هزینه را مینیمم می کند جست و جو می کنیم. قضیهٔ ۲ . ۴ می گوید که جواب بهین باید یکی از جوابهای قابل قبول اصلی باشد، یعنی در یکی از نقاط رأس مجموعهٔ محدّب. پس، در حل مسألهٔ LP کار ما جست و جو برای جواب بهین فقط در میان جوابهای قابل قبول اصلی است. برای مسأله ای که n متغیّر و m قید دارد، حداکثر

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \qquad \text{(تعداد کل ترکیبها)}$$

جواب بهین وجود دارد. اینها فقط تعداد محدودی از احتمالات هستند. پس بنابر قضیهٔ ۲ . ۴ ، بهین در یکی از این نقاط است. باید برای یافتن بهین جست و جوی منظمی میان این جوابها انجام دهیم. اساس روش سیمپلکس که در بخش بعدی آمده جست و جو میان جوابهای قابل قبول اصلی به منظور کم کردن پیوستهٔ تابع هزینه است.

۴.۴ روش سیمپلکس

۴.۴.۱ پنداره های اساسی و گامهای روش سیمپلکس

قضیهٔ ۲ . ۴ تضمین می کند که برای مسألهٔ LP ، بهین یکی از جوابهای قابل قبول اصلی است. پندارهٔ اصلی روش سیمپلکس حرکت از یک جواب قابل قبول اصلی به جواب دیگر برای تقلیل پیوستهٔ تابع هزینه است تا این که به بهین برسد. پس، برای حل مسألهٔ LP ما به روش نظام مندی برای یافتن جوابهای قابل قبول اصلی معادلات (۹ . ۴) نیاز داریم. فرآیند *حذفی گوس ـ جردن*[1] (پیوست B ، بخش B.4 و B.5) چنین روشی را ارائه می دهد. قبل از این که روش سیمپلکس ارائه شود، مفاهیم سیمپلکس، شکلهای کانونی و گام لولایی معرفی می شوند. اینها اساس تدوین روش هستند.

۴.۴.۱.۱ سیمپلکس. یک سیمپلکس در فضایی دوبعدی از سه نقطه ای که روی خط مستقیمی قرار نگرفته اند تشکیل می شود. سیمپلکس در فضای سه بعدی، از چهار نقطه ای که روی یک صفحه نیستند تشکیل می شود. سه نقطه می توانند روی یک صفحه قرار داشته باشند ولی چهارمین نقطه باید در خارج از صفحه باشد. در حالت کلّی، یک سیمپلکس در فضای n بعدی یک پوستهٔ محدّب از هر $(n + ۱)$ نقطه ای است که روی یک سطح قرار نداشته باشند. پوستهٔ محدّب از $(n + ۱)$ نقطه، کوچکترین مجموعهٔ محدّبی است که همهٔ نقاط را شامل می شود. پس سیمپلکس نشان دهندهٔ مجموعهٔ محدّب است.

۴.۴.۱.۲ شکل کانونی. پندارهٔ شکل کانونی درتدوین روش سیمپلکس نقش مهمی دارد. بنابراین، این پنداره را معرّفی و کاربرد آن را بیان می کنیم.

---

1. Gauss-Jordan

یک سیستم معادلات همزمان $m \times n$ که در معادله های (۴ . ۹) داده شده با m = رتبه (A) را به شکل *کانونی* می گویند اگر هر معادله متغیّری (با ضریب واحد) داشته باشد که در معادلات دیگر ظاهر نشده باشد. شکل کانونی در حالت کلی مانند آنچه در معادلهٔ (۴ . ۱۶) نوشته شده نشان داده می شود. توجه کنید که متغیّرهای x_1 تا x_m فقط در یکی از معادلات ظاهر

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + a_{1,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + a_{2,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + a_{m,m+2}x_{m+2} + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (۴ . ۱۶)
$$

شده اند، x_1 در معادلهٔ اوّل، x_2 در معادلهٔ دوم و غیره. دقت کنید که این رشته از متغیّرهای x_1 تا x_m در معادلهٔ (۴ . ۱۶) نیز فقط برای راحتی انتخاب شده است. در حالت کلّی، هریک از متغیّرهای x_1 تا x_n می توانندبا اوّلین معادله مربوط باشند، مشروط به این که در معادلهٔ دیگری ظاهر نشوند. به طور مشابه، معادلهٔ دوم لازم نیست حتماً به متغیّر x_2 مربوط شود. این مطلب در بحث سیمپلکس روشنتر خواهد شد.

امکان دارد که شکل کانونی معادلهٔ (۴ . ۱۶) به عنوان یک معادله ماتریسی نوشته شود همچنان که در بخش B.5 از پیوست B نیز توضیح داده شده :

$$\mathbf{I}_{(m)}\mathbf{x}_{(m)} + \mathbf{Q}\mathbf{x}_{(n-m)} = \mathbf{b} \qquad (۴ . ۱۷)$$

در حالی که

$\mathbf{I}_{(m)} =$ ماتریس واحد m ـ بعدی

$\mathbf{x}_{(m)} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_m]^T;$ بردار m ـ بعدی

$x_{(n-m)} = [x_{m+1}\ \ldots\ x_n]^T;$ بردار $(n-m)$ بعدی

$\mathbf{Q} =$ ماتریس $m \times (n-m)$ که از ضرایب متغیّرهای x_{m+1} تا x_n در معادلهٔ (۴ . ۱۶) تشکیل شده

$\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_m]^T$

فرآیند حذفی گوس ـ جردن می تواند برای تبدیل یک سیستم معادلات به شکل کانونی معادلهٔ (۴ . ۱۶) یا (۴ . ۱۷) به کار رود. اگر درمعادلهٔ (۴ . ۱۷)، $\mathbf{x}_{(n-m)} = 0$ قرار دهیم، آن گاه، $\mathbf{x}_{(m)} = \mathbf{b}$ خواهد بود. متغیّرهایی که در $\mathbf{x}_{(n-m)}$ مساوی صفر قرار داده می شوند *غیراصلی* و

متغیّرهای $\mathbf{x}_{(m)}$ که از معادلهٔ (۴.۱۷) به دست می‌آید متغیّرهای *اصلی* نامیده می‌شوند. به جوابی که به این شکل به دست آمد جواب اصلی می‌گویند. اگر پارامترهای طرف راست $b_i \geq 0$ باشند، آن گاه شکل کانونی یک جواب قابل قبول اصلی را می‌دهد.

معادلهٔ (ج) درمثال ۴.۲ بخش ۴.۳ نشان‌دهندهٔ یک شکل کانونی است. دراین معادلات، متغیّر x_1 و x_2 غیراصلی‌اند، پس مقدارشان صفر است. متغیّرهای x_3، x_4 و x_5 اصلی و مقادیرشان از شکل کانونی به دست می‌آید که عبارتند از $x_3 = 16$، $x_4 = 1$ و $x_5 = 1$.

به طور مشابه، معادلات (ب) مثال ۴.۳ یک شکل کانونی است که جواب اصلی را می‌دهد و عبارت است از $x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $x_3 = 4$ و $x_4 = 6$.

۴.۴.۱.۳ جدول. رسم است که شکل کانونی را در جدولی مثل جدول ۴.۳ نمایش دهند. یک *جدول* به عنوان نمایش یک صحنه یا عکس تعریف می‌شود. جدول یک راه ساده برای نمایش تمامی اطّلاعاتی است که به یک مسألهٔ LP مربوط می‌شود. در روش سیمپلکس، جدول از ضرایب جدا شدهٔ متغیّرها در توابع هدف و قیود تشکیل شده است. جدول ۴.۳ حاوی ضرایب تابع هزینه نیست، امّا آنها همچنان که بعداً خواهیم دیدمی توانند به جدول اضافه شوند.

فهم شکل و علایم جدول آن چنان که در زیر تشریح می‌شود مهم است زیرا در تدوین روش سیمپلکس استفاده می‌شود.

۱. عناصر جدول از تبدیل سیستم معادله های خطّی $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ مربوط به مسألهٔ LP به شکل کانونی معادلهٔ (۴.۱۷) به دست می‌آید. در جدول ۴.۳، اوّلین m ستون مربوط به ماتریس

جدول ۴.۳ نمایش یک شکل کانونی در جدول

اصلی	x_1	x_2	.	.	.	x_m	x_{m+1}	x_{m+2}	.	.	.	x_n	طرف راست
x_1	۱	۰	.	.	.	۰	$a_{1,m+1}$	$a_{1,m+2}$	.	.	.	$a_{1,n}$	b_1
x_2	۰	۱	.	.	.	۰	$a_{2,m+1}$	$a_{2,m+2}$	.	.	.	$a_{2,n}$	b_2
x_3	۰	۰	.	.	.	۰	$a_{3,m+1}$	$a_{3,m+2}$	.	.	.	$a_{3,n}$	b_3
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x_m	۰	۰	.	.	.	۱	$a_{m,m+1}$	$a_{m,m+2}$	.	.	.	$a_{m,n}$	b_m

یکه، بقیه $(n-m)$ ستون مربوط به ماتریس $\mathbf{Q}$ و ستون آخر مربوط به طرف راست (RHS) بردار $\mathbf{b}$ در معادلهٔ (۴ . ۱۷) است.

۲. هر ستون جدول مربوط به یک متغیّر است؛ x_1 مربوط به ستون اوّل، x_2 مربوط به ستون دوم، و غیره. این مطلب به دلیل این است که i امین ستون حاوی ضرایب متغیّر x_i در هر ردیف در معادلهٔ (۴ . ۱۷) است.

۳. هر ردیف جدول حاوی ضرایب مربوط به سطر مورد نظر در معادلهٔ (۴ . ۱۷) است.

۴. هر ردیف جدول همچنین مربوط به متغیّری است که در آخرین ستون چپ جدول ۴ . ۳ ذکر شده. این متغیّرها به ستونهای ماتریس واحد در جدول بستگی دارند. در جدول ۴ . ۳ ، x_1 مربوط به ستون اوّل، x_2 مربوط به ستون دوم، و غیره است. دقّت کنید که ستونهای ماتریس واحد هر جایی در جدول می توانند ظاهر شوند. لزومی ندارد که حتّی به شکل دنباله ای باشند. چون متغیّرهای مربوط به ماتریس واحد، اصلی هستند، آخرین ستون چپ یک متغیّر اصلی را مشخص می کند که به هر سطر مربوط است. این مطلب با حل چند مثال روشنتر خواهد شد.

۵. چون هر متغیّر اصلی فقط در یک ردیف ظاهر می شود، مقدارش در آخرین ستون راست مشخص است (دقت کنید که طبق تعریف، متغیّرهای غیراصلی صفر هستند). برای مثال جدول ۴ . ۳ ، متغیّرهای اصلی مقادیر $x_i = b_i,\ i = 1 \text{ to } m$ را دارند. اگر همهٔ $b_i \geq 0$ باشند ما یک جواب قابل قبول اصلی داریم.

۶. جدول، متغیّرهای غیراصلی ، متغیّرهای اصلی (مربوط به ستونهای ماتریس واحد) و مقادیرشان را می دهد، یعنی یک جواب اصلی را می دهد. بعداً خواهیم دید که جدول می تواند با اضافه شدن عبارت تابع هزینه کاملتر شود که در این صورت مقدار تابع هزینه مربوط به جواب اصلی نیز بلافاصله از جدول به دست می آید.

۷. ستونهای مربوط به متغیّرهای اصلی را اصلی و بقیه را غیراصلی گویند.

۸. ستونهای *اصلی* پایه ای را برای فضای برداری m بعدی تشکیل می دهند یعنی، هر بردار m بعدی می تواند به صورت ترکیب خطّی از بردارهای اصلی بیان شود (به پیوست B ، بخش B.6 مراجعه کنید).

مثال ۴.۳ شکل کانونی و جدول. شکل کانونی مثال ۴ . ۲ را در جدول بنویسید.

جدول ۴.۴ جدول مسألهٔ LP مثال ۴.۴

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	۱	۱	۱	۰	۰	۱۶
x_4	$\frac{۱}{۲۸}$	$\frac{۱}{۱۴}$	۰	۱	۰	۱
x_5	$\frac{۱}{۱۴}$	$\frac{۱}{۲۴}$	۰	۰	۱	۱

حل. جدول ۴.۴ ، معادله (ج) مثال ۴.۲ را برحسب علایم جدول ۴.۳ نشان می دهد. دقت کنید که برای این مثال، تعداد معادله ها سه و تعداد متغیّرها پنج است، یعنی $m = 3$ و $n = 5$.

متغیّرهای x_3 ، x_4 و x_5 تنها در یک معادله ظاهر شده اند، پس ستونهای x_3 ، x_4 و x_5 ماتریس واحد $\mathbf{I}_{(m)}$ شکل کانونی معادلهٔ (۴.۱۷) را تعریف می کنند. بردار $\mathbf{x}_{(m)}$ و $\mathbf{x}_{(n-m)}$ به شکل زیر تعریف می شوند

$$\mathbf{x}_{(m)} = [x_3 \ \ x_4 \ \ x_5]^T$$
$$\mathbf{x}_{(n-m)} = [x_1 \ \ x_2]^T$$

ماتریس Q معادلهٔ (۴.۱۷) به شکل زیر تعریف می شود

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{28} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

اگر x_1 و x_2 به عنوان غیراصلی گرفته شوند، آن گاه مقادیر متغیّرهای اصلی از جدول به دست می آید که عبارتند از

$$x_3 = 16, \qquad x_4 = 1, \qquad x_5 = 1$$

۴.۴.۱.۴ گام لولایی. در روش سیمپلکس، ما می خواهیم میان جوابهای قابل قبول اصلی برای یافتن طرح بهین به شکل نظام مندی جست و جو کنیم. اگر از یک جواب قابل قبول اصلی شروع کنیم، می خواهیم برای کاهش هزینه جواب قابل قبول اصلی دیگری را بیابیم. این کار می تواند با تعویض متغیّر اصلی فعلی با یک متغیّر غیراصلی انجام شود. *گام لولایی* این کار را انجام می دهد و یک شکل کانونی جدیدی همچنان که در زیر تشریح می شود تعریف می کند.

یک متغیّر اصلی x_p $(1 \le p \le m)$ را که می خواهد با یک متغیّر غیراصلی x_q که در آن $(n - m) \le q \le n$ است تعویض شود در نظر می گیریم. بعداً توضیح می دهیم که چگونه x_p و x_q را مشخص می کنیم. ستون p ام اصلی با ستون غیراصلی q ام می خواهد عوض شود. این فقط وقتی ممکن است که عنصر لولای $a_{pq} \neq 0$ باشد.

دقّت کنید که x_q اگر از تمامی معادلات بجز p امی حذف شود اصلی خواهد بود. این کار می تواند با انجام یک گام حذفی گوس ـ جردن روی ستون q ام جدول ۴.۳ با استفاده از سطر p ام برای حذف، عملی شود. این کار همهٔ عناصر ستون q ام را صفر خواهد کرد بجز a_{pq} که برابر با یک می شود.

سطری که برای فرآیند حذف استفاده می شود (سطر p ام) *سطر لولا* نامیده می شود. ستونی که حذف روی آن انجام می شود (ستون q ام) *ستون لولا* نامیده می شود. فرآیند تعویض یک متغیّر اصلی با یک متغیّر غیراصلی را *گام لولایی* می نامند.

فرض کنید بعد از گام لولایی، ضریب جدید در شکل کانونی a'_{ij} باشد. آن گاه، *گام لولایی* برای انجام حذف در ستون q ام با استفاده از سطر p ام به عنوان سطر لولا با معادله های کلّی زیر بیان می شود.

$$a'_{pj} = a_{pj}/a_{pq}; \qquad j = 1 \text{ to } n \tag{۴.۱۸}$$

$$b'_p = b_p/a_{pq} \tag{۴.۱۹}$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - (a_{pj}/a_{pq})a_{iq}; \qquad \begin{cases} i \neq p,\ i = 1 \text{ to } m, \\ j = 1 \text{ to } n \end{cases}; \tag{۴.۲۰}$$

$$b'_i = b_i - (b_p/a_{pq})a_{iq}; \qquad i \neq p,\ i = 1 \text{ to } m \tag{۴.۲۱}$$

در معادله های (۴.۱۸) و (۴.۱۹)، سطر p ام جدول بسادگی بر عنصر لولای a_{pq} تقسیم می شود. معادله های (۴.۲۰) و (۴.۲۱) گام حذفی را در ستون q ام انجام می دهند. عناصر بالا و پایین سطر p ام با حذف مناسبی صفر می شوند. این معادله ها را می شود به شکل برنامه ای رایانه ای برای انجام گام لولایی نوشت.

فرآیند تعویض نقش دو متغیّر در مثال زیر تشریح می شود.

مثال ۴.۵ گام لولایی ـ تعویض متغیّر اصلی با غیراصلی. با فرض x_3 و x_4 به عنوان متغیّرهای اصلی، مثال ۴.۳ به شکل کانونی زیر نوشته می شود؛

تابع

$$f = -4x_1 - 5x_2$$

را به شرط

$$-x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4$$
$$x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 6$$
$$x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 4$$

مینیمم کنید. با تعویض x_1 با x_4 یعنی اصلی ساختن x_1 و غیراصلی ساختن متغیّر x_4 شکل کانونی جدید را به دست آورید.

حل. شکل کانونی داده شده می‌تواند در جدولی مثل ۴.۵ نوشته شود. برای شکل کانونی، x_1 و x_2 غیراصلی و x_3 و x_4 اصلی‌اند؛ یعنی $x_1 = x_2 = 0$ و $x_3 = 4$ و $x_4 = 6$. و این متعلق به نقطهٔ A در شکل ۴.۲ است. در جدول، متغیّرهای اصلی در آخرین ستون چپ مشخص شده که مقادیر آنها در آخرین ستون راست آمده است. متغیّرهای اصلی نیز با بررسی ستونهای جدول مشخص می‌شوند. متغیّرهای مربوط به ستونهای ماتریس واحد، اصلی هستند. محل عناصر واحد غیرصفر در یک ستون اصلی سطری را مشخص می‌کند که پارامتر طرف راستش b_i مقدار فعلی متغیّر اصلی مربوط به آن ستون است.

برای اصلی ساختن متغیّر x_1 و غیراصلی ساختن متغیّر x_4، یک نفر ممکن است مایل باشد که $a'_{21} = 1$ و $a'_{11} = 0$ قرار دهد. این x_1 را به جای x_4 متغیّر اصلی می‌سازد و شکل کانونی جدیدی به‌دست خواهد آمد. سطر دوم سطر لولاست یعنی $a_{21} = 1$، $(p = 2, q = 1)$ عنصر لولاست. با انجام حذف گوس ـ جردن در اوّلین ستون با $a_{21} = 1$ به عنوان عنصر لولا، دومین شکل کانونی را همچنان که در جدول ۴.۵ نشان داده شده به دست می‌آوریم. برای این شکل کانونی $x_2 = x_4 = 0$ متغیّرهای غیراصلی و $x_1 = 6$ و $x_3 = 10$ متغیّرهای اصلی‌اند. پس، با توجه به شکل ۴.۲، گام لولایی به حرکتی از رأس $A(0, 0)$ به رأس دیگر $D(6, 0)$ منجر می‌شود.

۴.۴.۱.۵ گامهای اساسی روش سیمپلکس. در روش سیمپلکس، ما با یک جواب اصلی یعنی از یک رأس چندضلعی محدب شروع می‌کنیم. آن گاه حرکتی به رأس مجاور انجام می‌شود که هم در ناحیه قابل قبول بوده و هم تابع هزینه را کاهش دهد. این کار با تعویض یک متغیّر اصلی با

جدول ۴.۵ گام لولایی برای تعویض متغیّر اصلی x_4 با متغیّر غیراصلی x_1 برای مثال ۴.۵

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	b	جواب اصلی
شکل کانونی	x_3	-1	1	1	0	4	$x_1 = 0, x_2 = 0$
اولیه	x_4	**1**	1	0	1	6	$x_3 = 4, x_4 = 6$

برای تعویض x_1 با x_4، سطر ۲ را به عنوان سطر لولا و ستون ۱ را به عنوان ستون لولا انتخاب می کنیم. حذف را با استفاده از a_{21} به عنوان لولا انجام می‌دهیم و شکل کانونی دوم را به دست می آوریم.

نتیجهٔ عمل لولایی

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	b	جواب اصلی
شکل کانونی	x_3	0	2	1	1	10	$x_1 = 6, x_3 = 10$
دوم	x_4	1	1	0	1	6	$x_1 = 6, x_3 = 10$

غیراصلی انجام می شود طوری که *قابل قبول بودن جواب جدید حفظ* شود. همچنین حرکت از یک رأس به رأس دیگر باید تابع هزینه f را بهبود (کاهش) دهد. در روش سیمپلکس، حرکت فقط به طرف رأس مجاور است. چون نقاط مجاور متعددی ممکن است اطراف رأس فعلی قرار داشته باشد؛ طبیعتاً ما می خواهیم نقطه ای را انتخاب کنیم که باعث بیشترین بهبود در تابع هزینه شود. اگر نقاط مجاور بهبود یکسانی را در f موجب شوند، انتخاب اختیاری است. بهبود در هر گام باعث جلوگیری از عقب گرد می شود. اکنون دو سؤال مطرح می شود:

۱. چگونه یک متغیّر غیراصلی را که باید اصلی شود تعیین کنیم؟

۲. کدام متغیّر از مجموعهٔ متغیّرهای اصلی باید غیر اصلی شود؟

روش سیمپلکس به این سؤالات که جنبهٔ نظری دارد پاسخ می دهد. ما این جنبه های نظری را در زیربخش بعدی بحث می کنیم. در این جا مثالی که گامهای اساسی روش سیمپلکس را تشریح می کند مورد توجه قرار می دهیم.

مثال ۴.۶ گامهای روش سیمپلکس. مسألهٔ LP زیر را حل کنید.

تابع

$$z = 2x_1 + x_2$$

را مشروط به

$$4x_1 + 3x_2 \leqq 12$$
$$2x_1 + x_2 \leqq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leqq 4$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

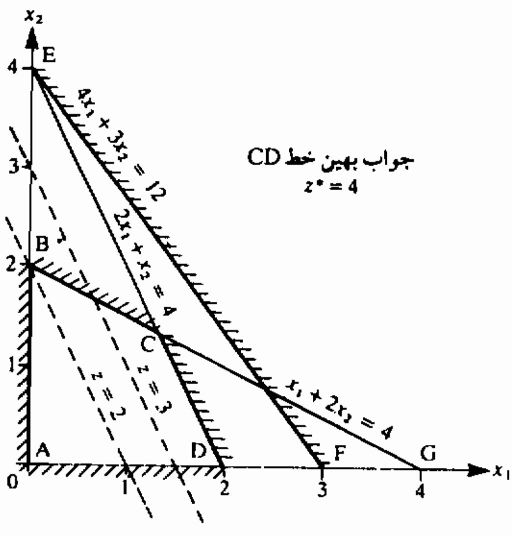
حل. حل ترسیمی مسأله در شکل ۴.۳ نشان داده شده است. دیده می شود که مسأله درامتداد خط C–D بی نهایت جواب ($z^* = 4$) دارد زیرا تابع هدف با قید دوم موازی است.

برای تشریح روش سیمپلکس، مراحل زیر را به کار می بریم:

۱. مسأله را به شکل استاندارد LP می نویسیم. این کار را با تبدیل ماکزیمم سازی z به منیمم سازی $f = -2x_1 - x_2$ ، و اضافه نمودن متغیّرهای کمبود x_3 ، x_4 و x_5 به قیود انجام می دهیم. پس مسأله می شود

تابع

$$f = -2x_1 - x_2$$



شکل ۴.۳ حل ترسیمی مسألهٔ LP مثال ۴.۶. حل بهین: در امتداد خط C–D. $z^* = 4$

را مشروط به

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\
2x_1 + \ \ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= \ \ 4 \\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= \ \ 4 \\
x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 5 &
\end{aligned}
$$

مینیمم کنید.

ما از جدول و علایم جدول ۴.۳ که با اضافه کردن عبارت تابع هزینه به آن به عنوان سطر آخر کامل‌تر خواهد شد استفاده می‌کنیم. جدول اولیه مسأله در جدول ۴.۶ نشان داده شده است.

۲. برای شروع روش سیمپلکس، یک جواب قابل قبول اصلی مورد نیاز است. این از قبل در جدول ۴.۶ با x_1 و x_2 به عنوان غیراصلی و x_3، x_4 و x_5 به عنوان اصلی در دسترس است:

متغیرهای اصلی	$x_3 = 12,\ x_4 = 4,\ x_5 = 4$
متغیرهای غیراصلی	$x_1 = 0,\ x_2 = 0$
تابع هزینه	$f = 0$

دقت کنید که سطر هزینه $f - 0 = 0$ است که مقدار فعلی تابع هزینه را صفر می‌دهد. این جواب نمایانگر نقطه A در شکل ۴.۳ است که هیچ قیدی بجز قیود نامنفی بودن متغیّرها فعّال نیست.

جدول ۴.۶ جدول اولیه مسأله LP مثال ۴.۶

	اصلی ↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	نسبت $\frac{b_i}{b_{i1}}$ ؛ $a_{i1} > 0$	
	x_3	4	3	1	0	0	12	$\frac{12}{4} = 3$	
x_4 خا x_1 داخ →	x	**<u>2</u>**	1	0	1	0	4	$\frac{4}{2} = 2$ ←	x_4 باید غیراصلی شود (سطر لولا)
	x_5	1	2	0	0	1	4	$\frac{4}{1} = 4$	
	تابع هزینه	**−2** ↑	−1	0	0	0	$f - 0$		

x_1 باید اصلی شود (ستون لولا)

توجه: انتخاب ضریب هزینه منفی و عضو لولا پررنگ‌تر نوشته شده و زیر آنها خط کشیده می‌شود.

۳. به سطر هزینه که *باید عناصر غیرصفر در ستونهای غیراصلی یعنی* x_1 *و* x_2 *داشته باشد نگاه می‌کنیم. اگر همهٔ عناصر غیرصفر نامنفی بودند، آن‌گاه ما یک جواب بهین داریم و روش سیمپلکس می‌تواند پایان یافته تلقی شود.*

۴. در مثال فعلی، در ستونهای غیراصلی عناصر منفی وجود دارند، پس جواب قابل قبول اصلی فعلی بهین نیست. ستون غیراصلی که ضریب هزینه منفی دارد انتخاب می‌کنیم. در جدول ۴.۶، ستون x_1 را انتخاب می‌کنیم. این کار متغیّر غیراصلی (x_1) را که باید اصلی شود مشخص می‌کند. پس، حذف در ستون x_1 انجام خواهد شد.

دقّت کنید که وقتی بیش از یک عنصر منفی در سطر هزینه وجود دارد، متغیّر انتخابی که می‌خواهد اصلی شود از میان آنان به طور دلخواه انتخاب می‌شود. قرارداد معمولی این است که متغیّری انتخاب شود که در سطر هزینه کمترین مقدار را دارد (یا عنصر منفی با بزرگترین قدر مطلق).

۵. برای مشخص کردن این که کدام متغیّر اصلی فعلی باید غیراصلی شود (یعنی انتخاب سطر لولا)، نسبت پارامتر طرف راست را به عنصر مثبت در ستون x_1 محاسبه می‌کنیم، همچنان که در جدول ۴.۶ آمده. سطری که کمترین نسبت را دارد انتخاب می‌کنیم، یعنی سطر دوم. این x_4 را غیراصلی خواهد ساخت. عنصر لولا عبارت است از $a_{21} = 2$ (تقاطع سطر و ستون لولا).

۶. عمل حذف را در ستون x_1 با استفاده از سطر ۲ به عنوان سطر لولا انجام می‌دهیم: سطر ۲ را بر ۲ تقسیم می‌کنیم؛ سطر جدید ۲ را در ۴ ضرب می‌کنیم و از سطر اوّل کم می‌کنیم؛ سطر جدید ۲ را از سطر ۳ کم می‌کنیم؛ و سطر ۲ جدید را در ۲ ضرب و به سطر هزینه اضافه می‌کنیم. در نتیجهٔ این گام حذف، جدول جدیدی به دست می‌آید که در جدول ۴.۷ نشان داده شده است. جواب قابل قبول اصلی جدید عبارت است از

متغیرهای اصلی	$x_3 = 4,\ x_1 = 2,\ x_5 = 2$
متغیرهای غیراصلی	$x_2 = 0,\ x_4 = 0$
تابع هزینه	$f + 4 = 0,\ f = -4$

جدول ۴.۷ جدول دوم مثال ۴.۶ برای اصلی ساختن متغیّر x_1

اصلی ↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	1	1	−2	0	4
x_1	1	0.5	0	0.5	0	2
x_5	0	1.5	0	−0.5	1	2
تابع هزینه	0	0 ↑	0	1 ↑	0	$f+4$

ضرایب هزینه در ستون غیراصلی نامنفی هستند؛ جدول جواب بهین را می دهد.

۷. این جواب در شکل ۴.۳ نقطهٔ D است. می بینیم که تابع هزینه از صفر به 4− کاهش یافته است. تمامی ضرایب در آخرین سطر، نامنفی هستند، پس کاهش بیشتر در تابع هزینه ناممکن است. بنابراین، جواب قبلی بهین است. دقّت کنید که ضرایب هزینه مربوط به متغیّر غیراصلی x_2 در سطر آخر صفر است. این مشخصه جواب چندگانه داشتن مسأله است. به طور کلّی، وقتی ضریب هزینهٔ مربوط به یک متغیّر غیراصلی در سطر آخر صفر است، مسأله ممکن است جوابهای چندگانه داشته باشد. این نکته را بعداً به طور مشروح بحث خواهیم کرد.

