

متغیرهای مختلط

هرب سیلورمن

ترجمه: محسن نقشینه ارجمند



متغیرهای مختلط

هرب سیلور من

ترجمه:

محسن نقشینه ارجمند

به نام خدا

فهرست مطالب

بیشگفتار مولف

۱- مقدمات جبری و هندسی

۱.۱ هيات مختلط

۲.۱ نمايش مختصات مستطیلی

۳.۱ نمايش قطبی

۲- مقدمات توپولوژیکی و تحلیلی

۱.۲ مجموعه‌های نقطه‌ای در صفحه

۲.۲ دنباله‌ها

۳.۲ فشردگی

۴.۲ افکند گنجداری

۵.۲ پیوستگی

۳- نگاشته‌ها و تبدیلات دو خطی

۱.۳ نگاشته‌های بنیادی

۲.۳ تبدیلات خطی کسری

۳.۳ نگاشته‌های دیگر

صفحه

۱۱

۱۵

۲۰

۲۴

۳۱

۳۸

۴۵

۵۰

۵۴

۶۵

۷۰

۸۳

۴- توابع مقدماتی

۸۹	۱۰۴ تابع نمائی
۹۶	۲۰۴ خواص نگاشتی
۱۰۳	۳۰۴ تابع لگاریتمی
۱۰۸	۴۰۴ نماهای مختلط

۵- توابع تحلیلی

۱۱۵	۱۰۵ معادلات کوشی - ریمن
۱۲۳	۲۰۵ تحلیلی بودن
۱۳۱	۳۰۵ توابع همساز

۶- رشته‌های توانی

۱۳۹	۱۰۶ یادآوری دنباله‌ها
۱۵۰	۲۰۶ همگرایی یکنواخت
۱۶۱	۳۰۶ رشته‌های ماکلورن و تبیلر
۱۷۱	۴۰۶ عملیات بر رشته‌های توانی

۷- انتگرال‌گیری مختلط و قضیه کوشی

۱۸۳	۱۰۷ خم‌ها
۱۹۲	۲۰۷ پارامتری کردن
۲۰۱	۳۰۷ انتگرال‌های خطی
۲۱۱	۴۰۷ قضیه کوشی

۸- کاربردهای قضیه کوشی

۲۲۳	۱۰۸ فرمول انتگرال کوشی
۲۴۰	۲۰۸ نامساوی کوشی و کاربردها
۲۴۹	۳۰۸ قضیه ماکزیم کالبد
۲۵۶	۴۰۸ اصل شناسه

۹- رشته لوران و قضیه مانده

۲۷۱	۱۰۹ رده‌بندی تکینه‌ها
۲۸۰	۲۰۹ رشته لران
۲۹۲	۳۰۹ محاسبه انتگرالهای حقیقی

۱۰- توابع همساز

۳۰۹	۱۰۱۰ مقایسه با توابع تحلیلی
۳۱۸	۲۰۱۰ فرمول انتگرال پواسن
۳۳۰	۳۰۱۰ توابع همساز مثبت

۱۱- نگاشت‌های همدیس و قضیه نگاشت ریمان

۳۳۹	۱۰۱۱ نگاشت‌های همدیس
۳۵۰	۲۰۱۱ خانواده‌های نرمال
۳۵۷	۳۰۱۱ قضیه نگاشت ریمان

۱۲- توابع تکارز

۳۶۵	۱۰۱۲ رده S
۳۷۸	۲۰۱۲ زیررده‌های S

۱۳- توابع تام و برخدریخت

۳۹۵	۱۰۱۳ حاصلضربهای نامتناهی
۴۰۴	۲۰۱۳ قضیه حاصلضرب و ایرشتراس
۴۱۶	۳۰۱۳ قضیه میتاگ - لفلر

۱۴- ادامه تحلیلی

۴۲۳	۱۰۱۴ مفاهیم بنیادی
۴۳۴	۲۰۱۴ توابع خاص

۴۴۷ پاسخ به پرسش‌ها و تمرینهای برگزیده

۴۶۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
-----	----------------------------

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

۴۷۵

فهرست راهنما

۴۷۹

مراجع

۴۸۷

پیشگفتار مؤلف

دانشجویی که ظاهراً "در فرهنگ تخصصی زمان ما غرق شده است، به سرعت لزوم فراگیری یک رشته تخصصی را احساس می‌کند. با چنین بینشی، دیوان سالاری آموزشی ما را مجبور به تقسیم مباحثی کرده، که به نوبه خود منجر به عدم توجه به روابط متقابل آنها می‌گردد. بدین ترتیب است که گاهی وانمود می‌کنیم، جبر خطی مقوله‌ی جدا از جبر نوین است و یا احتمالات و آمار را به سادگی تفکیک می‌نماییم. و یا حتی حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته را بر پایه حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی استوار نمی‌داریم.

این کتاب با توجه به این دیدگاه نوشته شده است که یک وابستگی متقابل میان متغیرهای حقیقی و مختلط موجود است و در هر فرصتی می‌بایست آن را روشن نمود. گاهی موضوعی را در متغیرهای حقیقی بررسی می‌کنیم و سپس آنرا در مورد متغیرهای مختلط تعمیم می‌دهیم، و گاهی با مطلبی از متغیرهای مختلط شروع می‌کنیم و سپس آن را برای مورد حقیقی‌اش بررسی می‌کنیم. هر دوی روش - تعمیم و تخصیص - شایستگی بررسی دقیق را دارند.

تصور بر این است که فهم اعداد "مختلط" مشکل است، و واحدهای "انگاری" هم در پوشش ابهام‌انگیزی جا دارند. امیدواریم که با دوری نگرفتن از هیات اعداد حقیقی بتوانیم بر این کلمه‌یاس آفرین، که ناگزیر از استعمال آن هم هستیم، چیره گردیم. مؤلف آرزو دارد تأثیری فزاینده ایجاد کند، که ابتداء خواننده را قادر سازد، تا دانش خود را در حساب دیفرانسیل و انتگرال به کار گیرد، تا بتواند مسائل متغیرهای مختلط را بهتر درک نموده و سپس با بینش حدیدش از متغیرهای مختلط، در مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مسلط گردد.

هم چنین، هرجا که ممکن باشد، مشخصات تحلیلی و هندسی یک مطلب را با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد. این کار طبعاً "ما را به بحث در مورد "دقت" می‌کشد. اکنون رسم بر آن است، هر چه تحلیلی است دقیق محسوب می‌شود، و اگر هندسی است کم دقت به حساب می‌آید. این دوگانگی موجب شده است که برخی نویسندگان را، به قیمت صرف‌نظر کردن از معنای غنی هندسی، به سمت "دقت" سوق دهد و برخی دیگر، که پیرو "مکتب شهودی" هستند، در حل مسائل از روش‌های هندسی استفاده نمایند، و در نتیجه امکانات موجود در روش‌های تحلیلی را نادیده بگیرند. از نظر ما دقت، فقط آنجا که روشگر باشد و نه ابهام‌انگیز، مفید است. به همین دلیل ما از هندسه برای نمایش و توصیف موضوعات تحلیلی استفاده می‌کنیم و آنالیز را برای روشن ساختن مفاهیم هندسی به کار می‌گیریم، و در مورد این که کدام دقیق‌تر است نامل نخواهیم کرد.

گاهی اوقات، برای ایجاد انگیزه، قبل از بیان قضیه بحث کوتاهی مطرح می‌شود. گاهی هم به منظور فهم هر چه بیشتر قضیه، بلافاصله پس از اثبات قضیه، ملاحظات و نتایج گوناگون آن را بررسی خواهیم کرد. هیچگونه پوزشی هم بابت این برحرفی‌ها ضرورت ندارد، زیرا در مباحث ریاضی، که ریزه‌کاری‌های فراوان دارد، همیشه اجازه در کلام ضروری نیست. به منظور شناخت ارتباط میان روش‌های مختلف و تشخیص اهمیت این ارتباط، بعضی از قضایا را به روش‌های مختلف اثبات کرده‌ایم. در این کتاب قبل از اینکه سعی کنیم به مرزهای دانش ریاضی توجه داشته باشیم، بیشتر به راهی که به این مرز منتهی می‌شود و یا راه‌هایی که ممکن است به آن منتهی شوند می‌اندیشیم.

سخنی هم در مورد پرسش‌هایی که در آخر هر بخش مطرح شده است داریم. ما معتقدیم که مطالب ریاضی باید مورد سؤال قرار گیرد - نه تنها سازگاری و منطق درونی آن، بلکه دلایلی که ما را به نتایج هدایت می‌کنند، نیز باید مورد سؤال واقع بشوند. آیا نتیجه منطقی به نظر میرسد؟ آیا قابل پیش‌بینی بود؟ آیا روش اثبات طبیعی و معمولی بود و یا اینکه ساختگی بود؟ آیا روش دیگری برای رسیدن به نتیجه موجود است؟ آیا قضیه‌یی که ثابت شد، تعبیر هندسی هم دارد؟ آیا می‌توان شکل برای آن ترسیم نمود؟^۱ "پرسش‌ها" به نحوی که در انتهای هر بخش آمده‌اند به سادگی قابل دسته‌بندی نیستند. بعضی خیلی ساده و بعضی کاملاً "مشکل‌اند. بعضی گویا و روشن و برخی مبهم‌اند. دسته‌یی فقط یک جواب و دسته‌یی جواب‌های متعدد دارند. گروهی در رابطه با مطالب اثبات شده هستند و گروهی دیگر زمینه‌ساز درک مطالب بعدی هستند. چه وجه مشترکی میان این پرسش‌های گوناگون وجود دارد؟ همگی به منظور کمک به خواننده در جهت تفکر، فهم، خلاقیت و - خوب - طرح سؤال نمودن است. امید است که این پرسش‌ها برای مدرسین هم سودمند باشند و بتوانند به هنگام تدریس از آن بهره گیرند.

در مورد تمرین‌هایی که در انتهای هر بخش آمده است چندان نیازی به توضیح نیست، زیرا که تمرین‌ها در مقایسه با پرسش‌ها اغلب به طبع دانشجویان سازگارترند. پرسش‌ها و تمرینات دارای ماهیتی واحد هستند و اختلاف میان آنها جنبه لغوی دارد. فراوانی تمرینات به منظور کمک به دانشجو می‌باشد که میزان تسلط خود را در درک مطالب مطروحه ارزیابی کند.

مطالب کتاب محتوای یک درس یک‌ساله در متغیرهای مختلط است، که به دانشجویان سالهای آخر دوره لیسانس و دانشجویان مبتدی فوق لیسانس در دانشگاه کلارک تدریس می‌شود. پیش نیاز آن یک دوره حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته است. نه فصل اول بنیاد محکمی برای مقدمات متغیرهای مختلط است. پنج فصل آخر به بررسی مفصلی از موضوعات پیشرفته ترمی پردازد تا به تواند پیش نیاز ضروری را برای دانشجویانی که بخواهند در نظریه عمومی آنالیز مختلط تحقیق نمایند فراهم سازد.

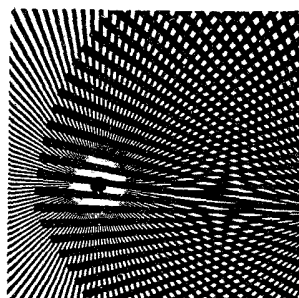
چنانچه خواهیم از این کتاب به منظور تدریس در یک نیمسال استفاده کنیم، فصل‌های ۸، ۷، ۶، ۵ و ۹ را باید هدف اصلی قرار داد. فصل اول را می‌توان به سرعت تدریس کرد. مطالب فصل دوم را هر جا که لازم باشد توضیح می‌دهیم. فصل سوم و هم چنین خواص نگاشتها از فصل چهارم را می‌توان تماما "حذف کرد".

وقتی که دانشجوی دوره لیسانس بودم و بعدها نیز هنگامی که دانشجوی فوق لیسانس شدم، همیشه آرزو داشتم کتابی بنویسم که در آن عبارت "بدیهی است که" به کار نرفته باشد. این آرزو تا یک صفحه به آخر مانده در این کتاب عملی شد، ولی متأسفانه در آخرین صفحه عدول شد و این بدان علت بود که می‌خواستم "صفرهای بدیهی" تابع زتسا را بیان کنم. ولی به هر حال این آرزو، اگر نه در حرف بلکه در عمل، برآورده شده است. مطالب کتاب را با توضیحات، تذکرات و ژرف‌نگری بیان داشته‌ام. مدرس می‌تواند مطالعه بعضی از بخش‌ها را به دانشجویان واگذار کند. در واقع، این کتاب یک خودآموز است.

افراد ذیل پیش‌نویس کتاب را مطالعه کرده و اصلاحات متعدد بر آن پیشنهاد نموده‌اند: پرفسور داگلاس ام. کامپلا (دانشگاه بیرگام یانگ)، توماس ال. مک‌کوی (دانشگاه ایالتی میشیگان)، جان، تی. شیت (دانشگاه ایالتی اوهایو)، آلبرت شیلد (دانشگاه تمپل)، جی. آر. اسمارت (دانشگاه وسکن سین)، اولین، ام. سیلویا (دانشگاه کالیفرنیا، داونیس). به هنگام لحظه‌های حساسی که مشغول تهیه پیش‌نویس کتاب بودم، اولین لحظه‌یی در تشویق من و ابراز دوستی خالصانه‌اش درنگ نکرد. در پایان باید گفت که مارگارت جاکویت با مهارت خاص خودش دست‌نویس مرا (که خواندن آن کار ساده‌یی نبود!) ترجمه نمود و به دقت تمام ماشین کرد.

هر ب سیلورمن

نوارک - دلوار



۱. مقدمات جبری وهندسی

ریاضی دان شهیر کروئکر^۱ زمانی گفت "خدا اعداد صحیح را آفرید و مابقی کار بشر است". در این فصل فرآیند تکاملی دستگاه اعداد حقیقی بررسی شده است. ما بطور نسبی به توصیف اعداد حقیقی می پردازیم، و سپس، با تاسف به نوعی نارسایی در آن پی می بریم. معادله درجه دوم $x^2 + 1 = 0$ در دستگاه اعداد حقیقی ریشه ندارد.

عصرنوی فرا میرسد، و دستگاه اعداد مختلط زاده می شود. ما عدد مختلط، این نوزاد عجیب را، از نقطه نظرهای مختلف: بعنوان عضو یک هیات، بعنوان نقطه ای در صفحه، و بعنوان یک بردار دوبعدی بررسی خواهیم کرد. هر سه نقطه مفید و سودمند است و در هر طریق که گام نهم، شباهت دستگاه اعداد مختلط با والدینش یعنی دستگاه اعداد حقیقی را مشاهده می کنیم. بنظر میرسد که این طفل از هر جهت بر والدینش برتری داشته باشد مگر از یک جهت - آن ترتیب ندارد. و این کشف ساده احترام و ارزش را برای والدین فراموش شده اش ایجاب میکند.

روشن ما در این فصل روشن است. تا زمانی این طفل واحد خصوصیات والدین خود میباشد و سپس جهت گیری جدیدی میکند و بما چیزهایی می آموزد که والدین او هرگز نمی دانستند.

۱-۱. هیات مختلط

با شرح مختصری در مورد منشاء اعداد مختلط آغاز می کنیم. اگر ما تنها از اعداد صحیح مثبت اطلاع می داشتیم معادله $x + 2 = 1$ را نمی توانستیم حل کنیم. معرفی اعداد صحیح منفی است که ما را قادر به حل این معادله می کند. ولی اطلاع از همه اعداد صحیح

برای حل معادله $2x + 1 = 2$ کافی نیست و برای حل چنین معادلاتی نیاز به تعریف اعداد گویا داریم.

در حالیکه کلیه معادلات خطی با ضرایب صحیح دارای ریشه گویا هستند، برخی معادلات درجه دو چنین نیستند. مثلاً "حل معادله $x^2 - 2 = 0$ به اعداد گنگ نیازمند است. اگر یک مرحله فراتر رویم، معادلات درجه دومی موجودند که هیچ ریشه حقیقی (گویا یا اصم) ندارند. معادله $x^2 + 1 = 0$ دارای ریشه حقیقی نیست، زیرا که مربع هر عدد حقیقی غیر منفی است. بمنظور حل چنین معادله‌یی، می‌بایست عددی "کشف" کنیم که مربع آن -1 گردد. این عدد، که با $i = \sqrt{-1}$ نمایش داده می‌شود واحد انگاری نامیده می‌شود. "ساختن" یک عدد برای حل یک معادله ویژه چندان منطقی نخواهد بود. و برای آنکه کل بحث را در چهارچوب دقیق‌تری قرار دهیم، اعمالی شامل ترکیب اعداد حقیقی و واحدهای انگاری، تعریف خواهیم کرد. نشان خواهیم داد، این اعمال، تا سرحد امکان با قوانین جمع و ضرب اعداد حقیقی مطابقت دارند هر جفت مرتب (a, b) از اعداد حقیقی را می‌توانیم "عدد مختلط"

$$a + bi \quad (1)$$

بنامیم. پس مجموعه اعداد مختلط به عنوان مجموعه همه جفت‌های مرتب از اعداد حقیقی تعریف می‌شود. مفهوم تساوی و عملیات جمع و ضرب بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_1 = a_2, b_1 = b_2, \iff (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$$

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2),$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

تعریف ضرب در اعداد مختلط طبیعی‌تر از آن است که به نظر می‌رسد، زیرا اگر اعداد مختلط را به شکل (۱) بنویسیم، و آنها را مانند اعداد حقیقی در هم ضرب کنیم و از رابطه $i^2 = -1$ استفاده کنیم، داریم:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

در این مورد چند نکته باید یادآوری شود. اول باید توجه داشت که عملیات رسمی برای جمع و ضرب اعداد مختلط به عدد انگاری چون i وابسته نیست. به عنوان مثال $i^2 = -1$ را می‌توان به صورت $(-1, 0) = (0, 1)(0, 1)$ بیان کرد و بدین ترتیب نماد i صرفاً "به منظور ساده‌نویسی معرفی شده است. همچنین، توجه کنید که جفت مرتب $(a, 0)$ نمایش‌دهنده عدد حقیقی a است و روابط:

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0) \text{ و } (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

به ترتیب، جمع و ضرب در اعداد حقیقی هستند.

برخی خواص اساسی اعداد حقیقی عبارتند از: حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد

حقیقی، عددی حقیقی است، و ترتیب انجام هر یک از این عملیات می تواند وارونه گردد. یعنی، برای اعداد حقیقی a و b ، قوانین جابجایی:

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \text{و} \quad a + b = b + a \quad (۲)$$

برقرارند. قوانین انجمنی:

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \text{و} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (۳)$$

و قانون پخش پذیری:

$$a(b + c) = ab + ac \quad (۴)$$

نیـز برای همه اعداد حقیقی a و b و c برقرارند. اعداد 0 و 1 به ترتیب اعضای خنثی جمع و ضرب اند. وارون جمعی عدد a برابر $-a$ و وارون ضربی a ($a \neq 0$) عدد حقیقی $a^{-1} = 1/a$ است. بطور مختصر می توان چنین گفت که، دستگاه اعداد حقیقی با اعمال جمع و ضرب تشکیل یک هیات می دهند.

ناگفته پیداست که دستگاه اعداد حقیقی تنها دستگاهی نیست که تشکیل یک هیات می دهد. به آسانی می توان دید که اعداد گویا در شرایط یک هیات که در بالا گفته شد صدق می کند. آنچه در این فصل اهمیت دارد این است که اعداد مختلط نیز، تشکیل یک هیات می دهند. عضو خنثای جمع $(0, 0)$ ، وارون جمعی (a, b) برابر $(-a, -b)$ و وارون ضربی $(a, b) \neq (0, 0)$ برابر

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

است. بررسی صادق بودن اصول هیات در مورد اعداد مختلط را به عنوان تمرین به عهده خواننده وا می گذاریم.

دانشجوی تیزبین ریاضی شاید صرفاً "با تحقیق در یک اثبات اقناع گردد بلکه بایستی این احساس را پیدا کند، که چرا این کار را می کند. آیا خواننده از خود پرسیده که چطور می توان انتظار داشت، وارون ضربی (a, b) برابر

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

باشد؟ یکی از راههای ممکن برای استدلال به قرار زیر است: اگر وارون $(a, b) = a + bi$ را به صورت

$$(a + bi)^{-1} = \frac{1}{(a + bi)},$$

بنویسیم، در این صورت می خواهیم عدد مختلط $c + di$ را طوری بیابیم که

$$\frac{1}{(a+bi)} = c + di$$

پس از طرفین - وسطین، خواهیم داشت $ac + bdi^2 + i(ad + bc) = 1$ و یا

$$ac - bd = 1,$$

$$ad + bc = 0.$$

جواب این دستگاه معادلات عبارت است از:

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad d = -\frac{b}{a^2 + b^2}.$$

آیا خواننده می تواند دلائل دیگری برای برقراری رابطه زیر بیاورد؟

$$(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)?$$

فرض کنیم $z = (x, y)$ یک عدد مختلط باشد. در این صورت x و y به ترتیب به قسمت حقیقی $\operatorname{Re} z$ و قسمت انکاری $\operatorname{Im} z$ موسومند. مجموعه اعداد حقیقی را با R و مجموعه اعداد مختلط را با C نمایش می دهیم. تناظر $x \leftrightarrow (x, 0)$ برای $x \in R$ ، تناظری یک به یک بین مجموعه R و یک زیر مجموعه C می باشد. در این تناظر، عملیات جمع و ضرب پایدار می مانند بدین معنی $x + y \rightarrow (x + y, 0)$ و $xy \rightarrow (xy, 0)$ از اینرو عدد حقیقی مانند x و جفت مرتب $(x, 0)$ را به جای یکدیگر بکار خواهیم برد. بعلاوه همچنین جفت مرتب $(0, 1)$ را نیز با i نشان می دهیم. چون هر عدد مختلط یک جفت مرتب از اعداد حقیقی است، عبارات $C = R^2$ و $C = R \times R$ را بجای یکدیگر بکار می بریم. از اینرو $R \times 0$ زیر مجموعه ای از C است که متشکل از اعداد حقیقی است.

همانطور که قبلاً اشاره شد، یک فایده هیات C این است که در این دستگاه معادله $z^2 + 1 = 0$ جواب دارد. در فصل هشتم خواهیم دید که هر معادله چند جمله ای $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = 0$ در این دستگاه دارای یک جواب است. اما این تعمیم R به C خالی از اشکال نیست. هیات حقیقی خاصیت مهمی دارد که هیات مختلط فاقد آن است. اگر $a \in R$ آنگاه دقیقاً "یکی از سه گزاره زیر درست است:

$$a = 0, \quad a > 0, \quad -a > 0 \quad (\text{سه گانگی})$$

و بعلاوه حاصل جمع و حاصل ضرب دو عدد حقیقی مثبت، مثبت است (بسته بودن). یک هیات با یک رابطه ترتیبی $<$ را، که در قانون سه گانگی و دو شرط اخیر صادق باشد مرتب نامند. در یک هیات مرتب، همانند هیات اعداد حقیقی و یا اعداد گویا، روش طبیعی برای مقایسه هر دو عضو a و b موجود است. یا a کوچکتر از b است ($a < b$)، و یا a برابر b است ($a = b$)، و یا a بزرگتر از b است ($a > b$). متأسفانه، روی اعداد

مختلط نمی توان چنین رابطه یی بنا نهاد . زیرا اگر هيات اعداد مختلط مرتب می بود ، در آن صورت یکی از دو عدد i و $-i$ مثبت می بود و در نتیجه بنا بر قانون بسته بودن $i^2 = (-i)^2 = -1$ نیز مثبت میشد . ولی اگر 1 مثبت باشد بایست 1 منفی باشد . از طرف دیگر اگر 1 مثبت باشد $(-1)^2 = 1$ نیز مثبت است که یک تناقض است .