حال ببینیم *اگر سطری را با نسبت کمتر به عنوان سطر لولا انتخاب نکنیم چه پیش می‌آید*. فرض کنید $a_{11}=1$ در سطر سوم در جدول ۴.۶ عنصر لولا باشد. این متغیّر غیراصلی x_1 را با متغیّر اصلی x_5 تعویض خواهد کرد. با عمل حذف در ستون اول، جدول جدیدی که در جدول ۴.۸ نشان داده شده، به دست می آید.

از جدول داریم

متغیرهای اصلی	$x_3=-4,\ x_4=-4,\ x_1=4$
متغیرهای غیراصلی	$x_2=0,\ x_5=0$
تابع هزینه	$f+8=0,\ f=-8$

جدول ۴.۸ نتیجهٔ انتخاب لولای غیرمناسب در روش سیمپلکس برای مسألهٔ LP مثال ۴.۶

اصلی ↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	0	–5	1	0	–4	–4
x_4	0	–3	0	1	–2	–4
x_1	1	2	0	0	1	4
تابع هزینه	0	3	0	0	2	$f+8$

گام لولایی در جدول ۴.۶ که x_1 را اصلی و x_5 را غیراصلی می سازد جوابی می دهد که قابل قبول نیست.

این جواب در شکل ۴.۳ نقطهٔ G است. می بینیم که جواب اصلی قابل قبول نیست، زیرا x_3 و x_4 مقادیر منفی دارند. پس نتیجه می گیریم که اگر یک سطر با نسبت (پارامتر طرف راست به عنصر مثبت در ستون لولا) کمتر انتخاب نشود، جواب اصلی جدید ممکن است قابل قبول نباشد.

دقت کنید که برای مثال قبلی، تنها یک چرخه از روش سیمپلکس حل بهین را داد. به طور کلّی، چرخه های متعددی برای نامنفی شدن تمامی ضرایب سطر هزینه مورد نیاز است.

براساس مثال گذشته، *ما پنداره های اصلی و مراحل روش سیمپلکس را به شکل زیر خلاصه می کنیم*:

۱. روش برای شروع جست و جو به منظور یافتن جواب بهین به یک جواب قابل قبول اصلی اوّلیه (شکل کانونی) نیاز دارد. این شکل اگر همهٔ قیود از "نوع ≥" باشند براحتی در دسترس است، همچنان که در مثال قبلی مشاهده می شود. در آن حالت، انتخاب متغیّرهای کمبود به عنوان اصلی و متغیّرهای اوّلیه به عنوان غیراصلی جواب قابل قبول اصلی اوّلیه را می دهد. در این بخش، ما مراحل اساسی روش سیمپلکس را با استفاده از تنها قیدهای "نوع ≥" ارائه می کنیم. در بخش بعدی، قیدهای "نوع ≤" و مساوی بحث خواهد شد.

۲. برای این که روش سیمپلکس کار کند، *تابع هزینه باید فقط برحسب متغیّرهای غیراصلی بیان شود*. این دلیل نوشتن تابع هزینه در سطر آخر جدول سیمپلکس است که به موجب آن در حین گام لولایی متغیّر اصلی می تواند از آن حذف شود.

۳. چون تابع هزینه برحسب متغیّرهای غیر اصلی است، ضرایب هزینه مربوط به متغیّرهای اصلی در سطر آخر صفر هستند و آنهایی که به متغیّرهای غیراصلی مربوط می شوند غیرصفرند. *اگر تمامی عناصر غیرصفر سطر آخر منفی بودند*، در *نقطهٔ بهین نیستیم*؛ *در غیر این صورت به جواب بهین رسیده‌ایم*.

۴. اگر به جواب بهین نرسیدیم، نیاز به تعویض متغیّر اصلی فعلی با متغیّر غیراصلی داریم (یعنی به جواب قابل قبول اصلی دیگری نیاز داریم). برای انجام این کار ما ابتدا یک متغیّر *غیراصلی را که باید اصلی شود انتخاب می‌کنیم. یک متغیّر غیراصلی مربوط به ستونی که در سطر هزینه (آخرین سطر) ضریب منفی دارد انتخاب می شود تا اصلی شود*. این ستون *لولا* را مشخص می کند. برای انتخاب متغیّر اصلی فعلی که باید غیراصلی شود، ما نسبت مقادیر طرف راست (ستون آخر) به عنصر مثبت در ستون لولا را حساب می کنیم. سطر با کمترین نسبت را به عنوان سطر *لولا* و متغیّر اصلی مربوط به آن را که باید غیراصلی شود مشخص می کنیم.

۵. اگر اتّفاقاً همهٔ عناصر ستون لولا منفی باشند، آن گاه *مسأله* بیکران *است* و هزینه می تواند به بی نهایت منفی کاهش پیدا کند.

۶. وقتی سطر و ستون لولا مشخص شدند، *گام لولایی* با استفاده از فرآیند حذف با یک ساختن عنصر لولا و صفر کردن دیگر عناصر در ستون لولا کامل می شود. برای فرآیند حذف از سطر لولا استفاده می شود. گام لولایی به حذف متغیّرهای غیراصلی مربوط به ستون لولا از تمامی معادلات بجز معادلهٔ لولا می انجامد. دقت کنید که گام حذف برای سطر آخر (هزینه) نیز انجام می شود. این کار *جواب قابل قبول جدیدی که مقدار تابع هزینه کمتری دارد به دست می دهد*.

۷. گامهای قبلی تا به دست آمدن یک جواب برای مسأله تکرار می شوند.

۴.۴.۳* به دست آوردن روش سیمپلکس

در زیربخشهای گذشته، ما پنداره ها و مفاهیم روش سیمپلکس را ارائه کردیم. مراحل روش در یک مثال تشریح شدند. در این زیربخش، نظریه هایی که به مراحل استفاده شده در مسأله منجر شدند شرح می دهیم.

۴.۴.۳.۱ انتخاب متغیّر اصلی که باید غیراصلی شود. به دست آوردن روش سیمپلکس بر پاسخ

به دو سؤال که در زیربخش گذشته مطرح شد، استوار است. ما ابتدا به سؤال دوم پاسخ می دهیم، یعنی چه متغیّری از مجموعهٔ اصلی باید غیراصلی شود؟ در حال حاضر فرض کنید که x_r متغیّر غیراصلی است که باید اصلی شود. این نشانگر آن است که r امین ستون غیراصلی باید با یکی از ستونهای اصلی فعلی جایگزین شود. بعد از این تعویض، باید تمامی عناصر ستون r ام بجز یک جا که یک است صفر شده باشند.

برای مشخص کردن متغیّر اصلی که باید غیراصلی شود، لازم است سطر لولا را برای فرآیند حذف مشخص کنیم. بدین طریق متغیّر اصلی فعلی مربوط به آن سطر بعد از انجام عمل حذف غیراصلی می شود. برای مشخص کردن سطر لولا، همهٔ جملات مربوط به x_r را به طرف راست شکل کانونی معادلهٔ (۴.۱۶) منتقل می کنیم. سیستم معادلات مانند آنچه در معادلهٔ (۴.۲۲) آمده است، می شود. چون x_r می خواهد متغیّر اصلی شود مقدارش باید نامنفی باشد. جواب جدید نیز باید قابل قبول باقی بماند. بررسی طرف راست معادلهٔ (۴.۲۲)

$$
\begin{aligned}
x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 - a_{1,r}x_r \\
x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 - a_{2,r}x_r \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad \vdots \\
x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m - a_{m,r}x_r
\end{aligned}
\qquad (۴.۲۲)
$$

نشان می دهد که x_r نمی تواند به طور دلخواه افزایش پیدا کند. دلیل آن این است که اگر x_r به دلخواه بزرگ شود آن گاه بعضی از پارامترهای طرف راست $(b_i - a_{i,r}x_r)$، $i = 1 \text{ to } m$ ممکن است منفی شوند. چون پارامترهای طرف راست مقادیر جدید متغیّرهای اصلی هستند، این قید نامنفی بودن متغیّرها را نقض می کند و جواب جدید قابل قبول نخواهد بود. پس برای این که جواب جدید قابل قبول باشد، قید زیر باید به وسیلهٔ طرف راست معادلهٔ (۴.۲۲) در انتخاب یک متغیّر اصلی که می خواهد غیراصلی شود برآورده شود:

$$b_i - a_{i,r}x_r \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } m \qquad (۴.۲۳)$$

هر $a_{i,r}$ که نامثبت باشد بر این که چقدر x_r می تواند افزایش پیدا کند حدّی را تحمیل نمی کند زیرا نامعادلهٔ (۴.۲۳) همچنان برآورده شده می ماند $(b_i \geq 0)$. برای $a_{i,r}$ مثبت، x_r می تواند از صفر افزایش پیدا کند تا یکی از نامساویها در معادلهٔ (۴.۲۳) فعّال شود، یعنی یکی از طرفهای راست

معادلهٔ (۴ . ۲۲) صفر شود. افزایش بیشتر شرط نامنفی بودن معادلهٔ (۴ . ۲۳) را نقض می کند. پس بیشترین مقداری که متغیّر جدید x_r می تواند داشته باشد عبارت است از

$$\frac{b_s}{a_{s,r}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{i,r}}, a_{ir} > 0;\ i = 1 \text{ to } m \right\} \tag{۴ . ۲۴}$$

که در آن s اندیس کوچکترین نسبت است.

معادلهٔ (۴ . ۲۴) می گوید که ما نسبتهای پارامترهای طرف راست b_i را به عناصر مثبت در ستون r ام (a_{ir} ها) به دست می آوریم و اندیس سطر s را که کمترین نسبت را دارد انتخاب می کنیم. *در صورتی که چند انتخاب موجود باشد، انتخاب اندیس s بین اندیسهایی که شرایط یکسانی را دارند به دلخواه است و در این صورت جواب قابل قبول اصلی به دست آمده تباهیده خواهد بود.* پس، معادلهٔ (۴ . ۲۴) سطری را که کمترین نسبت $b_i/a_{i,r}$ را دارد مشخص می کند. متغیّر اصلی x_s مربوط به این سطر باید غیراصلی شود. *اگر تمامی $a_{i,r}$ ها در r امین ستون نامثبت باشند آن گاه x_r می تواند تا بی نهایت افزایش یابد.* این نشان می دهد که مسألهٔ LP بیکران است. هر مسألهٔ عملی با این وضعیت نشان دهندهٔ این است که قیدهای مسأله به طور صحیحی اعمال نشده اند و بدین خاطر رابطه سازی مسأله باید بازبینی شود.

۴.۴.۲.۲ انتخاب یك متغیّر غیراصلی که باید اصلی شود. اکنون ما می دانیم چگونه متغیّر اصلی را که باید جایگزین متغیّر غیراصلی شود انتخاب کنیم. حال ببینیم چگونه می توانیم متغیّر غیراصلی را که باید اصلی شود مشخص کنیم. این مطلب سؤال اوّلی را که قبلاً مطرح کردیم پاسخ خواهد داد. *پندارهٔ اصلی از آوردن یک متغیّر غیراصلی به مجموعهٔ اصلی بهبود بخشیدن طرح، یعنی کاهش مقدار فعلی تابع هزینه است.* اگر عبارت تابع هزینه را مورد بازبینی قرار دهیم نشانه ای برای بهبود مورد نیاز به دست می آید. برای این کار لازم است تابع هزینه فقط برحسب متغیّرهای غیراصلی نوشته شود. برای حذف متغیّرهای غیراصلی، به جای آنها از معادلهٔ (۴ . ۱۶) جایگزین می کنیم. مقدار فعلی متغیّرهای اصلی برحسب متغیّرهای غیراصلی عبارت است از

$$x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j; \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۴ . ۲۵}$$

با جایگزینی معادلهٔ (۴ . ۲۵) در معادلهٔ (۴ . ۱۱) و ساده کردن آن، عبارتی برای تابع هزینه برحسب متغیّرهای غیراصلی (x_j, $j = m + 1$ to n) به دست می آوریم که عبارت است از

$$f = f_0 + \sum_{j=m+1}^{n} c'_j x_j \qquad (۴.۲۶)$$

در حالی که f_0 مقدار فعلی تابع هزینه است که عبارت است از

$$f_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i c_i \qquad (۴.۲۷)$$

و پارامتر c'_j عبارت است از

$$c'_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i; \qquad j = (m+1) \text{ to } n \qquad (۴.۲۸)$$

ضرایب هزینه c'_j متغیّرهای غیراصلی، در روش سیمپلکس نقش کلیدی بازی می کنند و *ضرایب هزینهٔ نسبی یا کاهش یافته نامیده می‌شوند*. آنها برای مشخص کردن متغیّر غیراصلی که باید اصلی شود تا مقدار تابع هزینه فعلی کاهش یابد به کار می روند. بیان تابع هزینه برحسب متغیّرهای غیراصلی فعلی گامی کلیدی در روش سیمپلکس است. بعداً خواهیم دید که این کار مشکل نیست، زیرا مراحل حذفی گوسی می تواند براحتی برای عبارت تابع هزینه و حذف متغیّرهای اصلی از آن استفاده شود. وقتی این کار انجام شد، ضرایب هزینه کاهش یافته c'_j به سادگی مشخص می شوند.

به طور کلّی، ضرایب هزینهٔ کاهش یافته c'_j مربوط به متغیّرهای غیراصلی ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشند. فرض کنید یکی از c'_j ها منفی است. آن گاه، دقت کنید که از معادلهٔ (۴.۲۶) اگر متغیّر غیراصلی مربوطه مثبت باشد (یعنی اصلی شود)، مقدار f کاهش می یابد. اگر بیش از یک c'_j منفی وجود داشته باشد، روش معمولی که استفاده می شود، انتخاب متغیّرهای غیراصلی مربوط به کمترین c'_j است (یعنی c'_j منفی با بیشترین مقدار مطلق) برای اصلی شدن. پس اگر هریک از c'_j ها برای $(m+1) \le j \le n$ (برای متغیّرهای غیراصلی) منفی باشد، آن گاه ممکن است جواب قابل قبول اصلی جدیدی پیدا شود (اگر وجود داشته باشد) که تابع هزینه را بیشتر کاهش خواهد داد. اگر یک c'_j صفر باشد، آن گاه متغیّر غیراصلی مربوطه می تواند اصلی شود، بدون این که تأثیری روی تابع هزینه داشته باشد. اگر همه c'_j ها نامنفی باشند، آن گاه کاهش بیشتر تابع هزینه ممکن نیست، و جواب قابل قبول اصلی فعلی بهین است. این نتایج در قضایای زیر خلاصه می شوند.

قضیه ۴.۳ بهبود جواب قابل قبول اصلی. اگر یک جواب قابل قبول اصلی مفید[1] با تابع هزینه مربوطه f_0 داشته باشیم و فرض کنیم که برای بعضی از j ها $c'_j < 0$ است؛ آن گاه جواب قابل قبولی با $f < f_0$ وجود خواهد داشت. اگر ستون غیراصلی j ام مربوط به c'_j بتواند با بعضی از ستونها تعویض شود، برای جواب قابل قبول اصلی جدید $f < f_0$ خواهد بود. اگر ستون j ام نتواند با جایگزینی یک جواب قابل قبول اصلی بدهد، آن گاه ناحیهٔ قابل قبول (مجموعهٔ قید) بیکران بوده و تابع هزینه می تواند به اندازهٔ دلخواه کوچک اختیار شود (به طرف بی نهایت منفی).

قضیه ۴.۴ جواب بهین مسائل LP. اگر یک جواب قابل قبول اصلی برای همهٔ j ها ضرایب هزینه کاهش یافته $c'_j \geq 0$ داشته باشد، آن گاه آن جواب بهین است.

در نهایت، عبارت تابع هزینهٔ $f = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$ را می توان به عنوان یک معادلهٔ خطّی دیگر در جدول سیمپلکس در نظر گرفت؛ به عنوان مثال، سطر $(m + 1)$ ام. شخص گام لولایی را روی مجموعهٔ عناصر $(m + 1)$ معادله انجام می دهد و $x_1, x_2, \ldots, x_m$ و f متغیّرهای اصلی هستند. سطر آخر جدول نشان دهندهٔ عبارت تابع هزینهٔ معادلهٔ (۴ . ۲۶) است. بدین ترتیب تابع هزینه بعد از گام لولایی خودبه خود برحسب متغیّرهای غیراصلی است. ضرایب ستونهای غیراصلی در سطر آخر، ضرایب هزینهٔ کاهش یافته c'_j هستند.

دقّت کنید که *وقتی تمامی c'_j ها در ستونهای غیراصلی مثبت باشند، جواب بهین یگانه است. اگر دست کم یک c'_j (ضرایب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به متغیّرهای غیراصلی) صفر باشد، آن گاه احتمال دارد بهین دیگری وجود داشته باشد.* اگر متغیّر غیراصلی مربوط به ضریب هزینه کاهش یافتهٔ صفر بتواند براساس روش گفته شدهٔ قبلی اصلی شود، نقطهٔ رأس مربوط به بهین دیگر می تواند به دست آید. چون ضریب هزینهٔ کاهش یافته صفر است، مقدار تابع هزینهٔ بهین تغییر نخواهد کرد. هر نقطه روی قطاعی که نقاط رأس بهین را به هم وصل می کند نیز یک بهین است. دقت کنید که این بهینها فراگیر هستند زیرا مخالف شرط بهین محلّی اند، اگرچه بهین فراگیر منحصر به فردی وجود ندارد. ازنظر هندسی، بهین چندگانه برای مسألهٔ LP ایجاب می کند که صفحهٔ تابع هزینه موازی صفحهٔ یکی از قیدها باشد.

دقّت کنید اگر متغیّر غیراصلی مربوط به ضریب هزینهٔ کاهش یافتهٔ c'_j نتواند اصلی

1. nondegenerate

شود (به عنوان مثال وقتی تمامی a_{ij} ها در ستون c'_j منفی هستند)، آن گاه ناحیهٔ قابل قبول بیکران است.

مثال ۴.۷ حل به روش سیمپلکس. با استفاده از روش سیمپلکس، بهین را (اگر وجود دارد) برای مسألهٔ LP مثال ۴.۳ بیابید:

تابع

$$f = -4x_1 - 5x_2$$

را مشروط به

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 6 \\ x_i \geqq 0;\ i = 1 \text{ to } 4 \end{aligned}$$

مینیمم کنید.

حل. با نوشتن مسأله در جدول سیمپلکس، شکل کانونی اوّلیه را همچنان که در جدول ۴.۹ نشان داده شده به دست می‌آوریم. از جدول اوّلیه جواب قابل قبول اصلی عبارت است از

متغیرهای اصلی $x_3 = 4,\ x_4 = 6$

متغیرهای غیراصلی $x_1 = x_2 = 0$

از آخرین سطر جدول، تابع هزینه عبارت است از $f = 0$.

دقت کنید که تابع هزینه در سطر آخر برحسب متغیّرهای غیراصلی x_1 و x_2 است. پس، ضرایب در ستونهای x_1 و x_2، ضرایب هزینهٔ کاهش یافتهٔ c'_j هستند. با نگاه به آخرین سطر، می‌بینیم که ضرایب c'_j منفی‌اند. بنابراین، جواب اصلی فعلی بهین نیست. در سطر آخر، بیشترین ضریب منفی 5− مربوط به ستون دوم است. بنابراین برای اصلی شدن x_2 را انتخاب می کنیم؛ یا، حذف باید روی ستون دوم انجام شود. این کار اندیس ستون q را در معادلهٔ (۴.۱۸) مشخص می کند که برابر ۲ است. اکنون نسبت پارامتر طرف راست را نسبت به ضرایب لولا در q امین ستون یعنی b_i/a_{iq} به دست می‌آوریم، کمترین نسبت را برای سطر اوّل برابر ۴ به دست می‌آوریم. این نسبت سطر اوّل را براساس معادلهٔ (۴.۲۴) به عنوان سطر لولا مشخص می کند. بنابراین، متغیّر اصلی فعلی مربوط به سطر اوّل، x_3، باید غیراصلی شود.

جدول ۴.۹ حل مثال ۴.۷ به‌روش سیمپلکس

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	b	نسبت $\frac{b_i}{a_{iq}}$
جدول اوّلیه	خارج x_3 داخل x_2 $\rightarrow x_3$	-1	$\underline{1}$	1	0	4	$\frac{4}{1}=4$
لولا : a_{12}	x_4	1	1	0	1	6	$\frac{6}{1}=6$
	هزینه	-4	$\underline{-5}$	0	0	$f-0$	
دومین جدول	x_2	-1	1	1	0	4	
لولا : a_{21}	خارج x_4 داخل x_1 $\rightarrow x_4$	$\underline{2}$	0	-1	1	2	
	هزینه	$\underline{-9}$	0	5	0	$f+20$	
سومین جدول	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	
نقطه بهین	x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
	هزینه	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	$f+29$	
				$\uparrow$	$\uparrow$		

ضرایب هزینهٔ کاهش یافته در ستونهای غیراصلی نامنفی‌اند، جدول جواب بهین را می‌دهد.

حال گام لولایی را روی ستون ۲ با a_{12} به‌عنوان عنصر لولا انجام می‌دهیم. دومین شکل کانونی را همچنان که در جدول ۹ . ۴ مشاهده می‌شود به‌دست می‌آوریم. برای این شکل کانونی، جواب قابل قبول اصلی عبارت است از

متغیرهای اصلی $\quad x_2 = 4,\ x_4 = 2$

متغیرهای غیراصلی $\quad x_1 = x_3 = 0.$

تابع هزینه عبارت است از $f = -20$ (از سطر آخر $f + 20 = 0$) که نسبت به 0 بهبود یافته است. پس، این گام لولایی به‌حرکت از (0, 0) به (0, 4) در چندضلعی محدّب شکل ۲ . ۴ می‌انجامد. ضریب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به ستون غیراصلی x_1 منفی است. بنابراین، تابع هزینه می‌تواند بیشتر بهبود یابد. با تکرار مراحل ما $a_{21} = 2$ را به‌عنوان عنصر لولا به‌دست می‌آوریم که ایجاب می‌کند x_1 اصلی و x_4 غیراصلی شود.

شکل کانونی سوم در جدول ۹ . ۴ نشان داده شده است. برای این جدول، تمامی ضرایب هزینهٔ کاهش‌یافته c'_j (مربوط به متغیّرهای غیراصلی) در سطر آخر نامنفی اند. بنابراین، جدول به جواب بهین زیر می رسد

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad f = -29$$

در شکل ۲ . ۴ ، این نقطهٔ $(1, 5)$ است مانند قبل.

مثال ۸ . ۴ حل مسألهٔ ماکزیمم‌سازی سود به روش سیمپلکس. با استفاده از روش سیمپلکس حل بهین مسأله ماکزیمم‌سازی سود مثال ۲ . ۴ را به دست آورید.

حل. با معرفی متغیّرهای کمبود در معادلات قید (پ) تا (ث) در مثال ۲ . ۴ ، مسألهٔ LP را به شکل استاندارد مینیمم‌سازی تابع

$$f = -400x_1 - 600x_2$$

مشروط به

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 16 \\ \tfrac{1}{28}x_1 + \tfrac{1}{14}x_2 + x_4 &= 1 \\ \tfrac{1}{14}x_1 + \tfrac{1}{24}x_2 + x_5 &= 1 \\ x_i \geqq 0; i = 1 \text{ to } 5 \end{aligned}$$

به دست می‌آوریم. اکنون مسأله را به شکل استاندارد جدول سیمپلکس نوشته و اوّلین شکل کانونی را همچنان که در جدول ۱۰ . ۴ نشان داده شده به دست می‌آوریم. پس جواب قابل قبول اصلی اوّلیه عبارت است از

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 16, \quad x_4 = x_5 = 1, \quad f = 0$$

که در شکل ۱ . ۴ نقطهٔ A است. تابع هزینهٔ اوّلیه صفر و x_3 ، x_4 و x_5 متغیّرهای اصلی هستند.

با استفاده از روش سیمپلکس، توجه می کنیم که $a_{22} = \frac{1}{14}$ عنصر لولاست. این ایجاب می کند که x_4 جایگزین x_2 در مجموعهٔ اصلی شود. با انجام عمل لولایی و با استفاده از سطر دوم به عنوان سطر لولا، دومین شکل کانونی را همچنان که در جدول ۱۰ . ۴ نشان داده شده به دست می آوریم. در این نقطه جواب قابل قبول اصلی عبارت است از

که مربوط به نقطهٔ E در شکل ۴ . ۱ است . تابع هزینه به 8400- کاهش می یابد .

عنصـر لولا برای مـرحلهٔ بعـد a_{11} است کـه ایجـاب مـی کند x_3 جـایگزین x_1 در مجموعـه اصلی شود. با انجام عمل لولایی، شکل کانونی سوم در جدول ۴ . ۱۰ به‌دست می‌آید. در این جا تمامی ضرایب هزینهٔ کاهش یافته (متعلق به متغیّرهای غیراصلی) نامنفی‌اند. پس براساس قضیهٔ ۴ . ۴ ، جواب بهین عبارت است از

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 14, \qquad x_3 = 2, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = \tfrac{5}{12}$$

جدول ۴.۱۰ حل مثال ۴.۸ به‌روش سیمپلکس

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	نسبت $\frac{b_i}{a_{iq}}$	
	x_1	1	1	1	0	0	16	16	اوّلین جدول
x_4 خارج x_2 داخل $\rightarrow$	x_4	$\frac{1}{28}$	$\underline{\mathbf{\frac{1}{14}}}$	0	1	0	1	14	لولا : a_{22}
	x_5	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{24}$	0	0	1	1	24	
	هزینه	−400	$\underline{\mathbf{-600}}$	0	0	0	$f - 0$		
x_3 خارج x_1 داخل $\rightarrow$	x_3	$\underline{\mathbf{\frac{1}{2}}}$	0	1	−14	0	2	4	دومین جدول
	x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	14	0	14	28	لولا : a_{11}
	x_5	$\frac{17}{336}$	0	0	$\frac{-7}{12}$	1	$\frac{5}{12}$	$\frac{140}{17}$	
	هزینه	$\underline{\mathbf{-100}}$	0	0	8400	0	$f + 8400$		
	x_1	1	0	2	−28	0	4		سومین جدول
	x_2	0	1	−1	28	0	12		حل بهین
	x_5	0	0	$-\frac{17}{168}$	$\frac{5}{6}$	1	$\frac{3}{14}$		
	هزینه	0	0	200	5600	0	$f + 8800$		
				↑	↑				

ضرایب هزینهٔ کاهش یافته در ستونهای غیراصلی نامنفی‌اند، جدول جواب بهین را می دهد .

این جواب در شکل ۴ . ۱ نقطهٔ D است . مقدار بهین تابع هزینه 8800- است . دقّت کنید که c'_j های مربوط به متغیّرهای غیراصلی x_3 و x_4 مثبت هستند . بنابراین، بهین فراگیر یگانه است که در شکل ۴ . ۱ نیز مشاهده می شود .

۲.۴.۲.۳ الگوریتم سیمپلکس. اساس روش سیمپلکس شروع کردن از یک جواب قابل قبول اصلی اوّلیه یعنی از رأس چندضلعی محدب است . آن گاه حرکت به رأس مجاور جهت کاهش تابع هزینه انجام می شود تا به بهین برسد . مراحل این روش به صورت زیر خلاصه می شود :

مرحله ۱ . *شروع با یک جواب قابل قبول اصلی اوّلیه* . در صورتی که تمامی قیود از "نوع ≥" باشند چون متغیّرهای کمبود می توانند به عنوان اصلی انتخاب شوند و متغیّرهای حقیقی به عنوان غیراصلی ، جواب قابل قبول اصلی اوّلیه به راحتی به دست می آید . اگر قیود مساوی یا "نوع ≥" وجود داشته باشند، آن گاه روش سیمپلکس دو مرحله ای بخش آینده باید استفاده شود .

مرحله ۲ . *تابع هزینه باید فقط برحسب متغیّرهای غیراصلی باشد* . وقتی که تنها قیود "نوع ≥" وجود داشته باشند این به راحتی در دسترس است . متغیّرهای کمبود اصلی اند و در تابع هزینه ظاهر نمی شوند .

مرحله ۳ . *اگر تمامی ضرایب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به متغیّرهای غیراصلی نامنفی بودند، ما جواب بهین را داریم* . اگر ضریبی منفی بود ، احتمال بهبود بخشیدن به تابع هزینه وجود دارد . ستونی را که ضریب هزینهٔ کاهش یافتهٔ منفی دارد مشخص می کنیم ، زیرا متغیّرهای غیراصلی مربوط به آن می تواند اصلی شود . این ستون را ستون لولا می نامند .

مرحله ۴ . *اگر تمامی عناصر در ستون لولا منفی باشند، آن گاه مسأله بیکران است* . برای تصحیح موقعیت ، رابطه سازی مسألهٔ طرّاحی باید مورد بازبینی قرار گیرد . اگر در ستون لولا عناصر مثبت وجود دارند ، آن گاه نسبت پارامتر طرف راست به عنصر مثبت در ستون لولا را به دست آورده و سطری که کمترین مقدار نسبت را داشته باشد مشخص می کنیم . در صورتی که دو یا چند نسبت مقدار مساوی داشتند ، هر کدام می تواند انتخاب شود . متغیّر اصلی مربوط به این سطر ، باید غیراصلی شود (یعنی صفر شود) . سطر را سطر لولا و عنصر محل تلاقی این سطر با ستون لولا را عنصر لولا می نامند .