در خاتمه جهت جمع بندی مطالب گوئیم ، هيات مختلطی موجود است که شامل یک هيات حقیقی است و این هم شامل یک هيات گویاست . بررسی هر یک از هياتها محاسن و معایبی دارد . در اینجا منظور ما این نیست خواصی را بیان کنیم که به طور منحصر بفردی هر یک از این هياتها را مشخص کند ، اگر چه اینکار مسلما " شدنی است .

پرسشها

- ۱- آیا یک هيات می تواند متناهی باشد ؟
- ۲- آیا یک هيات مرتب می تواند متناهی باشد ؟
- ۳- آیا هياتهایی موجودند که بطور کامل شامل گویاها و بطور کامل زیر مجموعه حقیقیها باشند ؟
- ۴- چه عدد مختلطی به $a + bi$ بیافزاییم و یا در آن ضرب کنیم تا نتیجه حقیقی گردد ؟
- ۵- چگونه می توان قسمت حقیقی و انگاری خارج قسمت دو عدد مختلط را جدا نمود ؟
- ۶- در مورد قسمت حقیقی حاصل جمع دو عدد مختلط چه می توان گفت ؟ حاصل ضرب چگونه ؟
- ۷- تعریف عدد مختلط به صورت جفت مرتب چگونه ایجابهایی به دنبال دارد ؟
- ۸- اگر یک چند جمله یی درجه n حداقل دارای یک جواب باشد ، آیا بیش از این چیزی می توان گفت ؟
- ۹- اگر بگوئیم بر اعداد مختلط ترتیبی تعریف کنیم که اگر $a > b$ و $c > d$ آنگاه $(a, b) > (c, d)$. کدامین خواص ترتیب در اینجا موجود نیست ؟
- ۱۰- آیا هيات مرتبی هست که $x^2 + 1 = 0$ در آن جواب داشته باشد ؟

تمرینها

- ۱- نشان دهید مجموعه همه اعداد حقیقی بصورت $a + b\sqrt{2}$ که در آنها a و b اعداد گویا باشند ، یک هيات مرتب است .
- ۲- اگر a و b عناصر یک هيات باشند . نشان دهید که $ab = 0$ اگر و تنها اگر یا $a = 0$ یا $b = 0$.

۳- اگر a و b عناصر یک هیت مرتب با $a < b$ باشند. نشان دهید که به تعدادنا-
متناهی عنصر بین a و b موجود است.

۴- مقادیر زیر را بیابید:

الف- $(-2, 3)(4, -1)$ ب- $(1 + 2i)\{3(2 + i) - 2(3 + 6i)\}$

ب- $(1 + i)^3$ ت- $(1 + i)^4$

ث- $(1 + i)^n - (1 - i)^n$

۵- نشان دهید که دو مقدار زیر برابر ۱ اند.

الف) $\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ب) $\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

۶- برای هر اعداد صحیح k و n نشان دهید که $i^n = i^{n+4k}$. عدد مختلط i^n چند مقدار مختلف می پذیرد؟

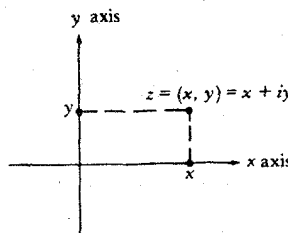
۲-۱. نمایش مختصات مستطیلی

همان طور که عدد حقیقی x را می توان بوسیله یک نقطه بر یک خط نمایش داد، هر عدد مختلط $z = (x, y)$ را هم می توان با نقطه ای در صفحه نمایش داد (شکل ۱). هر عدد مختلط به یک و فقط یک نقطه از صفحه متناظر می گردد. از اینرو عبارات عدد مختلط و نقطه در صفحه معادل اند. محورهای x و y به ترتیب به محور حقیقی و محور انگاری موسوم اند. در حالیکه صفحه xy به صفحه مختلط یا صفحه z موسوم است.

تعبیر دیگری از عدد مختلط نیز موجود است. هر نقطه (x, y) از صفحه مختلط یک بردار دوبعدی (پاره خط سودار) است از $(0, 0)$ ، نقطه آغازی، به (x, y) نقطه پایانی. پس هر عدد مختلط را می توان با یک بردار نمایش داد. این کار طبیعی به نظر می رسد، بدین معنی تعریفی که برای جمع اعداد مختلط اختیار کردیم با جمع بردارها متناظر است؛ یعنی:

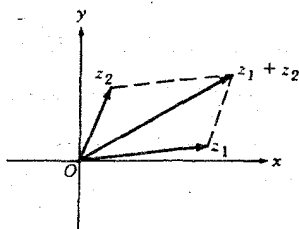
$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

شکل ۱



از نظر هندسی، جمع بردارها پیرو قاعده‌ای موسوم به قاعده متوازی الاضلاع است. که در شکل ۲ نمایش داده‌ایم. از نقطه z_1 ، برداری هم‌جهت با بردار z_2 و به بزرگی آن رسم کنید. نقطه پایانی، بردار $z_1 + z_2$ است. به روش دیگر هم اگر برداری هم‌جهت و به اندازه z_1 به z_2 وصل شود به همان نقطه انتهایی خواهیم رسید. این نمایشگر خاصیت جابجایی در جمع برداری است. توجه کنید که $z_1 + z_2$ قطری از متوازی الاضلاع تشکیل شده است. قطر دیگر متوازی الاضلاع برابر چه می‌تواند باشد؟

شکل ۲



منظور از بزرگی (درازا) بردار (x, y) دوری نقطه $z = (x, y)$ از مبدا است. این دوری به کالبد و یا قدر مطلق عدد مختلط z موسوم است و با $|z|$ نمایانده می‌شود؛ و مقدارش برابر $\sqrt{x^2 + y^2}$ است. به ازاء هر عدد حقیقی مثبت r ، به تعداد نامتناهی مقادیر متمایز از (x, y) موجوداند که کالبد آنها برابر $|z| = r$ باشد، اینها نقاط واقع بر دایره $x^2 + y^2 = r^2$ می‌باشند. از این نقاط دوتای آنها $(r, 0)$ و $(-r, 0)$ ، حقیقی‌اند و از این رو این تعریف با تعریف قدر مطلق در هیات حقیقی مطابقت (ر. ک. شکل ۳).

باید توجه داشت که برای $z = (x, y)$

$$|x| = |\operatorname{Re} z| \leq |z|,$$

$$|y| = |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

دوری بین دو نقطه $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ برابرست با

$$|z_2 - z_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

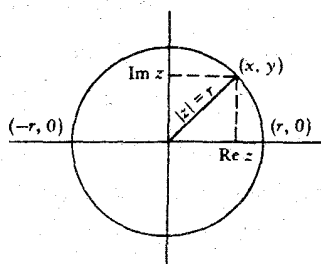
نامساویهای مثلث

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

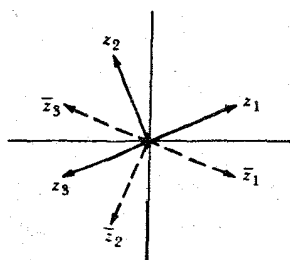
از نظر هندسی مبین آن هستند که هیچ ضلع یک مثلث از حاصل جمع درازای دو ضلع دیگر بزرگتر نبوده و از تفاضل درازای دو ضلع دیگر کوچکتر نیست (شکل ۲). تحقیق این مطالب، از نظر جبری، به خواننده واگذار می‌گردد.

شکل ۳



بین همه اعداد مختلطی که کالبد آنها با کالبد عدد $z = (x, y)$ برابر است یکی از آنها نقش ویژه‌ای ایفا می‌کند. نقطه $(x, -y)$ به مزدوج موسوم است و با \bar{z} نمایانده می‌شود. چنانچه محور حقیقی را به عنوان یک آئینه دوبر تصور کنیم آنگاه \bar{z} تصویر آئینه‌یی z است (شکل ۴).

شکل ۴



خواص زیر از تعریف برای مزدوج بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \overline{z_2}. \end{aligned} \quad (5)$$

برخی از روابط مهم میان عدد مختلط $z = (x, y)$ و مزدوج آن بشرح زیراند:

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= (2x, 0) = 2 \operatorname{Re} z, \\ z - \bar{z} &= (0, 2y) = 2 \operatorname{Im} z, \\ |z| &= |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z\bar{z} &= |z|^2. \end{aligned} \quad (6)$$

شکل مجذور کالبد واقع در (۶) اغلب از همه مفیدتر است. به عنوان مثال برای اثبات این که کالبد حاصلضرب دو عدد مختلط برابر حاصلضرب کالبد هاست، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z_1} \overline{z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2 = (|z_1| |z_2|)^2. \end{aligned}$$

استفاده از مزدوج روشی جهت جدا کردن قسمت‌های حقیقی و انگاری وارون یک‌ه‌د

به دست می‌دهد.

مثال

$$\begin{aligned}(a+bi)^{-1} &= \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{\overline{a+bi}}{\overline{a+bi}} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.\end{aligned}$$

پرسش‌ها

- ۱- آیا در شکل ۲، اگر z_2 هم جهت و یا در جهت مخالف با z_1 باشد، باز هم متوازی - الاضلاع خواهیم داشت؟
- ۲- آیا به روش هندسی می‌توان با داشتن z_1 و z_2 ، مجذور $z_1 + z_2$ را ترسیم نمود؟
- ۳- چرا ضرب اعداد مختلط را مانند ضرب در بردارها تعریف نمی‌کنیم؟
- ۴- چه وقت نامساوی مثلث به تساوی تبدیل می‌گردد؟
- ۵- تعبیر هندسی نامساوی مثلث در مورد حاصل جمع n عدد مختلط چیست؟
- ۶- روابط جالبی را که میان (x, y) و $(-x, y)$ به نظرتان می‌رسد برشمرید.
- ۷- اگر a و b اعداد گویای مثبت باشند، چرا اعداد $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ و $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ را مزدوج حقیقی می‌خوانند؟

تمرین‌ها

- ۱- اگر $z_1 = 3 - 4i$ و $z_2 = -2 + 3i$ ، به روشهای نموداری و تحلیلی مقادیر زیر را محاسبه کنید:

الف - $2z_1 + 4z_2$	ب - $3z_1 - 2\overline{z_2}$
پ - $z_1 - \overline{z_2} - 4$	ت - $ z_1 + z_2 $
ث - $ z_1 - z_2 $	ج - $ \overline{2z_1} + 3\overline{z_2} - 1 $
- ۲- مکان هندسی نقاطی از صفحه مختلط را بیابید که در روابط زیر صدق می‌کنند.

الف - $1 < z \leq 3$	ب - $\left \frac{z-3}{z+3} \right < 2$
ب - $ z-1 + z+1 = 2$	ت - $\operatorname{Re}(z-5) = z + 5$
ث - $\operatorname{Re} z^2 > 0$	ج - $\operatorname{Im} z^2 > 0$
- ۳- فرض کنیم $M = |(z-a)/(z-b)|$ که در آن a و b ثابت‌های مختلط بوده و

۱۰. $M > 0$ این خم را توصیف کنید و توضیح دهید که بهنگام $M \rightarrow 0$ و بهنگام $M \rightarrow \infty$ چه اتفاق می افتد.

۴- نشان دهید که $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2$. یک همانندی برای $|z_1 - z_2|$ بیابید.

۵- اگر $|z_1| < 1$ و $|z_2| < 1$ ، نشان دهید $|(z_1 - z_2)/(1 - \bar{z}_1 z_2)| < 1$. در حالت $|z_1| = 1$ چه می شود؟

۶- اگر $|z| < 1$ نشان دهید.

$$\text{الف - } \operatorname{Re} \frac{1}{1-z} > \frac{1}{2} \quad \text{ب - } \operatorname{Re} \frac{z}{1-z} > -\frac{1}{2}$$

۷- اگر $P(z)$ یک معادله چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید که یک z_1 ریشه معادله است اگر تنها اگر \bar{z}_1 یک ریشه معادله باشد. از این مطلب نتیجه بگیرید که هر معادله چند جمله‌ای با درجه فرد و با ضرایب حقیقی باید حداقل یک ریشه حقیقی داشته باشد. آیا با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌توانید این مطلب را ثابت کنید؟

۸- ثابت کنید که برای هر $n \geq 1$

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

۹- فرض کنیم a_1, a_2, \dots, a_n و b_1, b_2, \dots, b_n اعداد مختلط باشند نامساوی شوارتز را ثابت کنید.

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2 \right).$$

تساوی چه وقت برقرار می‌گردد؟

۱۰- برای α حقیقی گیریم: $e(\alpha) = \cos \alpha + i \sin \alpha$. نشان دهید که:

$$\text{الف - } e(0) = 1 \quad \text{ب - } |e(\alpha)| = 1$$

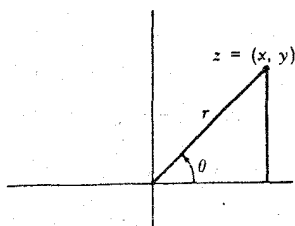
$$\text{پ - } e(\alpha_1 + \alpha_2) = e(\alpha_1)e(\alpha_2) \quad \text{ت - } e(n\alpha) = [e(\alpha)]^n$$

کدام یک از این خواص را تابع با مقدار حقیقی $f(x) = e^x$ داراست؟

۳-۱. نمایش قطبی

در بخش ۱-۲، بزرگی بردار $z = x + iz$ مورد بحث قرار گرفت. در مورد جهت آن چطور؟ اندازه‌ای از زاویه θ را که بردار z ($z \neq 0$) با محور حقیقی مثبت می‌سازد یک شناسه از z مینامند. (ر. ک. شکل ۵)

شکل ۵



بدین ترتیب نقطه $z = (x, y)$ را می‌توان به یک شکل "جدید" بیان کرد :
 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$. و این البته همان نمایش عدد مختلط z در مختصات قطبی است .
 روابط زیر بر ایماں آشنا هستند :

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}.$$

عینا " مانند x و y دو عدد حقیقی r و θ به طور منحصر بفرد عدد مختلط z را مشخص می‌کنند . متأسفانه وارون مطلب کاملاً " درست نیست . در حالیکه عدد مختلط z ، x و y ی منحصر بفرد و از اینرو r را منحصر می‌کند ، مقدار θ با اختلاف مضربی از 2π مشخص می‌گردد . برای هر عدد مختلط مفروض z به تعداد نامتناهی شناسه موجود است ، و نماد $\arg z$ برای نمایاندن هر کدام از اینها بکار می‌رود . پس شناسه‌های عدد (۲ و ۲) عبارتند از :

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

این اشکال را گاهی اوقات ، نه همیشه ، با مشخص کردن (به دلخواه) یک مقدار ویژه برای $\arg z$ می‌توان مرتفع کرد . نماد $\text{Arg } z$ را برای مقدار مشخص و منحصر بفردی از $-\pi < \arg z \leq \pi$ بکار می‌بریم . این θ به مقدار اصلی شناسه موسوم است . بدین ترتیب :

$$\text{Arg } (2, 2) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{Arg } (0, -5) = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{Arg } (-1, \sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}.$$

شایان ذکر است که $\text{Re } z > 0$ معادل است با $|\text{Arg } z| < \pi/2$ اگر $x = y = 0$ ، عبارت

$\tan \theta = y/x$ بی‌معنی است و اگر وقتی $z = 0$ باشد ، $\arg z$ تعریف نمی‌شود .

فرض کنیم نمایش قطبی z_1 و z_2 به صورت :

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{و} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

باشند . در این صورت :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

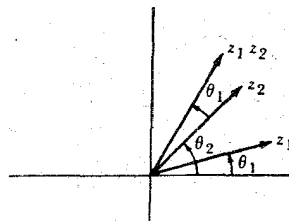
با بیانی غیردقیق می‌توان گفت: شناسه حاصلضرب دو عدد مختلط مخالف صفر برابرست با حاصلجمع شناسه‌های آنها؛ یعنی،

$$\arg (z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (۷)$$

از (۷) چنین مفهوم است که اگر θ_1 یکی از مقادیر $\arg z_1$ و θ_2 یکی از مقادیر $\arg z_2$ باشند، آنگاه $\theta_1 + \theta_2$ یکی از مقادیر $\arg (z_1 z_2)$ است. چونکه (۷) با اختلاف مضربی از 2π برقرار است، فرمول‌بندی صریح‌تری از آن این است که:

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi \quad (k \text{ یک عدد صحیح})$$

$$\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$



شکل ۶

(ر. ک. شکل ۶). برای مثال، ملاحظه می‌کنیم

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

و

$$\operatorname{Arg} \left(\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \right) = \operatorname{Arg} \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{2\pi}{3}.$$

پس

$$\begin{aligned} &\operatorname{Arg} \left\{ \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \right\} \\ &= \operatorname{Arg} \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) + \operatorname{Arg} \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right) - 2\pi. \end{aligned}$$

یک استدلال استقرایی (بدون دوجمله‌گویی) نشان می‌دهد که اگر z_i دارای کالبد

r_i و شناسه θ_i باشد، $(i = 1, 2, \dots, n)$ ، آنگاه.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 \cdots z_n &= r_1 r_2 \cdots r_n [\cos (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \\ &\quad + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]. \end{aligned} \quad (۸)$$

تذکر - بررسی‌های هندسی (شکل ۲ و ۶) دلالت بر این دارند که نمایش مستطیلی اغلب در مسائلی سودمندتراند که جمع اعداد مختلط مطرح باشد، در حالی که نمایش هندسی در مسائل مربوطه به ضرب اعداد مختلط سودمندتر است.

اگر در (۸) فرض کنیم $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ ، داریم:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta). \quad (9)$$

برای $|z| = 1$ (دایره واحد)، (۹) به رابطه زیر تبدیل می‌گردد.

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad (10)$$

که قضیه‌یی از دموآدر^۱ است.

رابطه (۹) محاسبه ریشه n ام یک عدد مختلط را ممکن می‌سازد. عدد مختلط z ریشه

$$n \text{ ام } z_0 \text{ است اگر چنانچه } z^n = z_0, \text{ می‌نویسیم } z = z_0^{1/n}.$$

مسئله از این قرار است که عمل ضرب را وارونه کنیم و عددی را مشخص کنیم که هر

گاه n بار در خودش ضرب گردد، عدد اصلی نتیجه گردد. اگر $z_0 = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0)$

یک عدد مختلط باشد، چگونه می‌توان عدد مختلط $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ را یافت بطوریکه

$$z^n = z_0 \text{ ؟ بموجب (۹) داریم:}$$

$$r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0). \quad (11)$$

چون که برای هر عدد حقیقی α ، $|\cos \alpha + i \sin \alpha| = 1$ ، از (۱۱) نتیجه می‌شود:

$$r^n = r_0,$$

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \cos \theta_0 + i \sin \theta_0. \quad (12)$$

اولسین رابطه (۱۲) نشان می‌دهد $|z| = r_0^{1/n}$ که قبلاً هم دانستیم (چرا؟) ولی

رابطه دومی اطلاعات مهمی در مورد شناسه z بدست می‌دهد، و آن این که، اختلاف

$\arg z$ با $n \arg z$ در مضربی از 2π است (یعنی $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$ ، $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \quad (13)$$

چند عدد درست k در (۱۳) به جوابهای متمایز منجر می‌گردد؟ داریم:

$$z = z_0^{1/n} = r_0^{1/n} \left\{ \cos \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} \right) \right\}. \quad (14)$$

برای هر $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ یک مقداری متفاوت برای z موجود است. به

خواننده واگذار می‌کنیم که نشان دهد جوابیهائی بیش از این موجود نیست. از اینرو برای

$z_0 \neq 0$ دقیقاً n عدد مختلط و متمایز z موجود است بطوریکه $z^n = z_0$

اگر در (۱۴)، $z_0 = 1$ قرار دهیم ریشه‌های n ام واحد بدست می‌آیند. اگر $z^n = 1$

آنگاه

$$z = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \quad (15)$$

با دید هندسی، جوابها معرف n راس یک n ضلعی منظم است که در دایره‌یی به مرکز مبدأ و شعاع یک محاط شده باشد، در شکل ۷ و ۸، مربع و پنج ضلعی منظم محاطی ملاحظه می‌شود.

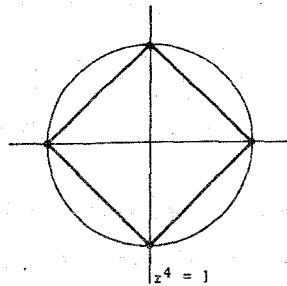
به موجب (۱۵) اختلاف شناسه‌های دو ریشه n ام متوالی واحد ثابت و برابر $(2\pi/n)$ است. اگر قرار دهیم:

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n},$$

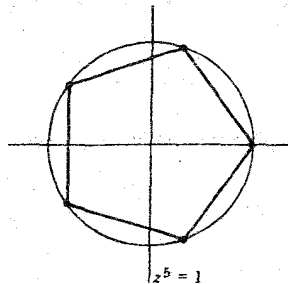
آنگاه هر ریشه را می‌توان بصورت توانی از ω بیان کرد. یعنی:

$$\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{n-1}, \omega^n = \omega^0 = 1.$$

شکل ۷



شکل ۸



از این مطلب اطلاعات جالبی در مورد حاصلجمع و حاصلضرب ریشه‌های واحد می‌توان کسب نمود و آن این است که، حاصلضرب هر دو ریشهء واحد خود یک ریشهء واحد است و حاصلجمع همه ریشه‌های n ام واحد برابر صفر است. استنباط اخیر از همانی زیر نتیجه می‌گردد:

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}.$$

پرسشها

- ۱- اگر $z = 0$ را برابر صفر تعریف کنیم چه اشکالی پیش می‌آید؟
- ۲- بدون دقت زیاد، در مورد اعداد مختلط z_1 و z_2 داریم
 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ ، کدام دسته از توابع با مقادیر حقیقی دارای خاصیت
 $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ اند؟
- ۳- چوقت $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$ ؟
- ۴- اگر عدد مختلط z از بالا و پائین به محور حقیقی منفی نزدیک شود، $\text{Arg } z$ چگونه تغییر می‌کند؟ درموردیکه z از بالا و پائین به محور حقیقی مثبت نزدیک شود چطور؟
- ۵- چگونه شناسه‌های z و $1/z$ مقایسه می‌شوند؟
- ۶- بعضی از اختلافات موجود در میان زاویه. عدد حقیقی و شناسه را برشمارید.
- ۷- قضیه دو جمله‌یی در این بخش چه مورد استفاده‌یی می‌توانست داشته باشد؟
- ۸- بازاء کدام اعداد صحیح n ، معادله $z^n = 1$ تنها دارای ریشه‌های حقیقی است؟
- ۹- کدام یک از اصول هیأت برای ریشه‌های واحد با عمل جمع و ضرب معمولی اعداد مختلط، برقرار است؟

- ۵-۱ در مورد ریشه‌های n ام یک عدد مختلط دلخواه چه می‌توان گفت؟
- ۱-۱ برای عدد حقیقی دلخواه α ، در مورد تعداد جوابهای $z^\alpha = 1$ چه فکر می‌کنید؟

تمرینها

- ۱- ناحیه‌های زیر را بطریق هندسی توصیف کنید.

الف - $\text{Arg } z = \pi/6$ $|z| > 1$ ب - $\pi/4 < \text{Arg } z < \pi/2$

پ - $-\pi < \text{Arg } z < 0$ $|z + i| > 2$

۲- اگر $|1 - z| < 1$ ، نشان دهید: $|\text{Arg } z| < \pi/2$

۳- اگر $|z| < 1$ نشان دهید:

$$\left| \text{Arg } \frac{1+z}{1-z} \right| < \frac{\pi}{2}.$$

- ۴- اگر $\text{Re } z > 0$ ، نشان دهید $\text{Re}(1/z) > 0$ اگر $\text{Re } z > a > 0$ ، در مورد $\text{Re}(1/z)$

چه می توان گفت ؟

۵- اگر $|z| = 1$ ، $z \neq -1$ ، نشان دهید، z را میتوان به صورت $z = \frac{1+it}{1-it}$ نوشت

که در آن $|t|$ عدد حقیقی است.

۶- همه مقادیر ریشه های زیر را بیابید.