مرحله ۵. *مراحل لولایی را با استفاده از روش حذفی گوس ـ جردن و سطر لولای مشخص شده در مرحلهٔ ۴ کامل می کنیم.* عملیات حذف باید در سطر تابع هزینه نیز انجام شود.

مرحله ۶. *متغیّرهای اصلی و غیراصل* و مقادیرشان را مشخص می کنیم. مقدار تابع هدف را مشخص کرده و به مرحلهٔ ۳ می رویم.

مثال ۴.۹ مسألهٔ LP با جوابهای چندگانه. مسأله زیر را با روش سیمپلکس حل کنید. تابع

$$z = x_1 + 0.5x_2$$

را مشروط به قیود

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 8 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

حل. مسأله در زیربخش ۲.۸.۲ فصل ۲ به شکل ترسیمی حل شده است. همچنان که در شکل ۲.۸ می توان دید مسأله *جوابهای چندگانه* دارد. ما مسأله را با استفاده از روش سیمپلکس حل و چگونگی برخورد با جوابهای چندگانه را برای مسائل عمومی LP بحث می کنیم. مسأله را به شکل استاندارد LP تبدیل می کنیم. تابع

$$f = -x_1 - 0.5x_2$$

را مشروط به

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad &= 12 \\ 2x_1 + x_2 \quad\quad + x_4 &= 8 \\ x_i \geqq 0; \quad i = 1 \text{ to } 4 \end{aligned}$$

مینیمم کنید.

جدول ۴.۱۱ چرخه های روش سیمپلکس را نشان می دهد. نقطهٔ بهین درست بعد از یک چرخه به دست آمده و تمامی ضرایب هزینهٔ کاهش یافته در شکل کانونی دوم نامنفی اند. جواب عبارت است از

متغیرهای اصلی	$x_1 = 4,\ x_3 = 4$
متغیرهای غیراصلی	$x_2 = x_4 = 0$
تابع هزینهٔ بهین	$f = -4$

جدول ۴.۱۱ حل مثال ۴.۹ به‌روش سیمپلکس

		اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	b
جدول اولیه		x_3	2	3	1	0	12
لولا : a_{21}	x_4 خارج x_1 داخل →	x_4	$\underline{\mathbf{2}}$	1	0	1	8
		هزینه	$\underline{-1}$	-0.5	0	0	$f-0$
دومین جدول	x_3 خارج x_2 داخل →	x_3	0	$\underline{\mathbf{2}}$	1	-1	4
لولا : a_{12}		x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	4
		هزینه	0	$\underline{\mathbf{0}}$	0	$\frac{1}{2}$	$f+4^a$
سومین جدول		x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
		x_1	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	3
		هزینه	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$f+4^b$
					↑	↑	

ضرایب هزینهٔ کاهش یافته در ستون غیراصلی نامنفی است؛ جدول جواب بهین را می‌دهد. $c_3' = 0$ نشان می‌دهد احتمال جواب چندگانه وجود دارد.

[a] نقطه بهین اول؛ [b] نقطه بهین دوم

این جواب متعلق به نقطهٔ B در شکل ۲.۸ است.

در جدول دوم، *ضرایب هزینهٔ کاهش یافته برای متغیّر غیراصلی x_3 صفر است*. این بدان معنی است که می‌توان x_2 را بدون تغییر در مقدار تابع هزینهٔ بهین اصلی ساخت. این موضوع امکان وجود جوابهای *بهین چندگانه* را بیان می‌کند. با انجام عمل لولایی در ستون ۲، جواب دیگری می‌یابیم که عبارت است از (جدول ۴.۱۱):

متغیرهای اصلی	$x_1 = 3,\ x_2 = 2$
متغیرهای غیراصلی	$x_3 = x_4 = 0$
تابع هزینهٔ بهین	$f = -4$

این جواب متعلق به نقطهٔ C در شکل ۲.۸ است. دقت کنید هر جواب روی خط B–C

نیز جواب بهین را می دهد. وقتی تابع هزینه موازی یکی از قیود است جواب چندگانه می تواند اتفاق بیفتد. برای مثال فعلی، تابع هزینه موازی قید دوم است.

به طور کلّی، اگر ضرایب هزینهٔ کاهش یافته متعلق به یک متغیّر غیراصلی در آخرین جدول صفر باشد، احتمال جواب چندگانه وجود دارد. از نظر عملی، این موقعیت بدی نیست. در حقیقت ممکن است مطلوب هم باشد، زیرا حق انتخاب را به طرّاح می دهد. هر نقطهٔ مناسب روی خط مستقیمی که دو طرح بهین را به هم متصل می کند می تواند برای بهتر برآورده شدن نیازها انتخاب گردد. دقت کنید که تمامی نقاط طرح بهین فراگیرند زیرا با مفهوم جوابهای محلّی در تضادّند.

مثال ۴.۱۰ مشخص کردن یك مسأله بیکران به روش سیمپلکس. مسألهٔ LP زیر را حل کنید:

تابع

$$z = x_1 - 2x_2$$

را مشروط به

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geqq 0 \\ -2x_1 + 3x_2 &\leqq 6 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

حل. مسأله به روش ترسیمی در زیربخش ۲.۸.۳ حل شده است. از حل ترسیمی (شکل ۲.۹) می توان دید که مسأله بیکران است. ما مسأله را با استفاده از روش سیمپلکس حل خواهیم کرد می بینیم که چگونه می توان مسائل بیکران را تشخیص داد.

با نوشتن مسأله به شکل استاندارد سیمپلکس، اوّلین شکل کانونی را که در جدول ۴.۱۲ نشان داده شده به دست می آوریم که در آن x_3 و x_4 متغیّرهای کمبودند. (دقت کنید که اوّلین قید به شکل $-2x_1 + x_2 \leq 0$ تبدیل شده است.) جواب قابل قبول اصلی عبارت است از

متغیرهای اصلی	$x_3 = 0,\ x_4 = 5$
متغیرهای غیراصلی	$x_1 = x_2 = 0$
تابع هزینهٔ بهین	$f = 0$

جدول ۴.۱۲ شکل کانونی اوّلیه برای مثال ۴.۱۰ (مسألهٔ بیکران)

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	-2	1	1	0	0
x_4	-2	3	0	1	6
هزینه	$\underline{-1}$ ↑	2	0	0	$f-0$

c'_1 منفی است، ولی عنصر لولا به دست نمی‌آید (تمامی عناصر در ستون x_1 منفی‌اند)، این ایجاب می‌کند که جواب بیکران باشد.

به سطر آخر نگاه می‌کنیم و می‌بینیم که ضریب هزینهٔ کاهش یافته برای متغیّر غیراصلی x_1 منفی است. بنابراین x_1 می‌تواند متغیّر اصلی شود. امّا عنصر لولا در ستون اول نمی‌تواند انتخاب شود، زیرا عنصر مثبت وجود ندارد. احتمال انتخاب متغیّر غیراصلی دیگری که اصلی شود وجود ندارد. ضریب هزینهٔ کاهش یافته برای x_2 (متغیّر غیراصلی دیگر) مثبت است. بنابراین، گام لولایی دیگر نمی‌توان برداشت و هنوز به نقطهٔ بهین نیز نرسیده‌ایم. پس مسأله بیکران است.

مشاهدات گذشته به طورکلّی صادق است. در *مسائل بیکران*، برای متغیّرهای غیراصلی ضرایب هزینهٔ کاهش یافته منفی خواهد بود ولی امکان گام لولایی نیست.

۴.۵ جواب قابل قبول اصلی اوّلیه ـ متغیّرهای مصنوعی

۴.۵.۱ روش سیمپلکس دوگامی

۴.۵.۱.۱ متغیّرهای مصنوعی. بخش گذشته مراحل روش سیمپلکس برای مسائل LP را تشریح می‌کرد. یک نقطهٔ قابل قبول اصلی اوّلیه برای شروع مراحل لازم بود. یعنی، *شکل کانونی اوّلیه* مورد نیاز بود. ممکن است چنین نقطه‌ای را با عملیات جبری و تبدیل مسألهٔ LP استاندارد به شکل کانونی به دست آورد. اگر مسأله فقط از قیود "نوع ≤" با پارامترهای طرف راست نامنفی تشکیل شده باشد، آن‌گاه اضافه کردن متغیّرهای کمبود به شکل کانونی ختم می‌شود. جواب قابل قبول اصلی اوّلیه بلافاصله با صفر کردن متغیّرهای طرّاحی مسأله (که غیراصلی‌اند) به دست می‌آید. امّا در بسیاری از مسائل طرّاحی، قیود مساوی و "نوع ≥" وجود دارند. برای

چنین قیودی، جواب قابل قبول اصلی اولیه به راحتی به دست نمی آید. برای به دست آوردن چنین جوابی، متغیّرهای نامنفی جدیدی به هر قید مساوی یا "نوع ≥" اضافه می شود. این متغیّرها، *متغیّرهای مصنوعی*نامیده می شوند و با متغیّرهای زیادتی فرق دارند. آنها معنی فیزیکی ندارند، امّا با اضافه کردن آنها و اصلی به حساب آورد نشان، یک جواب قابل قبول اصلی اوّلیه به دست می آوریم.

متغیّرهای مصنوعی چندضلعی محدب مسأله اصلی را وسیعتر می کنند. جواب قابل قبول اوّلیه یک نقطهٔ فرین (رأس) از ناحیهٔ جدید توسعه یافته است. اکنون مسأله عبارت است از عبور از نقاط رأس در فضای توسعه یافته تا به یکی از نقاط رأس در فضای اصلی برسیم. وقتی به فضای اصلی رسیدیم تمامی متغیّرهای مصنوعی غیراصلی خواهند بود (یعنی مقدار صفر خواهند داشت). در این نقطه فضای توسعه یافته کاملاً از بین می رود، آن چنان که حرکتهای آینده فقط در میان نقاط رأس فضای اصلی است تا به نقطهٔ بهین برسیم. به طور خلاصه، بعد از ایجاد متغیّرهای مصنوعی آنها را بسرعت هرچه تمامتر حذف می کنیم. این کار، روش سیمپلکس دوگامی LP نامیده می شود.

۴.۵.۱.۲ تابع هزینهٔ مصنوعی. برای حذف متغیّرهای مصنوعی، یک تابع جانبی که *تابع هزینهٔ مصنوعی*نامیده می شود تعریف می کنیم. این تابع حاصل جمع تمامی متغیّرهای مصنوعی است. اگر هر قید مسألهٔ LP استاندارد به یک متغیّر مصنوعی نیاز داشته باشد، آن گاه مسأله بهینه سازی برای گام I به صورت زیر تعریف می شود (یادآور می شود که n تعداد متغیّرها و m تعداد قیود در مسألهٔ LP استاندارد معادله های (۴.۸) تا (۴.۱۰) است)

تابع

$$w = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \qquad (۴.۲۹)$$

را مشروط به قیود

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} &= b_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} &= b_m \\ x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } (n+m) \end{aligned} \qquad (۴.۳۰)$$

مینیمم کنید، در حالی که $x_{n+j}\,;\, j=1 \text{ to } m$ متغیّرهای مصنوعی هستند. معادلات قید (۴.۳۰) می‌تواند به شکل علامت جمع نوشته شود. داریم

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i; \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{۴.۳۱}$$

مسأله مینیمم سازی فوق برای گام I به شکلی مناسب برای روش سیمپلکس نیست. دلیل آن این است که ضرایب هزینهٔ کاهش یافته c'_j هنوز معلوم نیستند. آنها وقتی می‌توانند معیّن شوند که w برحسب متغیّرهای غیراصلی باشد. در حال حاضر w برحسب متغیّرهای اصلی $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ است و باید برحسب $x_1, \ldots, x_n$ شود. این کار می‌تواند با استفاده از عبارت قید برای حذف متغیّرهای اصلی از تابع هزینه مصنوعی انجام شود. با محاسبهٔ $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ از معادله‌های (۴.۳۰) و جای گزینی آنها درمعادلهٔ (۴.۲۹)، تابع هزینهٔ w را برحسب متغیّرهای غیراصلی $x_j\,;\, j=1 \text{ to } n$ به دست می‌آوریم. داریم

$$w = \sum_{i=1}^{m} b_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j \tag{۴.۳۲}$$

ضرایب هزینهٔ کاهش یافته c'_j ضرایب x_j در معادلهٔ (۴.۳۲) هستند، داریم

$$c'_j = -\sum_{i=1}^{m} a_{ij}; \qquad j = 1 \text{ to } n \tag{۴.۳۳}$$

حال روش سیمپلکس استاندارد می‌تواند برای حل مسألهٔ بهینه سازی جانبی گام I به کار رود. در این گام، تابع هزینهٔ اصلی به‌عنوان یک قید تلقی می‌شود و مرحلهٔ حذف نیز برای آن اجرا می‌شود. بدین طریق، تابع هزینه واقعی فقط در پایان گام I برحسب متغیّرهای غیراصلی است و روش سیمپلکس می‌تواند در گام II انجام شود. تمامی متغیّرهای مصنوعی در پایان گام I غیراصلی می‌شوند. چون w مجموع تمامی متغیّرهای مصنوعی است، مقدار مینیمم آن صفر است. وقتی $w = 0$ شد، به‌یک نقطهٔ رأس از مجموعهٔ محدّب اصلی رسیده‌ایم. آن گاه w به نفع f کنار زده می‌شود و چرخه‌ها تا مینیمم شدن f ادامه پیدا می‌کند. فرض کنید w نتواند صفر شود. این حالت وقتی است که هیچ کدام از ضرایب هزینهٔ کاهش یافته برای تابع هزینهٔ مصنوعی منفی نباشد و w بزرگتر از صفر باشد. واضح است که این بدین معنی است که ما نمی‌توانیم به مجموعهٔ محدّب اصلی برسیم و بنابراین جواب *قابل قبولی برای مسألهٔ طرّاحی اصلی* وجود ندارد، یعنی، آن یک مسألهٔ غیر قابل قبول است. در این هنگام طرّاح باید رابطه سازی

مسأله را مورد بازبینی قرار دهد که ممکن است بیش از حد مقید باشد یا رابطه سازی آن صحیح نباشد.

اگر قیود "نوع ≤" نیز در مسألهٔ اصلی وجود داشته باشد، اینها با اضافه کردن متغیّرهای کمبود که در فاز I به عنوان متغیّرهای اصلی محسوب می شوند به شکل استاندارد LP تبدیل می شوند. بنابراین تعداد متغیّرهای مصنوعی کمتر از m (تعداد کل قیود) است. براین اساس، تعداد متغیّرهای مصنوعی مورد نیاز برای به دست آوردن یک جواب قابل قبول اصلی اوّلیه نیز از m کمتر است. این بدین معنی است که مجموعها در معادله های (۴.۳۲) و (۴.۳۳) برای تمامی m قید نیستند. آنها فقط روی قیودی که متغیّر مصنوعی نیاز دارند جمع بسته می شوند.

۴.۵.۱.۳ الگوریتم گام I. روش سیمپلکس برای یافتن یک جواب قابل قبول اصلی اوّلیه با الگوریتم گام I زیر تشریح می شود.

مرحلهٔ ۱. *متغیّرهای کمبود و زیادتی* را برای قیود معرفی کرده و قیود را به شکل معادلهٔ (۴.۹) بیان کنید. اعداد ثابت طرف راست همهٔ قیود باید نامنفی باشند. اگر j امین متغیّر طرّاحی y_j ازنظر علامت محدودیتی نداشته باشد، در همهٔ معادلات $y_j = y_j^+ - y_j^-$ را جایگزین کنید.

مرحلهٔ ۲. *متغیّرهای مصنوعی* را برای قیود مساوی و "نوع ≥" مثل معادله های (۴.۳۰) تعریف کنید. این سیستم معادلات شکل کانونی گام I را می دهد. تابع هزینهٔ مصنوعی w را به صورت جمع متغیّرهای مصنوعی تعریف کنید. متغیّرهای مصنوعی را از تابع هزینه حذف و آن را فقط برحسب متغیّرهای غیراصلی مثل معادلهٔ (۴.۳۲) بیان کنید.

مرحلهٔ ۳. *برای مسأله جدول سیمپلکس را تشکیل دهید*. تابع هزینهٔ مصنوعی در آخرین سطر و تابع هزینه اصلی در سطر ماقبل آخر نوشته می شود.

مرحله ۴. *به آخرین سطر جدول نگاه کنید* و به بزرگترین ضریب منفی توجه کنید. اندیس آن را r بنامید. اکنون x_r باید متغیّر اصلی شود.

مرحلهٔ ۵. *نسبت پارامتر طرف راست* به ضرایب مثبت در ستون r را محاسبه کرده و اندیس s را براساس معادلهٔ (۴.۲۴) انتخاب کنید. اکنون x_s باید غیراصلی شود. اگر معادلهٔ (۴.۲۴) یک عنصر لولا را ندهد (یعنی تمامی عناصر در ستون r ام منفی باشند)، *مسأله بیکران* است.

مرحلهٔ ۶ . *گام لولایی* را با a_{rs} به‌عنوان عنصر لولا، و سطر s ام به‌عنوان سطر لولا روی سطرهای جدول انجام دهید.

مرحلهٔ ۷ . *اگر درسطر آخر همهٔ اعداد منفی‌اند*، به مرحلهٔ ۴ بروید، درغیر این صورت به مرحلهٔ ۸ بروید.

مرحلهٔ ۸ . *اگر همهٔ اعداد در سطر آخر* نامنفی اند و w صفر است، گام اوّل از الگوریتم سیمپلکس کامل شده است و یک جواب قابل قبول اصلی اولّیه برای مسألهٔ اصلی به دست آمده است. اگر تمامی اعداد در سطر آخر نامنفی و $w \neq 0$ است، آن گاه مسأله غیر قابل قبول است.

۴.۵.۱.۴ الگوریتم گام II. در جدول نهایی گام I ، سطر آخر با معادلهٔ تابع هزینهٔ واقعی جایگزین می شود. متغیّرهای اصلی در هر حال نباید در تابع هزینه ظاهر شوند. پس، باید روی معادله تابع هزینه برای حذف متغیّرهای اصلی از آن گامهای لولایی انجام شود. یک راه آسان برای انجام این کار در نظر گرفتن تابع هزینه به‌عنوان یک معادله در جدول گام I مثلاً معادلهٔ ماقبل آخر است. روی این معادله مثل بقیه عمل حذف انجام می شود. بدین طریق، تابع هزینه به شکلی صحیح که بتوان با آن گام II را ادامه داد، درخواهد آمد.

الگوریتم گام II روش سیمپلکس شامل مراحل زیر می شود:

مرحلهٔ ۱ . مانند مرحلهٔ ۴ از گام I . توجه کنید که بزرگترین ضریب منفی باید از میان ضرایب بجز آنهایی که مربوط به متغیّرهای مصنوعی هستند انتخاب گردد.

مرحلهٔ ۲ . مانند مرحله ۵ از گام I.

مرحلهٔ ۳ . مانند مرحله ۶ از گام I.

مرحلهٔ ۴ . اگر در آخرین سطر اعداد منفی وجود دارند، به مرحلهٔ ۱ بروید. در غیر این صورت، آخرین جدول جواب بهین مسأله است.

توجّه کنید که روش سیمپلکس همگرا بوده و بسیار مطلوب است. رسیدن به یکی از نتایج زیر در آن تضمین شده است.

۱ . اگر مسأله غیرقابل قبول باشد، این روش آن را مشخص می کند.

۲ . اگر مسأله بیکران باشد، این روش آن را مشخص می کند.

۳ . اگر جوابی برای مسأله وجود داشته باشد، این روش آن را پیدا می کند. توجّه کنید که آن جواب یک جواب فراگیر است.

۴ . اگر جوابهای چندگانه ای وجود داشته باشند، این روش آن را مشخص می کند .

مثال ۴.۱۱ استفاده از متغیّرهای مصنوعی برای قیود "نوع≥". برای مسألهٔ LP زیر با استفاده از روش سیمپلکس جواب بهین را بیابید .

تابع

$$z = y_1 + 2y_2$$

را نسبت به قیود

$$3y_1 + 2y_2 \leqq 12$$

$$2y_1 + 3y_2 \geqq 6$$

$y_1 \geqq 0$, و y_2 از نظر علامت آزاد است

ماکزیمم کنید .

حل. حل ترسیمی مسأله در شکل ۴ . ۴ نشان داده شده است . می توان دید که جواب بهین در نقطهٔ B است . برای تأیید جواب ما از روش دوگامی استفاده می کنیم .

چون y_2 ازنظر علامت آزاد است ، آن را به صورت مجموع دو عدد به شکل $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ می نویسیم ، برای نوشتن مسأله به شکل استاندارد ، $x_1 = y_1$ ، $x_2 = y_2^+$ و $x_3 = y_2^-$ را تعریف کرده و مسأله را به شکل زیر تبدیل می کنیم

تابع

$$f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

را نسبت به قیود

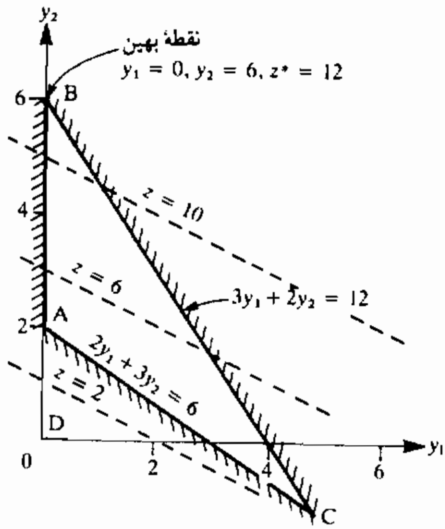
$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 = 6$$

$$x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 5$$

مینیمم کنید ؛ در حالی که x_4 یک متغیّر کمبود برای اوّلین قید و x_5 یک متغیّر زیادتی برای قید دوم است . ما نیاز به استفاده از الگوریتم دو گامی داریم ؛ زیرا قید دوم از "نوع ≥" است . براین اساس ، متغیّر مصنوعی x_6 را در قید دوم تعریف می کنیم . داریم

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$



شکل ۴.۴ حل ترسیمی مثال ۴.۱۱

تابع هزینهٔ مصنوعی به شکل $w = x_6$ تعریف می شود. چون w باید برحسب متغیّرهای غیراصلی باشد (x_6 اصلی است)، به جای x_6 از معادلهٔ قبلی جایگزین می کنیم و w را به دست می آوریم

$$w = 6 - 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5$$

اوّلین جدول از گام I در جدول ۴.۱۳ نشان داده شده است. متغیّرهای اصلی اوّلیه عبارتند از $x_4 = 12$ و $x_6 = 6$. متغیّرهای غیراصلی عبارتند از $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$. همچنین $w = 6$ و $f = 0$. این جواب متعلق به نقطهٔ غیر قابل قبول D در شکل ۴.۴ است. براساس مرحلهٔ ۴ و ۵ از الگوریتم گام I، عنصر لولا عبارت است از a_{22}، که ایجاب می کند x_2 اصلی و x_6 غیراصلی شود. با انجام گام لولایی، جدول دوم را به دست می آوریم (جدول ۴.۱۳). برای جدول دوم، $x_4 = 8$ و $x_2 = 2$ متغیّرهای اصلی و بقیه متغیّرهای غیراصلی اند. این جواب متعلق به نقطهٔ A در شکل ۴.۴ می شود که قابل قبول است. چون تمامی ضرایب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به تابع هزینهٔ مصنوعی نامنفی اند و تابع هزینه مصنوعی صفر است، یک جواب قابل قبول اصلی اوّلیه برای مسألهٔ اصلی به دست آمده است. بنابراین، گام I در این جا به پایان می رسد.

جدول ۴.۱۳ حل مثال ۴.۱۱ به روش سیمپلکس دوگامی

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
گام I : جدول اولیه	x_4	3	2	-2	1	0	0	12
لولا : a_{22}	x_6 خارج، x_2 داخل $\rightarrow x_6$	2	$\underline{\mathbf{3}}$	-3	0	-1	1	6
	هزینه	-1	-2	2	0	0	0	$f-0$
	هزینهٔ مصنوعی	-2	$\underline{-3}$	3	0	1	0	$w-6$
جدول دوم	x_4 خارج، x_5 داخل $\rightarrow x_4$	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	8
لولا : a_{15}	x_2	$\frac{2}{3}$	1	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	هزینه	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\underline{-\frac{2}{3}}$	$\frac{2}{3}$	$f+4$
پایان گام I	هزینهٔ مصنوعی	0	0	0	0	0	1	$w-0$
جدول سوم :	x_5	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	1	-1	12
جواب بهین	x_2	$\frac{3}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	0	6
پایان گام II	هزینه	2	0	0	1	0	0	$f+12$
		↑			↑			

ضرایب هزینهٔ کاهش یافته در ستون غیراصلی نامنفی اند؛ جدول سوم جواب بهین را می دهد.

برای گام II ، از ستون x_6 برای به دست آوردن لولاها باید صرف نظر شود. برای مرحلهٔ بعدی، براساس مراحل ۱ و ۲ عنصر لولا a_{15} است. این ایجاب می کند که x_4 به عنوان متغیّر اصلی جایگزین x_5 شود. جدول سوم همچنان که در جدول ۴.۱۳ نشان داده شده به دست می آید. جدول آخر به جواب بهین ختم می شود که عبارت است از $x_5 = 12$ ، $x_2 = 6$ ، $x_1 = x_3 = x_4 = 0$ و $f = -12$. جواب مسألهٔ طرّاحی اصلی عبارت است از $y_1 = 0$ ، $y_2 = 6$ و $z = 12$ که با جواب ترسیمی شکل ۴.۴ یکسان است.

دقت کنید که ستون متغیّر مصنوعی (x_6) در جدول آخری منفی ستون متغیّر زیادتی (x_5) است. این برای تمامی قیود "نوع $\geq$" صادق است.

مثال ۴.۱۲ استفاده از متغیّر مصنوعی برای قیود مساوی (مسألهٔ غیرقابل قبول). مسألهٔ LP زیر را حل کنید.

تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را نسبت به

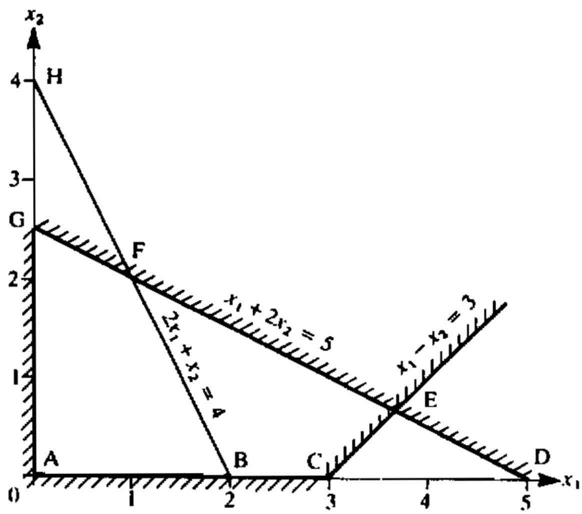
$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 3$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

حل. قیود مسأله در شکل ۴.۵ رسم شده اند. همان طور که دیده می شود مسأله جواب قابل قبولی ندارد. ما آن را با استفاده از روش سیمپلکس حل خواهیم کرد و می بینیم که چگونه می توان یک مسألهٔ غیر قابل قبول را در این روش تشخیص داد. با نوشتن مسأله به شکل LP استاندارد داریم

تابع

$$f = -x_1 - 4x_2$$



شکل ۴.۵ قیود مثال ۴.۱۲. مسألهٔ غیر قابل قبول.

را مشروط به

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 5\\
2x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad &= 4\\
x_1 - x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 &= 3\\
x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 6
\end{aligned}
$$

مینیمم کنید. در این جا x_3 متغیّر کمبود، x_4 متغیّر زیادتی، و x_5 و x_6 متغیّرهای مصنوعی هستند. جدول ۴.۱۴ چرخهٔ گام I روش سیمپلکس را نشان می دهد. دیده می شود که بعد از اولین گام لولایی تمامی ضرایب هزینهٔ کاهش یافته تابع هزینهٔ مصنوعی برای متغیّرهای غیراصلی مثبتند. ولی تابع هزینه مصنوعی صفر نیست. بنابراین جواب قابل قبولی برای مسألهٔ اصلی وجود ندارد.

مثال ۴.۱۳ استفاده از متغیّرهای مصنوعی (مسألهٔ بیکران). مسألهٔ LP زیر را حل کنید.

تابع

$$z = 3x_1 - 2x_2$$

را مشروط به

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 &\geqq 0\\
x_1 + x_2 &\geqq 2\\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

ماکزیمم کنید.