الف) $i^{1/2}$ ب) $i^{1/4}$

پ) $(-i)^{1/3}$ ت) $\sqrt{1+i}$

ث) $\sqrt[6]{8}$ ج) $\sqrt{4+3i}$

چ) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i}}$

۷- همانی های $\sin 3\theta = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$ و $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$

را اثبات کنید.

۸- فرض کنیم $\omega \neq 1$ ، یک ریشه n ام واحد باشد، نشان دهید.

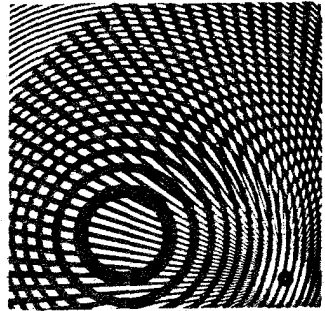
$$1 + 2\omega + 3\omega^2 + \dots + n\omega^{n-1} = -n/(1-\omega)$$

راهنمایی: از $f(\omega) = \sum_{k=1}^n \omega^k$ مشتق بگیرید.

۹- فرض کنیم: $z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$

نشان دهید، برای تمام مقادیر n ، داریم $\sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| < 2\pi$. اگر $n \rightarrow \infty$

میل کند چه اتفاق می افتد؟



۲. مقدمات توپولوژیکی و تحلیلی

اطرافیان یک طفل عبارتند از افراد خیلی نزدیک به او، از طرف چپ و راست. وقتیکه وی بزرگتر شود به همسایگی‌ها از دیدگاه دویبعدی می‌اندیشد (مردم شهر) و یا حتی به همسایگی‌های سه‌بعدی (مردم جهان). در این فصل هم، چنین می‌کنیم. برای توصیف دقیق مجموعه‌ها در خط حقیقی (یک‌بعدی) و در صفحه (دویبعدی)، روشهای متعددی را بررسی خواهیم کرد. برای اینکه نقطه خیالی واقع در بی‌نهایت را محسوس کنیم، لازم است به معرفی کره (سه‌بعدی) به پردازیم.

اگر یک مجموعه به روش اقناع‌کننده‌ای توصیف شود، متوجه نگار آن خواهیم شد. شرایطی را بررسی خواهیم کرد که در آن شرایط، خواص یک مجموعه در تبدیل به یک مجموعه جدید محفوظ بماند. یک محصول عالی بررسی‌های مان این خواهد بود که برداشتن یک نقطه تنها از یک مجموعه می‌تواند سرشت مجموعه را به کلی تغییر دهد در حالی که برداشتن تعدادی نامتناهی نقاط از مجموعه دیگری می‌تواند بی‌اهمیت باشد. اگر از مجموعه‌یی واقع بر خط حقیقی دو نقطه برداریم ممکن است که مجموعه جدید به مجموعه از صفحه بیش از مجموعه قدیمی خود به مجموعه‌یی از صفحه شبیه گردد. در این فصل می‌بینیم که، به یک معنی همه نقاط برابرند ولی بعضی نقاط از بقیه برابرترند!

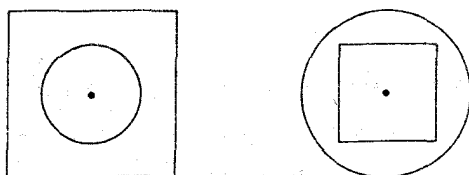
۲-۱. مجموعه‌های نقطه‌ئی در صفحه

یک همسایگی عدد حقیقی x_0 فاصله‌یی است به شکل $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ است، که ε هر عدد حقیقی و مثبت است. پس می‌توان گفت یک ε همسایگی x_0 مجموعه نقاط $x \in \mathbb{R}$ است که $|x - x_0| < \varepsilon$. به روشهای گوناگون می‌توان مفهوم این همسایگی یک‌بعدی را گسترش

داد که نقاط صفحه را نیز شامل گردد. یک ε همسایگی مربعی از نقطه (x_0, y_0) مجموعه همه نقاطی چون (x, y) است که در دونا مساوی زیر صدق کنند.

$$|x - x_0| < \varepsilon, \quad |y - y_0| < \varepsilon$$

این مجموعه عبارت است از همه نقاط درون یک مربع به مرکز (x_0, y_0) . اضلاع این مربع با محورهای مختصات موازی بوده و به طول 2ε می باشد. یک ε همسایگی مستدیر از (x_0, y_0) مجموعه همه نقاطی چون (x, y) است که دوری آنها تا (x_0, y_0) کمتر از ε باشد. این مجموعه عبارت است از همه نقاط $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon$ واقع در درون دایره‌یی به مرکز (x_0, y_0) و با شعاع ε . مشاهده می شود که هر همسایگی مربعی یک نقطه شامل یک همسایگی مستدیر آن نقطه است. و هر همسایگی مستدیر یک نقطه شامل یک همسایگی مربعی (البته، با ε ی کوچکتر) آن نقطه می باشد. این مطالب در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱

از نقطه نظر ما (که هر نقطه در صفحه معرف یک عدد مختلط است)، آسان تر این است با همسایگی های مستدیر کار کنیم، زیرا در این صورت هر ε همسایگی عدد مختلط z_0 عبارت است از همه نقاط $z \in C$ است که در نامساوی $|z - z_0| < \varepsilon$ صدق کنند. یک چنین همسایگی را با $N(z_0; \varepsilon)$ نمایش می دهیم.

باید توجه داشت که همسایگی بر خط حقیقی و همسایگی در صفحه متمایزاند. به عنوان مثال، $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$ یک همسایگی 0 ، بعنوان نقطه‌یی بر خط، است؛ در حالیکه یک همسایگی $(0, 0)$ ، به عنوان نقطه‌یی از صفحه، نیست. یک نقطه در صفحه نمی تواند یک همسایگی یک بعدی داشته باشد.

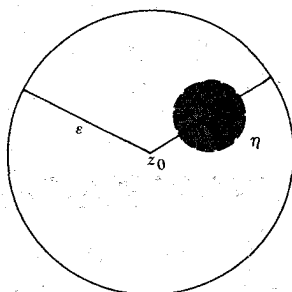
تعاریف و قضایای این بخش همزمان برای نقاط خط و نقاط صفحه برقرارند به شرطی که مفهوم ε همسایگی به درستی تعبیر گردد. یک مجموعه را کراندار گوئیم، اگر در یک همسایگی مبدأ مشمول باشد. نقطه‌یی را یک نقطه درونی از یک مجموعه نامیم که یک همسایگی این نقطه مشمول مجموعه باشد. یک اختلاف عمده میان مجموعه های کراندار A و B :

$$A = \{z \in C : |z - z_0| < \varepsilon\} \quad B = \{z \in C : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

این است که هر نقطه A یک نقطه درونی است. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم

z_1 نقطه‌یی در A باشد. در این صورت برای یک δ یا $\varepsilon < \delta \leq 0$ داریم $|z_1 - z_0| = \delta$.

ولی برای $\eta = (\varepsilon - \delta)/2$ ، داریم $N(z_1; \eta) \subset N(z_0; \delta)$ (ر. ک. شکل ۲). البته هیچ‌یک از نقاط روی دایره $|z - z_0| = \varepsilon$ یک نقطه درونی B نیست.



شکل ۲

مجموعه A را مجموعه باز گوئیم اگر هر نقطه A ، نقطه درونی آن باشد، نشان دادیم که همسایگی یک نقطه در صفحه یک مجموعه باز است. مثالهای دیگری از مجموعه‌های باز در صفحه عبارت‌اند از:

(۱) مجموعه تهی.

(۲) مجموعه همه اعداد مختلط،

(۳) $\{z : |z| > r\}$ ، $r \geq 0$

(۴) $\{z : r_1 < |z| < r_2\}$ ، $0 \leq r_1 < r_2$

(۵) اشتراک دو مجموعه باز

(۶) اجتماع هر گردآورده‌یی از مجموعه‌های باز.

تذکر — یک فاصله باز بر خط حقیقی، یک مجموعه باز در صفحه نیست، زیرا هر همسایگی یک نقطه حقیقی شامل نقاطی از صفحه است که حقیقی نیستند.

یک ε همسایگی سوده z_0 که آنرا $N'(z_0; \varepsilon)$ نمایش می‌دهیم، مجموعه همه نقاط z است که $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ ، یعنی، نقطه z_0 از مجموعه حذف شده است. نقطه z_0 را نقطه حدی مجموعه A می‌نامیم. هرگاه هر همسایگی سوده z_0 شامل یک نقطه از A باشد. باید توجه داشت که z_0 ممکن است متعلق به A باشد یا نباشد.

مثال ۱ — نقاط حدی مجموعه $|z| < 1$ عبارتند از $|z| \leq 1$ ، یعنی تمام نقاط آن مجموعه و همه نقاط دایره واحد $|z| = 1$.

مثال ۲ — مجموعه $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 1/n, \dots\}$ نقطه ۰ را به عنوان نقطه حدی دارد، (چه مجموعه را به عنوان زیر مجموعه‌ای از خط و یا زیر مجموعه‌ای از صفحه در نظر بگیریم) و ۰ در مجموعه نیست.

مثال ۳ — اگر A عبارت از مجموعه همه نقاطی باشد که هر دو مختص آنها گویا باشد، آنگاه هر نقطه در صفحه نقطه حدی A است.

مجموعه A را بسته نامیم چنانچه شامل همه نقاط حدیش باشد. اجتماع مجموعه A و نقاط جدی آن به بستار A موسوم است، و با \bar{A} نمایش داده می شود. مثالهایی از مجموعه های بسته به شرح زیراند:

- (۱) مجموعه تهی،
- (۲) مجموعه همه اعداد مختلط،
- (۳) $\{z: |z| \geq r\}$, $r \geq 0$,
- (۴) $\{z: r_1 \leq |z| \leq r_2\}$, $0 \leq r_1 < r_2$,
- (۵) اجتماع هر دو مجموعه بسته،
- (۶) اشتراک برگرد آورده یی از مجموعه های بسته.

قضیه ۱-۲. اگر z_0 نقطه جدی A باشد، آنگاه هر همسایگی z_0 شامل تعداد نامتناهی از نقاط A است.

اثبات — فرض کنیم که یک همسایگی های سوده z_0 تنها شامل تعدادی متناهی از نقاط A باشد. فرض کنیم این نقاط z_1, z_2, \dots, z_n باشند و گیریم $\epsilon = \min_{i=1,2,\dots,n} |z_0 - z_i|$ در این صورت $N(z_0; \epsilon)$ شامل هیچ نقطه A نبوده و z_0 نمی تواند نقطه جدی A باشد. فرع — هر مجموعه متناهی بسته است.

اثبات — این مجموعه شامل تمام نقاط حدیش — در واقع "هیچ" نقطه جدی ندارد — می باشد.

در مورد مجموعه $|z| \leq 1$ می خواهیم نقاط درونی را از نقاط روی دایره متمایز کنیم. نقطه z_0 به نقطه مرزی A موسوم است اگر هر همسایگی z_0 شامل نقاطی از A و شامل نقاطی که در A نیستند (متمم A) باشد. مجموعه همه نقاط مرزی به مرز A موسوم است.

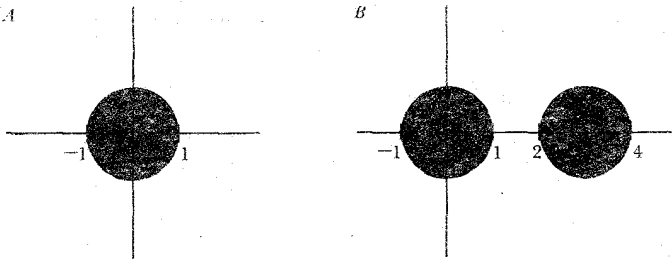
مثال — دایره $|z| = 1$ مرز مجموعه کراندار $|z| < 1$ و مجموعه بی کران $|z| > 1$ است. تذکر — نقاط مرزی "باز بودن" یا "بسته بودن" یک مجموعه را مشخص می کنند. یک مجموعه باز نمی تواند شامل هیچ یک از نقاط مرزی خودش باشد، در حالی که یک مجموعه بسته بایستی شامل تمام نقاط مرزی خود باشد. (چرا؟) دو مجموعه زیر هم متمایز هستند:

$$A = \{z: |z| < 1\} \quad \text{و} \quad B = \{z: |z| < 1\} \cup \{z: |z-3| < 1\}$$

مجموعه A "تماما یک تکه" است، در حالی که مجموعه B از دو تکه تشکیل شده است (ر.ک. شکل ۳). مجموعه S را همیند نامیم هر گاه نتوان دو مجموعه باز U و V یافت که:

$$U \cup V \supset S \quad (1) \quad \text{و} \quad U \cap S \neq \emptyset, \quad V \cap S \neq \emptyset \quad (2)$$

شکل ۲



بویژه، اگر یک مجموعه باز همبند را بتوان به صورت اجتماع در مجموعه باز U و V نوشت آنگاه $U = \emptyset$ و یا $V = \emptyset$. مجموعه A بالا همبند است و مجموعه B نیست. هر مجموعه باز همبند میدان نام دارد. یک ناحیه میدانی است به همراه بعضی، هیچیک، و یا همگی نقاط مرزی خودش. درک این تعریف "منفی" برای همبندی گاهی اوقات مشکل است. ولی وقتی که مجموعه همبند میدان باشد، خاصیت مفید زیر را داریم:

قضیه ۲-۲. هر دو نقطه یک میدان را می‌توان با یک خط چند ضلعی که تماما" در

میدان واقع باشد بهم وصل کرد.

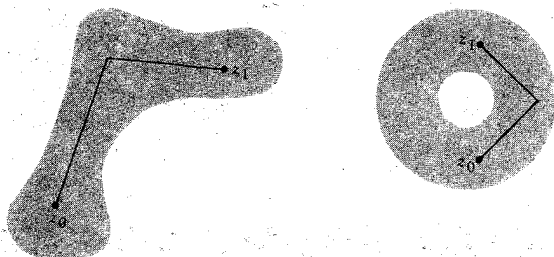
اثبات — نقطه z_0 را در میدان \mathcal{D} انتخاب می‌کنیم. کافی است نشان دهیم، هر نقطه در \mathcal{D} را می‌توان با یک خط چند ضلعی که تماما" در \mathcal{D} باشد به z_0 وصل کرد. فرض کنیم A آن دسته از نقاط \mathcal{D} باشد که آنها را میتوان بدین ترتیب به z_0 وصل کرد و B دسته تمامی نقاط دیگر باشد. توجه کنید $A \cup B = \mathcal{D}$ و $A \cap B = \emptyset$. می‌خواهیم نشان دهیم که B تهی است.

اگر z_1 در A باشد، آنگاه z_1 در \mathcal{D} است. چون \mathcal{D} باز است، $\varepsilon_1 > 0$ موجود است که $N(z_1; \varepsilon_1) \subset \mathcal{D}$ ولی همه نقاط $N(z_1; \varepsilon_1)$ را می‌توان با یک پاره خط مستقیم به z_1 وصل کرد. بنابراین، هر نقطه در $N(z_1; \varepsilon_1)$ باید در A باشد، و این بدان معنی است که A یک مجموعه باز است.

به طریق مشابه، اگر z_2 نقطه‌ای در B باشد، آنگاه $\varepsilon_2 > 0$ موجود است که $N(z_2; \varepsilon_2) \subset \mathcal{D}$. همه نقاط این همسایگی می‌بایست در B باشد زیرا، اگر $b \in N(z_2; \varepsilon_2)$ را می‌شد با یک چند ضلعی به z_0 وصل کرد، در آن صورت پاره خط مستقیم از z_2 به b را به این چند ضلعی موجود بین z_0 تا b وصل می‌کردیم تا یک چند ضلعی از z_0 تا z_2 بسازیم. از اینرو B یک مجموعه باز است. در نتیجه نه A و نه B نقاط مرزی نخواهند داشت. چونکه \mathcal{D} همبند است، یا A و یا B می‌بایست تهی باشد. ولی $z_0 \in A$ ، بنابراین B تهی است. این اثبات را کامل می‌کند.

باید توجه داشت در یک میدان ممکن است دو نقطه موجود باشند که بتوان آنها را

تنها با یک پاره خط مستقیم تنها بهم وصل کرد. این موضوع در شکل ۴ نمایش داده شده است.



شکل ۴

تذکر ۱- در قضیه ۲-۲. می‌توانستیم بخواهیم که چند ضلعی موازی محورهای مختصات باشد. تنها تصحیح لازم در اثبات، این است که ملاحظه کنیم هر نقطه در یک قرص را می‌توان با ترکیب دو پاره خط یکی موازی محور x و دیگری موازی محور y ، بمرکز وصل کرد.

تذکر ۲- وارن قضیه ۲-۲. هم درست است: اگر هر دو نقطه یک مجموعه باز را بتوان با یک چند ضلعی بهم وصل کرد، آنگاه مجموعه همبند است. اثبات را برای تمرینها می‌نهم.

تذکر ۳- در تمرینها، مثالی از یک مجموعه همبند آمده است که دو نقطه‌اش را نمی‌توان با یک چند ضلعی در این مجموعه بهم وصل کرد.
با تعریفهای بالا، روشی یافته‌ایم که توسط آن اکثر مجموعه‌ها را چه بر خط و چه بر صفحه سرشت‌نمایی می‌کنیم.

$$\text{مثال ۱- } \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\} - \{z_n = 1/n \ (n = 1, 2, 3, \dots)\}$$

این مجموعه باز نیست زیرا نقاط روی دایره واحد در آن است و بسته نیست زیرا نقاط حدی $z_n = 1/n \ (n = 1, 2, 3, \dots)$ در آن نیست. مجموعه کراندار است. همبند است و دارای مرزی است متشکل از دایره واحد، نقاط $z_n = 1/n$ ، و مبدأ.

$$\text{مثال ۲- } \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \cup \operatorname{Re} z < -2\}$$

این مجموعه باز است. بسته نیست، کراندار نیست، و همبند نیست. مرز آن عبارت است از همه نقاط واقع بر خطوط $\operatorname{Re} z = 0$ و $\operatorname{Re} z = -2$.

$$\text{مثال ۳- } \{z \in \mathbb{C} : -\pi/4 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi/4\}$$

این مجموعه همبند و بسته است، باز نیست و کراندار نیز نیست. مرز آن عبارت از مبدأ است به همراه دو پرتو $\operatorname{Arg} z = \pi/4$ و $\operatorname{Arg} z = -\pi/4$.

پرسش‌ها

۱- چه تعاریف دیگری را برای "کراندار" می‌توانستیم مطرح کنیم؟

- ۲- در مورد اجتماع و اشتراک مجموعه‌های باز بسته چه می‌توان گفت؟
- ۳- در مورد متمم مجموعه‌های باز و بسته چه می‌توان گفت؟
- ۴- چه مجموعه‌هایی هم در صفحه و هم در خط باز (بسته) هستند؟
- ۵- چه مجموعه‌هایی هم بازاند و هم بسته؟
- ۶- آیا می‌شود مجموعه‌یی به تعداد نامتناهی نقطه داشته باشد و در عین حال نقطه حدی نداشته باشد؟
- ۷- چه ارتباطی میان نقاط مرزی و نقاط حدی موجود است؟
- ۸- بستار اشتراک دو مجموعه با اشتراک بستار این دو مجموعه چگونه مقایسه می‌شود؟
- ۹- در مورد اشتراک اجتماع مجموعه‌های همبند چه می‌توان گفت؟
- ۱۰- در مورد مجموعه‌یی که هر جفت نقاط آن را می‌توان با یک پاره خط مستقیم واقع در آن مجموعه به هم وصل کرد چه می‌شود گفت؟
- ۱۱- چگونه مجموعه توصیف شده در پرسش قبلی را با مجموعه‌یی که در آن یک نقطه از مجموعه را می‌توان با یک پاره خط مستقیم در مجموعه به هر نقطه دیگری از مجموعه وصل کرد، مقایسه می‌کنید؟

تمرینها

- ۱- ثابت کنید هر همسایگی از یک نقطه واقع بر خط حقیقی (یک فاصله باز) یک مجموعه باز در R است.
- ۲- نشان دهید مجموعه A از اعداد مختلط کراندار است اگر و تنها اگر باز $z_0 \in C$ مفروض، عدد حقیقی M موجود باشد بطوری که برای هر $z \in A$ داشته باشیم $z \in N(z_0; M)$. آیا M را می‌توان مستقل از z_0 انتخاب کرد؟
- ۳- نشان دهید یک مجموعه از اعداد مختلط کراندار است اگر و تنها اگر مجموعه‌های قسمت حقیقی و قسمت انکاری آن کراندار باشند.
- ۴- مجموعه‌های زیر را توصیف نمائید.
 - (الف) $\{z \in C : 1 < |z| < 2, z \in R\}$ (به استثنای نقاطی که $z \in R$)
 - (ب) $\{z \in C : z = (x, y), \text{ گویا } x, y\}$
 - (پ) $\{x \in R : x \text{ اصم}\}$
 - (ت) $\{x \in R : x \text{ عدد صحیح}\}$
 - (ث) $\{n \text{ هر عدد صحیح مثبت} : \bigcup_{n=1}^{\infty} [1/n, n]\}$
- ۵- ثابت کنید که اجتماع یک گردآورده دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است و اشتراک

هر تعداد متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.

۶- نشان دهید یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر متمم آن بسته باشد.

۷- نشان دهید اشتراک یک گردآورده دلخواه از مجموعه‌های بسته، بسته است و

اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

۸- نشان دهید، نقاط حدی یک مجموعه، تشکیل یک مجموعه بسته می‌دهد.

۹- نشان دهید A ، بستار A ، کوچکترین مجموعه بسته‌یی است که شامل A باشد.

۱۰- نشان دهید، یک مجموعه همبند است اگر هر دو نقطه‌اش را بتوان با یک خط

چند ضلعی بهم وصل کرد.

۱۱- فرض کنیم $A = \{(x, y) : y = \sin(1/x), x \neq 0\}$ و $B = \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$

نشان دهید $A \cup B$ همبند است ولی هیچ نقطه A را نمی‌توان با یک چند ضلعی که در $A \cup B$

باشد به یک نقطه B به هم وصل کرد.

۱۲- نشان دهید، اگر A همبند باشد، آنگاه A همبند است، آیا وارون آن درست

است؟

۱۳- نشان دهید، اجتماع دو میدان، یک میدان است اگر و تنها اگر حداقل یک

نقطه مشترک داشته باشند.

۲-۲. دنباله‌ها

یک دنباله $\{z_n\}$ از اعداد مختلط بدین ترتیب تشکیل می‌شود که به هر عدد صحیح

مثبت n ، عدد مختلط z_n منسوب گردد. نقطه z_n به جمله n ام دنباله موسوم است.

بایستی در متمایز نمودن جملات یک دنباله و مجموعه‌یی که اعضای آن جملات دنباله

هستند دقت کافی مبذول داشت. به عنوان مثال تعداد جملات دنباله $\{2, 2, 2, \dots\}$

نامتناهی است (در واقع همه دنباله‌ها این چنین اند) در حالی که مجموعه $\{2, 2, 2, \dots\}$

تنها شامل یک عنصر است. عموماً، وقتی خواص دنباله‌ای را از دیدگاه نظریه مجموعه‌ها

بررسی کنیم، منظورمان مجموعه‌ای منسوب به جملات دنباله است.

گوئیم دنباله $\{z_n\}$ دارای حد z_0 است (به z_0 می‌گراید)، و می‌نویسیم

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک عدد صحیح N (وابسته به ε) موجود باشد بطوری

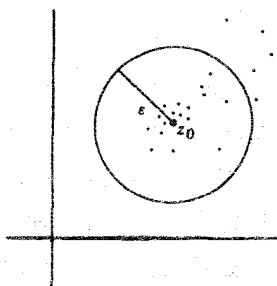
که هر وقت $N < n$ نگاه $|z_n - z_0| < \varepsilon$ از نظر هندسی این بدان معنی است که هر همسایگی

z_0 شامل همه جملات دنباله باشد به استثنای تعدادی متناهی از آنها (ر. ک. شکل ۵)

به عنوان مثال، دنباله $\{1/n\}$ به ۰ می‌گراید. ولی دنباله $\{(-1)^n\}$ که بین ۱ و -۱

در نوسان است همگرا نیست.

شکل ۵



ارتباطی زیبا میان همگرایی هر دنباله از اعداد مختلط با همگرایی قسمت‌های حقیقی و انگریش موجود است.

قضیه ۲-۳. فرض کنیم $z_n = x_n + iy_n$ دنباله‌ی از اعداد مختلط باشد. آنگاه $\{z_n\}$ به عدد مختلط $z_0 = x_0 + iy_0$ می‌گراید اگر و تنها اگر $\{x_n\}$ به x_0 و $\{y_n\}$ به y_0 بگراید.

اثبات - فرض کنیم $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. در این صورت برای $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیح N موجود است که $n > N$ موجب گردد.

$$|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1)$$

از (۱) حاصل می‌گردد

$$|z_n - z_0| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| \\ \leq |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

و $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید. برعکس اگر فرض شود $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ نامساویهای

$$|x_n - x_0| \leq |z_n - z_0|, \quad |y_n - y_0| \leq |z_n - z_0|$$

نشان می‌دهند، $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ به ترتیب به x_0 و y_0 می‌گرایند.

اساساً "قضیه ۲-۳" بیان آن است که خواص زیادی از دنباله‌های مختلط را می‌توان از خواص نظیرشان در دنباله‌های حقیقی استنتاج نمود. به عنوان مثال، منحصر بفرد بودن حد یک دنباله مختلط را می‌توان یا مستقیماً اثبات کرد و یا اینکه با استفاده از خاصیت یکتایی حد در دنباله‌های حقیقی اثبات نمود.

چون هر دنباله همگرا کاملاً "در حول حدش متمرکز می‌گردد"، قضیه بعدی چندان اعجاب‌انگیز نیست.

قضیه ۲-۴. هر دنباله همگرا کراندار است.

اثبات - اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ آنگاه N ی وجود دارد که برای $n > N$ داشته باشیم

$$z_n \in N(z_0, 1) \quad \text{که } |z_n| < M + |z_0| + 1$$

$$M = \max \{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_N|\}$$

وارون قضیه ۲-۴ درست نیست. دنباله $\{1, 2, 1, 2, \dots\}$ کراندار است ولی همگرا نیست، با اینکه جملات فرد و جملات زوج آن دنباله‌هایی همگرا هستند.

یک زیر دنباله از دنباله $\{z_n\}$ ، دنباله‌یی چون $\{z_{n_k}\}$ است که جملات آن از میان جملات دنباله اصلی برگزیده شده و به همان ترتیب مرتب شده باشند. در مورد دنباله $z_n = (-1)^n$ ، زیر دنباله $z_{n_k} = z_{2k}$ ، $k = 1, 2, 3, \dots$ ، به ۱ می‌گراید و زیر دنباله $z_{n_l} = z_{2l-1}$ ، $l = 1, 2, 3, \dots$ ، به -۱ می‌گراید. قضیه بعدی نشان می‌دهد، یک زیر دنباله لااقل به "خوش رفتاری" دنباله اصلی‌اش می‌باشد.

قضیه ۲-۵. اگر دنباله $\{z_n\}$ به z_0 بگراید، آنگاه هر زیر دنباله $\{z_{n_k}\}$ از آن

هم z_0 می‌گراید.

اثبات - با فرض $\varepsilon > 0$ ، N ی وجود دارد که برای $n > N$ داریم، $z_n \in N(z_0; \varepsilon)$ پس برای $n_k > N$ داریم $z_{n_k} \in N(z_0; \varepsilon)$. چون $n_k \geq n$ (چرا؟)، حداکثر N جمله از زیر دنباله یافت میشود که $|z_{n_k} - z_0| \geq \varepsilon$.

می‌دانیم که همه مجموعه‌ها کراندار نیستند. ولی، اگر مجموعه‌یی از اعداد حقیقی کراندار باشد، دارای یک "کوچکترین" کران است. عدد حقیقی M را کوچکترین کران بالا (lub)ی مجموعه A از اعداد حقیقی نامند اگر:

(۱) برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leq M$

(۲) برای هر $\varepsilon > 0$ ، یک $y \in A$ موجود باشد که $y > M - \varepsilon$

به طریقی مشابه، عدد حقیقی m را بزرگترین کران پایین (glb) مجموعه A گویند

اگر:

(۱) برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \geq m$

(۲) برای هر $\varepsilon > 0$ یک $y \in A$ موجود باشد که $y < m + \varepsilon$

خاصیت ددکیند^۱ مبین آن است که هر مجموعه کراندار و غیرتهی از اعداد حقیقی

دارای یک کوچکترین کران بالا و یک بزرگترین کران پایین است، برای اثبات این مطلب به کتاب رودین (۱، صفحه ۱۱) مراجعه کنید.^۲

چنانکه دیدیم وارون قضیه ۲-۴ (حتی برای دنباله‌های حقیقی) درست نیست.

دنباله‌های کراندار نوسانی لزوماً "همگرا نیستند". با وجود بر این با حذف نوسان، همگرایی بوجود خواهد آمد، دنباله حقیقی $\{x_n\}$ را بطور صعودی (نزولی) یکنوا گویند اگر برای هر n ، $x_{n+1} \geq x_n$ (یا $x_{n+1} \leq x_n$)، دنباله را یکنوا گوئیم، چنانچه یا صعودی یا نزولی یکنوا باشد.

قضیه ۲-۶. هر دنباله کراندار و یکنوا از اعداد حقیقی همگراست.

اثبات - فرض کنیم دنباله کراندار $\{x_n\}$ بطور صعودی یکنوا باشد؛ بموجب خاصیت ددکیند مجموعه $\{x_n\}$ ، دارای یک کوچکترین کران بالا است. که آنرا x می‌نامیم. بنابه تعریف lub، باز $\varepsilon > 0$ عدد صحیح N موجود است که $x_N > x - \varepsilon$. از آنجا که $\{x_n\}$ بطور صعودی یکنواست، برای $n > N$ داریم $x - \varepsilon < x_n \leq x$. بنابراین برای $n > N$ داریم، $|x_n - x| < \varepsilon$ و $\{x_n\}$ به کوچکترین حد بالایش می‌گراید. اثبات در حالتی که دنباله نزولی یکنوا باشد مشابه است فقط باید عوض کوچکترین کران بالا، بزرگترین کران پائین مورد استفاده قرار داد.

مثالهایی که از دنباله‌های کراندار دیدیم همگرا نبودند، ولی دارای زیر دنباله‌های همگرا بودند. برای این که نشان دهیم این مطلب عمومیت دارد به لم زیر نیازمندیم:

لم - هر دنباله از اعداد حقیقی شامل یک زیر دنباله یکنوا است

اثبات - فرض کنیم، دنباله حقیقی $\{x_n\}$ دارای این خاصیت باشد که به تعداد نامتناهی n موجود باشد که برای هر $k \geq n$ ، $x_k \leq x_n$. اگر n_1 اولین n با این خاصیت n_2 دومین والخ، در این صورت $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots$ زیر دنباله‌ای نزولی و یکنوا از $\{x_n\}$ است.

از سوی دیگر، چنانچه تعداد نامتناهی n با این خاصیت موجود باشد که برای هر $k \geq n$ ، $x_k \leq x_n$ ، آنگاه، عدد صحیح m_1 را طوری انتخاب می‌کنیم که هیچ جمله دنباله $x_{m_1}, x_{m_1+1}, x_{m_1+2}, \dots$ دارای این خاصیت نباشد. فرض کنیم m_2 اولین عدد صحیح بزرگتر از m_1 با $x_{m_2} > x_{m_1}$ باشد. با ادامه این روند، دنباله‌ای مانند $x_{m_1}, x_{m_2}, x_{m_3}, \dots$ حاصل می‌گردد که زیر دنباله‌ای بطور صعودی یکنوا $\{x_n\}$ است. و بدین ترتیب اثبات کامل است.

قضیه ۲-۷. هر دنباله کراندار از اعداد مختلط شامل یک زیر دنباله همگراست.

اثبات - فرض کنیم $z_n = x_n + iy_n$ با $|z_n| \leq M$ ، در این صورت $|y_n| \leq M$ و $|x_n| \leq M$ بموجب لم فوق، $\{x_n\}$ شامل زیر دنباله یکنوا $\{x_{n_k}\}$ است و بموجب قضیه ۲-۶، $\{x_{n_k}\}$ همگراست.

اکنون زیر دنباله متناظر $\{y_{n_k}\}$ از $\{y_n\}$ را در نظر می‌گیریم. این زیر دنباله ممکن است همگرا نباشد، ولی آن بموجب لم فوق و قضیه ۲-۶ - شامل زیر دنباله همگرایی چون $\{y_{n_{k(l)}}\}$ است. و بنابه قضیه ۲-۵ $\{x_{n_{k(l)}}\}$ نیز همگراست. با بکاربردن قضیه ۲-۳، دنباله

$$z_{n_{k(l)}} = x_{n_{k(l)}} + iy_{n_{k(l)}}$$

یک زیر دنباله همگرا از $\{z_n\}$ است و این اثبات را کامل میکند.

ارتباط میان حدیک دنباله، نقاط حدی یک دنباله و lub و glb یک دنباله چیست؟ در دستگاه اعداد مختلط، lub و glb بی معنی هستند، گو اینکه (همانطور که هم اکنون دیدیم) از این مفاهیم مربوطه به اعداد حقیقی میتوان برای اثبات قضایایی، در مورد اعداد مختلط استفاده نمود. در مورد دنباله $\{n/(n+1)\}$ عبارت از lub است و حد و نقطه حدی یکنای آنست. اگر یک دنباله همگرا تنها دارای تعداد متناهی عضو باشد، نقطه حدی نخواهد داشت؛ با این حال در این زمینه قضیه زیر برقرار است:

قضیه ۸-۲. نقطه z_0 نقطه حدی یک مجموعه A است اگر و تنها اگر یک دنباله

نقاط متمایز در A موجود باشد که به z_0 بگراید.

اثبات - اگر دنباله $\{z_n\}$ از نقاط متمایز در A به z_0 بگراید، آنگاه هر همسایگی z_0 شامل همه نقاط $\{z_n\}$ است، مگر تعدادی متناهی از آنها (و بنابراین شامل تعداد نامتناهی خواهد بود). پس z_0 می بایست نقطه حدی A باشد.

جهت اثبات وارون، گیریم z_0 نقطه حدی A باشد. برای هر عدد صحیح n ، نقطه z_n را در $A \cap N(z_0; 1/n)$ اختیار می کنیم. چون هر همسایگی A شامل تعداد نامتناهی نقاط متمایز است، می توان نقاط دنباله $\{z_n\}$ را متمایز فرض نمود.

با فرض $0 < \varepsilon < 1/N$ را طوری انتخاب می کنیم که $1/N < \varepsilon$. در این صورت برای $n > N$ داریم، $z_n \in N(z_0; \varepsilon)$ و دنباله $\{z_n\}$ به z_0 می گراید.

از ترکیب دو قضیه قبل حاصل می شود.

قضیه ۹-۲ (بولتسانو - وایرشراس^{۱)}) - هر مجموعه کراندار نامتناهی در صفحه یک

نقطه حدی دارد.

اثبات - یک دنباله از نقاط متمایز در مجموعه اختیار می کنیم. بموجب قضیه ۸-۲، این دنباله شامل یک زیر دنباله همگراست؛ و بموجب قضیه ۸-۲ حد این زیر دنباله همگرا نقطه حدی مجموعه است و اثبات تمام است.

دنباله $\{z_n\}$ از اعداد مختلط را دنباله کوشی نامیم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح N (وابسته به ε) موجود باشد بطوری که:

$$\text{اگر } m, n > N \text{ آنگاه } |z_m - z_n| < \varepsilon$$

چه اختلافی میان دنباله کوشی و دنباله همگرا موجود است؟ از نظر هندسی، برای یک دنباله همگرا همه نقاط آن به استثنای تعدادی متناهی نزدیک به یک نقطه ثابت (حد دنباله) اند، در حالی که در مورد دنباله کوشی همه نقاط به استثنای تعدادی متناهی، نزدیک به همدیگر اند. هم اکنون نشان می دهیم، در مورد دنباله های مختلط، این دو

مفهوم هم‌ارزد.

قضیه ۲-۱۰. دنباله $\{z_n\}$ همگراست اگر و تنها اگر $\{z_n\}$ یک دنباله‌کوشی باشد.

اثبات - فرض کنیم $\{z_n\}$ به z_0 بگراید. از نامساوی مثلث داریم:

$$|z_m - z_n| = |z_m - z_0 + z_0 - z_n| \leq |z_m - z_0| + |z_n - z_0|. \quad (2)$$

اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، هر دو جمله طرف راست (۲) را می‌توان برای $m, n > N$ از $\varepsilon/2$ کمتر کرد. بنابراین $\{z_n\}$ یک دنباله‌کوشی است.

برعکس فرض کنیم $\{z_n\}$ یک دنباله‌کوشی باشد. در این صورت برای $n > N$ داریم $|z_n - z_0| < 1$ بنابراین برای $n > N$ ، $|z_n| < |z_0| + 1$. از این رو $\{z_n\}$ یک دنباله کراندار است. بموجب قضیه ۲-۷، $\{z_n\}$ شامل یک زیر دنباله $\{z_{n_k}\}$ است که به نقطه‌یی (مثلاً z_0) می‌گراید.

نشان می‌دهیم، $\{z_n\}$ نیز به z_0 می‌گراید. با استفاده از نامساوی مثلث، داریم:

$$|z_n - z_0| = |z_n - z_{n_k} + z_{n_k} - z_0| \leq |z_n - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0|. \quad (3)$$

برای $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح N موجود است به طوری که برای $n > N$

$$\begin{aligned} |z_n - z_{n_k}| &< \frac{\varepsilon}{2} && \text{(زیرا } \{z_n\} \text{ کوشی است)} \\ |z_{n_k} - z_0| &< \frac{\varepsilon}{2} && \text{(زیرا } \{z_{n_k}\} \text{ همگرا است)} \end{aligned} \quad (4)$$

با ترکیب (۳) و (۴) ملاحظه می‌شود، برای $n > N$ ، $|z_n - z_0| < \varepsilon$. بنابراین $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید و اثبات کامل است.

قضیه ۲-۱۰ یک روش عمومی را برای مشخص نمودن همگرایی یک دنباله از اعداد مختلط بدست می‌دهد، گرچه ممکن است که حد آن را از قبل ندانیم. دستگاهی وجود دارد که در آن همه دنباله‌های کوشی همگرا نباشند. به عنوان مثال در هيات اعداد گویا دنباله‌کوشی $1, 1.4, 1.41, 1.414, \dots$ همگرا نیست ($\sqrt{2}$ گویا نیست). دستگاهی را که در آن هر دنباله‌کوشی همگرا باشد کامل نامند.

در [۲] ثابت شده است. دستگاه اعداد حقیقی تنها هيات مرتب و کامل است.

پرسش‌ها

- ۱- فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌های حقیقی باشند. اگر $\{(x_n + y_n)\}$ همگرا باشد، آیا این بدان معنی است $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرایند؟ چگونه این پرسش را با قضیه ۳-۲ مقایسه می‌کنید؟

- ۲- برای یک دنباله چند زیر دنباله موجود است؟
- ۳- آیا دنباله‌های بی‌کران می‌توانند نقطه حدی داشته باشند؟ دنباله‌های بی‌کران یکنوا چطور؟
- ۴- چه وقت کوچکترین کران بالای یک مجموعه، عنصری از آن مجموعه است؟
- ۵- آیا یک دنباله حقیقی می‌تواند به مقداری بجز glb یا lub از آن دنباله بگراید؟
- ۶- آیا یک دنباله می‌تواند به تعداد نامتناهی نقطه حدی داشته باشد؟
- ۷- آیا می‌توانید دنباله‌ی حدس بزنید که همگرا باشد بدون آنکه حدش را بدانید؟
- ۸- چگونه می‌توان قضیه ۲-۸ را بدون استفاده از قضیه ۲-۱ اثبات کرد؟
- ۹- در مورد دنباله $b_n = \text{glb}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$ که در آن $\{a_n\}$ یک دنباله حقیقی است چه می‌توان گفت؟ اگر $\{a_n\}$ کراندار باشد چطور؟

تمرینها

- ۱- فرض کنیم $\{z_n\}$ به z_0 و $\{w_n\}$ به w_0 بگراید، نشان دهید:
- الف $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = z_0 + w_0$ ب $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = z_0 w_0$
- ۲- نشان دهید، اگر دنباله‌ی بیش از یک نقطه حدی داشته باشد همگرا نخواهد بود.
- ۳- اگر $\{z_n\}$ همگرا باشد نشان دهید، $\{|z_n|\}$ همگراست، آیا وارون آن درست است؟
- ۴- کدام یک از دنباله‌های زیر همگراست؟
- الف $\{i^n\}$ ب $\left\{ \frac{\cos n + i \sin n}{n} \right\}$ ت $\left\{ \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}{n} \right\}$ پ $\{z_0^n, \text{ where } |z_0| < 1\}$
- ۵- اگر $\{z_n\}$ به ۰ بگراید، ثابت کنید $\{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)/n\}$ به ۰ می‌گراید. سپس نشان دهید، همگرایی $\{z_n\}$ به z_0 موجب می‌شود $\{(z_1 + z_2 + \dots + z_n)/n\}$ به z_0 بگراید.
- ۶- دنباله‌ی مثال بزنید.
- الف - همگرا نباشد ولی دقیقاً "یک نقطه حدی داشته باشد".
- ب - برای هر عدد صحیح n ، دارای n نقطه حدی باشد.
- پ - به تعداد نامتناهی نقاط حدی داشته باشد.
- ۷- ثابت کنید حدهای زیر دنباله‌ی (حدهای همه زیر دنباله‌های ممکن) از دنباله

$\{z_n\}$ یک مجموعه بسته تشکیل می دهد.

۸- فرض کنیم $\{z_n\}$ دنباله‌ای با خاصیت زیر باشد: بازاء $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح N موجود است که برای $n > N$ داریم $|z_{n+1} - z_n| < \varepsilon$. مثالی بزنید که نشان دهد $\{z_n\}$ لزوماً یک دنباله‌کوشی نیست.

۹- فرض کنیم $s_n = \sum_{k=1}^n k!$ با استفاده از معیار کوشی نشان دهید، $\{s_n\}$

همگراست.

۳-۲. فشردگی

اجتماع فواصل باز $(n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$ برای $n = 1, 2, 3, \dots$ شامل مجموعه اعداد صحیح مثبت است. هر فاصله به نوبه خود مهم است، از این نظر که با برداشتن یکی از این فواصل یک عدد صحیح مثبت بی پوشش می ماند. برای مجموعه کراندار $S = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ اجتماع فواصل باز $(1/n, 1)$ برای $n = 2, 3, 4, \dots$ شامل S است. در حالی که برداشتن هر یک از این فواصل مانع پوشاندن S توسط فواصل باقی مانده نمی شود. مجموعه S درون اجتماع هیچ گردآورده متناهی از این فواصل نیست.

مجموعه‌ی را شمارش پذیر گویند که بتوان عناصر آن را با یک زیر مجموعه اعداد صحیح به طوریکه به یک متناظر کرد. گردآورده $\{O_\alpha\}$ از مجموعه‌های باز را پوشش بازی برای S گویند، هرگاه داشته باشیم $S \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$. باید توجه داشت، گردآورده $\{O_\alpha\}$ ممکن است شامل تعداد غیرشماره پذیری از مجموعه‌ها باشد. مجموعه S را فشرده نامند اگر هر پوشش باز آن شامل یک زیرپوشش متناهی باشد.

دیدیم مجموعه اعداد صحیح و فاصله باز $(0, 1)$ هیچکدام فشرده نیستند. ولی، هر مجموعه متناهی فشرده است زیرا هر پوشش باز آن یک زیر پوشش متناهی به ترتیب زیر دارد:

متناظر با هر نقطه یکی از مجموعه باز شامل نقطه را انتخاب می نمایم.

به کار بردن تعریف فشردگی همیشه آسان نیست. می خواهیم برای مشخص نمودن فشردگی با روشی، از نظر هندسی ملموس تر کار کنیم. بدین منظور به لم زیر نیازمندیم:

لم ۱- فرض کنیم $\{I_n\}$ دنباله‌ای از فواصل کراندار بسته واقع بر خط حقیقی باشد.

اگر برای هر n ، داشته باشیم $I_{n+1} \subset I_n$ و درازای I_n وقتی $n \rightarrow \infty$ به ۰ نزدیک شود آنگاه دقیقاً یک نقطه است که در همه I_n ها مشترک است.

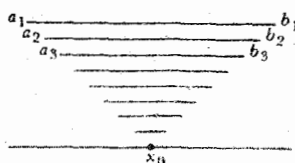
اثبات - فرض کنیم $I_n = \{x : a_n \leq x \leq b_n\}$ به موجب فرض

$$a_n \leq a_{n+1}, b_{n+1} \leq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0 \quad (۵)$$

دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو یکنوا و کراندار هستند (برای هر n داریم، $a_n, b_n \in [a_1, b_1]$)، به موجب قضیه ۲-۶ هر دو دنباله همگرا هستند؛ و بنابه (۵) بایست به یک نقطه مشترکی بگرانید که آنرا x_0 می‌نامیم. چون $x_0 = \text{lub } \{a_n\} = \text{glb } \{b_n\}$ برای هر n $x_0 \in [a_n, b_n]$

(ر. ک. شکل ۶). نقطه دیگری چون x_1 نمی‌تواند در همه I_n ها مشترک باشد. زیرا اگر x_1 (مخالف x_0) کوچکتر (بزرگتر) از x_0 باشد، آنگاه x_0 نمیتواند $(\text{glb } \{b_n\})$ باشد.



شکل ۶

باید توجه داشت در لم ۱ اگر فواصل بسته به فواصل باز تبدیل شوند دیگر لم درست نخواهد بود. گردآورده فواصل $\{(0, 1/n)\}$ در شرایط مذکور صادقند. در حالی که

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (0, 1/n) = \emptyset$$

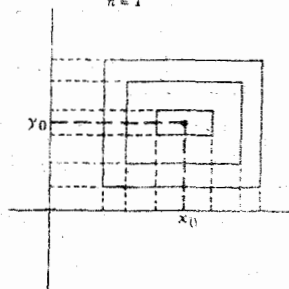
لم ۲- فرض کنیم $\{S_n\}$ دنباله‌یی از مستطیل‌های کراندار و بسته از صفحه باشد. اگر برای هر n داشته باشیم $S_{n+1} \subset S_n$ و درازای اضلاع S_n وقتی $n \rightarrow \infty$ به ۰ نزدیک شود آنگاه دقیقاً "یک نقطه در همه مستطیل‌ها مشترک است."

اثبات - فرض کنیم $\{I_n\}$ و $\{J_n\}$ به ترتیب افکنه‌های $\{S_n\}$ بر محورهای حقیقی و انگاری باشد. آنگاه I_n و J_n در شرایط لم ۱ صادقند. اگر

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{و} \quad \{y_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n$$

آنگاه برای $z_0 = (x_0, y_0)$ داریم: $\{z_0\} = \{(x_0, y_0)\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$

(ر. ک. شکل ۷)



شکل ۷

قضیه ۲-۱۱ (هاین - بورل^۱) - هر مجموعه کراندار و بسته فشرده است.

اثبات - فرض کنیم $\{O_\alpha\}$ یک پوشش باز برای مجموعه کراندار و بسته S باشد که دارای زیر پوشش متناهی نیست. چونکه S کراندار است در مربع بسته‌ای مانند S_0 با رئوس $z = \pm a \pm ai$ جای دارد. محورهای مختصات مربع S_0 را به چهار زیر مربع (مربع کوچکتر) بسته مساوی تقسیم می‌کند. حداقل یکی از این مربعها (آنها S_1 می‌نامیم) دارای این خاصیت است که $S \cap S_1$ را نمی‌توان با یک زیر خانواده متناهی از $\{O_\alpha\}$ پوشانید. (چرا؟) اینک S_1 را به چهار زیر مربع بسته مساوی دیگر تقسیم می‌کنیم (ر.ک. شکل ۸). این بار هم یکی از این مربعها، موسوم به S_2 دارای این خاصیت است که برایش زیر خانواده متناهی از $\{O_\alpha\}$ موجود نیست که $S \cap S_2$ را بپوشاند.