حل. قیود مسأله در شکل ۴.۶ ترسیم شده است. می توان دید که مسأله بیکران است. ما آن را به روش سیمپلکس حل خواهیم کرد و خواهیم دید که چگونه *بیکران بودن آن* مشخص می شود. با تبدیل مسأله به شکل استاندارد، داریم:

تابع

$$f = -3x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 0\\
x_1 + x_2 - x_4 + x_5 &= 2\\
x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 5
\end{aligned}
$$

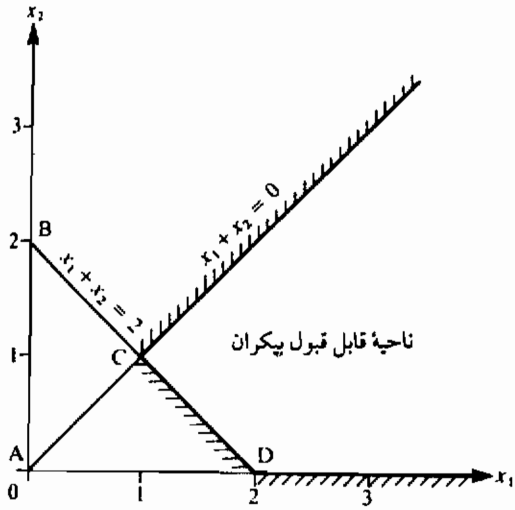
جدول ۴.۱۴ حل مثال ۴.۱۲ (مسأله غیر قابل قبول)

		اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
جدول اوّلیه		x_3	1	2	1	0	0	0	5
لولا : a_{21}	x_5 خارج، x_1 داخل	$\rightarrow x_5$	$\underline{2}$	1	0	0	1	0	4
		x_6	1	-1	0	-1	0	1	3
		هزینه	-1	-4	0	0	0	0	$f - 0$
		هزینهٔ مصنوعی	$\underline{\underline{-3}}$	0	0	1	0	0	$w - 7$
جدول دوم		x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	3
		x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	2
		x_6	0	$-\frac{3}{2}$	0	-1	$-\frac{1}{2}$	1	1
		هزینه	0	$-\frac{7}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$f + 2$
پایان گام I		هزینهٔ مصنوعی	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$w - 1$

متغیّر مصنوعی x_6 در پایان گام I اصلی است، یعنی تابع هزینهٔ مصنوعی صفر نیست. بنابراین، جواب قابل قبولی برای مسأله وجود ندارد.

مینیمم کنید. در این معادلات x_3 متغیّر کمبود، x_4 متغیّر زیادتی و x_5 متغیّر مصنوعی است. دقّت کنید که طرف راست اوّلین قید صفر است. بنابراین می توان آن را به عنوان قید "نوع ≤" یا "نوع ≥" لحاظ کرد. ما آن را از "نوع ≤" در نظر می گیریم. همچنین دقّت کنید که قید دوم از "نوع ≥" است پس باید ما از یک متغیّر مصنوعی و یک تابع هزینهٔ مصنوعی برای یافتن جواب قابل قبول اصلی اوّلیه استفاده کنیم.

حل مسأله در جدول ۴.۱۵ آمده است. برای جدول اوّلیه $x_3 = 0$ و $x_5 = 2$ متغیّرهای اصلی و دیگر متغیّرها غیر اصلی اند. دقت کنید که این یک جواب *قابل قبول اصلی تباهیده* است. جواب متعلق به نقطهٔ A (مرکز مختصّات) در شکل ۴.۶ است. با بررسی سطر هزینهٔ مصنوعی، می بینیم که دو امکان برای ستون لولا وجود دارد، x_1 و x_2. اگر x_2 به عنوان ستون لولا انتخاب شود، آن گاه باید سطر اوّل سطر لولا و $a_{12} = 1$



شکل ۴.۶ قیود مثال ۴.۱۳ مسألهٔ بیکران

عنصر لولا باشد. این کار x_2 را اصلی و x_3 را غیراصلی خواهد ساخت. به هرحال، x_2 صفر خواهد ماند و جواب حاصل تباهیده خواهد بود که نقطهٔ A است. یک چرخهٔ دیگر برای حرکت از A به D لازم است. اگر ما x_1 را به عنوان ستون لولا انتخاب می کنیم، آن گاه $a_{21} = 1$ عنصر لولا خواهد بود که x_1 را اصلی و x_5 را غیراصلی می سازد. با انجام عمل لولایی، جدول دوم را همچنان که در جدول ۴.۱۵ نشان داده شده است به دست می آوریم. جواب قابل قبول اصلی عبارت است از $x_1 = 2$ ، $x_3 = 2$ و دیگر متغیّرها صفر هستند. این جواب متعلق به نقطهٔ D است که در شکل ۴.۶ نشان داده شده است. این جواب قابل قبول اصلی برای مسأله اصلی است زیرا تابع هزینهٔ مصنوعی صفر است، یعنی $w = 0$. تابع هزینهٔ اصلی نیز از 0 به 6− کاهش یافته است. این پایان گام I است.

با بررسی سطر تابع هزینه، درمی یابیم که ضرایب هزینهٔ کاهش یافته در ستون x_4 منفی است. امّا چون تمامی عناصر ستون منفی اند، امکان عمل لولایی بیشتر وجود ندارد. پس مسأله بیکران است.

۴.۵.۱.۵ جواب قابل قبول اصلی تباهیده. امکان دارد که در طی چرخهٔ روش سیمپلکس، یک متغیّر مقدارش صفر شود، یعنی جواب قابل قبول اصلی تباهیده شود. این وضعیت چه ویژگیهایی دارد؟ ما آن را با مثالهای زیر بحث خواهیم کرد.

جدول ۴.۱۵ حل مثال ۴.۱۳ (مسأله بیکران)

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
جدول اولیه	x_3	-1	1	1	0	0	0
لولا : a_{21}	x_5 خارج x_1 داخل $\to x_5$	$\underline{1}$	1	0	-1	1	2
	هزینه	-3	2	0	0	0	$f-0$
	هزینهٔ مصنوعی	$\underline{-1}$	-1	0	1	0	$w-2$
جدول دوم	x_3	0	2	1	-1	1	2
	x_1	1	1	0	-1	1	2
	هزینه	0	5	0	$\underline{-3}$	3	$f+6$
	هزینهٔ مصنوعی	0	0	0	0	1	$w-0$
	پایان مرحلهٔ I						پایان مرحلهٔ II

ضریب هزینهٔ کاهش یافته c'_4 منفی است ولی عنصر لولا نمی‌تواند تعیین گردد. یعنی x_4 نمی‌تواند اصلی شود (تمامی عناصر ستون x_4 در جدول دوم منفی‌اند). مسأله بیکران است.

مثال ۴.۱۴ ویژگیهای جواب قابل قبول اصلی تباهیده. مسألهٔ LP زیر را به روش سیمپلکس حل کنید.

تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leqq 4$$
$$2x_1 + x_2 \geqq 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 1$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

حل. مسأله به شکل استاندارد LP تبدیل می شود.

تابع

$$f = -x_1 - 4x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\
2x_1 + x_2 \quad + x_4 &= 4 \\
2x_1 + x_2 \quad - x_5 \quad + x_7 &= 4 \\
x_1 - x_2 \quad - x_6 \quad + x_8 &= 1 \\
x_i \geqq 0; \quad i &= 1 \text{ to } 8
\end{aligned}$$

مینیمم کنید، که در آن x_3 و x_4 متغیّرهای کمبود، x_5 و x_6 متغیّرهای زیادتی، و x_7 و x_8 متغیّرهای مصنوعی هستند. روش سیمپلکس دوگامی با سه چرخه به نقطهٔ بهین می رسد. اینها در جدول ۱۶ . ۴ آمده است. می توان دید که در جدول سوم، متغیّر اصلی x_4 مقدارش صفر است، پس جواب قابل قبول اصلی تباهیده است. در این چرخه، مشخص می شود که x_5 باید اصلی شود. بنابراین x_5 ستون لولاست. لازم است سطر لولا را تعیین کنیم. نسبت طرفهای راست را به عناصر مثبت در ستون x_5 محاسبه می کنیم. این کار سطر دوم را به عنوان سطر لولا معین می کند، زیرا این سطر کمترین نسبت را دارد (صفر). به طور کلّی، اگر عنصر ستون لولا در سطری که متغیّر اصلی تباهیده را می دهد مثبت باشد، آن گاه آن سطر همیشه باید سطر لولا باشد. در غیر این صورت، جواب جدید نمی تواند قابل قبول باشد. همچنین در این حالت، جواب قابل قبول اصلی جدید تباهیده خواهد بود، همچنان که در جدول نهایی جدول ۱۶ . ۴ این چنین است. تنها راهی که جواب قابل قبول اصلی بتواند تباهیده نباشد وقتی است که عنصر ستون لولا و سطر متغیّر تباهیده منفی باشد. در این حالت جواب قابل قبول اصلی اوّلیه تباهیده نخواهد بود. از جنبهٔ نظری روش سیمپلکس ممکن است با دور زدن بین دو جواب قابل قبول اصلی تباهیده کارآیی خود را از دست بدهد. امّا در عمل این کار معمولاً اتفاق نمی افتد.

جدول ۴.۱۶ حل مثال ۴.۱۴ (جواب قابل قبول اصلی تباهیده)

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
جدول اولیه	x_3	1	2	1	0	0	0	0	0	5
لولا : a_{41}	x_4	2	1	0	1	0	1	0	0	4
	x_7	2	1	0	0	-1	0	1	0	4
	$\underset{x_1}{\overset{x_8}{\rightarrow}} x_8$	$\underline{1}$	-1	0	0	0	-1	0	1	1
	هزینه	-1	-4	0	0	0	0	0	0	$f-0$
	مصنوعی	$\underline{-3}$	0	0	0	1	1	0	0	$w-5$
جدول دوم	x_3	0	3	1	0	0	1	0	-1	4
لولا : a_{32}	x_4	0	3	0	1	0	2	0	-2	2
	$\underset{x_2}{\overset{x_7}{\rightarrow}} x_7$	0	$\underline{3}$	0	0	-1	2	1	-2	2
	x_1	1	-1	0	0	0	-1	0	1	1
	هزینه	0	-5	0	0	0	-1	0	1	$f+1$
	مصنوعی	0	$\underline{-3}$	0	0	1	-2	0	3	$w-2$
جدول سوم	x_3	0	0	1	0	1	-1	-1	1	2
لولا : a_{25}	$\underset{x_5}{\overset{x_4}{\rightarrow}} x_4$	0	0	0	1	$\underline{1}$	0	-1	0	0
	x_2	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	x_1	1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
	هزینه	0	0	0	0	$\underline{-\frac{5}{3}}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$f+\frac{13}{3}$
	مصنوعی	0	0	0	0	0	0	1	1	$w-0$
						پایان گام I				
جدول نهایی	x_3	0	0	1	-1	0	-1	0	1	2
	x_5	0	0	0	1	1	0	-1	0	0
	x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
	هزینه	0	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	$f+\frac{13}{3}$
						پایان گام II				

جواب نهایی برای این مسأله عبارت است از

متغیرهای اصلی	$x_1 = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 2,\ x_5 = 0$
متغیرهای غیراصلی	$x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$
تابع هزینهٔ بهین	$f = -\frac{13}{3}$ or $z = \frac{13}{3}$

۴.۵.۲ روش سیمپلکس جایگزین

یک روش دیگر با اختلاف جزئی می تواند برای حل مسائل برنامه ریزی خطّی که قیود "نوع $\geq$" و مساوی دارند مورد استفاده قرار گیرد. متغیّرهای مصنوعی مانند قبل در مسأله معرفی می شوند. امّا تابع هزینهٔ مصنوعی استفاده نمی شود. به جای آن، *تابع هزینه اصلی افزایش می یابد و به آن متغیّرهای مصنوعی با اعداد مثبت بزرگ اضافه می گردد*. *جملات اضافی به عنوان جریمه داشتن متغیّرهای مصنوعی در مسأله عمل می کنند*. چون متغیّرهای مصنوعی اصلی هستند، پس باید از تابع هزینه حذف شوند تا بتوان از روش سیمپلکس استفاده کرد. این کار با استفاده از قیود مناسبی که متغیّرهای مصنوعی دارند بسادگی عملی است. وقتی این کار انجام شد، روش سیمپلکس معمولی می تواند برای حل مسأله استفاده شود. این روش را با ذکر مثالی تشریح می کنیم.

مثال ۴.۱۵ روش بیگ ام[1] برای قیود مساوی و "نوع $\geq$". برای مسألهٔ زیر (مثال ۴.۱۱) حل عددی را با استفاده از روش سیمپلکس جایگزین به دست آورید.

تابع

$$z = y_1 + 2y_2$$

را با قیود

$$3y_1 + 2y_2 \leqq 12$$

$$2y_1 + 3y_2 \geqq 6$$

$y_1 \geqq 0,$ y_2 ازنظر علامت محدودیتی ندارد

ماکزیمم کنید.

حل. با تبدیل مسأله به شکل استاندارد داریم :

---

1. Big-M

تابع

$$f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

را با قیود

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$
$$x_i \geqq 0; \quad i = 1 \text{ to } 6$$

مینیمم کنید. چون y_2 غیرمحدود است، به شکل $y_2 = x_2 - x_3$ تعریف شده است. x_4 متغیّر کمبود، x_5 متغیّر زیادتی و x_6 متغیّر مصنوعی است. با استفاده از روش سیمپلکس جایگزین، به تابع هزینه Mx_6 (با مثلاً $M = 10$) اضافه می کنیم و آن را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 10x_6$$

دقت کنید که اگر جواب قبولی برای مسأله وجود داشته باشد، آن گاه تمامی متغیّرهای مصنوعی غیراصلی خواهند شد ـ یعنی صفر ـ و آن گاه تابع هزینهٔ اوّلیه را خواهیم داشت.

جدول ۴.۱۷ حل مثال ۴.۱۵ با روش سیمپلکس جایگزین

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	x_4	3	2	-2	1	0	0	12	جدول اوّلیه
x_6 خارج x_2 داخل	$\rightarrow x_6$	2	$\underline{3}$	-3	0	-1	1	6	لولا : a_{22}
	هزینه	-21	$\underline{-32}$	32	0	10	0	$f - 60$	
x_4 خارج x_5 داخل	$\rightarrow x_4$	$\frac{5}{3}$	0	0	1	$\underline{\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}$	8	جدول دوم
	x_2	$\frac{2}{3}$	1	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	لولا : a_{15}
	هزینه	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$\underline{-\frac{2}{3}}$	$\frac{32}{3}$	$f + 4$	
	x_5	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	1	-1	12	جدول سوم
	x_2	$\frac{3}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	0	6	
	هزینه	2	0	0	1	0	10	$f + 12$	

همچنین دقت کنید اگر متغیّرهای مصنوعی دیگری باشند، آنها نیز در M ضرب شده به تابع هزینه اضافه می شوند. این روش را گاهی روش *بیگ ام* می نامند. حال با جای گزینی x_6 از معادلهٔ قید در تابع هزینهٔ قبلی داریم

$$\begin{aligned} f &= -x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ &\quad + 10(6 - 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5) \\ &= 60 - 21x_1 - 32x_2 + 32x_3 + 10x_5 \end{aligned}$$

با این تابع هزینه، چرخه های روش سیمپلکس در جدول ۱۷ . ۴ نشان داده شده است. دیده می شود که جواب نهایی مانند جواب جدول ۱۳ . ۴ و شکل ۴ . ۴ است.

۴.۶ تحلیل پس بهینگی

حل بهین مسألهٔ LP بستگی به پارامترها در بردارهای c و b و ماتریس A که در معادله های (۱۳ . ۴) تا (۱۵ . ۴) تعریف شدند دارد. این پارامترها در مسائل طرّاحی عملی در معرض خطا و اشتباه هستند. بدین سبب ما نه تنها به جواب بهین، که به چگونگی تغییر آن با تغییر پارامترها، علاقه مندیم. این تغییرات ممکن است مقادیر گسسته (یعنی وقتی ما راجع به انتخابهای متعدد مقادیر پارامترها مطمئن نیستیم) و یا پیوسته باشند. *مطالعهٔ تغییرات پارامترهای گسسته اغلب تحلیل حساسیت و مطالعه تغییرات پارامترهای پیوسته برنامه ریزی پارامتریک نامیده می شود.*

پنج تغییر پارامتری اصلی وجود دارد که جوابها را متأثر می کند که عبارتند از :

۱ . تغییرات ضرایب تابع هزینه، c_j .

۲ . تغییرات حدود منابع، b_i .

۳ . تغییرات ضرایب قیود، a_{ij} .

۴ . اثر افزودن بر تعداد قیود.

۵ . اثر افزایش تعداد متغیّرها.

یک بحث کلّی و جامع در حالی که لزوماً مشکل نیست ولی از حدود قصد ما در این مجموعه فراتر است. به طور کلّی می توانیم تصور کنیم که برای هر تغییری مسألهٔ جدیدی را حل می کنیم. خوشبختانه، برای تعداد اندکی از تغییرات راههای میان بر مفیدی وجود دارند.

تقریباً تمامی برنامه های رایانه ای مسائل LP ، اطّلاعاتی در مورد تغییرات پارامترها می دهند. ما تغییرات پارامترها را که در شمارهٔ ۱ تا ۳ تعریف شدند مطالعه خواهیم کرد. *آخرین جدول حاوی تمامی اطّلاعاتی است که برای مطالعهٔ این تغییرات مورد نیاز می باشد.* ما اطّلاعاتی را که در آخرین جدول می آید و استفادهٔ آنها را، در مطالعهٔ سه تغییر پارامتری توضیح خواهیم داد. برای تغییرات دیگر، مرجع رندولف و میکس[1] (۱۹۷۸) می تواند مورد مطالعه قرار گیرد.

جواب بهین مسألهٔ تغییر یافته می تواند با استفاده از جواب بهین مسألهٔ اصلی محاسبه گردد، مشروط به این که تغییرات پارامترها در محدودهٔ معینی باشد. در بحث زیر ما از a'_{ij} ، c'_j و b'_i برای نشان دادن مقادیر مربوط به a_{ij} ، c_j و b_i در آخرین جدول استفاده می کنیم.

۴.۶.۱ تغییرات محدودهٔ منابع

ابتدا چگونگی تغییر تابع هزینه مسأله را با تغییرات پارامتر طرف راست قیود، b_i (که به عنوان محدودهٔ منابع نیز شناخته می شود) مطالعه می کنیم. قضیهٔ حساسیت تغییر قیود فصل ۳ می تواند برای مطالعهٔ اثرات این تغییر مورد استفاده قرار گیرد. استفاده از آن قضیه نیاز به دانستن ضرایب لاگرانژ قیود دارد. بنابراین باید آنها را به دست آوریم. قضیهٔ زیر راهی را برای به دست آوردن آنها از آخرین جدول مسائل LP نشان می دهد.

قضیه ۴.۵ مقادیر ضرایب لاگرانژ. در جدول نهایی، ضریب لاگرانژ قید i ام مساوی است با ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون مربوط به متغیّر کمبود یا مصنوعی از قید i ام. قید "نوع ≥" که در روش سیمپلکس به آن متغیّر مصنوعی اضافه می کنیم، همیشه یک ضریب لاگرانژ نامثبت دارد.

فهم قضیه برای به دست آوردن ضرایب لاگرانژ از آخرین جدول، مهم است. ابتدا یک قید "نوع ≤" با طرف راست نامنفی در نظر می گیریم. برای چنین قیدی، ضریب لاگرانژ ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون متغیّر کمبود مربوط به آن قید (در آخرین جدول) است. *ضرایب لاگرانژ برای قیود "نوع ≤" بنابر قضیهٔ ۳.۶ همیشه نامنفی است.*

حال قید مساوی با طرف راست نامنفی را در نظر می گیریم. براساس قضیهٔ ۴.۵ ،

---

1. Randolph and Meeks

ضرایب لاگرانژ آن ضرایب هزینه کاهش یافتهٔ متغیّر مصنوعی (در جدول نهایی) است. ضریب *لاگرانژ یک قید مساوی ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد.*

یک قید "نوع ≥" نیز در روش سیمپلکس با اضافه کردن یک متغیّر مصنوعی به آن مورد استفاده قرار می گیرد. ضریب لاگرانژ آن، ضریب هزینهٔ کاهش یافتهٔ متغیّر مصنوعی در جدول نهایی است. دقت کنید که ضریب لاگرانژ قید "نوع ≥" باید همیشه نامثبت باشد.

راه دیگر برای به دست آوردن ضریب لاگرانژ برای قیود "نوع ≥" استفاده از ستون متغیّر زیادتی است. همچنان که قبلاً دیده شد، ستون متغیّر زیادتی در جدول نهایی منفی ستون متغیّر مصنوعی است. بنابراین، ضرایب هزینهٔ کاهش یافتهٔ متغیّر زیادتی نیز می تواند برای یافتن ضریب لاگرانژ قید "نوع ≥" استفاده شود. ضریب در جدول نهایی همیشه منفی است. بنابراین، منفی آن ضریب، ضریب لاگرانژ قید "نوع ≥" را می دهد.

در فصل ۳، بخش ۳.۷، یک معنی *هندسی از ضرایب لاگرانژ تشریح شد*. در آن جا ضرایب لاگرانژ به مشتقات تابع هزینه نسبت به پارامترهای طرف راست مربوط می شدند (قضیهٔ ۳.۱۴). در آن جا قیود مساوی و نامساوی جداگانه در نظر گرفته می شدند که ضرایب لاگرانژ آنها به ترتیب v_i و u_i بود. در این بخش از علایمی استفاده می کنیم که کمی با قبل متفاوت است. ما از e_i به عنوان پارامتر طرف راست هر قید و از y_i به عنوان ضرایب لاگرانژ آن استفاده می کنیم. با استفاده از این پارامترها و قضیهٔ ۳.۱۴، مشتقات تابع هزینه را نسبت به پارامترهای طرف راست به شکل زیر به دست می آوریم:

$$\frac{\partial f}{\partial e_i} = -y_i \qquad (۴.۳۴)$$

در این جا یادآور می شود که قضیهٔ ۴.۵ و معادلهٔ (۴.۳۴) *فقط وقتی به کار می روند که تغییر پارامترهای طرف راست در محدودهٔ مشخصی باشند*، یعنی حدود بالا و پایینی برای تغییرات حدود منابع وجود دارند که برای آنها معادلهٔ (۴.۳۴) معتبر است. محاسبات این حدود در زیربخش ۴.۶.۲ بحث می شود.

همچنین دقّت کنید که قضیهٔ ۳.۱۴ و معادلهٔ (۴.۳۴) فقط برای مسائل مینیمم سازی با قیود "نوع ≤" و مساوی به کار می رود. بنابراین، باید دقّت کرد که برای به دست آوردن y_i و اثر تغییرات منابع از عبارات مناسب توابع هزینه و قید استفاده گردد.

همچنان که قبلاً یادآوری شد، *جدول نهایی مسأله حاوی تمامی اطلاعات لازم برای به دست آوردن ضرایب لاگرانژ قیود است*. برای به دست آوردن مقدار و علامت صحیح ضرایب لاگرانژ باید دقت کرد. قضیهٔ ۴.۵ مراحل به دست آوردن این اطّلاعات را از جدول نهایی تشریح می کند که در زیر خلاصه می شود:

۱. ضریب لاگرانژ $y_i \geq 0$ برای قید i ام "نوع $\leq$" عبارت است از *ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون متغیّر کمبود* مربوط به آن قید.

۲. برای قید "نوع $\geq$" با طرف راست منفی، ما باید آن را در ۱− ضرب کنیم تا بتوانیم روش سیمپلکس را به کار ببریم. این کار قید را "نوع $\geq$" می سازد و باید برای استفاده از روش سیمپلکس، *متغیّر زیادتی یا مصنوعی* به کار گرفت. *ضریب لاگرانژ آن $y_i \geq 0$ ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون متغیّر زیادتی است*. دقّت کنید که ضریب برای قیدی است که به "شکل $\leq$" نوشته شده باشد. به عنوان مثال، فرض کنید ضریب هزینهٔ کاهش یافته ستون متغیّر زیادتی مربوط به قید $x_1 - x_2 \geq 1$ ، $\frac{7}{3}$ باشد. بنابراین، ضریب لاگرانژ برای قیدی که به "شکل $\leq$" نوشته شود، $-x_1 + x_2 \leq -1$ ، $\frac{7}{3}$ است. این نکته برای استفادهٔ صحیح از معادلهٔ (۴.۳۴) مهم است. بدون این تبدیل، استفاده از معادلهٔ (۴.۳۴) صحیح نیست. دقت کنید *برای قید " نوع $\leq$"* ، *ضرایب لاگرانژ باید نامنفی باشند* (براساس شرایط کان ـ تاکر فصل ۳). ضرایب لاگرانژ قیود "نوع $\geq$" باید نامثبت باشند. برای مثال گذشته، ضریب لاگرانژ مربوط به قید $x_1 - x_2 \geq 1$ عبارت است از $-\frac{7}{3}$.

۳. *ضرایب لاگرانژ باید شرایط سویچی معادلهٔ (۳.۵۰) را نیز برآورده کنند* $(u_i s_i = 0)$. بنابراین اگر ضریب لاگرانژ قیدی صفر شد، آن گاه قید باید غیرفعال باشد. متغیّر کمبود آن باید مثبت باشد (بجز در حالت غیرمعمولی که هم ضریب لاگرانژ و هم تابع قید صفر باشند).

۴. ضریب لاگرانژ *قید مساوی i ام، عبارت است از ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون متغیّر مصنوعی مربوط به قید*. دقّت کنید که ضریب لاگرانژ یک قید مساوی ازنظر علامت نامشخص است.

مثال ۴.۱۶ به دست آوردن ضرایب لاگرانژ از جدول نهایی. مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.

تابع

$$z = 5x_1 - 2x_2$$

را با قیود

$$2x_1 + x_2 \leqq 9$$
$$x_1 - 2x_2 \leqq 2$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leqq 3$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید. مسأله را به روش سیمپلکس حل کرده و ضرایب لاگرانژ قیود را به دست آورید.

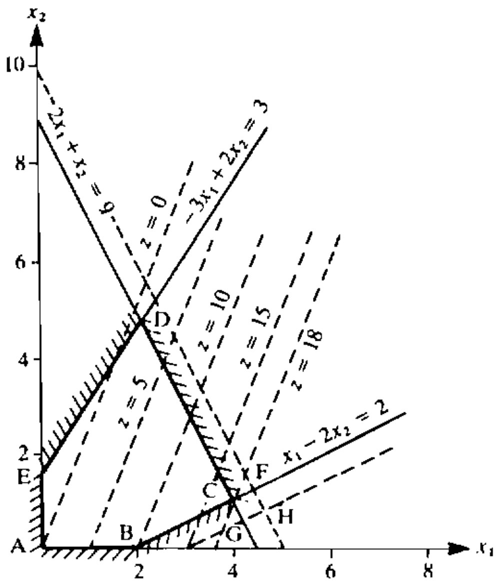
حل. قیود مسأله و خطوط هزینهٔ ثابت در شکل ۴.۷ رسم شده اند. نقطهٔ بهین در نقطهٔ C است و بهین عبارت است از $x_1 = 4$ ، $x_2 = 1$ ، $z=18$.

حل مسأله با روش سیمپلکس محاسباتی را می طلبد که در جدول ۴.۱۸ آمده است. از جدول نهایی،

متغیرهای اصلی $x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_5 = 13$

متغیرهای غیراصلی $x_3 = 0,\ x_4 = 0$

تابع هدف ماکزیمم $z = 18$ (مقدار مینیمم عبارت است از -18)



شکل ۴.۷ حل ترسیمی مثال ۴.۱۶

جدول ۴.۱۸ حل مثال ۴.۱۶ به روش سیمپلکس

		اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
جدول اوّلیه		x_3	2	1	1	0	0	9
لولا : a_{21}	x_4 خارج x_1 داخل $\rightarrow$	x_4	$\underline{1}$	−2	0	1	0	2
		x_5	−3	2	0	0	1	3
		هزینه	$\underline{-5}$	2	0	0	0	$f-0$
جدول دوم	x_3 خارج x_2 داخل $\rightarrow$	x_3	0	$\underline{5}$	1	−2	0	5
لولا : a_{12}		x_1	1	−2	0	1	0	2
		x_5	0	−4	0	3	1	9
		هزینه	0	$\underline{-8}$	0	5	0	$f+10$
جدول سوم		x_2	0	1	0.2	−0.4	0	1
		x_1	1	0	0.4	0.2	0	4
		x_5	0	0	0.8	1.4	1	13
		هزینه	0	0	1.6	1.8	0	$f+18$
			$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	
			c'_1	c'_2	c'_3	c'_4	c'_5	

x_3 ، x_4 و x_5 متغیّرهای کمبودند

در رابطه سازی مسأله، x_3 ، x_4 و x_5 متغیّرهای کمبود برای سه قیدند. چون تمامی قیود از "نوع ≤" هستند، ضرایب هزینهٔ کاهش یافتهٔ متغیّرهای کمبود ضرایب لاگرانژند؛ داریم

قید اوّل	$y_1 = 1.6$ (x_3 در ستون c'_3)
قید دوم	$y_2 = 1.8$ (x_4 در ستون c'_4)
قید سوم	$y_3 = 0$ (x_5 در ستون c'_5)

بنابراین، معادلهٔ (۴.۳۴) به ما عبارات زیر را می دهد

$$\frac{\partial f}{\partial e_1} = -1.6; \qquad \frac{\partial f}{\partial e_2} = -1.8; \qquad \frac{\partial f}{\partial e_3} = 0$$

که در آن $f = -(5x_1 - 2x_2)$ ؛ معادلهٔ (۴.۳۴) برای یک مسألهٔ مینیمم سازی معتبر است. اگر طرف راست قید اوّل از ۹ به ۱۰ تغییر یابد، تابع هزینه f ، به 1.6 کاهش می یابد، یعنی مقدار جدید f برابر است با -19.6 (یا $z = 19.6$). نقطهٔ F در شکل ۴.۷ نقطهٔ بهین جدید را برای این حالت می دهد. اگر طرف راست قید دوم از ۲ به ۳ تغییر یابد، تابع هزینه f ، به 1.8 کاهش می یابد و می شود -19.8. نقطهٔ G در شکل ۴.۷ نقطهٔ بهین جدید را می دهد. دقّت کنید که هر تغییر کوچک در طرف راست قید سوم اثری روی تابع هزینه ندارد.

وقتی طرف راست قیود اوّل و دوم به ۱۰ و ۳ به طور همزمان تغییر یابند، تغییر تابع هزینه در کل عبارت است از $-(1.6 + 1.8)$ ؛ یعنی، f جدید عبارت است از -21.4 جواب جدید در نقطهٔ H در شکل ۴.۷ است.