این فرآیند را می‌توان بی‌نهایت بار ادامه داد تا دنباله‌ای از مربعهای بسته $\{S_n\}$ بوجود آید که برایشان هیچ زیر خانواده متناهی از $\{O_\alpha\}$ موجود نیست که $S \cap S_n$ را بپوشاند. باید توجه داشت که درازای هر ضلع S_n برابر $a/(2^{n-1})$ است. بنابه لم ۲، دقیقاً یک نقطه، موسوم به z_0 ، در همه مربعهای S_n مشترک است. نقطه z_0 بایست نقطه حدهی S باشد و بنابراین عضو S است.

فرض کنیم O_{α_0} عضو پوشش $\{O_\alpha\}$ باشد که شامل z_0 است. چون O_{α_0} مجموعه‌بازی است، $\varepsilon > 0$ می‌موجود است که $N(z_0; \varepsilon) \subset O_{\alpha_0}$. ولی برای n های بس‌بزرگ داریم $S_n \subset N(z_0; \varepsilon)$. از این رو، $S_n \cap S$ یک زیر پوشش متناهی از $\{O_\alpha\}$ دارد که دارای یک عضو است: O_{α_0} . این تناقض قضیه را ثابت می‌کند.

کنه اصلی بحث بالا این که اگر هیچ زیر گردآورده متناهی از $\{O_\alpha\}$ S را نپوشاند، آنگاه هیچ زیر گردآورده متناهی، یک دنباله با دقت انتخاب شده زیر مجموعه‌های S را نیز نمی‌پوشاند. از سوی دیگر، این دنباله از زیر مجموعه‌های S را می‌توان آنقدر کوچک کرد تا اینکه در یکی از مجموعه‌های باز پوشش بیافتد.

اینک می‌توانیم برخی از نتایج مهم دو بخش اخیر را گردآورده و قضیه اصلی زیر را بدست آوریم.

قضیه ۲-۱۲. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای از صفحه باشد. در اینصورت گزاره‌های

زیر هم ارزند:

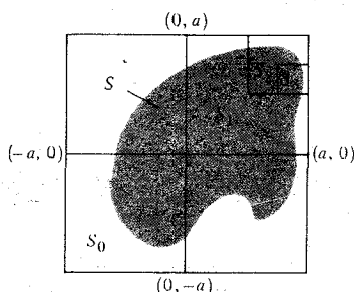
(۱) S بسته و کراندار است.

(۲) S فشرده است.

(۳) هر زیر مجموعه نامتناهی S یک نقطه حدی در S دارد.

(۴) هر دنباله در S دارای یک زیر دنباله است که به نقطه‌یی در S می‌گراید.

شکل ۸



اثبات - قضیه‌های - بورل مبین این است که (۱) موجب (۲) می‌شود. نشان می‌دهیم که (۲) موجب (۳) و (۳) موجب (۴) و (۴) موجب (۱) می‌گردد. از آنجا که وقتی S متناهی باشد درستی هر یک از این گزاره‌ها بدیهی است. می‌توان فرض کرد که S نامتناهی است.

فرض کنیم (۲) برقرار است. اگر A یک زیر مجموعه متناهی S باشد که در S نقطه حدی نداشته باشد، آنگاه برای هر نقطه در $A - S$ یک همسایگی می‌توان یافت که شامل هیچ نقطه A نباشد. به علاوه برای هر نقطه در A یک همسایگی می‌توان یافت که شامل هیچ نقطه دیگری از A نباشد. گردآورده همه چنین همسایگی‌هایی یک پوشش باز برای S است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد و این با فشرده بودن S متناقض است.

فرض کنیم (۳) برقرار است. گیریم $\{z_n\}$ دنباله‌یی از نقاط متمایز در S باشد (چرا بررسی این چنین دنباله‌هایی کفایت می‌کند؟) بنابه فرض یک نقطه حدی z_0 برای $\{z_n\}$ موجود است که $z_0 \in S$. بموجب قضیه ۲-۸ زیر دنباله‌یی از $\{z_n\}$ موجود است که به z_0 می‌گراید.

فرض کنیم (۴) برقرار است. اگر S کراندار نباشد، آنگاه دنباله نقاط $\{z_n\}$ در S موجودند که، برای هر n داریم $|z_n| > n$. گیریم $\{z_{n_k}\}$ یک زیر دنباله دلخواه $\{z_n\}$ باشد. برای هر نقطه $z_0 \in S$ ، $N(z_0; 1)$ نمی‌تواند شامل نقاط $\{z_{n_k}\}$ که برایشان $|z_{n_k}| + 1 > |z_0|$ باشد. پس $\{z_{n_k}\}$ نمی‌تواند به نقطه‌یی در S بگراید. و این متناقض با فرضی است. برای این که نشان دهیم S بسته است، گیریم z_0 یک نقطه حدی S باشد. بموجب قضیه ۲-۸، دنباله $\{z_n\}$ از نقاط متمایز S موجود است که به z_0 می‌گراید. به موجب قضیه ۲-۵ هر زیر دنباله $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید. بنابه (۴)، z_0 "نیجتا" بایست در S باشد. بدین ترتیب اثبات کامل است.

فشرده‌گی خاصیتی زیبا است زیرا که تبدیل شدن یک پوشش باز به یک زیر پوشش

متناهی، اغلب بدین معنی است که برای اثبات این که مجموعه‌ی واجد خاصیت مشخصی است، تنها لازم است یک تعداد نقاط متناهی بررسی شود. بهمین دلیل، وقتی فشردگی موجود باشد، می‌توان نشان داد اکثر خواص موضعی (خواصی که در یک همسایگی هر نقطه یک مجموعه برقرار است)، همه جایی و یا یکنواخت (خاصیت مجموعه در کل) هستند. به عنوان مثال از این حقیقت که هر نقطه را می‌توان با یک همسایگی کراندار پوشانید، نتیجه می‌شود که یک مجموعه فشرده کراندار است. همچنین اگر دوری هر نقطه یک مجموعه فشرده از یک نقطه ثابت صفر نباشد، آنگاه دوری خود مجموعه از این نقطه ثابت هم صفر نیست (ر. ک. تمرین ۳). البته این مطلب در حالت عمومی درست نیست. دوری هر نقطه فاصله باز $(0, 1)$ از 0 مخالف صفر است، در حالی که هیچ عدد حقیقی مثبت بین این مجموعه و 0 موجود نیست.

چه چیز باعث می‌شود که اضافه کردن یک یا دو نقطه این چنین عمده باشد؟ فاصله باز $(0, 1)$ را با فاصله بسته $[0, 1]$ مقایسه کنیم. همان طور که قبلاً دیدیم $\bigcup_{n=2}^{\infty} (1/n, 1)$ یک پوشش باز برای $(0, 1)$ است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد. این پوشش شامل نقاط $\{0\}$ و $\{1\}$ نمی‌شود. اگر این نقاط را به مجموعه می‌افزودیم آنگاه برای داشتن یک پوشش، بایست فواصلی از قبیل $(-\epsilon, \epsilon)$ و $(1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ نیز افزوده می‌گردید. ولی در آن صورت $(-\epsilon, \epsilon), (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ بانضمام $\bigcup_{n=2}^N (1/n, 1)$ برای یک $N > 1/\epsilon$ یک زیر پوشش متناهی می‌گردید.

پرسش‌ها

- ۱- در مورد اجتماع (اشتراک) متناهی مجموعه‌های فشرده چه می‌توان گفت؟
- ۲- در مورد اجتماع (اشتراک) نامتناهی مجموعه‌های فشرده چه می‌توان گفت؟
- ۳- در مورد متمم مجموعه فشرده چه می‌توان گفت؟
- ۴- در مورد دنباله‌های کوشی در مجموعه فشرده چه می‌توان گفت؟
- ۵- چه وقت می‌توان گفت هر زیر مجموعه، از یک مجموعه فشرده، فشرده است؟
- ۶- دیدیم برداشتن یک نقطه از مجموعه می‌تواند ناقص فشردگی گردد. چند نقطه بایست به مجموعه‌ای افزود تا فشردگی را نقض کند.
- ۷- چگونه تعمیمی از لم ۲ را می‌توان برای مجموعه‌های فشرده بیان داشت؟
- ۸- آیا می‌توان از "بی‌نهایت" به عنوان نقطه حدی صحبت کرد؟

تمرین‌ها

- ۱- نشان دهید اجتماع هر مجموعه کراندار با نقاط حدی خودش یک مجموعه فشرده

است.

۲- نشان دهید یک مجموعه فشرده از اعداد حقیقی شامل بزرگترین کران پائین و کوچکترین کران بالای خودش می باشد. آیا این مطلب در مورد مجموعه‌یی از اعداد حقیقی که فشرده نیست درست است؟

۳- اگر S فشرده و $z_0 \notin S$ ، ثابت کنید:

$$\text{glb}_{z \in S} |z - z_0| > 0$$

۴- اگر $\{S_n\}$ دنباله‌یی از مجموعه‌های فشرده غیرتهی و برای هر n ، $S_{n+1} \subset S_n$ ،

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n \neq \emptyset$$

نشان دهید ۱۲-۲ هر تعداد از ایجاب‌های گوناگون آنرا که می‌توانید اثبات کنید.

۵- نشان دهید اعداد گویا شمارش‌پذیرند.

۶- نشان دهید هر پوشش باز یک زیر مجموعه صفحه دارای یک زیر پوشش شماره‌پذیر

دارد.

۴-۲. افکنش گنجناری

تا اینجا، از حدود نامتناهی به دقت اجتناب کردیم. سه دنباله حقیقی زیر را در نظر میگیریم.

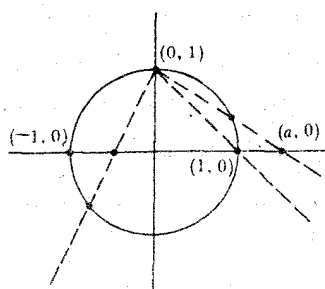
$$a_n = n, \quad b_n = \begin{cases} n & \text{فرد} \\ 1 & \text{زوج} \end{cases}, \quad c_n = (-1)^n n.$$

با وجودی که هر سه دنباله مذکور به دلخواه بزرگ میشوند، نمی‌خواهیم بگوئیم هر سه به بی‌نهایت نزدیک می‌گردند. از آنچه که در مورد حدود متناهی آموخته‌ایم مناسب به نظر می‌آید که بایست $\{a_n\}$ به بی‌نهایت نزدیک شود و $\{b_n\}$ چنین نباشد، زیرا زیر دنباله‌یی از $\{b_n\}$ به ۱ می‌گراید. در حالی که $\{c_n\}$ از دو جهت به بی‌نهایت می‌رود. روش معمول این است نمادهای $\pm\infty$ را معرفی کرد و آنها را به اعداد حقیقی بیافزاییم. مجموعه $\{+\infty, -\infty\} \cup R$ به دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته مشهور است. در دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته، $\{c_n\}$ همگرانیست زیرا $\{c_{2n}\}$ به $+\infty$ و $\{c_{2n+1}\}$ به $-\infty$ می‌گراید.

روش کاملاً "منطقی"، اگر چه تا اندازه‌یی غیرمعمول، این است که به R تنها یک نقطه

∞ را بیافزاییم. آنگاه گوئیم $\{a_n\}$ به ∞ میل می‌کند، و می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ بشرط آنکه برای هر عدد حقیقی و از قبل مشخص M همه جملات دنباله باستانی تعداد متناهی، خارج فاصله $(-M, M)$ قرار گیرند. به موجب این تعریف دنباله $\{(-1)^n n\}$ به ∞ میل می‌کند.

می‌توان تصور کرد که روش اخیر از همان روش قبلی بدست آمده است باین ترتیب که دو نقطه $\infty + \infty$ را از طرفین کشیده (با دو بازوی خیلی دراز) و پهلوی هم نهاده باشیم. در این صورت خط اعداد حقیقی به یک دایره تبدیل می‌گردد. اینک این مفهوم هندسی را دقیق‌تر بیان می‌کنیم. دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ را در نظر می‌گیریم. بازاء هر عدد حقیقی a ، خط مستقیمی رسم می‌کنیم که $(a, 0)$ را به $(0, 1)$ وصل کند. این خط دایره واحد را در $(0, 1)$ و نقطه دیگر (x_1, y_1) قطع می‌کند. نقطه (x_1, y_1) را متناظر a می‌گیریم. به‌عنوان مثال، نقاط فاصله‌باز $(-1, 1)$ با نقاط نیمه دایره متناظرند، نقاط -1 و 1 با خودشان متناظرند، نقاط خارج فاصله $[-1, 1]$ با نقاط نیمه بالای دایره متناظرند (ر. ک. شکل ۹).



شکل ۹

توجه کنید که نقاط نزدیک هم بر خط حقیقی همیشه بر نقاط نزدیک هم بر دایره متناظر می‌گردند. وارون این مطلب درست نیست. نقاط کاملاً "دور از جهت‌های مثبت و منفی بر نقاطی نزدیک هم بر دایره متناظر می‌گردند. در واقع هر چه قدر مطلق عدد حقیقی بزرگتر باشد، نقطه نظیرش بر دایره به نقطه $(0, 1)$ نزدیک‌تر است. و $(0, 1)$ تنها نقطه‌ی از دایره است که متناظر با هیچ عدد حقیقی نیست، باین دلیل آنرا متناظر با نقطه ∞ می‌گیریم. بدین ترتیب، یک تناظر یک به یک میان مجموعه $R \cup \{\infty\}$ و نقاط دایره واحد برقرار است. از آنجا که مجموعه اعداد حقیقی فشرده نیست، متناظر گرفتن $R \cup \{\infty\}$ با دایره (فشرده)، به فشرده‌سازی یک نقطه‌ی بی‌اعداد حقیقی موسوم است. آیا این کوشش در حذف $-\infty$ ارزشی هم دارد؟ در حقیقت خیر. در واقع $-\infty$ عملاً مفید است زیرا که "کوچکتر از هر عدد حقیقی" است. هدف از معرفی $R \cup \{\infty\}$ ایجاد انگیزه‌ی مناسب برای مطالعه صفحه مختلط گسترش یافته می‌باشد. دنباله مختلط $\{z_n\}$ را که با $z_n = n(\cos \theta + i \sin \theta)$ ، $0 \leq \theta < 2\pi$ تعریف می‌شود در نظر می‌گیریم. برای هر مقدار θ ، دنباله $\{z_n\}$ بر پرتوی متفاوت به ∞ میل می‌کند. بعلاوه، چون اعداد مختلط مرتب نیستند، نماد $-\infty$ معنایی بیش از نماد $i\infty$ ندارد.

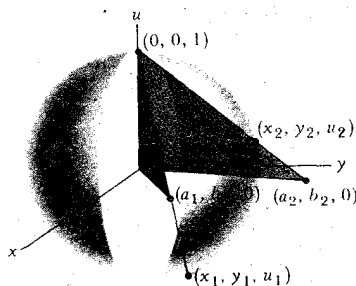
در حالت اعداد مختلط، منظور از M -همسایگی ∞ ، که با $N(\infty; M)$ نمایانده

می‌شود، مجموعه همه نقاطی است که دارای قدر مطلق بزرگتر از M اند. گوئیم دنباله $\{z_n\}$ به ∞ میل می‌کند اگر برای هر $M > 0$ ، برای همه n ها مگر تعدادی متناهی داشته باشیم $z_n \in N(\infty; M)$

اگر نقطه ∞ را به مجموعه اعداد مختلط بیافزاییم دستگاه اعداد مختلط گسترش یافته حاصل می‌گردد. باید توجه داشت دستگاه اعداد مختلط گسترش یافته، از نظر مفهوم با دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته، که به آن دو نقطه $-\infty$ و $+\infty$ افزوده شده، متفاوت است. این فشرده‌سازی یک نقطه‌یی صفحه با $\{C \cup \{\infty\}$ ، یک الگوی هندسی شبیه به فشرده سازی یک نقطه‌یی خط که در آن دایره با کره $x^2 + y^2 + u^2 = 1$ جایگزین شده است، می‌باشد.

برای هر عدد (a, b) از صفحه مختلط خط مستقیمی در R^3 از $(a, b, 0)$ به $(0, 0, 1)$ وصل می‌کنیم. این خط کره $x^2 + y^2 + u^2 = 1$ را در نقطه $(0, 0, 1)$ و در یک نقطه دیگر (x_1, y_1, u_1) قطع می‌کند. افکنش حاصله از نقطه $(0, 0, 1)$ واقع بر کره به نقطه $(a, b, 0)$ واقع در صفحه مختلط، به یک افکنش گنجنگاری موسوم است. (ر. ک. شکل ۱۰). این تناظر یک به یک همه نقاط صفحه متناهی و همه نقاط کره، باستثنای $(0, 0, 1)$ را می‌پوشاند. نقطه واقع در ∞ از دستگاه اعداد مختلط گسترش یافته با نقطه $(0, 0, 1)$ متناظر می‌گردد، نقطه $(0, 0, 1)$ را گاهی قطب شمال می‌نامند.

قابل توجه است که، یک همسایگی ∞ در صفحه مختلط، متناظر درون یک دایره قطبی به مرکز قطب شمال است.



شکل ۱۰

برای آنکه نقطه (x_1, y_1, u_1) از کره را که متناظر با نقطه $(a, b, 0)$ است به

طور مشخص بدست آوریم، ملاحظه می‌کنیم، که سه نقطه

$$(0, 0, 1), \quad (x_1, y_1, u_1), \quad (a, b, 0)$$

بر یک خط قرار دارند. بنابراین برای یک عدد حقیقی t داریم:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b} = \frac{u_1 - 1}{-1} = t \quad (۶)$$

ولی

$$x_1^2 + y_1^2 + u_1^2 = (at)^2 + (bt)^2 + (1-t)^2 = 1$$

یا حل معادله نسبت به t خواهیم داشت :

$$t = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}$$

بنابراین با توجه به (۶) ، عدد مختلط (a, b) متناظر با نقطه

$$(x_1, y_1, u_1) = \left(\frac{2a}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{2b}{a^2 + b^2 + 1}, \frac{a^2 + b^2 - 1}{a^2 + b^2 + 1} \right)$$

است .

با دوباره نویسی (۷) ، عدد مختلط $z = x + iy$ را با نقطه زیر ، واقع بر کره متناظر

می کنیم .

$$\left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

پرسش‌ها

- ۱- کدام قضایای حدود متناهی ، در مورد حدود نامتناهی هم درست‌اند؟
- ۲- چه رابطه‌یی میان مجموعه‌های بی‌کران و همسایگی‌های ∞ موجود است؟
- ۳- چگونه می‌توان ∞ را بعنوان نقطه حدی یک دنباله تعریف کرد؟
- ۴- نماد " $i\infty$ " چه معنی ممکن است داشته باشد؟
- ۵- نقاط واقع بر دایره واحد در افکنش گنجناری به چه تبدیل می‌گردند؟
- ۶- آیا می‌شود صفحه مختلط را با کره دیگری متناظر کرد؟
- ۷- فشرده‌سازی یک نقطه‌یی R^n چگونه می‌تواند باشد؟

تمرینها

- ۱- نشان دهید هر دنباله‌یی که دارای نقطه حدی متناهی است ، نمی‌تواند به ∞ میل کند .
- ۲- اگر $\{z_n\}$ به ∞ میل کند و $\{u_n\}$ کراندار باشد ، نشان دهید $\{(z_n + w_n)\}$ به ∞ می‌گراید .
- ۳- نشان دهید $\{z_n\}$ به ∞ می‌گراید اگر و تنها اگر $\{|z_n|\}$ به ∞ بگراید .
- ۴- اگر (x_1, y_1, u_1) نقطه مفروض واقع بر کره واحد باشد ، نقطه متناظر آنرا بر صفحه مختلط بیابید .

۵- نشان دهید یک دایره بر کره که از قطب شمال نگذرد با یک دایره در صفحه مختلط متناظر است.

۶- نشان دهید هر دایره واقع بر کره که از قطب شمال بگذرد با یک خط مستقیم در صفحه مختلط متناظر است.

۷- نشان دهید، با افکندش گنجگاری می توان صفحه مختلط را با کره $x^2 + y^2 + (u - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$ متناظر کرد.

۲-۵. پیوستگی

یک تابع f یا نگاشت (تک مقداری) f از مجموعه A در مجموعه B ، که بصورت $f: A \rightarrow B$ نوشته می شود، قاعده‌یی است که به هر عنصر A یک عنصر منحصر بفرد از B متناظر کند. مجموعه A را پیش نگاره f نامیده و زیر مجموعه‌ای از B را که با نقاط A متناظر می گردد نگاره f نامیده و با $f(A)$ نمایانده می شود. اگر مجموعه B - که به برد تابع موسوم است - با $f(A)$ برابر باشد، در این صورت تابع را پوشا گویند. اگر هیچ دو عنصر A بر یک عنصر B نگاشته نشود، تابع را یک به یک گویند. منظور از عبارت $f(a_1) = b_1$ این است که عنصر $a_1 \in A$ ، $b_1 \in B$ ، بر عنصر b_1 نگاشته می شود.

برای هر $b \in B$ ، بنابه تعریف $f^{-1}(b)$ عبارت از مجموعه تمام عناصری از A است که نگاره آن b باشد. قابل توجه است که چنانچه f پوشا نباشد، $f^{-1}(b)$ ممکن است تهی باشد. با این حال، چنانچه f یک به یک و پوشا باشد، $f^{-1}: B \rightarrow A$ هم تابعی یک به یک و پوشا است و به وارون f موسوم است.

مابطور ضمنی با توابع سروکار داشته ایم. بعنوان مثال، هر دنباله از اعداد حقیقی یک تابع است $f: P \rightarrow R$ و f و یک دنباله از اعداد مختلط یک تابع است $f: P \rightarrow C$ ، که در اینجا P مجموعه اعداد صحیح مثبت است. در افکندش گنجگاری یک تابع یک به یک یافتیم، که صفحه مختلط گسترش یافته را بر روی کره واحد می نگاشت. (امیدواریم) خواننده با بعضی خواص توابع با مقادیر حقیقی از یک متغیر حقیقی آشنا باشد، یعنی با توابعی که مجموعه‌های اعداد حقیقی را بر مجموعه‌های اعداد حقیقی می نگارند. به عنوان مثال، تابع $y = f(x) = x^2$ که متغیر حقیقی x را بر متغیر حقیقی x^2 می نگارد، اعداد حقیقی را بر اعداد حقیقی غیر منفی می برد و فاصله حقیقی $[0, 1]$ را بر خودش می نگارد و الخ.

تذکره - مؤکداً "گوئیم f برای تابع و $f(x)$ برای مقدار تابع در نقطه x بکار می رود. با این حال چنانچه ابهامی ایجاد نگردد، برای صرفه جویی در وقت، به غلط از نماد $f(x)$ به عنوان تابع نام می بریم.

برای $z = x + iy$ تابع با مقدار مختلط $f(z)$ را می‌توان به عنوان تابعی از متغیر مختلط z و یا به عنوان تابعی از متغیرهای حقیقی x و y در نظر گرفت.