یادآور می شود (همچنان که در بخش ۳.۷ گفته شد) که ضرایب لاگرانژ برای مسائل طرّاحی عملی بسیار سودمندند. مقادیر آنها اثر نسبی تغییرات پارامترهای طرف راست قیود (حدود منابع) را می دهد. با استفاده از این مقادیر نسبی، طرّاح می تواند سودمندترین راه تنظیم حدود منابع را در صورتی که لازم و ممکن باشد تعیین کند. *ضرایب لاگرانژ گاهی متغیّرهای دوگانی (یا قیمتهای دوگانی) نامیده می شوند.* مفهوم دوگانی در برنامه ریزی خطّی در بخش آینده تشریح می شود.

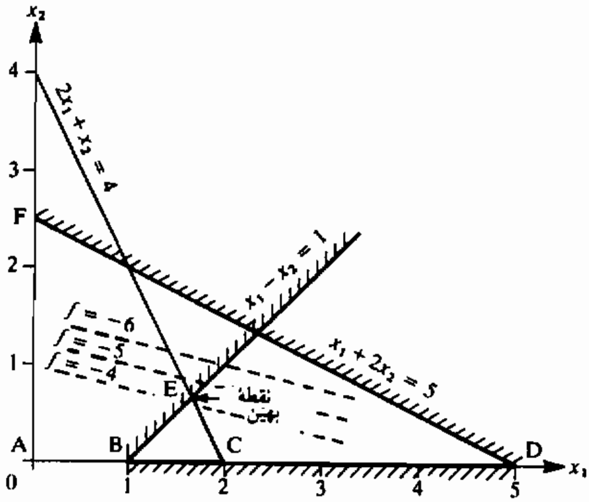
مثال ۴.۱۷ به دست آوردن ضرایب لاگرانژ از جدول نهایی. مسألهٔ LP زیر را حل کرده و ضرایب لاگرانژ را برای قیود به دست آورید.

تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqq 5 \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &\geqq 1 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$



شکل ۴.۸ قیود مثال ۴.۱۷. ناحیهٔ قابل قبول: خط E–C

ماکزیمم کنید.

حل. قیود مسأله در شکل ۴.۸ رسم شده‌اند. دیده می‌شود که خط E–C ناحیهٔ قابل قبول مسأله و نقطهٔ E جواب بهین است. با تبدیل مسأله به شکل استاندارد سیمپلکس، داریم:

تابع

$$f = -x_1 - 4x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + x_3 \\
&2x_1 + x_2 \quad + x_5 = 4 \\
&x_1 - x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 = 1 \\
&x_i \geqq 0; \quad i = 1 \text{ to } 6
\end{aligned}$$

جدول ۴.۱۹ حل مثال ۴.۱۷ با قید مساوی

	اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
جدول اوّلیه	x_3	1	2	1	0	0	0	5
	x_5	2	1	0	0	1	0	4
	x_6	$\underline{1}$	-1	0	-1	0	1	1
	هزینه	-1	-4	0	0	0	0	$f-0$
	مصنوعی	$\underline{-3}$	0	0	1	0	0	$w-5$
جدول دوم	x_3	0	3	1	1	0	-1	4
	x_5	0	$\underline{3}$	0	2	1	-2	2
	x_1	1	-1	0	-1	0	1	1
	هزینه	0	-5	0	-1	0	1	$f+1$
	مصنوعی	0	$\underline{-3}$	0	-2	0	3	$w-2$
جدول سوم	x_3	0	0	1	-1	-1	1	2
	x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
	x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
	هزینه	0	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$f+\frac{13}{3}$
		(c'_1)	(c'_2)	(c'_3)	(c'_4)	(c'_5)	(c'_6)	
	مصنوعی	0	0	0	0	1	1	$w-0$
		پایان گام I				پایان گام II		

x_3 ، متغیّر کمبود؛ x_4 ، متغیّر زیادتی؛ x_5 ، x_6 ، متغیّرهای مصنوعی

مینیمم کنید که در آن x_3 متغیّر کمبود، x_4 متغیّر زیادتی، و x_5 و x_6 متغیّرهای مصنوعی هستند. مسأله در جدول ۴.۱۹ حل شده است. فقط دو چرخه برای رسیدن به بهین انجام شده. جواب از جدول نهایی عبارت است از

متغیرهای اصلی $x_1 = \frac{5}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 2$

متغیرهای غیراصلی $x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$

تابع هزینه $f = -\frac{13}{3}$

دقّت کنید که ستون متغیّر مصنوعی (x_6) منفی ستون متغیّر زیادتی (x_4) است برای قید سوم. با استفاده از قضیهٔ ۵ . ۴ ، ضرایب لاگرانژ قیود عبارتند از

قید اوّل $(x_1 + 2x_2 \le 5)$

$y_1 = 0$ (c'_3 در ستون متغیّر کمبود x_1)

قید دوم $(2x_1 + x_2 = 4)$

$y_2 = \frac{5}{3}$ (c'_5 در ستون متغیّر مصنوعی x_5)

قید سوم $(x_1 - x_2 \ge 1)$

$y_3 = -\frac{7}{3}$ (c'_6 در ستون متغیّر مصنوعی x_6)

وقتی قید سوم به "شکل ≤" نوشته شود $(-x_1 + x_2 \le -1)$ ، ضریب لاگرانژ آن عبارت است از $\frac{7}{3}$ ، که منفی مقدار قبلی است. دقت کنید که این همان c'_4 در ستون متغیّر زیادتی است.

وقتی طرف راست قید مساوی از ۴ به ۵ تغییر یابد، تابع هزینه $(-x_1 - 4x_2)$ به مقدار زیر تغییر می کند

$$\frac{\partial f}{\partial e_2} = -y_2 = -\frac{5}{3}$$

این یعنی تابع هزینه $\frac{5}{3}$ کاهش می یابد؛ از $-\frac{13}{3}$ به -6 (یا $z = 6$) . وقتی طرف راست قید سوم به ۲ تغییر یابد (یعنی $-x_1 + x_2 \le 2$)، تابع هزینه به مقدار زیر تغییر می یابد

$$\frac{\partial f}{\partial e_3} = -\frac{7}{3}(-1) = \frac{7}{3}$$

که یعنی، تابع هزینه $\frac{7}{3}$ افزایش می یابد، از $-\frac{13}{3}$ به -2 $(z = 2)$. این مطلب از روی شکل ۸ . ۴ نیز مشاهده می شود.

۴.۶.۲ محدودهٔ تغییر پارامترهای طرف راست

وقتی طرف راست قیدی تغییر کند، مرز قید موازی با خودش حرکت می کند و ناحیهٔ

قابل قبول مسأله را تغییر می‌دهد. امّا خطوط هزینه ثابت بدون تغییر می‌مانند. چون ناحیهٔ قابل قبول تغییر می‌کند، جواب بهین ممکن است تغییر کند. یعنی متغیّرهای طرّاحی و تابع هزینه ممکن است تغییر کنند. برای به دست آوردن تغییرات جواب بهین مسألهٔ تغییر یافته از اطّلاعات جدول نهایی مسألهٔ اصلی، تغییرات باید حدود مشخصی داشته باشند. به عبارت دیگر، اگر تغییرات در محدودهٔ مشخصی باشند مجموعه متغیّرهای اصلی و غیراصلی تغییر نمی‌کنند.

قضیهٔ ۴.۶ محدودهٔ تغییرات منابع. فرض کنید Δ_k تغییر ممکن در طرف راست b_k از قید k ام باشد. اگر Δ_k نامعادلهٔ زیر را برآورده کند، آن گاه به انجام چرخه‌های بیشتری از روش سیمپلکس برای به دست آوردن جواب مسأله تغییر یافته نیازی نیست.

$$\max_i \{-b'_i/a'_{ij};\, a'_{ij}>0\} \leqq \Delta_k \leqq \min_i \{-b'_i/a'_{ij};\, a'_{ij}<0\}; \qquad (۴.۳۵)$$

در حالی که $i = 1$ to m،

b'_i = پارامتر طرف راست برای قید i ام در جدول نهایی،

a'_{ij} = پارامتر ستون j ام جدول نهایی، ستون j ام مربوط به x_j که متغیّر کمبود برای قید "نوع $\leq$" و یا متغیّر مصنوعی برای قیود مساوی یا "نوع $\geq$" است،

Δ_k = تغییر ممکن در طرف راست قید k ام، متغیّر کمبود یا مصنوعی قید k ام که اندیس j ستونی را که عناصر آن در نامعادلهٔ (۴.۳۵) استفاده می‌شود، تعیین می‌کند.

به علاوه، پارامتر طرف راست جدید b''_i به علت تغییر Δ_k در b_k عبارت است از

$$b''_i = b'_i + \Delta_k a'_{ij}; \qquad i = 1 \text{ to } m \qquad (۴.۳۶)$$

با استفاده از معادلهٔ (۴.۳۶) و جدول نهایی، مقدار جدید متغیّر اصلی را در هر سطر می‌توان به دست آورد. معادلهٔ (۴.۳۶) تنها وقتی به کار می‌رود که Δ_k در محدوده‌ای باشد که از معادله (۴.۳۵) به دست می‌آید. برای به دست آوردن محدوده، ابتدا اندیس j ستون را براساس قاعده‌ای که در قضیهٔ ۴.۶ ارائه شد به دست می‌آوریم. آن گاه در ستون j ام، نسبت $-b'_i/a'_{ij}$ را برای همهٔ $a'_{ij} > 0$ به دست می‌آوریم. بزرگترین این نسبتها حد پایین تغییرات Δ_k را در b_k می‌دهد. اگر هیچ $a'_{ij} > 0$ وجود نداشته باشد، آن گاه نسبتهای یاد شده را نمی‌توان به دست آورد. در این موارد، هیچ حد پایینی برای تغییرات Δ_k در b_k وجود ندارد. یعنی حد

پایینی $-\infty$ است. برای محاسبهٔ حد بالایی در Δ_k، ما نسبتهای $-b'_i / a'_{ij}$ را برای همهٔ $a'_{ij} > 0$ به دست می‌آوریم. کمترین نسبت، حد بالایی تغییرات Δ_k در b_k را می‌دهد. اگر هیچ $a'_{ij} > 0$ نباشد، آن‌گاه نسبتهای یاد شده نمی‌تواند به دست آید. در این موارد، حد بالایی برای تغییرات Δ_k در b_k وجود ندارد. یعنی حد بالایی ∞ است.

مثال ۴.۱۸ محدودهٔ حدود منابع ـ قیود "نوع $\leq$". محدوده‌ها را برای پارامترهای طرف راست قیود مثال ۴.۱۶ به دست آورید.

حل. حل ترسیمی مسأله در شکل ۴.۷ نشان داده شده است. اگر مسأله را به شکل استاندارد بنویسیم، داریم.

تابع

$$f = -5x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$
$$-3x_1 + 2x_2 + x_5 = 3$$
$$x_i \geqq 0; \quad i = 1 \text{ to } 5$$

جدول ۴.۲۰ جدول نهایی مثال ۴.۱۸ (تعیین محدودهٔ حدود منابع)

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	0.2	−0.4	0	1
x_1	1	0	0.4	0.2	0	4
x_5	0	0	0.8	1.4	1	13
هزینه	0	0	1.6	1.8	0	$f + 18$

x_3، x_4 و x_5 متغیّرهای کمبودند.

برای قید اول، ستون x_3 استفاده می‌شود، در معادلهٔ (۴.۳۵)، $j = 3$

برای قید دوم، ستون x_4 استفاده می‌شود، در معادلهٔ (۴.۳۵)، $j = 4$

برای قید سوم، ستون x_5 استفاده می‌شود، در معادلهٔ (۴.۳۵)، $j = 5$

مینیمم کنید در حالی که x_3 ، x_4 و x_5 متغیّرهای کمبودند. جدول نهایی از جدول ۴.۱۸ در جدول ۴.۲۰ کپی شده است.

برای قید اوّل، x_3 متغیّر کمبود است. بنابراین، j برای Δ_1 عبارت است از ۳ (ستون سوم).

چون در ستون سوم عنصر منفی وجود ندارد، حد بالایی برای Δ_1 وجود ندارد. برای به دست آوردن حد پایینی، نسبتهای b'_i / a'_{ij} - را محاسبه کرده و ماکزیمم آنها را می یابیم

$$\max\left\{-\frac{1}{0.2}, -\frac{4}{0.4}, -\frac{13}{0.8}\right\} \leqq \Delta_1$$

یا $-5 \leq \Delta_1$. پس محدودهٔ Δ_1 عبارت است از

$$-5 \leqq \Delta_1 \leqq \infty$$

و محدودهٔ b_1 با اضافه کردن مقدار فعلی آن یعنی $b_1 = 9$ به دست می آید

$$4 \leqq b_1 \leqq \infty$$

برای قید دوم $(k = 2)$ ، x_4 متغیّر کمبود است. بنابراین، ما از عناصر ستون چهارم جدول نهایی (a'_{i4} , $j = 4$) در معادله‌های (۴.۳۵) استفاده می کنیم. از جدول نهایی داریم،

$$\max\left\{-\frac{4}{0.2}, -\frac{13}{1.4}\right\} \leqq \Delta_2 \leqq \min\left\{-\frac{1}{(-0.4)}\right\}$$

و یا محدودهٔ Δ_2 عبارت است از

$$-9.286 \leqq \Delta_2 \leqq 2.5$$

بنابراین، مقدار مجاز کاهش b_2 عبارت است از 9.286 و مقدار مجاز اضافه کردن 2.5 . با اضافه کردن ۲ به نامعادلهٔ فوق (مقدار فعلی b_2)، محدودهٔ b_2 خواهد بود

$$-7.286 \leqq b_2 \leqq 4.5$$

به طور مشابه، برای قید سوم، محدودهٔ Δ_3 عبارت است از

$$\max\{-\tfrac{13}{1}\} \leqq \Delta_3 \leqq \infty, \quad \text{یا} \quad -13 \leqq \Delta_3 \leqq \infty$$

و آن یعنی مقدار کاهش مجاز b_3 برابر است با 13 و مقدار افزایش مجاز آن برابر است با

بی نهایت. بنابراین، محدودهٔ b_3 عبارت است از

$$-10 \leqq b_3 \leqq \infty$$

مقادیر جدید متغیّرهای طرّاحی. اکنون بیاییم و مقادیر جدید متغیّرهای طرّاحی را در صورتی که طرف راست اوّلین قید از ۹ به ۱۰ تغییر یابد محاسبه کنیم. دقت کنید که این تغییر در محدودهٔ تعیین شدهٔ قبلی است. در معادلهٔ (۴.۳۶)، $k = 1$، پس $\Delta_1 = 1$. همچنین $j = 3$، بنابراین در معادلهٔ (۴.۳۶) از ستون سوم جدول ۴.۲۰ استفاده می کنیم و مقادیر جدید متغیّرهای طرّاحی را به شکل زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} x_2 &= b_1'' = b_1' + \Delta_1 a_{13}' \\ &= 1 + (1)(0.2) = 1.2 \\ x_1 &= b_2'' = b_2' + \Delta_1 a_{23}' \\ &= 4 + (1)(0.4) = 4.4 \\ x_5 &= b_3'' = b_3' + \Delta_1 a_{33}' \\ &= 13 + (1)(0.8) = 13.8 \end{aligned}$$

دیگر متغیّرها غیراصلی باقی می مانند، پس مقادیر صفر دارند. جواب جدید متعلق به نقطهٔ F در شکل ۴.۷ می باشد.

اگر طرف راست دومین قید از ۲ به ۳ تغییر یابد، با استفاده از معادلهٔ (۴.۳۶) و ستون x_4 جدول ۴.۲۰ متغیّرهای جدید عبارتند از

$$\begin{aligned} x_2 &= b_1'' = b_1' + \Delta_2 a_{14}' \\ &= 1 + (1)(-0.4) = 0.6 \\ x_1 &= b_2'' = b_2' + \Delta_2 a_{24}' \\ &= 4 + (1)(0.2) = 4.2 \\ x_5 &= b_3'' = b_3' + \Delta_2 a_{34}' \\ &= 13 + (1)(1.4) = 14.4 \end{aligned}$$

این جواب متعلّق به نقطهٔ G در شکل ۴.۷ است.

اگر طرف راست دو قید یا بیشتر همزمان تغییر یابد، می توانیم از معادلهٔ (۴.۳۶) برای به دست آوردن مقادیر جدید متغیّرها استفاده کنیم. امّا باید مطمئن شویم که طرف راست جدید مجموعهٔ متغیّرهای اصلی و غیراصلی را تغییر نمی دهد، یعنی

رأسی که جواب بهین را می دهد عوض نمی شود. یا، به عبارت دیگر، قید جدیدی فعال نمی شود. به عنوان مثال، اگر مقادیر جدید متغیّرها را از معادلهٔ (۴.۳۶) برای تغییر همزمان طرف راست قیود اوّل و دوم به ترتیب از ۹ و ۲ به ۱۰ و ۳ محاسبه کنیم، داریم:

$$
\begin{aligned}
x_2 \equiv b_1'' &= b_1' + \Delta_1 a_{13}' + \Delta_2 a_{14}' \\
&= 1 + (1)(0.2) + (1)(-0.4) = 0.8 \\
x_1 \equiv b_2'' &= b_2' + \Delta_1 a_{23}' + \Delta_2 a_{24}' \\
&= 4 + (1)(0.4) + (1)(0.2) = 4.6 \\
x_5 \equiv b_3'' &= b_3' + \Delta_1 a_{33}' + \Delta_2 a_{34}' \\
&= 13 + (1)(0.8) + (1)(1.4) = 15.2
\end{aligned}
$$

می توان دید که جواب جدید متعلق به نقطهٔ H در شکل ۴.۷ است.

مثال ۴.۱۹ محدودهٔ حدود منابع ـ قیود مساوی و "نوع ≥". محدودهٔ پارامترهای طرف راست مسأله زیر را بیابید.

تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leqq 5 \\
2x_1 + x_2 &= 4 \\
x_1 - x_2 &\geqq 1 \\
x_1, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

ماکزیمم کنید.

حل. این مسأله در مثال ۴.۱۷ حل شده و جدول نهایی از جدول ۴.۱۹ در جدول ۴.۲۱ کپی شده است. حل ترسیمی مسأله در شکل ۴.۸ آمده است. در جدول، x_3 متغیّر کمبود برای اوّلین قید، x_4 متغیّر زیادتی برای قید سوم، x_5 متغیّر مصنوعی برای قید دوم، و x_6 متغیّر مصنوعی برای قید سوم است.

جدول ۴.۲۱ جدول نهایی مثال ۴.۱۹ (تعیین محدودهٔ حدود منابع)

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	-1	-1	1	2
x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
هزینه	0	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$f + \frac{13}{3}$

x_3 ، متغیّر کمبود؛ x_4 ، متغیّر زیادتی، x_5 ، x_6 ، متغیّرهای مصنوعی.
برای قید اوّل، با استفاده از ستون x_3 ، در معادلهٔ (۴.۳۵)، $j = 3$
برای قید دوم، با استفاده از ستون x_5 ، در معادلهٔ (۴.۳۵)، $j = 5$
برای قید سوم، با استفاده از ستون x_6 ، در معادلهٔ (۴.۳۵)، $j = 6$

برای قید اوّل، x_3 متغیّر کمبود است. بنابراین، اندیس j برای Δ_1 عبارت است از ۳ که در نامعادلهٔ (۴.۳۵) استفاده می‌کنیم. در ستون ۳، عنصر منفی وجود ندارد؛ پس حد بالایی برای Δ_1 وجود ندارد. حد پایینی Δ_1 از معادلهٔ (۴.۳۵) عبارت است از -2. بنابراین حد Δ_1 عبارت است از $\infty \le \Delta_1 \le -2$. یا، با اضافه کردن مقدار فعلی $b_1 = 5$ به آن، محدودهٔ b_1 عبارت است از

$$3 \leqq b_1 \leqq \infty$$

قید دوم یک قید مساوی است. اندیس j برای استفاده در نامعادله (۴.۳۵) با متغیّر مصنوعی قیدکه x_5است تعیین می گردد؛ یعنی $j = 5$. براین اساس، محدودهٔ Δ_2 عبارت است از

$$\max \{ -(\tfrac{2}{3})/(\tfrac{1}{3}),\ -(\tfrac{5}{3})/(\tfrac{1}{3})\} \leqq \Delta_2 \leqq \min \{-2/(-1)\}$$

یا، $-2 \le \Delta_2 \le 2$. محدودهٔ b_2 با اضافه کردن مقدار فعلی $b_2 = 4$ به نامعادلهٔ فوق به دست می آید، $2 \le b_2 \le 6$.

قید سوم از "نوع $\geq$" است، پس اندیس j در نامعادلهٔ (۴.۳۵) با متغیّر مصنوعی تعیین می گردد. این به ما $j = 6$ را می دهد. با به دست آوردن نسبتهای طرف راست به عناصر ستون ششم، محدودهٔ Δ_3 را می یابیم

$$\max\{-\tfrac{2}{1}, -(\tfrac{5}{3})/(\tfrac{1}{3})\} \leqq \Delta_3 \leqq \min\{-(\tfrac{2}{3})/(-\tfrac{2}{3})\}$$

یا، $-2 \le \Delta_1 \le 1$. محدودهٔ تغییرات در b_1 عبارت است از (با اضافه کردن مقدار فعلی $b_1 = 1$ به دو طرف نامعادلهٔ فوق) $-1 \le b_1 \le 2$.

مقادیر جدید متغیّرهای طرّاحی. می توانیم از معادلهٔ (۴.۳۶) برای محاسبهٔ مقادیر جدید متغیّرهای طرّاحی به ازای تغییر طرف راست که در محدودهٔ تعیین شده باشد، استفاده کنیم. می توان دید که چون قید اوّل فعال نیست، جواب بهین را متأثر نمی کند، مشروط به این که تغییرات طرف راست در محدودهٔ $3 \le b_1 \le \infty$ باشد که قبلاً به دست آمد.

حال جواب جدید را وقتی طرف راست قید دوم از ۴ به ۵ تغییر یابد (تغییر در محدودهٔ تعیین شدهٔ قبلی است) به دست می آوریم. قید دوم، x_5 را به عنوان متغیّر مصنوعی دارد، پس از ستون ۵ جدول ۴.۲۱ برای معادله (۴.۳۵) استفاده می کنیم و مقادیر جدید متغیّرها را به روش زیر محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned}
x_3 &\equiv b''_1 = b'_1 + \Delta_2 a'_{15} \\
&= 2 + (1)(-1) = 1 \\
x_2 &\equiv b''_2 = b'_2 + \Delta_2 a'_{25} \\
&= \tfrac{2}{3} + (1)(\tfrac{1}{3}) = 1 \\
x_1 &\equiv b''_3 = b'_3 + \Delta_2 a'_{35} \\
&= \tfrac{5}{3} + (1)(\tfrac{1}{3}) = 2
\end{aligned}$$

جوابها می تواند با حل قید دوم و سوم که فعال می مانند تأیید شود.

برای به دست آوردن مقادیر جدید متغیّرهای طرّاحی وقتی طرف راست قید سوم از ۱ به ۲ تغییر یابد، از ستون x_6 جدول ۴.۲۱ در معادلهٔ (۴.۳۶) استفاده می کنیم. جواب جدید عبارت است از

$$\begin{aligned}
x_3 &\equiv b''_1 = b'_1 + \Delta_3 a'_{16} \\
&= 2 + (1)(1) = 3 \\
x_2 &\equiv b''_2 = b'_2 + \Delta_3 a'_{26} \\
&= \tfrac{2}{3} + (1)(-\tfrac{2}{3}) = 0 \\
x_1 &\equiv b''_3 = b'_3 + \Delta_3 a'_{36} \\
&= \tfrac{5}{3} + (1)(\tfrac{1}{3}) = 2
\end{aligned}$$

در شکل ۴.۸ به راحتی می توان دید که جواب جدید متعلق به نقطهٔ C است.

۴.۶.۳ محدودهٔ ضرایب هزینه

اگر یک ضریب هزینه c_k به $c_k + \Delta c_k$ تغییر یابد، می‌خواهیم محدودهٔ قابل قبول Δc_k را چنان تعیین کنیم که متغیّرهای طرّاحی بهین تغییری نکنند. دقّت کنید که وقتی ضرایب هزینه تغییر کنند، *ناحیهٔ قابل قبول مسأله تغییر نمی‌کند*. امّا جهت چندضلعی تابع هزینه و مقدار آن تغییر می‌کند. محدودهٔ تغییرات Δc_k برای ضرایب c_k بستگی به این دارد که آیا x_k در بهین یک متغیّر اصلی است یا خیر. پس، ما باید دو حالت را جداگانه در نظر بگیریم.

قضیه ۴.۷ محدودهٔ ضرایب هزینه مربوط به متغیّرهای غیراصلی. فرض کنید c_k طوری باشد که x_k متغیّر اصلی نباشد. اگر این c_k با هر $c_k + \Delta c_k$ عوض شود که $\infty \le \Delta c_k \le - c'_k$، آن گاه جواب بهین (متغیّرهای طرّاحی و تابع هزینه) تغییر نمی‌کنند. در این جا، c'_k ضریب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به x_k در جدول نهایی است.

قضیه ۴.۸ محدودهٔ ضرایب هزینه مربوط به متغیّرهای اصلی. فرض کنید c_k طوری باشد که x^*_k متغیّر اصلی باشد، و فرض کنید $x^*_k = b'_r$ (اندیس بالایی * برای مشخص کردن مقدار بهین استفاده شده است). آن گاه محدودهٔ تغییرات Δc_k در c_k که در آن متغیّرهای طرّاحی بهین تغییر نمی‌کنند، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\max_j \{c'_j/a'_{rj};\ a'_{rj} < 0\} \leqq \Delta c_k \leqq \min_j \{c'_j/a'_{rj};\ a'_{rj} > 0\} \qquad (۴.۳۷)$$

که در آن a'_{rj} = عنصر سطر r ام و ستون j ام از جدول نهایی. اندیس r از سطری که x^*_k را مشخص می‌کند به دست می‌آید. اندیس j مربوط به هر ستون غیراصلی است بجز ستونهای مصنوعی. (دقت کنید: اگر هیچ $a'_{rj} < 0$ نباشد، آن گاه حد بالایی وجود ندارد؛ اگر هیچ $a'_{rj} > 0$ نباشد، آن گاه حد پایینی وجود ندارد.)

c'_j = ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون غیراصلی j ام بجز ستونهای متغیّرهای مصنوعی.

وقتی Δc_k نامعادلهٔ (۴.۳۷) را برآورده کند، مقدار بهین تابع هزینه عبارت است از $f^* + \Delta c_k x^*_k$.

برای به دست آوردن تغییرات ممکن ضریب هزینهٔ یک متغیّر اصلی، اولین مرحله به دست آوردن اندیس سطر r برای استفاده در نامعادلهٔ (۴.۳۷) است. این کار سطری را که

متغیّر اصلی x_k^* را مشخص می کند نشان می دهد. بعد از مشخص شدن r ، ما نسبت ضرایب هزینه را به عناصر سطر r ام براساس قضیهٔ ۴.۸ محاسبه می کنیم. حد پایینی Δc_k با نسبت ماکزیمم c_j' / a_{rj}' با $a_{rj}' < 0$ به دست می آید. حد بالایی با نسبت مینیمم c_j' / a_{rj}' با $a_{rj}' > 0$ به دست می آید.

مثال ۴.۲۰ محدودهٔ ضرایب هزینه ـ قیود "نوع ≤". برای مسألهٔ زیر محدودهٔ ضرایب هزینه را به دست آورید.

تابع

$$z = 5x_1 - 2x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 9 \\ x_1 - 2x_2 &\leqq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqq 3 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

حل. مسأله در مثال ۴.۱۶ حل شده است. جدول نهایی از جدول ۴.۱۸ در جدول ۴.۲۲ کپی شده است. مسأله به عنوان مینیمم سازی تابع $f = -5x_1 + 2x_2$ حل شده است. بنابراین، ما محدودهٔ ضرایب هزینه $c_1 = -5$ و $c_2 = 2$ را می یابیم. دقّت کنید که چون هم x_1 و هم x_2 اصلی اند، قضیهٔ ۴.۸ استفاده خواهد شد.

چون سطر دوم متغیّر اصلی x_1 را مشخص می کند، برای استفاده در نامعادلهٔ (۴.۳۷) $r = 2$ (شماره سطر). ستون ۳ و ۴ غیراصلی اند. بنابراین $j = 3, 4$ اندیس ستونهایی است که در معادلهٔ (۴.۳۷) استفاده می شود. ما نسبت ضرایب هزینهٔ کاهش یافته را به عناصر سطر دوم جدول نهایی به دست می آوریم. این محدودهٔ Δc_1 را می دهد. داریم

$$-\infty \leqq \Delta c_1 \leqq \min\left\{\frac{1.6}{0.4}, \frac{1.8}{0.2}\right\}; \quad \text{یا} \quad -\infty \leqq \Delta c_1 \leqq 4$$

محدودهٔ c_1 با اضافه کردن مقدار فعلی $c_1 = -5$ به دو طرف نامعادلهٔ فوق به دست می آید،

(الف) $$-\infty \leqq c_1 \leqq -1$$

جدول ۴.۲۲ جدول نهایی مثال ۴.۲۰ (محدودهٔ ضرایب هزینه)

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	0.2	−0.4	0	1
x_1	1	0	0.4	0.2	0	4
x_5	0	0	0.8	1.4	1	13
هزینه	0	0	1.6	1.8	0	$f+18$
			(c'_3)	(c'_4)		

برای c_1 : x_1 اصلی است که از سطر دوم به دست می‌آید، پس در معادلهٔ (۴.۳۷) از سطر دوم استفاده می‌کنیم $(r = 2)$.
برای c_2 : x_2 اصلی است که از سطر اوّل به دست می‌آید، پس در معادلهٔ (۴.۳۷) از سطر اوّل استفاده می‌کنیم $(r = 1)$.

پس، اگر c_1 از 5− به 4− تغییر یابد، تابع هزینهٔ جدید عبارت است از

$$f^*_{new} = f^* + \Delta c_1 x_1^*$$
$$= -18 + (1)(4) = -14$$

این یعنی تابع هزینه به اندازه ۴ واحد افزایش خواهد یافت.

برای ضریب هزینه دوم، $r = 1$ (شماره سطر) زیرا سطر اوّل x_2 را به عنوان یک متغیّر اصلی مشخص می‌کند. با استفاده از نامعادلهٔ (۴.۳۷)، ما نسبت ضرایب هزینهٔ کاهش یافته را به عناصر سطر اوّل به دست می‌آوریم،

$$\max\left\{\frac{1.8}{(-0.4)}\right\} \leqq \Delta c_2 \leqq \min\left\{\frac{1.6}{0.2}\right\}; \quad \text{یا} \quad -4.5 \leqq \Delta c_2 \leqq 8$$

محدودهٔ c_2 با اضافه کردن مقدار فعلی $c_2 = 2$ به دو طرف نامعادلهٔ فوق به دست می‌آید،

$$-2.5 \leqq c_2 \leqq 10 \qquad \text{(ب)}$$

پس، اگر c_2 از ۲ به ۳ تغییر یابد، مقدار تابع هزینهٔ جدید عبارت است از

$$f^*_{new} = f^* + \Delta c_2 x_2^*$$
$$= -18 + (1)(1) = -17$$

این یعنی، تابع هزینه به اندازه ۱ واحد اضافه می‌شود.

دقت کنید که محدودهٔ ضـرایب تابع ماکزیمم شونده ($z = 5x_1 - 2x_2$) می تواند از معادله‌های (الف) و (ب) به دست آید. برای به دست آوردن این محدوده، معادلات (الف) و (ب) را در ۱− ضرب می کنیم. بنابراین محدودهٔ $c_1 = 5$ عبارت است از $1 \le c_1 \le \infty$ و محدودهٔ $c_2 = -2$ عبارت است از $-10 \le c_2 \le 2.5-$

مثال ۴.۲۱ محدودهٔ ضرایب هزینه ـ قیود مساوی و "نوع ≤". محدودهٔ ضرایب هزینه را برای مسأله زیر بیابید.

تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$

$$2x_1 + x_2 = 4$$

$$x_1 - x_2 \geqq 1$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

حل. مسأله در مثال ۴.۱۷ حل شده و جدول نهایی از جدول ۴.۱۹ در جدول ۴.۲۳ کپی شده است. در جدول، x_3 متغیّر کمبود برای قید اوّل، x_4 متغیّر زیادتی برای قید سوم، و x_5 و x_6 به ترتیب متغیّرهای مصنوعی برای قیود دوم و سوم هستند.

چون هم x_1 و هم x_2 متغیّرهای اصلی اند، قضیهٔ ۴.۸ را برای یافتن محدودهٔ ضرایب هزینه $c_1 = -1$ و $c_2 = -4$ به کار می بریم. دقت کنید که مسأله به عنوان مینیمم سازی تابع هزینه $f = -x_1 - 4x_2$ حل شده است. ستونهای ۴ ، ۵ و ۶ غیر اصلی اند. امّا ستونهای ۵ و ۶ باید برای استفاده در نامعادلهٔ (۴.۳۷) استثنا شوند، زیرا آنها مربوط به متغیّرهای مصنوعی اند. بنابراین، اندیس ستون j فقط ۴ است که در نامعادلهٔ (۴.۳۷) استفاده می شود.

برای یافتن محدودهٔ Δc_1 ، $r = 3$ استفاده می شود، زیرا سطر سوم x_1 را به عنوان متغیّر اصلی مشخص می کند. با استفاده از نامعادله های (۴.۳۷) با $r = 3$ و $j = 4$ ، داریم

جدول ۴.۲۳ جدول نهایی مثال ۴.۲۱ (محدودهٔ ضرایب هزینه)

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	0	0	1	-1	-1	1	2
x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
هزینه	0	0	0	$\frac{7}{3}$ (c'_4)	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$f+\frac{13}{3}$

برای c_1 : x_1 اصلی است که از سطر ۳ به دست می‌آید. پس در معادلهٔ (۴.۳۷)، $r = 3$ را استفاده می‌کنیم.

برای c_2 : x_2 اصلی است که از سطر ۲ به دست می‌آید. پس در معادلهٔ (۴.۳۷)، $r = 2$ را استفاده می‌کنیم.

محدودهٔ c_1 با اضافه کردن مقدار فعلی $c_1 = -1$ به دو طرف نامعادلهٔ فوق به دست می‌آید،

$$-8 \leqq c_1 \leqq \infty \qquad \text{(الف)}$$

پس، اگر c_1 از -1 به -2 تغییر یابد، مقدار تابع هزینهٔ جدید عبارت است از

$$f^*_{new} = f^* + \Delta c_1 x_1^*$$
$$= -\tfrac{13}{3} + (-1)(\tfrac{5}{3}) = -6$$

برای ضریب هزینهٔ دوم، $r = 2$ زیرا سطر دوم x_2 را به عنوان متغیّر اصلی مشخص می‌کند.
با استفاده از نامعادله های (۴.۳۷) با $r = 2$ و $j = 4$ ، محدودهٔ Δc_2 به دست می‌آید

$$-\infty \leqq \Delta c_2 \leqq 3.5$$

پس، محدوهٔ c_2 با مقدار فعلی $c_2 = -4$ عبارت است از

$$-\infty \leqq c_2 \leqq -0.5 \qquad \text{(ب)}$$

پس، اگر c_2 از -4 به -3 تغییر یابد، مقدار جدید تابع هزینه عبارت است از

$$f^*_{new} = f^* + \Delta c_2 x_2^*$$
$$= -\tfrac{13}{3} + (1)(\tfrac{2}{3}) = -\tfrac{11}{3}$$

از معادله های (الف) و (ب) محدودهٔ ضرایب تابع ماکزیمم شونده $(z = x_1 + 4x_2)$ به روش زیر به دست می آید

$$-\infty \leqq c_1 \leqq 8, \; 0.5 \leqq c_2 \leqq \infty$$

۴.۶.۴ تغییر ماتریس ضرایب

هر تغییری در ماتریس $\mathbf{A}$ ناحیهٔ قابل قبول مسأله را تغییر می دهد. بسته به این که آیا تغییر مربوط به متغیّر اصلی است یا خیر، این تغییر ممکن است جواب بهین مسأله را تغییر دهد. فرض کنید a_{ij} با $a_{ij} + \Delta a_{ij}$ جایگزین شود. ما محدودهٔ Δa_{ij} را چنان تعیین می کنیم که با محاسبات مختصری جواب بهین برای مسأله تغییر یافته بتواند به دست آید. باید دو حالت را در نظر بگیریم؛ (i) وقتی تغییرات مربوط به یک متغیّر غیراصلی است، و (ii) وقتی که تغییرات مربوط به متغیّر اصلی است.

قضیه ۴.۹ تغییر مربوط به یک متغیّر غیراصلی. فرض کنید j در a_{ij} طوری است که x_j یک متغیّر غیراصلی است و k اندیس ستون متغیّر کمبود یا مصنوعی مربوط به سطر i ام. برداری به شکل زیر تعریف کنید

$$\mathbf{c}_B = [c_{B1} \; c_{B2} \; . \; . \; . \; c_{Bm}]^T \tag{۴.۳۸}$$

در حالی که اگر $x_j^* = b_i^*$ باشد $c_{Bi} = c_j$ برای $i = 1$ to m (یعنی اندیس i مربوط است به سطر i ام که مقدار بهین متغیّر x_j را می دهد. همچنین

$$R = \sum_{r=1}^{m} c_{Br} a'_{rk} \tag{۴.۳۹}$$

با این علایم، اگر Δa_{ij} نامعادله های زیر را برآورده کند

$$\Delta a_{ij} \geqq c'_j / R \text{ هنگامی که } R < 0, \quad \text{و} \quad \Delta a_{ij} \leqq \infty \text{ هنگامی که } R \leqq 0 \tag{۴.۴۰}$$

یا

$$\Delta a_{ij} \leqq c'_j / R \text{ اگر } R > 0, \quad \text{و} \quad \Delta a_{ij} \geqq -\infty \text{ اگر } R \geqq 0 \tag{۴.۴۱}$$

آن گاه جواب بهین (متغیّرهای طرّاحی و تابع هزینه) وقتی a_{ij} با $a_{ij} + \Delta a_{ij}$ جایگزین شود تغییر نمی کند. همچنین، اگر $R = 0$ باشد، آن گاه جواب برای هر Δa_{ij} بدون

تغییر می ماند.

برای استفاده از قضیه، اولین قدم تعیین اندیسهای j و k است. آن گاه بردار $\mathbf{c}_B$ معادلهٔ (۴.۳۸) و اسکالر R معادلهٔ (۴.۳۹) را به دست می آوریم. شرایط نامعادله های (۴.۴۰) و (۴.۴۱) آن گاه مشخص می کند که آیا Δa_{ij} جواب بهین را تغییر می دهد یا خیر. اگر نامعادلات برآورده نشوند، آن گاه باید مسأله را دوباره حل کنیم تا جواب جدید را بیابیم.

قضیه ۴.۱۰ تغییر مربوط به یك متغیّر اصلی. فرض کنید j در a_{ij} طوری باشد که x_j متغیّر اصلی شود و فرض کنید $x_j^* = b'_t$ (یعنی t اندیس سطری است که مقدار بهین x_j را تعیین می کند). فرض کنید اندیس k و اسکالر R مانند قضیهٔ ۴.۹ تعریف شوند. همچنین فرض کنید Δa_{ij} نامعادله های زیر را برآورده کند:

$$\max_{r \neq t} \{b'_r/A_r,\ A_r < 0\} \leqq \Delta a_{ij} \leqq \min_{r \neq t} \{b'_r/A_r,\ A_r > 0\} \qquad (۴.۴۲)$$

با

$$A_r = b'_t a'_{rk} - b'_r a'_{tk}, \qquad r = 1 \text{ to } m;\ r \neq t \qquad (۴.۴۳)$$

و

$$\max_q \{-c'_q/B_q,\ B_q > 0\} \leqq \Delta a_{ij} \leqq \min_q \{-c'_q/B_q,\ B_q < 0\} \qquad (۴.۴۴)$$

با

$$B_q = c'_q a'_{tk} + a'_{tq} R \qquad \text{برای تمامی } q \text{ هایی که در پایه وجود ندارند} \qquad (۴.۴۵)$$

و

$$1 + a'_{tk}\Delta a_{ij} > 0 \qquad (۴.۴۶)$$

دقّت کنید که اگر مخرج مربوطه وجود نداشته باشد حد بالا و پایین Δa_{ij} وجود ندارد. اگر Δa_{ij} نامعادله های فوق را برآورده کند، آن گاه جواب بهین مسأله تغییر یافته بدون انجام چرخهٔ اضافی روش سیمپلکس می تواند به دست آید. اگر b'_r برای $r = 1$ to m با روابط زیر در جدول نهایی جایگزین شود

$$\begin{aligned} b''_r &= b'_r - \Delta a_{ij} a'_{rk}/(1 + \Delta a_{ij} a'_{tk}), \qquad r = 1 \text{ to } m;\ r \neq t \\ b''_t &= b'_t/(1 + \Delta a_{ij} a'_{tk}) \end{aligned} \qquad (۴.۴۷)$$

آن گاه، مقادیر جدید بهین برای متغیّرهای اصلی می تواند با جای گزینی $a_{ij} + \Delta a_{ij}$ به جای a_{ij} به دست آید. به عبارت دیگر، اگر $x_j^* = b'_r$ ، آن گاه $x'_j = b''_r$ در حالی که x'_j مربوط است به جواب بهین مسألهٔ تغییر یافته.

برای استفاده از قضیه، باید اندیسهای j و t و k را تعیین کرد. آن گاه ثابتهای A_r و B_{ij} را از معادله های (۴.۴۳) و (۴.۴۵) به دست می آوریم. با اینها، محدودهٔ Δa_{ij} را از نامعادله های (۴.۴۲) و (۴.۴۴) می توان به دست آورد. اگر Δa_{ij} این نامعادلات را برآورده کند، معادلهٔ (۴.۴۷) جواب جدید را می دهد. اگر نامعادله ها برآورده نشوند، مسأله باید دوباره حل شود تا جواب جدید به دست آید.

۴.۷* دوگانی در برنامه ریزی خطّی

برای هر مسألهٔ برنامه ریزی خطّی یک مسألهٔ LP دیگر وجود دارد که دوگان آن نامیده می شود. مسألهٔ LP اصلی، ابتدایی نامیده می شود. اگر مسألهٔ ابتدایی شامل n متغیّر و m قید باشد، مسألهٔ دوگان شامل n قید و m متغیّر است. از جواب یکی از آنها به راحتی جواب دیگری به دست می آید. در این بخش، ما مفاهیم مهم دوگانی را در LP بیان می کنیم.

۴.۷.۱ LP ابتدایی استاندارد

راههای متفاوتی برای تعریف مسألهٔ ابتدایی و دوگان آن وجود دارد. ما مسألهٔ ابتدایی استاندارد را به شکل زیر تعریف می کنیم: متغیّرهای x_1 ، x_2 ، ... ، x_n را طوری بیابید که تابع هدف ابتدایی زیر ماکزیمم شود

$$z_p = d_1x_1 + \dots + d_nx_n = \sum_{i=1}^{n} d_ix_i \equiv \mathbf{d}^T\mathbf{x} \tag{۴.۴۸}$$

مشروط به قیود

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leqq e_1 \\ &\dots\dots\dots\dots \qquad\qquad (\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{e}) \\ &a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leqq e_m \\ &x_j \geqq 0; \qquad j = 1 \text{ to } n \end{aligned} \tag{۴.۴۹}$$

برای مشخص شدن تابع هدف ابتدایی اندیس پایین p را روی z استفاده می کنیم.

همچنین z به عنوان تابعی که ماکزیمم می شود استفاده شده. باید توجّه داشت که در مسألهٔ LP استاندارد تعریف شده در معادله های (۴.۸) تا (۴.۱۰)، همهٔ قیود از نوع مساوی بودند با پارامتر طرف راست b_i نامنفی. امّا در مسألهٔ ابتدایی استاندارد، همهٔ قیود باید از "نوع $\le$" باشند و هیچ محدودیتی در مورد علامت پارامتر طرف راست e_i وجود ندارد. بنابراین قیود "نوع $\ge$" باید در -1 ضرب شوند تا به "نوع $\le$" تبدیل گردند. قیدهای مساوی نیز باید تبدیل به قیدهای "نوع $\le$" شوند. این مطلب را بعداً در همین بخش تشریح می کنیم. به علاوه، تابع هدف ابتدایی همیشه ماکزیمم می شود. دقّت کنید که برای حل مسألهٔ LP ابتدایی به روش سیمپلکس باید آن را به شکل استاندارد سیمپلکس معادله های (۴.۸) تا (۴.۱۰) تبدیل کنیم. در آن صورت است که روش سیمپلکس دوگامی می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۴.۷.۲ مسألهٔ LP دوگان

دوگان ابتدایی استاندارد به شکل زیر تعریف می شود:

متغیّرهای دوگان $y_1, y_2, \ldots, y_m$ را طوری بیابید که تابع هدف دوگان

$$f_d = e_1 y_1 + \ldots + e_m y_m = \sum_{i=1}^{m} e_i y_i = \mathbf{e}^T \mathbf{y} \tag{۴.۵۰}$$

با قیود

$$\begin{aligned} &a_{11} y_1 + \ldots + a_{m1} y_m \geqq d_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad (\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geqq \mathbf{d}) \\ &a_{1n} y_1 + \ldots + a_{mn} y_m \geqq d_n \\ &y_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } m \end{aligned} \tag{۴.۵۱}$$

را مینیمم کند. از اندیس d برای f به این منظور استفاده می شود که نشان دهیم تابع هزینه برای مسأله دوگان است. *به ارتباط بین مسائل ابتدایی و دوگان که در زیر می آید* دقّت کنید:

۱. تعداد متغیّرهای دوگان مساوی تعداد قیود ابتدایی است. هر متغیّر دوگان مربوط به یک قید ابتدایی است. به عنوان مثال، y_i مربوط به i امین قید ابتدایی است.

۲. تعداد قیود دوگان مساوی تعداد متغیّرهای ابتدایی است. هر متغیّر ابتدایی مربوط به یک قید دوگان است. به عنوان مثال، x_i مربوط به i امین قید دوگان است.

۳. قیود ابتدایی از نامساویهای "نوع $\le$" اند در صورتی که قیود دوگان از "نوع $\ge$" اند.

۴ . ماکزیمم سازی تابع هدف ابتدایی با مینیمم سازی تابع هزینهٔ دوگان جایگزین می شود .

۵ . ضرایب d_i مربوط به تابع هدف ابتدایی ، طرف راست قیود دوگان می شوند . پارامترهای طرف راست e_i قیود ابتدایی ، ضرایب تابع هزینه دوگان می شوند .

۶ . ماتریس ضرایب $[a_{ij}]$ قیود ابتدایی ، برای قیود دوگان ترانهاده شده به شکل $[a_{ji}]$ خواهد بود .

۷ . شرط نامنفی بودن در مورد متغیّرهای ابتدایی و دوگان به کار می رود .

دوباره این جا تأکید می کنیم که تعریف ابتدایی استاندارد با تعریف LP استاندارد متفاوت است . امّا ، برای حل ابتدایی یا دوگان ، باید شکل استاندارد روش سیمپلکس را به کار ببریم . بعداً در این بخش مثالی این موضوع را تشریح می کند .

مثال ۴.۲۲ دوگان یک مسألهٔ LP. دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید :

تابع

$$z_p = 5x_1 - 2x_2$$

را با شرایط

(الف) $$2x_1 + x_2 \leqq 9$$

(ب) $$x_1 - 2x_2 \leqq 2$$

(پ) $$-3x_1 + 2x_2 \leqq 3$$

$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید .

حل. مسأله به شکل ابتدایی استاندارد است و بردارها و ماتریسهای زیر مشخص می شوند :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

چون سه قید ابتدایی وجود دارد ، برای مسأله سه متغیّر دوگان وجود خواهد داشت . فرض کنید y_1 ، y_2 و y_3 به ترتیب متغیّرهای دوگان مربوط به قیود (الف) ، (ب) و (پ) باشند . بنابراین ، معادله های (۴.۵۰) و (۴.۵۱) دوگان مسأله را می دهد . داریم :

تابع

$$f_d = 9y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

را با شرایط

$$2y_1 + y_2 - 3y_3 \geqq 5$$
$$y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geqq -2$$
$$y_1, y_2, y_3 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴.۷.۳ چگونگی کار با قیود مساوی

بسیاری از مسائل طرّاحی قیود مساوی دارند. هر قید مساوی می تواند با دو نامساوی جایگزین شود. برای مثال، $2x_1 + 3x_2 = 5$ می تواند با دو قید $2x_1 + 3x_2 \geq 5$ و $2x_1 + 3x_2 \leq 5$ جایگزین گردد. می توانیم نامساوی "نوع $\geq$" را در -1 ضرب کرده و آن را به شکل ابتدایی استاندارد تبدیل کنیم. مثال زیر نحوهٔ کار با قیود مساوی و "نوع $\geq$" را نشان می دهد.

مثال ۴.۲۳ دوگان یک LP با قیود مساوی و "نوع $\geq$". دوگان مسألهٔ زیر را بنویسید:

تابع

$$z_p = x_1 + 4x_2$$

را با شرایط

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 1$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

حل. قید مساوی $2x_1 + x_2 = 4$ معادل دو نامساوی $2x_1 + x_2 \leq 4$ و $2x_1 + x_2 \geq 4$ است. قیود "نوع $\geq$" در -1 ضرب می شوند تا تبدیل به شکل "$\leq$" شوند. پس شکل ابتدایی استاندارد مسألهٔ بالا عبارت است از:

تابع

$$z_p = x_1 + 4x_2$$

را با شرایط

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqq 5 \\ 2x_1 + x_2 &\leqq 4 \\ -2x_1 - x_2 &\leqq -4 \\ -x_1 + x_2 &\leqq -1 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید. با استفاده ازمعادله های (۴.۵۰) و (۴.۵۱)، دوگان ابتدایی عبارت است از:

تابع

$$f_d = 5y_1 + 4(y_2 - y_3) - y_4$$

را با شرایط

$$\begin{aligned} y_1 + 2(y_2 - y_3) - y_4 &\geqq 1 \\ 2y_1 + (y_2 - y_3) + y_4 &\geqq 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geqq 0 \end{aligned}$$

مینیمم کنید.

۴.۷.۴ روش دیگر برای کار با قیود مساوی

ما نشان خواهیم داد که برای نوشتن دوگان لازم نیست یک قید مساوی را با دو نامساوی جایگزین کنیم. دقّت کنید که برای مثال ۴.۲۳ چهار متغیّر دوگان وجود دارد. متغیّرهای y_2 و y_3 متعلق به قیود دوم و سوم ابتدایی اند که به شکل استاندارد نوشته شده اند. همچنین دقت کنید که عبارت $(y_2 - y_3)$ در همهٔ عبارات مسألهٔ دوگان ظاهر شده است. ما $y_5 = y_2 - y_3$ را تعریف می کنیم. چون آن اختلاف دو متغیّر نامنفی است $(y_2 \geq 0, y_3 \geq 0)$، ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشد. اگر y_5 را جایگزین کنیم، مسأله دوگان مثال ۴.۲۳ دوباره به شکل زیر نوشته می شود:

تابع

$$f_d = 5y_1 + 4y_5 - y_4$$

را با قیود

$$y_1 + 2y_5 - y_4 \geqq 1$$
$$2y_1 + y_5 + y_4 \geqq 4$$
$$y_1, y_4 \geqq 0$$

$y_5 = y_2 - y_3$ از نظر علامت محدودیتی ندارد

مینیمم کنید.

اکنون تعداد متغیّرهای دوگان فقط سه تاست. چون تعداد متغیّرهای دوگان مساوی تعداد قیود ابتدایی است، متغیّر دوگان y_5 باید به قید مساوی $2x_1 + x_2 = 4$ مربوط باشد. پس، می توانیم چنین نتیجه بگیریم که: *اگر قید i ام ابتدایی به صورت مساوی باقی بماند، متغیّر دوگان i ام از نظر علامت محدودیتی نخواهد داشت.*

به روشی مشابه، می توانیم نشان دهیم که *اگر متغیّر ابتدایی از نظر علامت محدودیتی نداشته باشد، آن گاه قید i ام دوگان یک قید مساوی است.* (به عنوان تمرین).

مثال ۴.۲۴ به دست آوردن ابتدایی از دوگان. دقت کنید که ما می توانیم مسألهٔ دوگان را به شکل ابتدایی استاندارد تبدیل کنیم، آن گاه دوباره آن را به شکل دوگان برگردانیم. می توان نشان داد که دوگان این مسأله همان مسأله ابتدایی را مجدداً می دهد. به عنوان مثال، بیاییم مسألهٔ دوگان زیر را به شکل استاندارد تبدیل کنیم:

تابع

$$z_p = -5y_1 - 4y_5 + y_4$$

را با قیود

$$-y_1 - 2y_5 + y_4 \leqq -1$$
$$-2y_1 - y_5 - y_4 \leqq -4$$
$$y_1, y_4 \geqq 0$$

y_5 ازنظر علامت محدودیتی ندارد

ماکزیمم کنید.

با نوشتن دوگان ابتدایی فوق داریم:

تابع

$$f_d = -x_1 - 4x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &\geqq -5 \\ -2x_1 - x_2 &= -4 \\ x_1 - x_2 &\geqq 1 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

مینیمم کنید. همان طور که مشاهده می شود مانند مسألهٔ اصلی (مثال ۴.۲۳) است. دقت کنید که در مسألهٔ دوگان فوق، قید دوم از نوع مساوی است، زیرا متغیّر دوم ابتدایی (y_2) ازنظر علامت نامحدود بود.

قضیهٔ زیر بدیهی می نماید:

قضیهٔ ۴.۱۱ دوگان دوگان. دوگان مسألهٔ دوگان مسألهٔ ابتدایی است.

۴.۷.۵ به دست آوردن جواب ابتدایی از جواب دوگان

آنچه باقی می ماند، چگونگی به دست آوردن جواب بهین ابتدایی از جواب بهین دوگان و یا برعکس است. ابتدا، بیاییم هر نامعادله در رابطهٔ (۴.۵۱) را در x_1، x_2، ...، x_n ضرب کرده و با هم جمع کنیم. چون x_jها باید نامنفی باشند، نامعادلهٔ زیر را خواهیم داشت

$$x_1(a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m) + x_2(a_{12}y_1 + \ldots + a_{m2}y_m) + \ldots + x_n(a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m) \geqq d_1x_1 + \ldots + d_nx_n$$

نامعادلهٔ فوق به شکل ماتریسی عبارت است از $\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geq \mathbf{x}^T\mathbf{d}$. اگر جملات حاوی y_1، y_2، ...، y_m را در معادله با هم جمع کنیم (یا ترانهادهٔ طرف چپ را بگیریم، یعنی $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$)، داریم

$$y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \ldots + y_m(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n) \geqq d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n \qquad (۴.۵۲)$$

نامعادلهٔ فوق به شکل ماتریسی عبارت است از $\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{x}^T\mathbf{d}$. هر کمیت داخل کمان در معادلهٔ (۴.۵۲) از مقدار مربوطه e در طرف راست نامعادلهٔ (۴.۴۹) کمتر است. بنابراین با

جای گزینی از نامعادلهٔ (۴.۴۹) نامعادلهٔ (۴.۵۲) همچنان معتبر خواهد بود،

$$y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_me_m \geqq d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_nx_n \qquad (۴.۵۳)$$

یا، $\mathbf{y}^T\mathbf{e} \geq \mathbf{x}^T\mathbf{d}$. دقت کنید که در نامعادلهٔ (۴.۵۳)، طرف چپ تابع هزینهٔ دوگان و طرف راست تابع *هدف ابتدایی* است. بنابراین، از نامعادلهٔ (۴.۵۳)، $f_d \geq z_p$ برای تمامی $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ که معادله های (۴.۴۸) تا (۴.۵۱) را برآورده می کنند. پس، بردار $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ با $z_p = f_d$ ، z_p را ماکزیمم و f_d را مینیمم می کند. مقدار بهین (مینیمم) تابع هزینه دوگان، مقدار بهین (ماکزیمم) تابع هدف ابتدایی نیز هست.

قضایای زیر در ارتباط با ابتدایی و دوگان می تواند بیان شود:

قضیهٔ ۴.۱۲ ارتباط بین ابتدایی و دوگان. فرض کنید $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ به ترتیب در مجموعهٔ قیود (یعنی نقاط قابل قبول) مسأله ابتدایی (تعریف شده در معادله های (۴.۴۸) و (۴.۴۹)) و دوگان (تعریف شده در معادله های (۴.۵۰) و (۴.۵۱)) باشند. آن گاه شرایط زیر برقرار است:

۱. $f_d(\mathbf{y}) \geq z_p(\mathbf{x})$.

۲. اگر $f_d = z_p$ باشد آن گاه $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ به ترتیب جوابهای مسأله ابتدایی و دوگان هستند.

۳. اگر ابتدایی بیکران باشد، دوگان آن غیرقابل قبول است و برعکس.

۴. اگر ابتدایی قابل قبول باشد و دوگان غیرقابل قبول، آن گاه ابتدایی بیکران است و برعکس.

قضیهٔ ۴.۱۳ جوابهای ابتدایی و دوگان. فرض کنید ابتدایی و دوگان هر دو نقاط قابل قبول دارند. آن گاه هر دو به ترتیب جوابهای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ دارند و $f_d(\mathbf{y}) = z_p(\mathbf{x})$.

قضیهٔ ۴.۱۴ جواب ابتدایی از دوگان. اگر قید i ام دوگان در بهین کاملاً نامعادله باشد، آن گاه متغیّر i ام مربوطه ابتدایی غیراصلی است؛ یعنی، صفر است. همچنین اگر i امین متغیّر دوگان اصلی باشد، آن گاه i امین قید ابتدایی به صورت مساوی برآورده می شود.

شرایط قضیهٔ ۴.۱۴ می تواند به شکل زیر نوشته شود

$$\text{اگر } \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i > d_j, \quad \text{آن گاه} \quad x_j = 0.$$

(j امین قید کاملاً نامساوی است، آن گاه j امین متغیّر ابتدایی غیراصلی است)

اگر $y_i > 0$, آن گاه $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = e_i$

(i امین متغیّر دوگان اصلی است، i امین قید ابتدایی یک قید مساوی است).

این شرایط می تواند برای به دست آوردن متغیّرهای ابتدایی از متغیّرهای دوگان به کار رود. قیدهای ابتدایی که به صورت مساوی برآورده شده اند، از مقادیر متغیّرهای دوگان مشخص می شوند. معادله های خطّی حاصل به منظور به دست آوردن متغیّرهای ابتدایی می توانند به صورت همزمان حل شوند. امّا این کار لازم نیست، زیرا جدول نهایی دوگان می تواند مستقیماً برای به دست آوردن متغیّرهای ابتدایی مورد استفاده قرار گیرد. ما کاربرد این قضایا را در مثال زیر شرح می دهیم.