مثال - تابع $f(z) = z^2$ را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

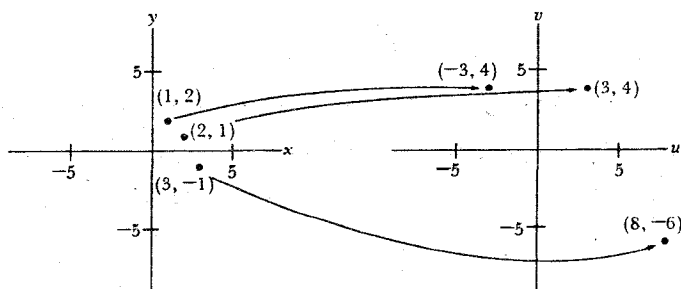
$$w = f(z) = f(x, y) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy),$$

که

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$\operatorname{Im} f(z) = v(x, y) = 2xy.$$

برای این تابع نقاط $(2, 1)$ ، $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ به ترتیب بر نقاط $(3, 4)$ ، $(4, 3)$ و $(-4, 3)$ و $(8, -6)$ نگاشته می‌شوند (ر. ک. شکل ۱۱).



شکل ۱۱

همان طور که یک تابع با مقادیر حقیقی از متغیر حقیقی را می‌توان به عنوان نگاشتی از محور x بر محور y در نظر گرفت، یک تابع با مقادیر مختلط از متغیر مختلط را نیز می‌توان به عنوان نگاشتی از صفحه xy (صفحه z) بر صفحه uv (صفحه w) در نظر گرفت. در حالی که محور y را می‌توان متمامد بر محور x گرفت و یک تصویر کامل دو بعدی از $w = f(z)$ بدست آورد. صفحه z و صفحه w را، حداقل در دنیای سه بعدی خودمان، می‌بایست جدا از هم نگهداریم.

در فصل ۳، با توابعی سروکار داریم که نواحی مشخصی از صفحه z را بر نواحی مشخصی از صفحه w می‌نگارند. هم اینک می‌خواهیم رده‌یی از توابع را مشخص کنیم که نقاط نزدیک به هم در صفحه z را بر نقاط نزدیک به هم در صفحه w می‌نگارند.

تابع $f(z)$ را که در میدان \mathcal{D} تعریف شده است، در نقطه $z_0 \in \mathcal{D}$ پیوسته گوئیم بشرط آنکه برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ (وابسته به ε و z_0) موجود باشد بطوری که:

$$\text{اگر } |z - z_0| < \delta \text{ آنگاه } |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

از نظر هندسی، این بدان معنی است که برای هر همسایگی $f(z_0)$ در صفحه w ،

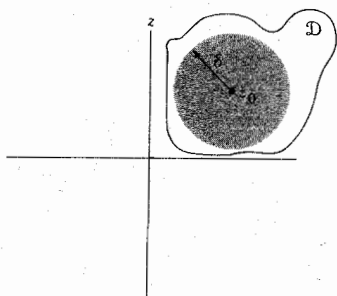
یک همسایگی از z_0 در صفحه z متناظر می شود که نگاره اش درون این همسایگی $f(z_0)$ واقع می شود. رسمی تر آن این که برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ موجود است بطوری که:

$$f(N(z_0; \delta)) \subset N(f(z_0); \varepsilon)$$

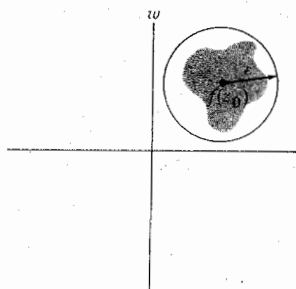
(ر.ک. شکل ۱۲). اگر تابع در همه نقاط \mathcal{D} پیوسته باشد گوئیم که تابع در میدان \mathcal{D} پیوسته است.

تذکره ۱. از (۸) و (۹) همیشه بعوض یکدیگر استفاده می کنیم. توصیه می شود که خواننده باید هم ارزی بودن این دو را اثبات نماید و کوشش کند که مهارت لازم برای استفاده مساوی از آنها را کسب نماید.

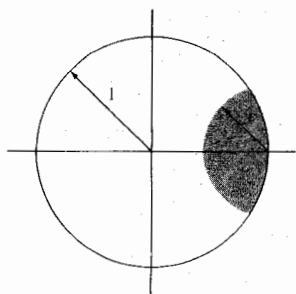
تذکره ۲. در این فرصت در پیوستگی تابعی که بر ناحیه R تعریف شده و R هم شامل نقاط مرزی می باشد، بحث می کنیم منظور از یک ε همسایگی نقطه مرزی $z_0 \in R$ ، مجموعه $N(z_0; \varepsilon) \cap R$ بوده، و آن را نسبت به ناحیه R مجموعه ای باز می خوانیم. در شکل ۱۳ یک ε - همسایگی از یک نقطه مرزی قرض بسته واحد $|z| \leq 1$ ، ملاحظه می شود.



شکل ۱۲



شکل ۱۳



اگر $f(z)$ در z_0 پیوسته باشد، می‌نویسیم $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ تابع ممکن است که در یک نقطه حد داشته باشد بدون آنکه در آن نقطه پیوسته باشد. گوئیم که $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$ اگر برای هر همسایگی L ، یک همسایگی سوده از z_0 موجود باشد که نگاره آن درون این همسایگی L بیافتد. اگر $L = f(z_0)$ ، تابع در z_0 پیوسته بوده و کلمه سوده را می‌توان از تعریف حذف کرد.

مثال

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & z \neq 2, \\ 5, & z = 2. \end{cases}$$

در مورد این $\lim_{z \rightarrow 2} f(z) = 4$ ولی تابع در $z = 2$ پیوسته نیست.

چه ارتباطی میان حد دنباله‌ها و حد توابع عمومی‌تر موجود است؟ دنباله مختلط $\{z_n\}$ که یک نگاشت $f: P \rightarrow C$ را تعریف می‌کند، به z_0 می‌گراید اگر چنانچه برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $M > 0$ موجود باشد بطوری که

$$f(N(\infty; M) \cap P) \subset N(z_0; \varepsilon)$$

یادآور می‌شویم که M همسایگی حقیقی از ∞ ، مجموعه همه نقاط خارج فاصله $(-M, M)$ است.

چنانچه پیش نگاره f ، به عوض اعداد صحیح مثبت، یک ناحیه بی‌کران باشد. تعریف مشابه زیر را داریم:

فرض کنیم $f: C \rightarrow C$ $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = L$ اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $M > 0$ موجود باشد بطوری که $f(N(\infty; M)) \subset N(L; \varepsilon)$

حتی اگر ناحیه کراندار باشد، شباهت عمده‌یی میان حد دنباله و حد در توابع عمومی‌تر موجود است. یک دنباله همگراست اگر در نهایت، نقاط آن به یکدیگر "نزدیک" باشند، در حالی که تابع از متغیر مختلط حد دارد بشرطی که، نزدیکی نقاط در صفحات مختلف محفوظ بماند. قضیه بعدی نشان می‌دهد که پیوستگی را می‌توان به عنوان عملی که همگرایی دنباله‌ها را محفوظ می‌دارد در نظر گرفت:

قضیه ۲-۱۳. تابع $f(z)$ ، که در ناحیه R تعریف شده است در یک نقطه $z_0 \in R$

پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر دنباله $\{z_n\}$ در R که به z_0 بگراید، دنباله $\{f(z_n)\}$

به $f(z_0)$ بگراید.

اثبات - فرض کنیم $f(z)$ در z_0 پیوسته است. در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ عدد

$\delta > 0$ موجود است بطوری که هر وقت $|z - z_0| < \delta$ ($z \in R$) آنگاه $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ اگر $\{z_n\}$ به z_0 بگراید، آنگاه N وجود دارد که برای $n > N$ ، $|z_n - z_0| < \delta$ به موجب پیوستگی برای $n > N$ داریم $|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$. از آنجا که ε اختیاری است، دنباله $\{f(z_n)\}$ به $f(z_0)$ می‌گراید.

برعکس، فرض کنیم $f(z)$ در z_0 پیوسته نباشد. در این صورت برای یک $\varepsilon > 0$ $N(f(z_0); \varepsilon)$ شامل نگاره هیچ همسایگی z_0 نیست. این بدان معنی است که دنباله‌ای از نقاط $\{z_n\}$ می‌توان یافت بطوری که $z_n \in N(z_0; 1/n) \cap R$ و $f(z_n) \notin N(f(z_0); \varepsilon)$. دنباله $\{z_n\}$ به z_0 می‌گراید در حالی که دنباله $\{f(z_n)\}$ به $f(z_0)$ نمی‌گراید. این تناقض اثبات را تکمیل می‌کند.

تذکره - قضیه ۲-۱۳ برای توابع با مقادیر حقیقی از متغیر حقیقی هم برقرار است. فرض کنیم f یک تابع پیوسته باشد که در ناحیه A تعریف شده است. چه خواصی از A به نگاره $f(A)$ منتقل می‌شود؟

قضیه ۲-۱۳ مبین آن است که دنباله‌های همگرا در A به دنباله‌های همگرا در $f(A)$ بدل می‌شوند. ولی خواص زیادی، حتی برای توابع با مقادیر حقیقی از متغیر حقیقی، تحت نگاشتهای پیوسته محفوظ نمی‌مانند.

مثال ۱ - تابع $f(z) = |z|$ صفحه را بر فاصله حقیقی $[0, \infty)$ می‌نگارد. این نشان می‌دهد که نگاره پیوسته یک مجموعه باز لزوماً "باز نیست".

مثال ۲ - تابع $f(x) = \tan^{-1} x$ خط حقیقی را بر فاصله $(-\pi/2, \pi/2)$ می‌نگارد. این نشان می‌دهد که نگاره پیوسته یک مجموعه بسته لزوماً "بسته نیست".

مثال ۳ - تابع $f(z) = 1/z$ قرص سوده $0 < |z| < 1$ را بر خارج قرص واحد می‌نگارد. این نشان می‌دهد که نگاره پیوسته یک مجموعه کراندار لزوماً "کراندار نیست". ولی همه چیز از دست نمی‌رود. اگر خواص "زیبا"ی دو مثال اخیر را توأمًا در نظر بگیریم، نگاره هم باید "زیبا" گردد.

قضیه ۲-۱۴ - نگاره پیوسته هر مجموعه فشرده، فشرده است.

اثبات - فرض کنیم $f: A \rightarrow f(A)$ بر مجموعه فشرده A پیوسته باشد. برای هر دنباله

$\{w_n\}$ در $f(A)$ یک دنباله متناظر $\{z_n\}$ در A می توان یافت بطوری که $f(z_n) = w_n$ به موجب قضیه ۲-۱۲، زیردنباله $\{z_{n_k}\}$ موجود است که به یک نقطه $z_0 \in A$ می گراید. به موجب قضیه ۲-۱۳، $f(z_{n_k}) = w_{n_k}$ به نقطه $f(z_0) \in f(A)$ ، می گراید. از آنجا که $\{w_n\}$ اختیاری است، هر دنباله در $f(A)$ یک زیر دنباله دارد، که در $f(A)$ همگراست. بنابراین $f(A)$ می بایست فشرده باشد.

از آنجا که هیات مختلط مرتب نیست، صحبت از مقادیر بیشینه و کمینه برای تابع با مقادیر مختلط بی معنی است. با این حال، بهترین کاری که میشود کرد، بررسی بیشینه ها و کمینه های توابع با مقادیر حقیقی $|f(z)|$ است. ملاحظه این مطلب که اگر $f(z)$ در ناحیه ای پیوسته باشد، آنگاه $|f(z)|$ نیز پیوسته است، مفید خواهد بود. این مطلب از نامساوی زیر نتیجه می گردد:

$$\|f(z_2) - f(z_1)\| \leq |f(z_2) - f(z_1)| \quad (z_1, z_2 \in G)$$

قضیه ۲-۱۵. اگر $f(z)$ بر مجموعه فشرده E پیوسته باشد، آنگاه $|f(z)|$ بیشینه و کمینه خود را بر E اختیار می کند.

اثبات- به موجب قضیه ۲-۱۴، نگاره E تحت تابع $|f(z)|$ ، که با E' می نمایانیم، مجموعه ای فشرده است. چون E' یک مجموعه کراندار از اعداد حقیقی است، دارای کوچکترین کران بالایی چون b است. از تمرین ۲ در بخش ۲-۳ نتیجه می شود که نقطه b در مجموعه E' است. ولی این بدان معنی است که بازاء یک $z_0 \in E$ ، داریم

$$|f(z_0)| = b$$

اثبات این که $|f(z)|$ کمینه اش را هم می پذیرد، مشابه همین است، فقط باید بزرگترین کران پائین را جایگزین کوچکترین کران بالا نمود.

تابع $f(z)$ را در ناحیه R پیوسته یکنواخت نامیم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ داده شده عدد $\delta > 0$ فقط به ε بستگی دارد) موجود باشد بطوری که اگر $z_1, z_2 \in R$ و $|z_1 - z_2| < \delta$ آنگاه داشته باشیم $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$. این پیوستگی با پیوستگی در یک ناحیه در این اختلاف دارد، که در این مورد می توان از یک δ برای همه نقاط ناحیه استفاده نمود.

مثال ۱- تابع $f(z) = z$ در هر میدانی پیوسته یکنواخت است. زیرا، همیشه می توان $\delta = \varepsilon$ انتخاب کرد.

مثال ۲- تابع $f(z) = 1/z$ گرچه در ناحیه $0 < |z| < 1$ پیوسته است ولی در این ناحیه پیوسته یکنواخت نیست.

جهت اثبات گیریم $f(z)$ پیوسته یکنواخت باشد. در این صورت برای $\varepsilon = 1$ عدد δ ، $0 < \delta < 1$ موجود است که در شرایط تعریف صدق می کند. رفتار این تابع را در نزدیکی مبدا بررسی می کنیم. گیریم $z_1 = \delta$ و $z_2 = \delta/2$ در این صورت $\delta/2 < \delta = |z_1 - z_2|$ ولی

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \frac{1}{\delta} - \frac{2}{\delta} \right| = \frac{1}{\delta} > 1 = \varepsilon$$

مثال ۳- تابع $f(z) = z^2$ در صفحه مختلط پیوسته یکنواخت نیست.

این بار هم عکس مطلب را فرض گرفته و گیریم $\varepsilon = 1$. در این صورت برای هر $\delta > 0$ ، $z_1 = 1/\delta$ و $z_2 = 1/\delta + \delta/2$ انتخاب می کنیم. داریم $|z_1 - z_2| = \delta/2$ و $\varepsilon = 1 < 1 + \delta^2/4 = |z_1^2 - z_2^2|$ باید توجه داشت این تابع بر هر ناحیه کراندار، پیوسته یکنواخت است.

خواننده احتمالاً "آخرین قضیه این فصل را حدس می زند:

قضیه ۲-۱۶. اگر $f(z)$ بر مجموعه فشرده A پیوسته باشد آنگاه $f(z)$ در روی A

پیوسته یکنواخت است

اثبات - گیریم $\varepsilon > 0$ مفروض باشد. در این صورت برای هر نقطه $z_\alpha \in A$ ، یک δ_α موجود است (وابسته به ε و z_α) که هر وقت $|z - z_\alpha| < \delta_\alpha$ و $z \in A$ آنگاه داشته باشیم:

$$|f(z) - f(z_\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (10)$$

گردآورده همه همسایگی هایی به شکل $N(z_\alpha; \delta_\alpha/2)$ پوششی برای A است. چون A فشرده است، یک زیر پوشش متناهی، مانند

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n N\left(z_k; \frac{\delta_k}{2}\right) \quad (11)$$

موجود است. δ را بصورت زیر انتخاب می کنیم:

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta_2}{2}, \dots, \frac{\delta_n}{2} \right\}$$

می خواهیم نشان دهیم که این δ برای تمام مجموعه A کار می کند.

فرض کنیم w_1 و w_2 دو نقطه در A باشند که $|w_1 - w_2| < \delta$. بموجب (۱۱)، برای

یکی از k ها داریم، $w_1 \in N(z_k; \delta_k/2)$ و به موجب (۱۰) داریم.

$$|f(w_1) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (12)$$

ولی، هم چنین داریم

$$\begin{aligned} |w_2 - z_k| &= |w_2 - w_1 + w_1 - z_k| \leq |w_2 - w_1| + |w_1 - z_k| \\ &< \delta + \frac{\delta_k}{2} \leq \frac{\delta_k}{2} + \frac{\delta_k}{2} = \delta_k. \end{aligned}$$

بنابراین $w_2 \in N(z_k; \delta_k) \cap A$ و

$$|f(w_2) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (13)$$

از ترکیب (۱۲) و (۱۳) حاصل می شود.

$$\begin{aligned} |f(w_1) - f(w_2)| &= |f(w_1) - f(z_k) + f(z_k) - f(w_2)| \\ &\leq |f(w_1) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(w_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است.

پرسش‌ها

- ۱- چه ابهامی ممکن است ایجاد شود اگر پیش نگاره را در تابع، میدان بنامیم؟
- ۲- اهمیت هندسی یک تابع با مقادیر مختلط از یک متغیر حقیقی در چیست؟ یک تابع با مقادیر حقیقی از متغیر مختلط؟
- ۳- چه خواصی در توابع و وارون آنها مشترک است؟
- ۴- در چه نوع توابعی نقاط در صفحه w نزدیک تر (دورتر)ند تا در صفحه z ؟
- ۵- در مورد پیوستگی دنباله‌ها چه می توان گفت؟
- ۶- آیا می توان در مورد پیوستگی تابع در ∞ صحبت کرد؟
- ۷- در مورد نگاره پیوسته یک نقطه حدی از یک مجموعه چه می توان گفت؟
- ۸- چگونه اثباتهای قضایای ۲-۱۳ و ۲-۸ را مقایسه می کنید؟
- ۹- بزرگترین ناحیه‌یی که بر آن $1/z = f(z)$ پیوسته یکنواخت است کدام است؟
- ۱۰- آیا توابع ناپیوسته می توانند مجموعه فشرده را بر روی مجموعه فشرده بطور پوشا بنگارند؟

۱- اگر تابعی بر مجموعه A پیوسته یکنواخت باشد، آیا بر هر زیر مجموعه A هم پیوسته یکنواخت است؟

تمرینها

۱- حدود زیر را بیابید.

$$\lim_{z \rightarrow 2i} \frac{\bar{z} + z^2}{1 - \bar{z}} \quad (\text{ب} \quad \text{_____}) \quad \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{z^2 + 9}{z - 3i} \quad (\text{الف} \quad \text{_____})$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 10z + 2}{2z^2 - 11z - 6} \quad (\text{ت} \quad \text{_____}) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z + 1}{z^2} \quad (\text{پ} \quad \text{_____})$$

۲- در پیوستگی و پیوستگی یکنواخت توابع زیر بحث کنید.

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad |z| \geq 1 \quad (\text{ب} \quad \text{_____}) \quad f(z) = z^2, \quad |z| < 5 \quad (\text{الف} \quad \text{_____})$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{z}, & z \neq 0, |z| < 1 \\ 1, & z = 0 \end{cases} \quad (\text{ت} \quad \text{_____}) \quad f(z) = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1 \quad (\text{پ} \quad \text{_____})$$

$$(e) \quad f(z) = \begin{cases} \frac{|z|}{z}, & z \neq 0, |z| \leq 1 \\ 0, & z = 0 \end{cases} \quad (\text{ث} \quad \text{_____})$$

۳- ثابت کنید اگر $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$ و $f(z)$ برای هر عدد صحیح مثبت تعریف شده باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = a$. با مثالی نشان دهید که معکوس این نادرست است.

۴- نشان دهید یک تابع با مقادیر حقیقی یکنوا از متغیر حقیقی نمی تواند به تعداد غیر شماره پذیر نقاط ناپیوستگی داشته باشد.

۵- نشان دهید $f: A \rightarrow B$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه نسبت به B باز مانند O (تذکر ۲ صفحه ۳۶ ملاحظه شود)، $f^{-1}(O)$ نسبت به A باز باشد.

۶- با استفاده از تمرین ۵، ثابت کنید، نگاره پیوسته هر مجموعه فشرد، فشرده است.

۷- نشان دهید $f: A \rightarrow B$ پیوسته است، اگر و تنها اگر برای هر مجموعه نسبت به B بسته مانند F ، $f^{-1}(F)$ نسبت به A باز باشد.

۸- ثابت کنید: نگاره پیوسته یک مجموعه همبند، همبند است.

۹- اگر تابعی که بر یک مجموعه فشرده تعریف شده است، پیوسته، یک به یک و پوشا باشد، نشان دهید تابع وارون آن هم همین خواص را دارد. آیا می توان فشرده گی را

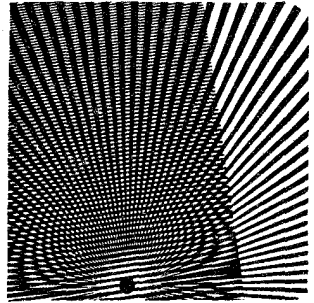
نادیده گرفت؟

۱۰- فرض کنیم f و g بر یک مجموعه مانند A پیوسته باشند. نشان دهید $f+g$ ، $f \cdot g$ و f/g (اگر $g \neq 0$) هم بر A پیوسته اند. اگر f و g پیوسته یکنواخت باشند چه می شود گفت؟

۱۱- نشان دهید $f(z)$ در یک ناحیه R پیوسته است، اگر و تنها اگر هر دوی $\operatorname{Re} f(z)$ و $\operatorname{Im} f(z)$ در R پیوسته باشند.

۱۲- نشان دهید هر چند جمله‌یی در تمام صفحه مختلط پیوسته است.

۱۳- فرض کنیم $f(z)$ در صفحه مختلط پیوسته است. گیریم $A = \{z \in C: f(z) = 0\}$ نشان دهید که A مجموعه‌ای بسته است.

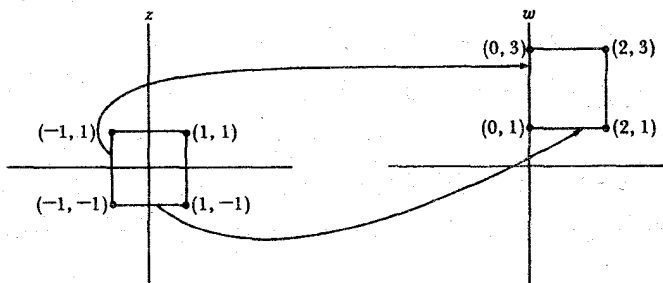


۳. نگاشت‌ها و تبدیلات دو خطی

در فصل قبل دیدیم که هر تابع مختلط از یک متغیر مختلط نقاط صفحه z را بر نقاط صفحه w می‌نگارد. بعد از این که هیچانات حاصله از این کشف فروکش کرد آنگاه دریافتیم که نگاشتن نقطه بر نقطه به روش ماشین‌وار، کاری بس خسته‌کننده است. در این فصل خواهیم دید، در بعضی توابع خاص، نواحی صفحه z به هنگام نگاشتن آن بر نواحی صفحه w چگونه تغییر می‌کنند. نشان خواهیم داد که، تبدیلیهای دو خطی دوایر و خطوط راست را بر دوایر و خطوط راست می‌نگارد. در واقع کشف می‌کنیم که حداقل در صفحه مختلط گسترش یافته — بر خلاف باور همگان — دوایر خیلی شبیه خطوط راست هستند.

۳-۱. نگاشتهای بنیادی

تابع $w = f(z) = z + b$ که در آن b عدد مختلط باشد، مجموعه‌ها در صفحه z را با یک جابجایی در امتداد بردار b ، بر مجموعه‌هایی در صفحه w می‌نگارد. این نگاشت، انتقال نام دارد. باید توجه داشت که شکل و اندازه مجموعه صفحه w با شکل و اندازه مجموعه صفحه z همانند است.



شکل ۱

مثال - تابع $w = z + (1 + 2i)$ مربع به رئوس $1 \pm i$ و $\pm 1 \pm i$ را بر مربع به رئوس $2 + i$ ، $3i$ و $2 + i$ و $3i$ می نگارد (ر. ک. شکل ۱) برای نشان دادن این مطلب، گیریم $z = x + iy$ و $w = u + iv$. در این صورت $w = (x + iy) + (1 + 2i)$ و

$$u = x + 1, \quad v = y + 2.$$

هم چنان که x فاصله $[-1, 1]$ را می پیماید، u فاصله $[0, 2]$ را می پیماید؛ هم چنان که y فاصله $[-1, 1]$ را می پیماید، v فاصله $[1, 3]$ را می پیماید.