مثال ۴.۴۵ جوابهای ابتدایی و دوگان. مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید.

تابع

$$z_p = 5x_1 - 2x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 9 \\ x_1 - 2x_2 &\leqq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqq 3 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید. مسائل ابتدایی و دوگان را حل کرده و جداول نهایی آنها را مطالعه کنید.

حل. مسأله به روش سیمپلکس در مثال ۴.۱۶ و جدول ۴.۱۸ حل شده است. جدول نهایی را از آن جا در جدول ۴.۲۴ دوباره می نویسیم. از جدول نهایی ابتدایی داریم،

متغیرهای اصلی	$x_1 = 4,\ x_2 = 1,\ x_5 = 13$
متغیرهای غیراصلی	$x_3 = 0,\ x_4 = 0$
تابع هدف ماکزیمم	$z_p = 18$ (مقدار مینیمم عبارت است از -18)

حال بیاییم دوگان مسأله را نوشته و آن را به روش سیمپلکس حل کنیم. دقت کنید که مسألهٔ اصلی از ابتدا به صورت ابتدایی استاندارد بوده است. سه قید نامساوی ابتدایی

جدول ۴.۲۴ جدول نهایی مثال ۴.۲۵ به روش سیمپلکس (حل ابتدایی)

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_2	0	1	0.2	−0.4	0	1
x_1	1	1	0.4	0.2	0	4
x_5	0	0	1.8	1.4	1	13
هزینه	0	0	1.6	1.8	0	$f_p + 18$

وجود دارد، بنابراین سه متغیّر دوگان خواهیم داشت. دو متغیّر ابتدایی وجود دارد، پس دو قید دوگان داریم. فرض کنید y_1 ، y_2 و y_3 متغیّرهای دوگان باشند. بنابراین، دوگان مسأله به شکل زیر است.

تابع

$$f_d = 9y_1 + 2y_2 + 3y_3$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - 3y_3 &\geqq 5 \\ y_1 - 2y_2 + 2y_3 &\geqq -2 \\ y_1, y_2, y_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

منیمم کنید. با نوشتن قیود به شکل سیمپلکس استاندارد و با معرفی متغیّرهای کمبود، زیادتی و مصنوعی داریم

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - 3y_3 - y_4 + y_6 &= 5 \\ -y_1 + 2y_2 - 2y_3 + y_5 &= 2 \\ y_i \geqq 0,\ i &= 1 \text{ to } 6 \end{aligned}$$

که در آن y_4 متغیّر زیادتی، y_5 متغیّر کمبود و y_6 متغیّر مصنوعی است. روش سیمپلکس دوگامی می تواند برای حل مسأله استفاده شود. یک رشته از محاسبات را برای مسأله دوگان داریم که در جدول ۴.۲۵ نشان داده شده است.

جدول ۴.۲۵ حل دوگان مثال ۴.۲۵

اصلی	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	b
y_6	<u>2</u>	1	−3	−1	0	1	5
y_5	−1	2	−2	0	1	0	2
هزینه	9	2	3	0	0	0	$f_d - 0$
مصنوعی	<u>−2</u>	−1	3	1	0	0	$w - 5$
y_1	1	0.5	−1.5	−0.5	0	0.5	2.5
y_5	0	<u>2.5</u>	−3.5	−0.5	1	0.5	4.5
هزینه	0	<u>−2.5</u>	16.5	4.5	0	−4.5	$f_d - 22.5$
مصنوعی	0	0	0	0	0	1	$w - 0$
y_1	1	0	−0.8	−0.4	−0.2	0.4	1.6
y_2	0	1	−1.4	−0.2	1.4	0.2	1.8
هزینه	0	0	13.0	4.0	1.0	−4.0	$f_d - 18$

از جدول نهایی دوگان جواب زیر را به دست می‌آوریم :

$y_1 = 1.6,\ y_2 = 1.8$ متغیرهای اصلی

$y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0$ متغیرهای غیراصلی

$f_d = 18$ مقدار مینیمم تابع دوگان

دقت کنید که در بهین $f_d = z_p$ ، که شرایط قضیهٔ ۴.۱۲ و ۴.۱۳ را برآورده می‌کند؛ با استفاده از قضیهٔ ۴.۱۴ ، می‌بینیم که قیود اوّل و دوم ابتدایی باید در حالت مساوی برآورده شده باشند، زیرا متغیّرهای دوگان y_1 و y_2 مربوط به قیود در جدول ۴.۲۵ مثبت (اصلی) هستند. بنابراین، متغیّرهای ابتدایی x_1 و x_2 از حل دو قید اوّل ابتدایی که به حالت مساوی برآورده شده، به دست می‌آیند :

$$2x_1 + x_2 = 9$$

$$x_1 - 2x_2 = 2$$

جواب معادله های بالا عبارت است از

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 1$$

که مانند آنچه از آخرین جدول ابتدایی به دست آوردیم است .

۴.۷.۶ استفاده از جدول دوگان برای بازیابی جواب ابتدایی

روشن است که لازم نیست مراحل گذشته (استفاده از قضیهٔ ۴.۱۴) را برای بازیابی متغیّرهای ابتدایی دنبال کنیم . جدول نهایی دوگان تمامی اطّلاعات برای بازیابی جواب ابتدایی را به ما می دهد . به طور مشابه، جدول نهایی ابتدایی تمامی اطّلاعات را برای بازیابی جواب دوگان به ما می دهد . با نگاهی به‌جدول نهایی مثال ۴.۲۵ ، می‌بینیم که عناصر سطر آخر جدول دوگان با عناصر ستون آخر جدول ابتدایی هماهنگ است . به طور مشابه، ضرایب هزینهٔ کاهش یافته در جدول نهایی ابتدایی با متغیّرهای دوگان هماهنگ است . برای بازیابی متغیّرهای ابتدایی از جدول نهایی دوگان، ما از ضرایب هزینهٔ کاهش یافته در ستون مربوط به متغیّر کمبود یا زیادتی استفاده می کنیم . توجّه می کنیم که ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون y_4 دقیقاً x_1 و در ستون y_5 دقیقاً x_2 است . بنابراین، ضرایب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به متغیّرهای کمبود و زیادتی در جدول نهایی دوگان مقادیر متغیّرهای ابتدایی را می دهد . به طور مشابه، اگر مسألهٔ ابتدایی را حل کنیم، می توانیم جواب دوگان را از جدول نهایی ابتدایی بازیابی کنیم . قضیهٔ زیر این نتیجه را خلاصه می کند .

قضیهٔ ۴.۱۵ بازیابی جواب ابتدایی از جدول دوگان. فرض کنید دوگان ابتدایی استاندارد تعریف شده در معادله های (۴.۴۸) و (۴.۴۹) (یعنی ماکزیمم کردن $\mathbf{d}'\mathbf{x}$ مشروط به $\mathbf{Ax} \le \mathbf{e}, \mathbf{x} \ge 0$) با روش سیمپلکس استاندارد حل شده باشد . آن گاه مقدار متغیّر i ام ابتدایی مساوی است با ضریب هزینهٔ کاهش یافتهٔ متغیّر کمبود یا زیادتی مربوط به i امین قید دوگان در جدول نهایی دوگان . به علاوه، اگر متغیّر دوگانی غیراصلی باشد، آن گاه ضریب هزینهٔ کاهش یافتهٔ آن برابر است با مقدار متغیّر زیادتی یا کمبود برای قید ابتدایی مربوطه .

برای استفاده از قضیه، باید دوگان مسأله ابتدایی استاندارد را بنویسیم . برای حل مسأله دوگان به روش سیمپلکس، باید مسأله را به شکل استاندارد تبدیل کنیم، چنان که طرفهای راست نامنفی باشند . همچنین، دقت کنید که ضرایب هزینهٔ کاهش یافته برای متغیّرهای زیادتی

یا کمبود باید در جدول نهایی دوگان نامنفی باشد. بنابراین، ضرایب ابتدایی مربوطه نیز نامنفی اند.

همچنین دقّت کنید که *اگر یک متغیّر دوگان غیراصلی باشد (یعنی مقدار آن صفر باشد)، آن‌گاه، ضریب هزینهٔ کاهش یافته‌اش مساوی با مقدار متغیّر کمبود یا زیادتی برای قید ابتدایی مربوطه است*. در مثال ۴.۲۵، y_3 متغیّر دوگان مربوط به سومین قید ابتدایی، غیراصلی است. ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون y_3 عبارت است از ۱۳. بنابراین، متغیّر کمبود برای سومین قید ابتدایی مقدارش ۱۳ است. این مانند عددی است که از جدول نهایی ابتدایی به دست آمد.

همچنین دقّت کنیم که جواب دوگان می تواند با استفاده از قضیهٔ ۴.۱۵ از جدول نهایی ابتدایی به دست آید. داریم

$$y_1 = 1.6,\ y_2 = 1.8,\ y_3 = 0$$

که جوابی شبیه جواب قبلی است.

وقتی از قضیهٔ ۴.۱۵ استفاده می کنیم، نکات زیر نیز باید مورد توجه قرار گیرد:

۱. وقتی برای بازیابی جواب دوگان از جدول نهایی ابتدایی استفاده می شود، متغیّر دوگان مربوط به قید ابتدایی فقط شکل "≤" دارد. ولی، برای حل مسألهٔ قیود ابتدایی باید به شکل استاندارد سیمپلکس تبدیل شوند. یادآور می شود که طرف راست قیود برای روش سیمپلکس باید نامنفی باشد. متغیّرهای دوگان فقط برای قیودی که به شکل "≤" هستند، نامنفی است.

۲. وقتی قید ابتدایی از نوع مساوی است، در گام I روش سیمپلکس با اضافه کردن متغیّر مصنوعی به آن، آن را مورد استفاده قرار می دهد. متغیّر کمبود یا زیادتی در ارتباط با قید نوع مساوی وجود ندارد. همچنین از بحث قبلی می دانیم که متغیّر دوگان مربوط به قید مساوی از نظر علامت نامحدود است. آن گاه سؤال این است که چگونه مقدار آن را از جدول نهایی ابتدایی بازیابی کنیم؟ چند راه برای این کار وجود دارد. روش اول این است که قید مساوی را تبدیل به دو نامساوی کنیم، که قبلاً اشاره شد. به عنوان مثال، قید

$$2x_1 + x_2 = 4 \qquad \text{(الف)}$$

به شکل دو نامساوی زیر نوشته می شود

(ب) $2x_1 + x_2 \leqq 4$

(پ) $-2x_1 - x_2 \leqq -4$

در روش سیمپلکس دو نامعادله به طریق استاندارد می تواند در نظر گرفته شود. متغیّرهای دوگان مربوطه از جدول نهایی ابتدایی و با استفاده از قضیهٔ ۴.۱۵ بازیابی می شوند. فرض کنید $y_2 \geq 0$ و $y_3 \geq 0$ به ترتیب متغیّرهای دوگان مربوط به قیود معادلات (ب) و (پ)، و y_1 متغیّر دوگان مربوط به قید مساوی معادله (الف) باشند؛ آن گاه، $y_1 = y_2 - y_3$. براین اساس، y_1 از نظر علامت نامحدود و مقدار آن با دانستن y_2 و y_3 معلوم می شود.

راه دوم بازیابی متغیّر دوگان برای قید مساوی استفاده از ستون متغیّر مصنوعی در گام II روش سیمپلکس است. در این جا متغیّر دوگان قید عبارت از ضریب هزینهٔ کاهش یافته در ستون متغیّر مصنوعی در جدول آخر ابتدایی است.

این دو روش را با مثالی شرح می دهیم.

مثال ۴.۲۶ استفاده از جدول آخر ابتدایی برای بازیابی حل دوگان. مسألهٔ LP زیرا حل کرده و جواب دوگان مربوطه را از جدول آخر ابتدایی بازیابی کنید.

تابع

$$z_p = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 1$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

حل. ما قید مساوی را به دو نامعادله مانند معادله های (ب) و (پ) تبدیل خواهیم کرد. با نوشتن مسأله به شکل استاندارد سیمپلکس، داریم:

تابع

$$f_p = -x_1 - 4x_2$$

را با قیود

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 \quad & = 5 \\
2x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad & = 4 \\
2x_1 + x_2 \quad - x_5 \quad + x_7 \quad & = 4 \\
x_1 - x_2 \quad - x_6 \quad + x_8 & = 1 \\
x_i \geqq 0; \quad i = 1 \text{ to } 8
\end{aligned}
$$

مینیمم کنید. در این جا x_3 و x_4 متغیّرهای کمبود، x_5 و x_6 متغیّرهای زیادتی، و x_7 و x_8 متغیّرهای مصنوعی هستند. رابطه سازی این مسأله مانند مثال ۴.۱۴ است. گامهای لولایی مسأله در جدول ۴.۱۶ داده شده و جدول نهایی در جدول ۴.۲۶ آورده شده است. جواب بهین در سه چرخه به دست آمده که عبارت است از

متغیرهای اصلی	$x_1 = \frac{5}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 2,\ x_3 = 0$
متغیرهای غیراصلی	$x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$
تابع هزینهٔ ابتدایی	$f_p = -\frac{13}{3}$

با استفاده از قضیهٔ ۴.۱۵، متغیّر دوگان برای چهار قید فوق عبارت است از :

۱. $y_1 = 0$ ، برای قید اوّل (ضریب هزینهٔ کاهش یافته x_3 ، متغیّر کمبود).

۲. $y_2 = \frac{5}{3}$ ، برای قید دوم (ضریب هزینهٔ کاهش یافته x_4 ، متغیّر کمبود).

۳. $y_3 = 0$ ، برای قید سوم (ضریب هزینهٔ کاهش یافته x_5 ، متغیّر زیادتی).

۴. $y_4 = \frac{7}{3}$ ، برای قید چهارم (ضریب هزینهٔ کاهش یافته x_6 ، متغیّر زیادتی).

جدول ۴.۲۶ حل مثال ۴.۲۶ با قید مساوی که به‌دو نامساوی تبدیل شده

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	b
x_3	0	0	1	-1	0	-1	0	-1	2
x_5	0	0	0	1	1	0	-1	0	0
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
هزینه	0	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	$f_p + \frac{13}{3}$

پس، با توجّه به بحث فوق، متغیّر دوگان برای قید مساوی $2x_1 + x_2 = 4$ عبارت است از $y_2 - y_3 = \frac{5}{3}$. همچنین دقت کنید که $y_4 = \frac{7}{3}$ متغیّر دوگان برای قید چهارم است که به صورت $-x_1 + x_2 \leq -1$ نوشته می شود و نه برای قید $x_1 - x_2 \geq 1$. این مشاهدات برای موضوع تحلیل حساسیت که در بخش ۴ . ۶ بحث شد مهم هستند.

حال بیاییم مسألهٔ مورد نظر را با قید مساوی همچنان که هست دوباره حل کنیم. شکل سیمپلکس استاندارد مسأله عبارت است از :

تابع

$$f_p = -x_1 - 4x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 5\\
2x_1 + x_2 \qquad + x_5 \quad &= 4\\
x_1 - x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 &= 1\\
x_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 6 &
\end{aligned}$$

مینیمم کنید. در این جا، x_3 متغیّر کمبود، x_4 متغیّر زیادتی، و x_5 و x_6 متغیّرهای مصنوعی اند. مسأله در جدول ۴ . ۲۷ حل شده است. برای رسیدن به بهین دو چرخه انجام شده و بهین عبارت است از :

متغیرهای اصلی	$x_1 = \frac{5}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 2$
متغیرهای غیراصلی	$x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$
تابع هزینهٔ ابتدایی	$f_p = -\frac{13}{3}$

با استفاده از قضیهٔ ۴ . ۱۵ و بحث قبلی، متغیّر دوگان برای سه قید بالا عبارتند از

۱ . $y_1 = 0$ ، برای قید اوّل (ضریب هزینهٔ کاهش یافته x_3 ، متغیّر کمبود).

۲ . $y_2 = \frac{5}{3}$ ، برای قید دوم (ضریب هزینهٔ کاهش یافته x_5 ، متغیّر مصنوعی).

۳ . $y_3 = \frac{7}{3}$ ، برای قید سوم (ضریب هزینهٔ کاهش یافته x_4 ، متغیّر زیادتی).

می بینیم که دو جواب مثل هم هستند. بنابراین ما مجبور نیستیم که قید مساوی را با دو نامساوی در روش سیمپلکس استاندارد جایگزین کنیم. ضریب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به متغیّر مصنوعی قید مساوی، مقدار متغیّر دوگان را برای قید می دهد.

جدول ۴.۲۷ حل مثال ۴.۲۶ با قید مساوی

اصلی	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
x_3	1	2	1	0	0	0	5
x_5	2	1	0	0	1	0	4
x_6	$\underline{1}$	-1	0	-1	0	1	1
هزینه	-1	-4	0	0	0	0	$f_p - 0$
مصنوعی	$\underline{-3}$	0	0	1	0	0	$w - 5$
x_3	0	3	1	1	0	-1	4
x_5	0	$\underline{3}$	1	2	1	-2	2
x_1	1	-1	0	-1	0	1	1
هزینه	0	-5	0	-1	0	1	$f_p + 1$
مصنوعی	0	$\underline{-3}$	0	-2	0	3	$w - 2$
x_3	0	0	1	-1	-1	1	2
x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
هزینه	0	0	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$f_p + \frac{13}{3}$
مصنوعی	0	0	0	0	1	1	$w - 0$
	پایان گام I					پایان گام II	

۴.۷.۷ متغیّرهای دوگان به‌عنوان ضرایب لاگرانژ

در بخش ۴.۶ تشریح شد که چگونه در یک مسأله مقدار بهین تابع هزینه با تغییر پارامتر طرف راست قیود، b_i ها (محدودهٔ منابع)، تغییر می کند. قضیهٔ حساسیت تغییرات قید فصل (۳) برای بررسی این اثر استفاده می شود. استفاده از آن قضیه نیاز به دانستن ضرایب لاگرانژ قیود دارد که باید مشخص شوند. روشن است که متغیّرهای دوگان مسأله به ضرایب

لاگرانژ بستگی دارند. قضیه زیر این ارتباط را بیان می کند.

قضیهٔ ۴.۱۶ متغیّرهای دوگان به عنوان ضرایب لاگرانژ. فرض کنید x و y به ترتیب جواب بهین مسائل ابتدایی و دوگان بیان شده در معادله های (۴.۴۸) تا (۴.۵۱) باشند، آن گاه متغیّرهای دوگان y برای قیود ابتدایی معادلات (۴.۴۹) ضرایب لاگرانژ نیز هستند.

***اثبات*.** قضیه می تواند با نوشتن شرایط لازم کان ـ تاکر قضیهٔ ۳.۶ برای مسألهٔ ابتدایی تعریف شده در معادله های (۴.۴۸) و (۴.۴۹) اثبات شود. برای نوشتن این شرایط، مسألهٔ ابتدایی را به مسألهٔ مینیمم سازی تبدیل کرده و یک تابع لاگرانژ تعریف می کنیم به شکل

$$\begin{aligned} L &= -\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{i=1}^{m} y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - e_i\right) - \sum_{j=1}^{n} v_j x_j \\ &= -\mathbf{d}^T\mathbf{x} + \mathbf{y}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{e}) - \mathbf{v}^T\mathbf{x} \end{aligned} \qquad \text{(الف)}$$

که در آن y_i ضریب لاگرانژ i امین قید ابتدایی معادلهٔ (۴.۴۹) و v_j ضریب لاگرانژ j امین قید نامنفی بودن متغیّر x_j است. شرایط لازم کان ـ تاکر قضیهٔ ۳.۶ را به شکل زیر می نویسیم

$$-d_j + \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - v_j = 0; \qquad j = 1 \text{ to } n \quad (\partial L/\partial x_j = 0) \qquad \text{(ب)}$$

$$y_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - e_i\right) = 0, \qquad i = 1 \text{ to } m \qquad \text{(پ)}$$

$$v_i x_i = 0, \qquad x_i \geqq 0, \qquad i = 1 \text{ to } n \qquad \text{(ت)}$$

$$y_i \geqq 0, \qquad i = 1 \text{ to } m \qquad \text{(ث)}$$

$$v_i \geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } n \qquad \text{(ج)}$$

معادلهٔ (ب) را دوباره به شکل زیر می نویسیم

$$-d_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = v_j; \qquad j = 1 \text{ to } n \qquad (-\mathbf{d} + \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{v})$$

با استفاده از شرایط (ج) در معادلهٔ قبلی، نتیجه می گیریم

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqq d_j; \qquad j = 1 \text{ to } n \qquad (\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geqq \mathbf{d}) \qquad \text{(چ)}$$

پس، y_i ها جواب قابل قبول برای قیود دوگان معادلهٔ (۴.۵۱) هستند.

حال فرض کنید x_j جواب بهین مسألهٔ ابتدایی باشد. آن گاه m تا از x_j ها مثبت بوده (به استثنای تباهیدهها)، و v_j های مربوط به آنها از معادلهٔ (ت) مساوی صفر است. بقیهٔ x_j ها صفر بوده و v_j های آنها بزرگتر از صفر است. بنابراین، از معادلهٔ (چ)، داریم

$$\text{(i)}\quad v_j > 0,\ x_j = 0,\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > d_j \qquad \text{(ح)}$$

$$\text{(ii)}\quad v_j = 0,\ x_j > 0,\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = d_j \qquad \text{(خ)}$$

حال با اضافه کردن m سطر که در معادلهٔ (پ) داده شده، و جابه جا کردن جمعها در طرف چپ و دوباره مرتب کردن، داریم

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i \qquad (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{e}) \qquad \text{(د)}$$

با استفاده از معادله های (ح) و (خ)، معادلهٔ (د) را می توان به شکل زیر نوشت

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i \qquad (\mathbf{d}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{e}) \qquad \text{(ذ)}$$

معادلهٔ (ذ) همچنین بیانگر این است که

$$z_p = \sum_{i=1}^{m} y_i e_i = \mathbf{y}^T \mathbf{e} \qquad \text{(ر)}$$

طرف راست معادلهٔ (ر) بیانگر تابع هزینهٔ دوگان است. براساس قضیهٔ ۴.۱۲، اگر توابع ابتدایی و دوگان مقادیری یکسان داشته باشند و اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نقاط قابل قبول برای مسائل ابتدایی و دوگان باشند، آن گاه آنها جوابهای بهین مسائل ابتدایی و دوگان هستند. پس ضرایب لاگرانژ $y_i = i = 1 \text{ to } m$ جواب مسألهٔ دوگان تعریف شده در معادله های (۴.۵۰) و (۴.۵۱) است.

تمرینهای فصل ۴

بخش ۴.۲ تعریف مسألهٔ برنامه ریزی خطّی استاندارد

۴.۱ *با کلمهٔ صحیح یا غلط پاسخ دهید*

۱. یک مسألهٔ برنامه ریزی خطّی ماکزیمم سازی یک تابع نمی تواند به شکل LP استاندارد

تبدیل شود.

۲. در رابطه سازی LP استاندارد یک متغیّر زیادتی باید به قید "نوع ≤" اضافه سود.

۳. متغیّر کمبود برای یک قید LP می تواند مقدار منفی داشته باشد.

۴. متغیّر زیادتی برای یک قید LP باید نامنفی باشد.

۵. اگر قید "نوع ≤" فعال باشد، متغیّر کمبود آن باید مثبت باشد.

۶. اگر قید "نوع ≥" فعال باشد، متغیّر زیادتی آن باید صفر باشد.

۷. در رابطه سازی LP استاندارد، حدود منابع ازنظر علامت محدودیتی ندارند.

۸. فقط قیود "نوع ≤" می توانند به شکل LP استاندارد تبدیل شوند.

۹. در هر مسألهٔ LP متغیّرهایی که ازنظر علامت محدودیتی ندارند می توانند به کار روند.

۱۰. در شکل LP استاندارد، تمامی ضرایب هزینه باید مثبت باشند.

۱۱. در تعریف LP استاندارد همهٔ متغیّرها باید نامنفی باشند.

مسائل زیر را به شکل LP استاندارد تبدیل کنید:

۴.۲ تابع

$$f = 5x_1 + 4x_2 - x_3$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geqq 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geqq 4$$
$$x_1, x_2 \geqq 0; \quad x_3 \text{ ازنظر علامت محدودیتی ندارد}$$

مینیمم کنید.

۴.۳ تابع

$$z = x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$-x_1 + 3x_2 \leqq 10$$
$$x_1 + x_2 \leqq 6$$
$$x_1 - x_2 \leqq 2$$
$$x_1 + 3x_2 \geqq 6$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۴ تابع

$$f = 2x_1 - 3x_2$$

را با قیود

$$x_1 + x_2 \leqq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴.۵ تابع

$$z = 4x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$-2x_1 + x_2 \leqq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۶ تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 3$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۷ تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 1$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۸ تابع

$$f = 9x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

را با قیود

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 \leqq -5$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geqq -2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴.۹ تابع

$$f = 5x_1 + 4x_2 - x_3$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geqq 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geqq 4$$
$x_1, x_2 \geqq 0;$ x_3 از نظر علامت محدودیتی ندارد

مینیمم کنید.

۴.۱۰ تابع

$$z = -10x_1 - 18x_2$$

را با قیود

$$x_1 - 3x_2 \leqq -3$$
$$2x_1 + 2x_2 \geqq 5$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۱۱ تابع

$$f = 20x_1 - 6x_2$$

را با قیود

$$3x_1 - x_2 \geqq 3$$
$$-4x_1 + 3x_2 = -8$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴ . ۱۲ تابع

$$z = 2x_1 + 5x_2 - 4.5x_3 + 1.5x_4$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 1.5x_3 &\leqq 8 \\ 1.8x_1 - 6x_2 + 4x_3 + x_4 &\geqq 3 \\ -3.6x_1 + 8.2x_2 + 7.5x_3 + 5x_4 &= 15 \\ x_i &\geqq 0; \qquad i = 1 \text{ to } 4 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۱۳ تابع

$$f = 8x_1 - 3x_2 + 15x_3$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 5x_1 - 1.8x_2 - 3.6x_3 &\geqq 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 8.2x_3 &\geqq 5 \\ 1.5x_1 - 4x_2 + 7.5x_3 &\geqq -4.5 \\ -x_2 + 5x_3 &\geqq 1.5 \\ x_1, x_2 &\geqq 0; \end{aligned}$$

x_3 ازنظر علامت محدودیتی ندارد

مینیمم کنید.

۴ . ۱۴ تابع

$$z = 10x_1 + 6x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqq 90 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leqq 80 \\ x_2 &\geqq 15 \\ 5x_1 + x_2 &= 25 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۱۵ تابع

$$z = -2x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqq 3 \\ 2x_1 + 10x_2 &\leqq 18 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۱۶ تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqq 5 \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &\geqq 3 \\ x_1 &\geqq 0, \end{aligned}$$

x_2 ازنظر علامت محدودیتی ندارد

ماکزیمم کنید.

۴ . ۱۷ تابع

$$f = 3x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geqq 0 \\ x_1 + x_2 &\geqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

مینیمم کنید.

۴ . ۱۸ تابع

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$x_1 - x_2 \geqq 0$$
$$x_1 + x_2 \geqq 2$$
$$2x_1 + x_2 \leqq 6$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۱۹ تابع

$$z = x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$3x_1 + 4x_2 \leqq 12$$
$$x_1 + 3x_2 \geqq 3$$
$$x_1 \geqq 0;$$

ماکزیمم کنید.

بخش ۴.۳ مفاهیم اساسی مربوط به مسائل برنامه ریزی خطّی

۴ . ۲۰ *با کلمه صحیح یا غلط پاسخ دهید.*

۱ . در تعریف LP استاندارد، تعداد معادله های قیود (یعنی، سطرها در ماتریس A) باید از تعداد متغیّرها کمتر باشد.

۲ . در یک مسألهٔ LP ، تعداد قیود "نوع $\leq$" نمی تواند از تعداد متغیّرهای طرّاحی بیشتر باشد.

۳ . در یک مسألهٔ LP ، تعداد قیود "نوع $\geq$" نمی تواند از تعداد متغیّرهای طرّاحی بیشتر باشد.

۴ . یک مسألهٔ LP تعداد نامحدودی جواب اصلی دارد.

۵ . یک جواب اصلی باید برای بعضی از متغیّرها مقدار صفر داشته باشد.

۶ . یک جواب اصلی می تواند برای بعضی از متغیّرها مقدار منفی داشته باشد.

۷ . یک جواب اصلی تباهیده دقیقاً m متغیّر غیرصفر دارد که m تعداد معادله هاست.

۸ . در یک جواب قابل قبول اصلی همه متغیّرها مقادیر نامنفی دارند.

۹ . یک جواب قابل قبول اصلی باید m متغیّر با مقادیر مثبت داشته باشد که m تعداد معادله هاست.

۱۰ . برای یک مسأله LP ، نقطهٔ بهین می تواند در داخل ناحیهٔ قابل قبول باشد.

۱۱ . در یک مسأله LP ، نقطهٔ بهین روی رأسی از ناحیه قابل قبول قرار دارد.

۱۲ . جواب هر مسألهٔ LP تنها یک بهین محلی است.

۱۳ . جواب هر مسألهٔ LP یک بهین فراگیر منحصر به فرد است.

تمام جوابهای اصلی مسائل LP زیر را با استفاده از روش حذفی گوس ـ جوردن پیدا کنید. جوابهای قابل قبول اصلی را مشخص کرده و آنها را روی کاغذ ترسیم نشان دهید.