تابع $w = az$ که در آن $a = \cos \alpha + i \sin \alpha$ ، هر نقطه از صفحه z را بر نقطه بی در صفحه w می نگارد، که دوری آن از مبداء برابر است ولی شناسه آن به اندازه α ، یعنی شناسه a ، افزایش می یابد. این نگاشت دوران نام دارد.

مثال - تابع $w = iz$ نیم صفحه راست ($\operatorname{Re} z > 0$) را بر نیم صفحه زیرین ($\operatorname{Im} z > 0$) می نگارد.

با توجه به این که $\operatorname{Arg} i = \pi/2$ ، از نظر هندسی این نگاشت را می توان چنین تعبیر کرد که نقاط صفحه z را که در $\pi/2 < \operatorname{Arg} z < \pi$ صدق می کنند بر نقاطی از صفحه w که در $0 < \operatorname{Arg} w < \pi$ صدق می کنند می نگارد.

از نظر تحلیلی

$$w = u + iv = i(x + iy) = -y + ix,$$

و $u = -y$ و $v = x$ بنابراین $x > 0$ بر $v > 0$ نگاشته می شود.

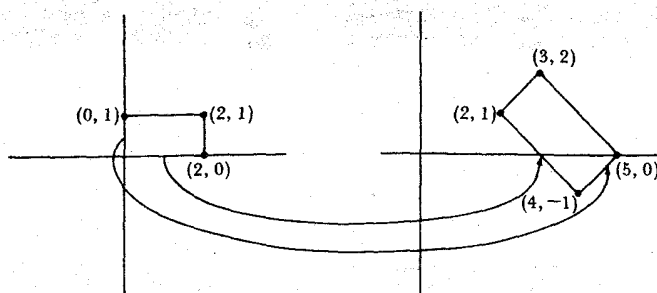
برای $a > 0$ ، $a \neq 1$ تابع $w = az$ را یک بزرگساز می نامند (گو اینکه برای $a < 1$ فی الواقع یک کوچکساز است). این تابع بسته به این که $a > 1$ یا $a < 1$ باشد نواحی صفحه z را با انبساط و یا انقباض به صفحه w می برد.

مثال - تابع $w = 5z$ قرص $|z| \leq 1$ را بر قرص $|w| \leq 5$ می نگارد.

بطور کلی تر، به ازاء مقادیر مختلط a ، تابع $w = az$ نمایش توأم یک دوران و یک بزرگساز است. عبارت $\arg a$ قسمت دوران، و $|a|$ قسمت بزرگساز آن است. درحقیقت می توان یک انتقال، یک دوران و یک بزرگساز را ترکیب نمود تا یک تابع خطی $w = az + b$ که در آن a و b ثابت های مختلط هستند بدست آورد.

مثال - تابع $w = (1 - i)z + (2 + i)$ مستطیل شکل ۲ در صفحه z را بر مستطیلی در صفحه w می نگارد که مساحتی دو برابر قبلی دارد، و درازای هر ضلع با مضربی برابر $\sqrt{2}$ افزایش یافته است.

شکل ۲

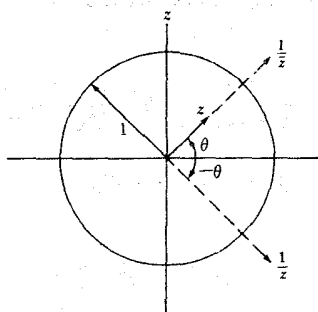


میان تابع آشناتر خطی و حقیقی $y = ax + b$ ، یعنی خط راست با تابع مختلط خطی ارتباطی موجود است. تابع با مقادیر مختلط $w = az + b$ که a و b مختلط اند، خطوط راست صفحه z را بر خطوط راست در صفحه w می‌نگارند. باید توجه داشت، تابع مختلط خطی همیشه ∞ را بر ∞ می‌نگارد. به خواننده به عنوان تمرین واگذار می‌کنیم، مشخص‌نماید که تاثیر a و b بر شیب خط نگاره چیست. ملاحظه می‌شود $w = az + b$ درست‌مانده‌های حقیقی خود تابعی یک به یک است.

نگاشت $w = 1/z$ انعکاس نام دارد و نقاط نزدیک مبدا در صفحه z را بر نقاط دور از مبدا در صفحه w و نقاط دور از مبدا در صفحه z را بر نقاط نزدیک مبدا در صفحه w می‌نگارد.

وقتی z به مبدا نزدیک شود، w در صفحه مختلط گسترش یافته به ∞ نزدیک می‌شود. یعنی برای هر $M > 0$ مفروض، یک $\delta > 0$ موجود است که $|z| < \delta$ موجب $|w| > M$ گردد. بدین ترتیب یک نگاشت یک به یک از صفحه مختلط گسترش یافته بر خودش داریم که در آن مبدا بر نقطه ∞ نگاشته می‌شود.

تقارن مشخصی نیز نسبت به دایره واحد و محور حقیقی هر دو موجود است. نقاط درون (برون) دایره واحد بر نقاط برون (درون) دایره واحد نگاشته می‌شوند و نقاط بالای (زیر) محور حقیقی بر نقاط زیر (بالای) محور حقیقی نگاشته می‌شوند (ر.ک. شکل ۳).



انعکاس $w = 1/z$ گاهی بازتاب نسبت به دایره واحد و محور حقیقی هر دو نامیده می-شود.

برای اینکه به بینیم، مجموعه‌های صفحه z ضمن تبدیل به مجموعه‌های صفحه w تحت این بازتاب چگونه تغییر می‌کنند، معادله

$$w = u + iv = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$$

را برای متغیری مفروض در یک صفحه بر حسب متغیرهای صفحه دیگر حل می‌کنیم. بدین ترتیب به روابط زیر می‌رسیم:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

و

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2} \quad (2)$$

از (۱) یا (۲) نتیجه می‌شود.

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{u^2 + v^2} \quad (3)$$

اینک معادله

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad (4)$$

را که در آن a, b, c و d ثابت‌های حقیقی هستند، در نظر می‌گیریم، این معادله اگر $a \neq 0$ نمایش یک دایره و اگر $a = 0$ ، نمایش یک خط راست است. از (۱)، (۲) و (۳) دیده می‌شود که تابع $w = 1/z$ مجموعه (۴) را بر مجموعه

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0, \quad (5)$$

می‌نگارد، که اگر $d \neq 0$ یک دایره است و اگر $d = 0$ یک خط راست است.

اینک با توجه به (۴) و (۵) برخی از خواص نگاشت تابع $w = 1/z$ را نتیجه می‌گیریم:

(۱) دوایری که بر مبداء نمی‌گذرند (یعنی با $d \neq 0$) بر دوایری که از مبداء نمی‌گذرند نگاشته می‌شوند.

(۲) دوایری که از مبداء می‌گذرند بر خطوط راستی که از مبداء نمی‌گذرند نگاشته

می‌شوند.

(۳) خطوط راستی که بر مبداء نمی‌گذرند بر دوایری که بر مبداء می‌گذرند نگاشته

می‌شوند.

(۴) خطوط راستی که بر مبداء می‌گذرند بر خطوط راستی که بر مبداء می‌گذرند نگاشته می‌شوند.

بطور خلاصه، تابع $w = 1/z$ دوايرو خطوط راست را بر دوايرو خطوط راست می‌نگارد. آیا روشی برای به خاطر سپردن این که چه بر چه نگاشته می‌شود موجود است؟ نکته‌کلیدی آنست که مبداء بر نقطه ∞ نگاشته می‌شود. هر خط راست (ونه دایره) از نقطه ∞ می‌گذرد. بنابراین خط راست و دایره‌ای که از مبداء بگذرد بر خط راست نگاشته می‌شود و چنانچه بر مبداء نگذرد بر دایره نگاشته می‌شود. در پایان توجه می‌کنیم، درون یک دایره که شامل مبداء باشد، برخارج یک دایره نگاشته و درون یک دایره که شامل مبداء نباشد (و مبداء نقطه مرزی آنهم نباشد)، بر درون یک دایره نگاشته می‌شود.

پرسش‌ها

۱- توابع $w = -z$ و $w = \bar{z}$ ، $w = 1/z$ همگی نیم‌دایره واحد زیرین را برنیم دایره واحد زیرین می‌نگارند. اختلافات آنها چیست؟

۲- در یک تابع خطی مساحت یک ناحیه با مساحت نگاره‌اش چگونه مقایسه می‌شود؟ در انعکاس چه؟

۳- برای $w = 1/z$ ، نگاره درون یک دایره که مبداء نقطه مرزی آن باشد چیست؟

۴- در انعکاس، مقاطع مخروطی به غیر از دایره، چگونه تغییر شکل می‌دهند؟

۵- آیا اختلافی میان انجام انعکاس به دنبال یک انتقال، با انتقال به دنبال یک انعکاس وجود دارد؟

۶- کدام زوج از چهار عمل انتقال، دوران، بزرگساز و انعکاس را می‌توان بدون تاثیر در خواص نگاشتی آن تعویض نمود؟

تمرینها

۱- برای نگاشت $w = (1+i)z + 2$ ، نگاره مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف - خط $y = 2x$ ب - خط $|z-1|=2$

پ - دایره $|z|=3$ ت - دایره $y = 3x + 2$

۲- نگاره نیم صفحه $\operatorname{Re} z > 0$ را تحت تبدیلات زیر بیابید.

الف - $w = 2iz - i$ ب - $w = i/z - 1$

۳- نگاره نوار نیمه - متناهی $0 < \operatorname{Re} z < 2$ را تحت تبدیل $w = (1-i)z + (2-i)$ بیابید، و رسم کنید.

- ۴- یک تبدیل خطی بیابید که نقاط $(3+2i)$ و $(1-i)$ را به ترتیب بر $5i$ و $(2+4i)$ بنگارد. آیا این تبدیل منحصر بفرد است؟
- ۵- ثابت کنید که تابع خطی $w = az + b$ دایره‌یی به شعاع r و بمركز z_0 را بر دایره‌یی به شعاع $|a|r$ و مركز $az_0 + b$ می‌نگارد.
- ۶- مثلث به رؤوس $3+4i$ ، $3+4i$ و $-5i$ مفروض است. در تبدیلات زیر نگاره مثلث را بیابید.

الف) $w = z + 5i$ ب) $w = iz + (2-i)$

پ) $w = (2+i)z - 3$

۷- نگاره خط $y = 2x + 1$ را تحت تبدیلات زیر بیابید.

الف) $w = 1/z$ ب) $w = i/z$ پ) $w = 1/(z-2i)$

۸- برای تبدیل $w = 1/z$ نگاره مجموعه‌های زیر را بیابید.

الف) دایره $|z-2|=1$ ب) دایره $|z-1|=2$

پ) دایره $|z-1|=1$ ت) میدان $\operatorname{Re} z > 1$

ث) نوار نامتناهی $\frac{1}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{3}{4}$

۹- ثابت کنید که انعکاس $w = 1/z$ ، دایره‌یی به شعاع r و به مركز z_0 ، $|z_0| \neq r$ را

بر دایره‌یی به شعاع $\frac{r}{||z_0||^2 - r^2}$ و بمركز $\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}$ می‌نگارد.

۱۰- برای تبدیل $w = 1/z$ نشان دهید که نگاره هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ لمینسکات $R^2 = \cos 2\theta$ (که $w = (R, \theta)$) است.

۱۱- نگاره نوارهای $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2$ و $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2$ را تحت نگاشت $w = 1/z$ بیابید.

۳-۲. تبدیلات خطی کسری

خارج قسمت دو تبدیل خطی تبدیلی بصورت

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (۶)$$

است که به تبدیل خطی کسری موسوم است. این تبدیل در حالات خاص شامل نگاشت‌های بخش قبل می‌باشد. برای $c=0$ یک تبدیل خطی داریم و برای $a=d=0$ و $b=c$ ، یک انعکاس داریم. از سوی دیگر (۶) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$w = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \quad (c \neq 0) \quad (۷)$$

این نشان می‌دهد که یک تبدیل کسری خطی را می‌توان به عنوان یک بزرگساز و دوران (cz) و به دنبال آن یک انتقال $(cz + d)$ و سپس یک انعکاس

$$\frac{1}{cz + d},$$

و به دنبال آن یک بزرگساز و دوران دیگر

$$\frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d},$$

و یک انتقال

$$\frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

در نظر گرفت. اگر $bc = ad$ تابع کسری خطی، به تابعی ثابت تبدیل می‌شود. چون بررسی توابع ثابت نکته جالبی در بر ندارد از این به بعد فرض می‌کنیم $bc \neq ad$. در این صورت تبدیل (۶) در صفحه گسترش یافته یک به یک است، و وارونی دارد که آن هم یک تبدیل کسری خطی است. از حل z نسبت به w داریم:

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

از اینرو نواحی را می‌توان با امکانات یکسان از صفحه w گسترش یافته بر صفحه z گسترش یافته و یا از صفحه w گسترش یافته بر صفحه z گسترش یافته نگاشت. با حذف کسرها، (۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$Azw + Bz + Cw + D = 0,$$

معادله‌ای که نسبت به z و w هر دو خطی است. بهمین دلیل تابع کسری خطی اکثر اوقات به تبدیل دو خطی موسوم است.

یک تبدیل دو خطی نمایش یک نگاشت پیوسته و یک به یک از صفحه مختلط گسترش یافته بر خودش می‌باشد. بطوریکه نقطه $z = -d/c$ بر نقطه $w = \infty$ و نقطه $z = \infty$ بر $w = a/c$ نگاشته می‌شود. یادآور می‌شویم که تبدیل خطی، دایره را بر دایره و خطوط راست را بر خطوط راست می‌نگارند. در حالی که یک انعکاس دایره و خطوط راست را بر دایره و خطوط راست می‌نگارد. ما از این نکات استفاده می‌کنیم تا خواص نگاشتی تبدیلات دو خطی را بیابیم. با توجه به (۷) برای $c \neq 0$ ، سه تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$z' = cz + d, \quad z'' = \frac{1}{z'}, \quad w = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)z''.$$

تبدیل اولی خطی است و دوایر صفحه z را بر دوایر در صفحه z' و خطوط راست صفحه z را بر خطوط راست صفحه z' مینگارد. دومی انعکاسی است که دوایر و خطوط راست در صفحه z' را بر دوایر و خطوط راست صفحه z می نگارد. سومی هم خطی است و دوایر در صفحه z را بر دوایر صفحه w و خطوط راست صفحه z را بر خطوط راست صفحه w می نگارد. اگر $c=0$ ، تبدیل خطی است. نتایج بالا را می توان بصورت زیر خلاصه نمود:

قضیه ۱-۳. هر تبدیل دو خطی دوایر و خطوط راست را بر دوایر و خطوط راست می نگارد.

تذکر - نقطه $z = -d/c$ در تبدیل دو خطی همان نقشی را ایفا می کند که $z=0$ در انعکاس دارد. بنابراین هر خط راست و دایره ای که بر نقطه $z = -d/c$ بگذرد بر خط راست و اگر از این نقطه نگذرد بر دایره نگاشته می شود.

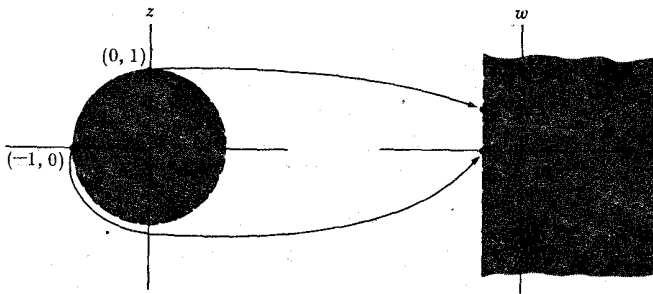
از قضیه ۱-۳، می توان اغلب برای ساده نمودن محاسبات استفاده نمود. به عنوان مثال، در تمرین ۶ بخش ۱-۲، از خواننده خواسته شده که نشان دهد:

$$\text{برای } |z| < 1 \text{ داریم } \operatorname{Re} \left\{ \frac{z}{1-z} \right\} > -\frac{1}{2}$$

احتمالا"، دانشجو قسمتهای حقیقی و انگاری $z/(1-z)$ را جدا کرده و در نقاط درون قرص واحد جایگزین نموده و سپس به نتیجه رسیده است. از روشهای راهیانه تری استفاده می کنیم که توجهی به محتوای حل دارد: تبدیل دو خطی $w = z/(1-z)$ دایره واحد را بر خط مستقیم می نگارد (چون که $z=1$ بر $w=\infty$ نگاشته می شود). با انتخاب هر دو نقطه متمایز بر دایره واحد، می توان این خط راست را مشخص نمود. نقاط -1 و i به ترتیب بر نقاط $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2} + i/2$ نگاشته می شوند. بنابراین نگاره دایره $|z|=1$ خط $\operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$ می باشد (ر. ک. شکل ۴)

پیوستگی نگاشت دو خطی سبب می شود که مجموعه های همبند بر مجموعه های همبند نگاشته شوند (تمرین ۸ بخش ۲-۵). چون هر نگاشت دو خطی، نگاشتی یک به یک از صفحه مختلط گسترش یافته بر خودش می باشد. پس نگاره $|z| < 1$ یا $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ است و یا $\operatorname{Re} z < -\frac{1}{2}$

برای یافتن نگاره ناحیه، تنها کافی است که یک نقطه آزمایش شود. از اینکه مبداء بر خودش نگاشته می شود اطمینان حاصل می کنیم که $|z| < 1$ بر $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ نگاشته می شود.



تاکنون به تعیین نگاره مجموعه‌ها تحت یک تبدیل دو خطی مشخص پرداختیم. اینک مسئله را وارونه کرده و سؤال زیر را در نظر می‌گیریم: دو مجموعه مفروضاند. تحت چه شرایطی یک نگاشت دو خطی از یک مجموعه بر روی مجموعه دیگر موجود است؟ درهندسه مقدماتی دیده‌ایم که هر سه نقطه‌ای برحسب اینکه همخط باشند و یا نباشند، مشخص کننده یک خط راست و یا یک دایره‌اند. هر تبدیل دو خطی، بسته به ضرائبش، دایره و یا خط راستی را که با این نقاط مشخص می‌شود بر دایره و یا خط راست می‌نگارد. اینک نشان می‌دهیم که برای A (یک دایره یا خط راست در صفحه z) و B (یک دایره یا خط راست در صفحه w) یک تبدیل دو خطی از A بر روی B موجود است.

قضیه ۲-۳. نقاط متمایز z_1, z_2, z_3 در صفحه z گسترش یافته و نقاط متمایز،

w_1, w_2, w_3 در صفحه w گسترش یافته مفروضاند. تبدیل دو خطی منحصر بفردی مانند

$$w = f(z) \text{ موجود است که } f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2, f(z_3) = w_3$$

اثبات - ابتدا فرض کنیم هیچ یک از این شش نقطه ∞ نباشد. تبدیل

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

را در نظر می‌گیریم. باید a, b, c, d را برحسب $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3$ محاسبه کنیم. این کار مشکل‌تر از آن به نظر می‌رسد که هست. برای $k = 1, 2, 3$ داریم:

$$w - w_k = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_k + b}{cz_k + d} = \frac{(ad - bc)(z - z_k)}{(cz + d)(cz_k + d)} \quad (۸)$$

از (۸) حاصل می‌گردد

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{(cz_3 + d)}{(cz_1 + d)} \left(\frac{z - z_1}{z - z_3} \right) \quad (۹)$$

چنانچه در (۹) z را با z_2 و w را با w_2 جایگزین کنیم داریم:

$$\frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{(cz_1 + d)}{(cz_3 + d)} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \right) \quad (۱۰)$$

از ضرب (۹) در (۱۰) داریم:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad (11)$$

تبدیل مطلوب از حل این معادله نسبت به z برحسب این شش نقطه بدست می آید. اگر یکی از این نقاط در ∞ می بود، مثلاً $z_3 = \infty$ ، در این صورت (۱۱) را باید با تعیین حد آن وقتی z_3 به ∞ میل کند، اصلاح کنیم و در این حالت داریم:

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

نشان دادن این امر که (۱۱) تبدیل را بطور منحصرفردی مشخص می کند به دانشجو واگذار می کنیم.

تذکر ۱- طرف راست (۱۱) را نسبت توافقی نقاط z_1 و z_2 و z_3 و z می نامند. و با $[z_1, z_2, z_3, z]$ نمایانده می شود. (۱۱) مبین آن است که در یک تبدیل دو خطی نسبت توافقی پایا است. یعنی که برای هر چهار زوج نقاط متمایز (z_1, w_1) ، (z_2, w_2) ، (z_3, w_3) و (z_4, w_4) از یک تبدیل دو خطی بایست داشته باشیم:

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4].$$

تذکر ۲- این حیرت انگیز نیست که سه نقطه یک تبدیل دو خطی را مشخص کند. اگر (۶) را به یکی از ثابتهای مخالف صفر (فرض کنیم $a \neq 0$) تقسیم کنیم، در این صورت (۶) را می توان بصورت زیر نوشت:

$$w = \frac{z + B}{Cz + D},$$

و با کمک جبر مقدماتی از سه معادله می توان سه مجهول را بدست آورد.

مثال ۱- یک تبدیل دو خطی بیابید که نقاط ۲- و ۳ را به ترتیب بر ۱- و ۱ و $w = i$ بنگارد.

روش ۱- از (۱۱) داریم:

$$\frac{(w - i)(1 + 1)}{(w + 1)(1 - i)} = \frac{(z - i)(2 + 2)}{(z + 2)(2 - i)}$$

که پس از حل نتیجه می شود:

$$w = \frac{3z + 2i}{iz + 6}.$$

روش ۲- تبدیل مطلوب به شکل (۶) است که یا a و یا b مخالف صفر است. فرض کنیم $a \neq 0$ ، تبدیل را به صورت $w = (z + B)/(Cz + D)$ می نویسیم که به دستگاه معادلات زیر منجر می گردد.

$$B + C - iD = -i,$$

$$B - 2C - D = -2,$$

$$B - 2C + D = 2.$$

و پس از حل نتیجه می شود $D = 2$ ، $C = i/3$ ، $B = 2i/3$ پس تبدیل دو خطی مطلوب بصورت زیر است:

$$w = \frac{z + (2i/3)}{(i/3)z + 2}$$

تذکره - اگر فرض ما (یعنی $a \neq 0$) درست نمی بود، دستگاه معادلات جواب نمی داشت. دانشجویی تواند این مطلب را با سعی دریافتن یک تبدیل دو خطی که نقاط $z = 1, -1, i$ را به ترتیب بر نقاط $-i$ و -1 و 1 بنگارد، مورد آزمایش قرار دهد. اگر در حالت $a \neq 0$ جوابی نیافتیم. تبدیل دو خطی مطلوب باید بصورت $w = A/(Bz + C)$ باشد.

مثال ۲- یک تبدیل دو خطی بیابید که نقاط $z = 1 - i$ و $1 + i$ را به ترتیب بر $0, 1, \infty$ بنگارد.

روش ۱- چنانچه در (۱۱) w_3 به ∞ میل دهیم مشاهده خواهیم کرد که تبدیل مطلوب برابر است با:

$$w = \frac{z - (1 - i)}{iz + (1 + i)}.$$

روش ۲- چنانچه جواب به شکل $w = (z + B)/(Cz + D)$ باشد، معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$B = -(1 - i),$$

$$C(1 + i) + D = 2i,$$

$$-D/C = -1 + i,$$

و نتیجه مطلوب حاصل خواهد شد.