۴ . ۲۱ تابع
$$z = x_1 + 4x_2$$
را با قیود
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqq 5 \\ 2x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &\geqq 1 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$
ماکزیمم کنید.

۴ . ۲۲ تابع
$$z = -10x_1 - 18x_2$$
را با قیود
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &\leqq -3 \\ 2x_1 + 2x_2 &\geqq 5 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$
ماکزیمم کنید.

۴ . ۲۳ تابع
$$z = x_1 + 2x_2$$
را با قیود
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\leqq 12 \\ x_1 + 3x_2 &\geqq 3 \end{aligned}$$
$x_1 \geqq 0$, x_2 ازنظر علامت آزاد است.

ماکزیمم کنید.

۴ . ۲۴ تابع
$$f = 20x_1 - 6x_2$$
را با قیود
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 &\geqq 3 \\ -4x_1 + 3x_2 &= -8 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$
مینیمم کنید.

۴ . ۲۵ تابع
$$z = 5x_1 - 2x_2$$
را با قیود
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 9 \\ x_1 - 2x_2 &\leqq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqq 3 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$
ماکزیمم کنید.

۴ . ۲۶ تابع
$$z = x_1 + 4x_2$$
را با قیود
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqq 5 \\ x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 &\geqq 3 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$
ماکزیمم کنید.

۴ . ۲۷ تابع

$$f = 5x_1 + 4x_2 - x_3$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geqq 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geqq 4$$
$x_1, x_3 \geqq 0;$ x_2 ازنظر علامت آزاد است

مینیمم کنید.

۴ . ۲۸ تابع

$$f = 9x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

را با قیود

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 \leqq -5$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geqq -2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴ . ۲۹ تابع

$$z = 4x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$-2x_1 + x_2 \leqq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۳۰ تابع

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$x_1 - x_2 \geqq 0$$
$$x_1 + x_2 \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۳۱ تابع

$$z = 4x_1 + 5x_2$$

را با قیود

$$-x_1 + 2x_2 \leqq 10$$
$$3x_1 + 2x_2 \leqq 18$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

بخش ۴.۴ روش سیمپلکس

مسائل زیر را به روش سیمپلکس حل کرده و با جواب روش ترسیمی مقایسه کنید.

۴ . ۳۲ تابع

$$z = x_1 + 0.5x_2$$

را با قیود

$$6x_1 + 5x_2 \leqq 30$$
$$3x_1 + x_2 \leqq 12$$
$$x_1 + 3x_2 \leqq 12$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۳۳ تابع

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leqq 6 \\ -4x_1 + 9x_2 &\leqq 36 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

۴.۳۴ تابع

$$z = x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leqq 10 \\ x_1 + x_2 &\leqq 6 \\ x_1 - x_2 &\leqq 2 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

۴.۳۵ تابع

$$z = 2x_1 + x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leqq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqq 18 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

۴.۳۶ تابع

$$z = 5x_1 - 2x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 9 \\ x_1 - x_2 &\leqq 2 \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqq 3 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

۴.۳۷ تابع

$$f = 2x_1 - x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leqq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqq 18 \\ x_1, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

مینیمم کنید.

بخش ۴.۵ جواب قابل قبول اصلی اولیه ـ متغیّرهای مصنوعی

۴.۳۸ *با کلمهٔ صحیح یا غلط پاسخ دهید.*

۱. گام لولایی در روش سیمپلکس یک متغیّر اصلی را با یک متغیّر غیر اصلی جایگزین می کند.

۲. گام لولایی نقطهٔ طرّاحی را به داخل مجموعه قید می آورد.

۳. ستون لولا در روش سیمپلکس با بزرگترین ضریب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به یک متغیّر اصلی مشخص می شود.

۴ . سطر لولا در روش سیمپلکس با بزرگترین نسبت پارامتر طرف راست به ضرایب مثبت در ستون لولا مشخص می گردد.

۵ . معیار این که یک متغیّر اصلی مجموعهٔ اصلی را ترک کند این است که جواب جدید اصلی و قابل قبول بماند.

۶ . حرکت از یک جواب قابل قبول اصلی به یک جواب دیگر مربوط به حرکت از یک رأس مجموعهٔ چندضلعی محدّب به رأس دیگر می شود.

۷ . حرکت از یک جواب قابل قبول اصلی به یک جواب قابل قبول اصلی دیگر در روش سیمپلکس می تواند مقدار تابع هزینه را افزایش دهد.

۸ . در جدول سیمپلکس طرفهای راست می توانند مقادیر منفی داشته باشند.

۹ . در جدول سیمپلکس طرفهای راست می توانند صفر باشند.

۱۰ . ضرایب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به متغیّرهای اصلی در نقطهٔ بهین باید مثبت باشند.

۱۱ . اگر ضریب هزینهٔ کاهش یافته مربوط به یک متغیّر غیراصلی در نقطهٔ بهین صفر باشد، ممکن است مسأله جوابهای چندگانه داشته باشد.

۱۲ . اگر تمامی عناصر ستون لولا منفی باشند، مسأله غیرقابل قبول است.

۱۳ . متغیّرهای مصنوعی در جواب نهایی باید مثبت باشند.

۱۴ . اگر متغیّرهای مصنوعی در جواب نهایی مثبت باشند، تابع هزینه مصنوعی نیز مثبت است.

۱۵ . اگر تابع هزینهٔ مصنوعی در جواب بهین مثبت باشد، مسأله بیکران است.

مسائل LP زیر را به روش سیمپلکس حل کرده و در صورت امکان درستی آنها را از روش ترسیمی نیز امتحان کنید.

۴ . ۳۹ تابع

$$z = x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\leqq 10 \\ x_1 + x_2 &\leqq 6 \\ x_1 - x_2 &\leqq 2 \\ x_1 + 3x_2 &\geqq 6 \\ x_1,\ x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۴۰ تابع

$$z = 4x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$-2x_1 + x_2 \leqq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

۴ . ۴۱ تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 3$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۴۲ تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 1$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۴۳ تابع

$$f = 9x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

را با قیود

$$-2x_1 - x_2 + 3x_3 \leqq -5$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geqq -2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴ . ۴۴ تابع

$$f = 5x_1 + 4x_2 - x_3$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 - x_3 \geqq 1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geqq 4$$
$$x_1, x_2 \geqq 0;$$ x_3 ازنظر علامت محدودیتی ندارد

مینیمم کنید.

۴ . ۴۵ تابع

$$z = -10x_1 - 18x_2$$

را با قیود

$$x_1 - 3x_2 \leqq -3$$
$$2x_1 + 2x_2 \geqq 5$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴ . ۴۶ تابع

$$f = 20x_1 - 6x_2$$

را با قیود

$$3x_1 - x_2 \geqq 3$$
$$-4x_1 + 3x_2 = -8$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴ . ۴۷ تابع

$$z = 2x_1 + 5x_2 - 4.5x_3 + 1.5x_4$$

را با قیود

$$5x_1 + 3x_2 + 1.5x_3 \geqq 8$$
$$1.8x_1 - 6x_2 + 4x_3 + x_4 \geqq 3$$
$$-3.6x_1 + 8.2x_2 + 7.5x_3 + 5x_4 = 15$$
$$x_i \geqq 0; \quad i = 1 \text{ to } 4$$

۴.۴۸ تابع

$$f = 8x_1 - 3x_2 + 15x_3$$

را با قیود

$$5x_1 - 1.8x_2 - 3.6x_3 \geqq 2$$
$$3x_1 + 6x_2 + 8.2x_3 \geqq 5$$
$$1.5x_1 - 4x_2 + 7.5x_3 \geqq -4.5$$
$$-x_2 + 5x_3 \geqq 1.5$$
$x_1, x_2 \geqq 0;$ x_3 ازنظر علامت محدودیتی ندارد

ماکزیمم کنید.

۴.۴۹ تابع

$$z = 10x_1 + 6x_2$$

را با قیود

$$2x_1 + 3x_2 \leqq 90$$
$$4x_1 + 2x_2 \leqq 80$$
$$x_2 \geqq 15$$
$$5x_1 + x_2 = 25$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴.۵۰ تابع

$$z = -2x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$2x_1 + x_2 \geqq 3$$
$$2x_1 + 10x_2 \leqq 18$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۵۱ تابع

$$z = x_1 + 4x_2$$

را با قیود

$$x_1 + 2x_2 \leqq 5$$
$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 \geqq 3$$
$x_1 \geqq 0;$ x_2 ازنظر علامت آزاد است

ماکزیمم کنید.

۴.۵۲ تابع

$$f = 3x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$x_1 - x_2 \geqq 0$$
$$x_1 + x_2 \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۵۳ تابع

$$z = 3x_1 + 2x_2$$

را با قیود

مینیمم کنید.

$$x_1 - x_2 \geqq 0$$
$$x_1 + x_2 \geqq 2$$
$$2x_1 + x_2 \leqq 6$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۵۴ تابع

$$z = x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$3x_1 + 4x_2 \leqq 12$$
$$x_1 + 3x_2 \leqq 3$$
$x_1 \geqq 0;$ x_2 ازنظر علامت آزاد است

ماکزیمم کنید.

۴.۵۵ تابع

$$z = x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$-x_1 + 3x_2 \leqq 10$$
$$x_1 + x_2 \leqq 6$$
$$x_1 - x_2 \leqq 2$$
$$x_1 + 3x_2 \geqq 6$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

ماکزیمم کنید.

۴.۵۶ تابع

$$z = 3x_1 + 8x_2$$

را با قیود

$$3x_1 + 4x_2 \leqq 20$$
$$x_1 + 3x_2 \geqq 6$$
$x_1 \geqq 0;$ x_2 ازنظر علامت آزاد است

ماکزیمم کنید.

۴.۵۷ تابع

$$f = 2x_1 - 3x_2$$

را با قیود

$$x_1 + x_2 \leqq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴.۵۸ تابع

$$f = 3x_1 - 3x_2$$

را با قیود

$$-x_1 + x_2 \leqq 0$$
$$x_1 + x_2 \geqq 2$$
$$x_1, x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید.

۴.۵۹ یک پالایشگاه دو نوع نفت خام دارد:

۱. نفت خام A از قرار بشکه‌ای ۳۰ دلار و از آن ۲۰،۰۰۰ بشکه موجود است.
۲. نفت خام B از قرار بشکه‌ای ۳۶ دلار و از آن ۳۰،۰۰۰ بشکه موجود است.

این پالایشگاه بنزین و روغن تولید می‌کند. مقدار لازم از هرکدام از نفتهای خام برای

تولید و قیمت فروش هر بشکه ای از محصولات و تقاضای بازار در جدول ۴ . ۲۸ نشان داده شده است . چه مقدار نفت خام پالایشگاه باید استفاده کند تا سودش ماکزیمم شود؟ مسألهٔ طرّاحی بهین را رابطه سازی کرده و حل کنید . درستی جوابها را از راه ترسیمی آزمایش کنید (مانند تمرین ۲ . ۲) .

۴.۶۰ یک شرکت تولیدی محصولات A و B را می فروشد سود عاید از A ، ۱۰ دلار در هرکیلوگرم و از B ، ۸ دلار در هر کیلوگرم است . مواد اوّلیه در دسترس برای تولید عبارت است از : ۱۰۰ کیلوگرم از C و ۸۰ کیلوگرم از D . برای تولید ۱ کیلوگرم از A ، ۰/۴ کیلوگرم از C و ۰/۶ کیلوگرم از D مورد نیاز است . برای تولید ۱ کیلوگرم از B ، ۰/۵ کیلوگرم از C و ۰/۵ کیلوگرم از D مورد نیاز است . تقاضا برای محصول عبارت است از ۷۰ کیلوگرم از A و ۱۱۰ کیلوگرم از B . برای ماکزیمم شدن سود چه مقدار از A و B باید تولید شود؟ مسألهٔ بهینه سازی طرّاحی را رابطه سازی کرده و حل کنید . درستی جوابها را از راه ترسیمی آزمایش کنید (مانند تمرین ۲ . ۶) .

۴.۶۱ برنامه غذایی از شیر و نان طرّاحی کنید که دست کم در هر روز ۵ واحد ویتامین A و چهار واحد ویتامین B تأمین کند . مقدار ویتامین A و B در هر کیلوگرم از هر غذا و قیمت آنها در جدول ۴ . ۲۹ داده شده است . مسألهٔ بهینه سازی طرّاحی را رابطه سازی کرده و حل کنید، طوری که حداقل ویتامین را گرفته و هزینه مینیمم شود . درستی جواب را از طریق ترسیمی آزمایش کنید (مانند تمرین ۲ . ۷) .

جدول ۴.۲۸ داده های عملکرد پالایشگاه

محصول	مواد لازم برای هر بشکه: نفت خام A	نفت خام B	قیمت فروش هر بشکه	تقاضا (بشکه)
بنزین	۰/۶	۰/۸	۵۰$	۲۰۰۰۰
روغن	۰/۴	۰/۲	۱۲۰$	۱۰۰۰۰

جدول ۴.۲۹ داده‌های مسألهٔ برنامه غذایی

ویتامین	نان	شیر
A	۱	۲
B	۳	۲
کیلوگرم/هزینه	۲	۱

۴.۶۲ دانشجویان رشتهٔ مهندسی شیمی دستگاهی را ساخته اند که می تواند هر هفته ۲۲۵ بطری الکل خالص تولید کند. آنها با الکل و شکر دو نوع محلول تولید می کنند: (i) محلول A، با مقاومت ۲۰ و (ii) محلول B، با مقاومت ۸۰. یادآور می شود که مقاومت الکل خالص ۲۰۰ است. آنان آب به اندازهٔ کافی دارند ولی هر هفته تنها ۸۰۰ بطری خالی می توانند داشته باشند. شکر موجود در هر هفته فقط برای ۶۰۰ بطری محلول A و یا ۱۲۰۰ بطری محلول B کافی است. سود فروش هر بطری محلول A ۱ دلار و محلول B ۲ دلار است. آنان هرچه تولید کنند می توانند به فروش برسانند. آنها برای ماکزیمم کردن سود باید چند بطری از محلول A و محلول B تولید کنند. مسألهٔ بهینه سازی طرّاحی را رابطه سازی کرده و حل کنید. درستی جواب را با روش ترسیمی آزمایش کنید (مانند تمرین ۲.۸).

*۴.۶۳ یک کارخانهٔ تولید روغن گیاهی می خواهد میزان تولید روغن کره، روغن سالاد و کرهٔ نباتی خود را چنان تنظیم کند که استفاده از روغنهای موجودی انبارش بهینه شود. در حال حاضر این کارخانه ۲۵۰۰۰۰ کیلوگرم روغن دانهٔ سویا، ۱۱۰۰۰۰ کیلوگرم روغن دانهٔ کتان و ۲۰۰۰ کیلوگرم از موادی که اساس شیری دارند در انبارش دارد. موادی که اساس شیری دارند فقط برای تولید کرهٔ نباتی مورد نیازند. مقداری معین از ضایعات برای تولید هر محصول وجود دارد؛ ۱۰٪ برای روغن کره، ۵٪ برای روغن سالاد و برای کرهٔ نباتی ضایعاتی وجود ندارد. سفارش قبلی تولیدکننده را مجبور می کند که حداقل ۱۰۰۰۰۰ کیلوگرم روغن کره، ۵۰۰۰۰ کیلوگرم روغن سالاد، و ۱۰۰۰۰ کیلوگرم کرهٔ نباتی تولید کند. علاوه براین، پیش بینی فروش در آیندهٔ نزدیک نشان دهندهٔ تقاضای زیاد بازار برای کلّیهٔ محصولات است. میزان سود به ازای هر کیلوگرم و میزان موجودی انبار مورد نیاز در هر کیلوگرم برای هر محصول

جدول ۴.۳۰ داده های مسألهٔ فرآیند روغنهای گیاهی

تولید	سود در هر کیلو گرم	نیاز به انبار هر قسمت در کیلو		
		دانه سویا	دانه کتان	اساس شیری
روغن کره	۰/۱	۲	۱	۰
روغن سالاد	۰/۰۸	۰	۱	۰
کرهٔ نباتی	۰/۰۵	۳	۱	۱

در جدول ۳۰ . ۴ آمده است. مسأله را برای ماکزیمم شدن سود در برنامهٔ تولید آینده رابطه سازی کرده و حل کنید (مانند تمرین ۱۸ . ۲).

*۴.۶۴ یک شرکت حمل و نقل می خواهد چند کامیون جدید خریداری کند. شرکت ۲ میلیون دلار برای این کار دارد. سرمایه گذاری باید به ماکزیمم شدن ظرفیت، تن در کیلومتر در روز بینجامد. سه نوع کامیون در جدول ۳۱ . ۴ داده شده است. چند محدودیت دیگر نیز باید مورد توجّه قرار گیرد. شرکت ۱۵۰ راننده استخدام کرده و اخراج آنها ممکن نیست. توقفگاه و امکانات تعمیر، حداکثر ۳۰ کامیون را می تواند جوابگو باشد. شرکت چند کامیون از هر نوع باید بخرد؟ مسألهٔ بهینه سازی را رابطه سازی کرده و حل نمایید (مانند تمرین ۲۰ . ۲).

۴.۶۵ مسألهٔ «کارخانه چوب بری» را که در بخش ۳ . ۶ . ۲ رابطه سازی شد، حل کنید.

*۴.۶۶ مسألهٔ «فولادسازی» تمرین ۲۱ . ۲ را رابطه سازی کرده و حل کنید.

*۴.۶۷ برای مسألهٔ «طرّاحی کابینت» و هر سه نوع رابطه سازی آن که در بخش ۴ . ۶ . ۲ آمد، جواب را به دست آورید. سه نوع رابطه سازی را با هم مقایسه کنید.

جدول ۴.۳۱ اطّلاعات مربوط به کامیونهای موجود

نوع کامیون	ظرفیت بار (تن)	سرعت متوسّط (km/h)	رانندهٔ مورد نیاز	تعداد ساعت کارکرد در روز (سه شیفت)	سرمایه گذاری اوّلیه برای هر کامیون (دلار)
A	۱۰	۵۵	۱	۱۸	۴۰۰۰۰
B	۲۰	۵۰	۲	۱۸	۶۰۰۰۰
C	۱۸	۵۰	۲	۲۱	۷۰۰۰۰

بخش ۴.۶ تحلیل پس بهینگی

۴.۶۸ مسألهٔ نفت خام را که در تمرین ۴.۵۹ بیان شد رابطه سازی کرده و حل کنید. اگر تقاضای بازار برای روغن بناگهان به ۱۲۰۰۰ بشکه افزایش یابد، اثر آن روی تابع هزینه چقدر است؟ اگر قیمت نفت خام A به ۲۴ دلار در هر بشکه کاهش پیدا کند اثر آن روی جواب چیست؟ درستی جوابها را ازطریق ترسیمی آزمایش کنید.

۴.۶۹ مسألهٔ بیان شده در تمرین ۴.۶۰ را رابطه سازی کرده و حل کنید. اثر تغییرات زیر چیست؟

۱. مقدار مادّهٔ C به ۱۲۰ کیلوگرم افزایش یابد.

۲. مقدار مادّهٔ D به ۱۰۰ کیلوگرم افزایش یابد.

۳. تقاضای بازار برای محصول A به ۶۰ کاهش یابد.

۴. سود محصول A به ۸ دلار در هر کیلوگرم افت کند.

درستی جوابها را ازطریق ترسیمی آزمایش کنید.

ضرایب لاگرانژ در بهین را برای مسائل زیر بیابید

۴.۷۰ تابع

$$x_1 + 2x_2$$

را با قیود

$$3x_1 + 2x_2 \leqq 12$$
$$2x_1 + 3x_2 \geqq 6$$
$$x_1 \geqq 0;$$ x_2 از نظر علامت آزاد است

ماکزیمم کنید.

۴.۷۱ تمرین ۴.۳۹ ۴.۷۲ تمرین ۴.۴۰

۴.۷۳ تمرین ۴.۴۱ ۴.۷۴ تمرین ۴.۴۲

۴.۷۵ تمرین ۴.۴۳ ۴.۷۶ تمرین ۴.۴۴

۴.۷۷ تمرین ۴.۴۵ ۴.۷۸ تمرین ۴.۴۶

۴.۷۹ تمرین ۴.۴۷ ۴.۸۰ تمرین ۴.۴۸

۴.۸۱ تمرین ۴.۴۹ ۴.۸۲ تمرین ۴.۵۰

۴.۸۳ تمرین ۴.۵۱ ۴.۸۴ تمرین ۴.۵۲

۴.۸۵ تمرین ۴.۵۳ ۴.۸۶ تمرین ۴.۵۴

۴.۸۷ تمرین ۴.۵۵ ۴.۸۸ تمرین ۴.۵۶

۴.۸۹ تمرین ۴.۵۷ ۴.۹۰ تمرین ۴.۵۸

محدودهٔ پارامترهای طرف راست مسائل زیر را پیدا کنید :

۴.۹۱ تمرین ۴.۵۹
۴.۹۲ تمرین ۴.۶۰
۴.۹۳ تمرین ۴.۷۰
۴.۹۴ تمرین ۴.۳۹
۴.۹۵ تمرین ۴.۴۰
۴.۹۶ تمرین ۴.۴۱
۴.۹۷ تمرین ۴.۴۲
۴.۹۸ تمرین ۴.۴۳
۴.۹۹ تمرین ۴.۴۴
۴.۱۰۰ تمرین ۴.۴۵
۴.۱۰۱ تمرین ۴.۴۶
۴.۱۰۲ تمرین ۴.۴۷
۴.۱۰۳ تمرین ۴.۴۸
۴.۱۰۴ تمرین ۴.۴۹
۴.۱۰۵ تمرین ۴.۵۰
۴.۱۰۶ تمرین ۴.۵۱
۴.۱۰۷ تمرین ۴.۵۲
۴.۱۰۸ تمرین ۴.۵۳
۴.۱۰۹ تمرین ۴.۵۴
۴.۱۱۰ تمرین ۴.۵۵
۴.۱۱۱ تمرین ۴.۵۶
۴.۱۱۲ تمرین ۴.۵۷
۴.۱۱۳ تمرین ۴.۵۸

محدودهٔ ضرایب تابع هزینه را برای مسائل زیر بیابید :

۴.۱۱۴ تمرین ۴.۵۹
۴.۱۱۵ تمرین ۴.۶۰
۴.۱۱۶ تمرین ۴.۷۰
۴.۱۱۷ تمرین ۴.۳۹
۴.۱۱۸ تمرین ۴.۴۰
۴.۱۱۹ تمرین ۴.۴۱
۴.۱۲۰ تمرین ۴.۴۲
۴.۱۲۱ تمرین ۴.۴۳
۴.۱۲۲ تمرین ۴.۴۴
۴.۱۲۳ تمرین ۴.۴۵
۴.۱۲۴ تمرین ۴.۴۶
۴.۱۲۵ تمرین ۴.۴۷
۴.۱۲۶ تمرین ۴.۴۸
۴.۱۲۷ تمرین ۴.۴۹
۴.۱۲۸ تمرین ۴.۵۰
۴.۱۲۹ تمرین ۴.۵۱
۴.۱۳۰ تمرین ۴.۵۲
۴.۱۳۱ تمرین ۴.۵۳
۴.۱۳۲ تمرین ۴.۵۴
۴.۱۳۳ تمرین ۴.۵۵
۴.۱۳۴ تمرین ۴.۵۶
۴.۱۳۵ تمرین ۴.۵۷
۴.۱۳۶ تمرین ۴.۵۸

۴ . ۱۳۷ مسألهٔ برنامه غذایی تمرین ۴ . ۶۱ را رابطه سازی کرده و حل کنید . تغییرات زیر را روی جواب بهین بحث کنید :

۱ . قیمت شیر به ۱٫۲ دلار در هر کیلوگرم افزایش یابد .

۲ . نیاز به ویتامین A به ۶ واحد افزایش یابد .

۳ . نیاز به ویتامین B به ۳ واحد کاهش یابد .

درستی جوابها را از راه ترسیمی آزمایش کنید .

۴ . ۱۳۸ مسألهٔ بیان شده در تمرین ۴ . ۶۲ را رابطه سازی کرده و حل کنید . اثر تغییرات زیر را روی جواب بهین بحث کنید :

۱ . تأمین بطری خالی به ۷۵۰ عدد کاهش یابد .

۲ . سود یک بطری محلول A به ۰٫۸ دلار کاهش یابد .

۳ . فقط ۲۰۰ بطری الکل بتواند تولید شود .

۴ . ۱۳۹* مسألهٔ بیان شده در تمرین ۴ . ۶۳ را رابطه سازی کرده و حل کنید . اثر تغییرات زیر را روی جواب بهین بحث کنید :

۱ . سود کرهٔ نباتی به ۰٫۰۶ دلار در کیلوگرم افزایش یابد .

۲ . تأمین مواد اساس شیر به ۲۵۰۰ کیلوگرم افزایش یابد .

۳ . تأمین دانهٔ سویا به ۲۲۰۰۰۰ کیلوگرم کاهش یابد .

۴ . ۱۴۰ مسألهٔ کارخانه چوب بری رابطه سازی شده در بخش ۳ . ۶ . ۲ را حل کنید . اثر تغییرات زیر را روی جواب بهین بحث کنید :

۱ . هزینهٔ حمل و نقل برای هر الوار به ۰٫۱۶ دلار برای هر کیلومتر افزایش یابد .

۲ . ظرفیت کارخانهٔ A به ۲۰۰ الوار در روز کاهش یابد .

۳ . ظرفیت کارخانهٔ B به ۲۷۰ الوار در روز کاهش یابد .

۴ . ۱۴۱* مسألهٔ بیان شده در تمرین ۴ . ۶۴ را رابطه سازی کرده و حل کنید . اثر تغییرات زیر را روی جواب بهین بحث کنید :

۱ . بنابر نیاز به سرمایه گذاری ، پول نقد موجود به ۱٫۸ میلیون دلار کاهش یابد .

۲ . سرمایه گذاری اوّلیه برای کامیون B به ۶۵۰۰۰ دلار افزایش یابد .

۳ . ظرفیت نگه داری به ۲۸ کامیون کاهش یابد .

*۴ . ۱۴۲ مسألهٔ «کارخانهٔ فولاد» را که در تمرین ۲ . ۲۱ بیان شد رابطه سازی کرده و حل کنید. اثر تغییرات زیر را روی جواب بهین بحث کنید :

۱ . ظرفیت احیای کارخانهٔ ۱ به ۱۳۰۰ ۰۰۰ افزایش یابد.

۲ . ظرفیت احیای کارخانهٔ ۲ به ۹۵۰ ۰۰۰ کاهش یابد.

۳ . ظرفیت مونتاژ کارخانهٔ ۲ به ۲۵۰ ۰۰۰ افزایش یابد.

۴ . تقاضا برای محصول ۲ به ۱۳۰ ۰۰۰ افزایش یابد.

۵ . تقاضا برای محصول ۱ به ۲۸۰ ۰۰۰ کاهش یابد.

*۴ . ۱۴۳ برای سه رابطه سازی مسألهٔ «طرّاحی کابینت» که در بخش ۲ . ۶ . ۴ داده شده جواب را به دست آورید. سه رابطه سازی را با هم مقایسه کنید. اثر تغییرات زیر را روی جواب بهین بحث کنید :

۱ . ظرفیت پیچ کردن به ۵۵۰۰ عدد در روز کاهش یابد.

۲ . هزینه پرچ کردن قطعات C_1 به ۰/۷ دلار افزایش یابد.

۳ . شرکت باید فقط ۹۵ کابینت در روز تولید کند.

۴ . ۱۴۴ مسألهٔ زیر داده شده است.

تابع

$$f = 2x_1 - 4x_2$$

را با قیود

$$g_1 \equiv 10x_1 + 5x_2 \leqq 15$$
$$g_2 \equiv 4x_1 + 10x_2 \leqq 36$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$

مینیمم کنید. متغیّرهای کمبود برای قیود g_1 و g_2 به ترتیب x_3 و x_4 است. جدول نهایی مسأله عبارت است از

x_1	x_2	x_3	x_4	b
2	1	$\frac{1}{5}$	0	3
−16	0	−2	1	6
10	0	$\frac{4}{5}$	0	$f + 12$

با استفاده از این جدول :

۱ . مقادیر بهین f و x را به دست آورید .

۲ . ضرایب لاگرانژ را برای g_1 و g_2 به دست آورید .

۳ . محدودهٔ طرف راست را برای g_1 و g_2 به دست آورید .

۴ . اگر طرف راست g_1 تغییر کند کمترین مقداری که f می تواند براساس وضع موجود داشته باشد چقدر است ؟ برای آن حالت طرف راست g_1 چقدر است ؟

بخش ۴.۷ دوگانی در برنامه ریزی خطی

برای تمرینهای زیر از جدول آخر ابتدایی متغیّرهای دوگان را بازیابی کرده و درستی جوابها را با حل مسأله دوگان آزمایش کنید :

۴.۱۴۵ تمرین ۴.۳۹

۴.۱۴۶ تمرین ۴.۴۰

۴.۱۴۷ تمرین ۴.۴۱

۴.۱۴۸ تمرین ۴.۴۲

۴.۱۴۹ تمرین ۴.۴۳

۴.۱۵۰ تمرین ۴.۴۴

۴.۱۵۱ تمرین ۴.۴۵

۴.۱۵۲ تمرین ۴.۴۶

۴.۱۵۳ تمرین ۴.۴۷

۴.۱۵۴ تمرین ۴.۴۸

۴.۱۵۵ تمرین ۴.۵۹

۴.۱۵۶ تمرین ۴.۶۰