تاکنون دیده ایم، یک تبدیل دو خطی منحصر بفرد موجود است که سه نقطه متمایز

در صفحه z را بر سه نقطه متمایز بر صفحه w می نگارد. این مطلب منجر به یافتن راههایی برای نگاشتن دوائر و خطوط راست بر دوائر و خطوط راست شده است، گو اینکه منحصر بفرد نیست. برای مثال جهت یافتن تابعی که خط را بر دایره می نگارد، می توانیم هر سه نقطه دلخواه بر خط انتخاب کنیم و آنها را با سه نقطه دلخواه بر دایره متناظر سازیم. آن تبدیل دو خطی که نقاط $z = 1, 0, \infty$ را به ترتیب هر نقاط $w = 1, -1, i$ بنگارد به صورت زیر است:

$$w = i \left(\frac{z - [(1+i)/2]}{z - [(1-i)/2]} \right)$$

این تابع که خط حقیقی را بر دایره واحد می نگارد. هم چنین نیم صفحه زیرین را بر درون دایره واحد و نیم صفحه زیرین را بر خارج آن می نگارد. قابل توجه است که نقطه $z = (1+i)/2$ در نیم صفحه زیرین بر مبدأ $z = (1-i)/2$ در نیم صفحه زیرین ∞ نگاشته می شود. از سوی دیگر آن تبدیل دو خطی که نقاط $z = 0, 1, \infty$ را به ترتیب بر $w = 1, -1$ بنگارد بصورت زیر است:

$$w = i \left(\frac{z - [(1-i)/2]}{z - [(1+i)/2]} \right),$$

که این تبدیل نیم صفحه زیرین را بر درون دایره واحد و نیم صفحه زیرین را بر خارج آن می نگارد.

اینک سعی میکنیم تا همه تبدیلات دو خطی که نیم صفحه زیرین را بر درون دایره واحد می نگارند، مشخص سازیم. این تبدیلات، البته، می بایست خط حقیقی را بر دایره واحد بنگارند. با فرض $w = (az+b)/(cz+d)$ ، جهت یافتن شرایط حاکم بر ضرائب، نقاط خاصی انتخاب می کنیم. چون برای $z = 0$ و $z = \infty$ داریم $|w| = 1$ ، حاصل می شود که:

$$\left| \frac{b}{d} \right| = 1, \quad \left| \frac{a}{c} \right| = 1 \quad (12)$$

با توجه به (۱۲) داریم:

$$\left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{d}{c} \right|$$

بنابراین تبدیل را می توان بصورت زیر نوشت:

$$w = \frac{a z + b/a}{c z + d/c} = A \frac{z - z_0}{z - z_1}, \quad (13)$$

که در آن $|A| = 1$ و $|z_0| = |z_1|$ یا می‌توان ارتباط بیشتری بین z_0 و z_1 و یافت؟ با قرار دادن $z = 1$ در (۱۳) داریم:

$$|w| = |A| \left| \frac{1 - z_0}{1 - z_1} \right| = 1,$$

و یا

$$|1 - z_0| = |1 - z_1|. \quad (14)$$

پس از ساده کردن (۱۴) نتیجه می‌شود که $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re} z_1$ ، چون که $|z_1| = |z_0|$ پس یا $z_1 = z_0$ و یا $z_1 = \bar{z}_0$.

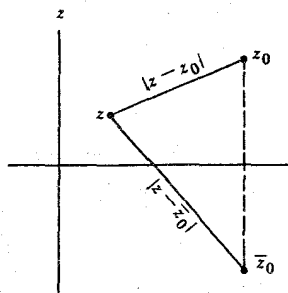
اگر $z_1 = z_0$ ، (۱۳) به تابع ثابت تبدیل می‌شود. بنابراین $z_1 = \bar{z}_0$ و عمومی‌ترین صورت یک تبدیل دو خطی که خط حقیقی را بر دایره واحد بنگارد بصورت زیر است:

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad (15)$$

که در آن $|A| = 1$. چون z_0 بر مبداء و \bar{z}_0 بر ∞ نگاشته می‌شود، (۱۵) نیم صفحه زیرین را با شرط $\operatorname{Im} z_0 > 0$ بر درون دایره واحد و با شرط $\operatorname{Im} z_0 < 0$ بر بیرون آن می‌نگارد.

برای درک این مطلب هندسی، z_0 را در نیم صفحه زیرین انتخاب می‌کنیم (ر.ک. شکل ۵) در این صورت نقاط z و z_0 در یک طرف عمود منصف (محور حقیقی) پاره خطی که z_0 را به \bar{z}_0 وصل می‌کند قرار دارد. بنابراین $|z - \bar{z}_0| < |z - z_0|$ و

$$|w| = |A| \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| < 1 \quad \text{برای } \operatorname{Im} z > 0$$



تنها تابع $w = z$ واجد این خاصیت زیبا است که هر مجموعه را بر خودش بنگارد. از سوی دیگر تبدیل دو خطی صفحه مختلط گسترش یافته را بر خودش می‌نگارد. با داشتن یک ناحیه مفروض، تا اندازه‌ی جالب خواهد بود، همه‌نگاشت‌های دو خطی که این ناحیه

را بر خودش می نگارد مشخص کنیم. اینک این کار را برای نیم صفحه زیرین انجام می دهیم. می خواهیم عمومی ترین مجموعه ضرایب را بیابیم که $w = (az + b)/(cz + d)$ ناحیه $\text{Im } z > 0$ را بر ناحیه $\text{Im } w > 0$ بنگارد. همانند مثال قبل ابتداء همه نگاشتهای دوخطی از مرز ناحیه در صفحه z بر روی مرز ناحیه در صفحه w را می یابیم و سپس زیر مجموعه ای از این نگاشت ها را که در شرط اضافی ما صادق باشند مشخص می کنیم. نگاشتهای دوخطی که $\text{Im } z = 0$ را بر $\text{Im } w = 0$ می نگارند، بدین ترتیب بدست می آیند که سه نقطه دلخواه از محور حقیقی صفحه z را بر سه نقطه دلخواه از محور حقیقی صفحه w بنگاریم. فرض کنیم $w = [0, 1, \infty, w]$ چون $z = z_1, z_2, z_3$ به ترتیب بر نقاط $0, 1, \infty$ نگاشته شوند. پایا می باشد، نسبت توافقی نشان می دهد که

$$w = [z_1, z_2, z_3, z] = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \quad z \text{ برای هر}$$

چونکه z_1, z_2, z_3 حقیقی هستند. ضرایب $w = (az + b)/(cz + d)$ همگی می - بایست حقیقی باشند.

برای اینکه شرایط مورد لزوم دیگر را بیابیم، $z = x + iy$ ، $y > 0$ را انتخاب می کنیم. در این صورت:

$$w = \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} = \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2}{(cx + d)^2 + (cy)^2} + i \frac{y(ad - bc)}{(cx + d)^2 + (cy)^2}$$

$$\text{Im } w = v = \frac{y(ad - bc)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} > 0 \quad \text{اگر و تنها اگر } ad - bc > 0$$

به سادگی می توان نشان داد که این نگاشت پوشا است. بنابراین عمومی ترین نگاشت

دو خطی که نیم صفحه زیرین را بر خودش می نگارد. بصورت $w = (az + b)/(cz + d)$ است که در آن a, b, c, d حقیقی اند و $ad - bc > 0$.

مسئله نهایی این بخش این است که همه تبدیلات دو خطی را که قرص واحد را بر خودش می نگارد مشخص کنیم. برای این کار لازم است، نگاشتهایی که دایره واحد را بر خودش می نگارند مشخص کرد. در تمرین ۱۰ از خواننده خواستهایم، نشان دهد ترکیب دو نگاشت دو خطی، یک نگاشت دو خطی است. و فعلاً آنرا اثبات شده فرض می کنیم. هر دوران تابع همانی (یعنی، $w = az$ ، $|a| = 1$) یک جواب مسئله است. ولی تبدیلات عمومی تری موجودند که قرص واحد را بر خودش می نگارند و با یک روشی نسبتاً غیرمستقیم آنها را می یابیم. چنانکه دیده ایم، آن دسته از تبدیلات دو خطی که نیم

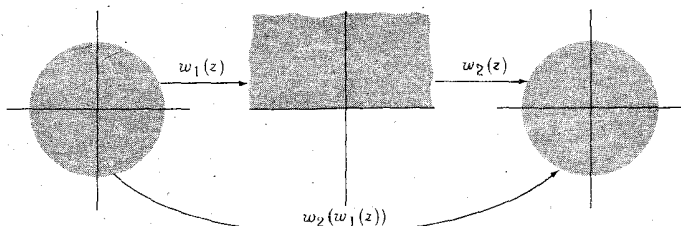
صفحه زیرین را بر درون قرص واحد می‌نگارند بصورت زیر هستند:

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \quad (|A| = 1, \operatorname{Im} z_0 > 0). \quad (16)$$

در نتیجه، آن دسته از تبدیلات دوخطی که درون قرص واحد را بر نیم صفحه زیرین بنگارند به صورت زیر هستند:

$$w = \frac{z\bar{z}_0 - Az_0}{z - A} \quad (|A| = 1, \operatorname{Im} z_0 > 0). \quad (17)$$

(در "۱۶" جای z و w را عوض کرده و سپس حل کنید). فرض کنیم تبدیل دوخطی w_1 درون قرص واحد را بر نیم صفحه زیرین بنگارد و تبدیل دوخطی دیگر w_2 نیم صفحه زیرین را بر درون قرص واحد بنگارد. در این صورت $w_2(w_1(z))$ یک تبدیل دوخطی است که درون قرص واحد را بر خودش می‌نگارد (ز. ک. شکل ۶)



با قرار دادن $A = -1$ و $z_0 = i$ در (۱۷) حاصل می‌شود:

$$w = -i \frac{z-1}{z+1}. \quad (18)$$

این، شاید، "زیباترین" نگاشت از درون قرص واحد بر نیم صفحه زیرین باشد. اکنون تمام تبدیلات دوخطی، که قرص واحد را بر خودش می‌نگارند را می‌توان "فاکتوری" از تبدیل (۱۸) به حساب آورد. روشن‌تر این که، اگر w^* چنین نگاشتی باشد در این صورت w^* را می‌توان بصورت:

$$w^*(z) = w\left(-i \frac{z-1}{z+1}\right), \quad (19)$$

نوشت که در آن w یک نگاشت دوخطی است که نیم صفحه زیرین را بر قرص واحد می‌نگارد. تابع w در (۱۹) می‌بایست به شکل (۱۶) باشد. پس از حل، خواهیم داشت:

$$w^*(z) = A \frac{(z_0 + i)z + (z_0 - i)}{(\bar{z}_0 + i)z + (\bar{z}_0 - i)} \quad (\operatorname{Im} z_0 > 0).$$

این را می توان به شکل زیر نوشت :

$$w^*(z) = A \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}} \quad (|A| = 1, |\beta| < |\alpha|).$$

پس از تقسیم صورت و مخرج بر α و با انتخاب $\gamma = -\beta/\alpha$ خواهیم داشت :

$$w^*(z) = A \frac{z - \gamma}{-\bar{\gamma}(\bar{\alpha}/\alpha)z + (\bar{\alpha}/\alpha)} = -A \frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \frac{z - \gamma}{\bar{\gamma}z - 1}.$$

بنابراین $w^*(z)$ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$w^*(z) = K \frac{z - \gamma}{\bar{\gamma}z - 1} \quad (|K| = 1, |\gamma| < 1). \quad (20)$$

چون یک تناظر یک به یک میان w و w^* در (۱۹) برقرار است ، از این رو عبارت (۲۰) مشخص کننده همه نگاشت های دو خطی است که درون قرص واحد را بر خودش می نگارد . باید توجه داشت که هر نقطه انتخابی γ درون قرص را می توان بر مبداء نگاشت .

تذکر ۱- اگر $|\gamma| > 1$ ، (۲۰) نمایش همه تبدیلات دو خطی است که درون قرص واحد را بر خارج قرص واحد می نگارند .

تذکر ۲- یک نگاشت از یک ناحیه بر ناحیه دیگر (یا بر خودش) ، از نقطه نظره ندسی نگاشتی است از نقاط یک صفحه بر نقاط صفحه دیگر . بنابراین (۲۰) نمایش نگاشتی از $|z| < 1$ بر روی $|w| < 1$ است . تابع مرکب نشان داده شده در شکل ۶ را می توان به عنوان نگاشتی از صفحه z بر یک صفحه واسطه که به دنبال آن نگاشتی از این صفحه واسطه بر صفحه w آمده تصور کرد . ولی باید به خاطر داشت که هر سه تایی این صفحات در واقع همان صفحه مختلط هستند .

پرسش ها

- ۱- چرا در موقع انتخاب سه نقطه اغلب راحت تر آن است که نقاط ۰ و ۱ و ∞ را در نظر گرفت ؟
- ۲- چه وقت حاصل جمع دو تبدیل دو خطی ، یک تبدیل دو خطی است ؟ حاصل ضرب چگونه ؟
- ۳- چه نوع تبدیل دو خطی ∞ را بر خودش می نگارد ؟
- ۴- چه نوع تبدیل دو خطی ∞ را بر مبداء می نگارد ؟

- ۵- آیا یک تبدیل دو خطی می‌تواند هیچ نقطه‌یی را بر خودش نگارد؟
- ۶- چند تبدیل دو خطی موجود است که بیش از دو نقطه را بر خودش نگارد؟
- ۷- بدون جایگذاری نقاط، آیا روشی موجود است که بدان وسیله مشخص کنیم، یک ناحیه بر درون یا خارج ناحیه دیگر نگاشته می‌شود؟
- ۸- در مورد وجود یک تابع دو خطی از یک مثلث بر یک مربع چه می‌توان گفت؟ مثلث بر یک دایره؟ مثلث بر یک خط راست؟ مربع بر یک مربع؟
- ۹- از رابطه (۱۵) در می‌یابیم که یک نگاشت دو خطی از خط حقیقی بر دایره واحد بطور منحصربفرد با یافتن نقطه‌یی که بر مبدأ نگاشته می‌شود و یک نقطه دیگر مشخص می‌شود. آیا این مطلب با این نکته که سه نقطه مشخص یک تبدیل دو خطی است متناقض است؟
- ۱۰- آیا غیر از تبدیلات دو خطی، نگاشت یک به یک دیگری از صفحه گسترش یافته بر روی خودش وجود دارد؟

تمرینها

- ۱- یک تبدیل دو خطی بیابید که نقاط متناظر زیر را بر هم بنگارد.
- (الف) $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i$ را بر $w_1 = i, w_2 = -i, w_3 = 0$
- (ب) $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = \infty$ را بر $w_1 = i, w_2 = -1, w_3 = 0$
- (پ) $z_1 = 2, z_2 = -1, z_3 = -i$ را بر $w_1 = \infty, w_2 = -1, w_3 = -i$
- (ت) $z_1 = 2, z_2 = \infty, z_3 = i$ را بر $w_1 = \infty, w_2 = -1, w_3 = 1$
- ۲- در تبدیل $w = iz/(z-1)$ ، نگاره مجموعه‌های زیر را بیابید.
- (الف) قرص واحد $|z| \leq 1$
- (ب) نیم صفحه راست $\operatorname{Re} z \geq 0$
- (پ) نیم صفحه زیرین $\operatorname{Im} z \geq 0$
- (ت) قطاع نامتناهی $\pi/4 < \operatorname{Arg} z < \pi/2$
- ۳- در تبدیل $w = (z-1)/(z+1)$ ، نگاره مجموعه‌های زیر را بیابید.
- (الف) $|z| \leq r < 1$ (ب) $|z| \leq r$ ($r > 1$)
- (پ) $\operatorname{Im} z > 1$ (ت) $\operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z$
- ۴- فرض کنیم w یک تبدیل خطی از خط حقیقی بر دایره واحد باشد. اگر z_1 بر w_1 نگاشته شود، نشان دهید \bar{z}_1 بر $1/\bar{w}_1$ نگاشته می‌شود.
- ۵- فرض کنیم w یک تبدیل دو خطی از دایره واحد بر خودش باشد. اگر z_1 بر w_1

نگاشته شود، نشان دهید $1/\bar{z}_1$ بر $1/\bar{w}_1$ نگاشته می شود.

۶- ثابت کنید، نسبت توافقی چهار نقطه متمایز حقیقی است اگر و تنها اگر چهار نقطه بر یک دایره یا بر یک خط راست واقع باشند. (راهنمایی: نگاره خط حقیقی در یک نگاشت دو خطی چیست؟)

۷- یک نقطه را نقطه پابرجا از یک تبدیل و خطی گویند، اگر برخوردش نگاشته شود. اگر z_1 و z_2 دو نقطه متمایز پابرجا از یک تبدیل دو خطی باشند، نشان دهید که آن تبدیل را می توان بصورت $K[(z - z_1)/(z - z_2)] = K[(w - z_1)/(w - z_2)]$ نوشت، که در آن K یک ثابت مختلط است.

۸- نشان دهید، یک تبدیل دو خطی ۱، ۲ و یا به تعداد نامتناهی نقطه پابرجا دارد. شرایطی برای هر یک از این رخدادها را بررسی و اثبات کنید.

۹- نشان دهید، تبدیل دو خطی

$$w = w(z) = \frac{(z_1 + z_2)z - 2z_1z_2}{2z - (z_1 + z_2)} \quad (z_1 \neq z_2)$$

دارای نقاط پابرجای z_1 و z_2 می باشد و ثابت کنید $w(w(z)) = z$

۱۰- فرض کنید

$$w_1 = w_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$$

و

$$w_2 = w_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$$

ثابت کنید، $w_1w_2(z) = w_1(w_2(z))$ نیز یک تبدیل دو خطی است.

۱۱- فرض کنیم $w_1(z)$ ، $w_2(z)$ و $w_3(z)$ تبدیلات دو خطی باشند. ثابت کنید

$$w_1(w_2w_3)(z) = (w_1w_2)w_3(z)$$

۱۲- برای هر تبدیل دو خطی $w_1(z)$ ، نشان دهید، یک تبدیل دو خطی

موجود است بطوری که:

$$w_1(w_2(z)) = w_2(w_1(z)) = z$$

۱۳- تمرینهای ۱۰، ۱۱ و ۱۲ مبین آنند که تبدیلات دو خطی تحت عمل ترکیب

یک گروه تشکیل می دهند. با یافتن دو تبدیل خطی $w_1(z)$ و $w_2(z)$ بطوری که

$$w_1(w_2(z)) \neq w_2(w_1(z))$$

نشان دهید این گروه جابجایی نیست.

۱۴- همه تبدیلات دو خطی که محور انگاری را بر دایره واحد می نگارند بیابید.

۱۵- نشان دهید، یک تبدیل دو خطی که فرض $|z| \leq r_1$ را بر روی قرص $|w| \leq r_2$ می‌نگارد حتماً "بایستی به شکل:

$$w = \frac{Ar_1r_2(z - z_0)}{r_1^2 - \bar{z}_0 z},$$

باشد که در آن $|A| = 1$ و $|z_0| < r_1$.

۱۶- نشان دهید که تبدیلات دوخطی مجموعه‌های باز را بر مجموعه‌های باز می‌نگارند.

۳-۳- نگاشت‌های دیگر

در این بخش خواص نگاشتی توابعی به غیر از تبدیلات دوخطی را بررسی می‌کنیم. تابع $w = z^2$ را در نظر می‌گیریم. با جداسازی قسمت‌های حقیقی و انکاری آن حاصل می‌گردد.

$$w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy).$$

این تابع نقطه (a, a) در صفحه z را بر $(0, 2a^2)$ در صفحه w می‌نگارد. یعنی که پرتو $y = x$ با $x > 0$ بر پرتو $(0, v)$ با $v > 0$ نگاشته می‌شود. و پرتو $x < 0$ ، $y = x$ هم بر پرتو $(0, v)$ ، $v > 0$ نگاشته می‌شود، به بیان دیگر، خط $y = x$ دوبار بر پرتو $(0, v)$ ، $v \geq 0$ نگاشته می‌شود (ر. ک. شکل ۷). ملاحظه شود که، به خلاف تبدیلات دوخطی، تابع $w = z^2$ یک به یک نیست.

در حالت عمومی نقطه $(x, y) = (x, mx)$ بر نقطه

$$(u, v) = ((1 - m^2)x^2, 2mx^2).$$

نگاشته می‌شود، چون:

$$\frac{v}{u} = \frac{2m}{1 - m^2} \quad (m \neq 1),$$

خط راست $y = mx$ دوبار بر پرتو

$$v = \left(\frac{2m}{1 - m^2} \right) u,$$

نگاشته می‌شود. اگر $|m| < 1$ ، u همه اعداد حقیقی غیر منفی را می‌پذیرد. و اگر $|m| > 1$ ، u همه اعداد حقیقی غیر مثبت را می‌پذیرد. قابل توجه است که ناحیه $0 < \text{Arg } z < \pi/4$ بر ربع اول نگاشته می‌شود.

برای یافتن پیش‌نگاره یک دایره تحت تابع $w = z^2$ ، می‌نویسیم.

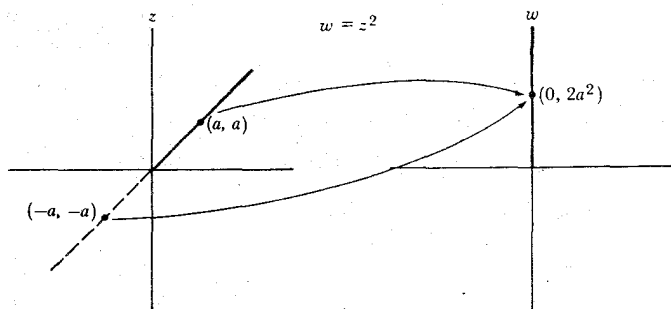
$$u^2 + v^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

بنابراین بر دایره در صفحه z به مرکز مبدأ و شعاع r بر دایره‌ی در صفحه w به

مرکز مبداء و شعاع r^2 نگاشته می شود. شاید طبیعی تر این باشد که این تابع را نسبت به مختصات قطبی اش نمایش دهیم. داریم:

$$w = z^2 = [r \cos \theta + i \sin \theta]^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

بنابراین هر نقطه با مختصات قطبی (r, θ) در صفحه z بر نقطه‌یی با مختصات قطبی $(r^2, 2\theta)$ در صفحه w نگاشته می شود، یعنی به نقطه‌یی که دوری آن از مبداء مجذور گردیده و شناسه اش دو برابر شده است.



شکل ۷

توابع $w = z$ و $w = z^2$ هر دو دایره واحد را بر خودش می نگارند؛ ولی شباهت این دو نگاشت به هم دیگر بیش از شباهت دو تابع حقیقی $y = x^2$ و $y = x$ به هم نیست. دو تابع حقیقی اخیر هم فاصله بسته $[0, 1]$ را بر خودش می نگارند. تابع $w = z^2$ دایره واحد را دوبار می پیماید، درواقع این نگاشت هر نیم دایره به مرکز مبداء را بر یک دایره می نگارد. ما نمی بایست تابع $w = z^2$ را بدون مقایسه با همتای حقیقی اش، یعنی سهمی $y = x^2$ رها کنیم. خط $c = y$ در صفحه z به:

$$u = x^2 - c^2, \quad v = 2xc,$$

تبدیل می گردد که از آن حاصل می شود

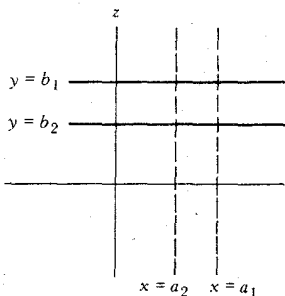
$$u = \left(\frac{v}{2c}\right)^2 - c^2 = \frac{v^2}{4c^2} - c^2.$$

بنابراین خطوط راست $y = \pm c \neq 0$ بر سهمی

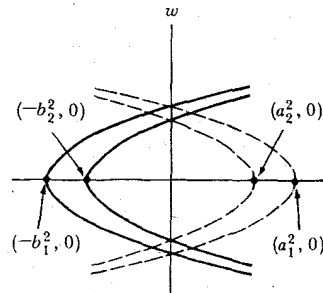
$$u = \frac{v^2}{4c^2} - c^2.$$

نگاشته می شود. اگر $c = 0$ ، سهمی به پیرتو $(u, 0)$ ، $u \geq 0$ تبدیل می گردد. به روشی مشابه می توان نشان داد که خطوط راست $x = \pm a \neq 0$ بر سهمی زیر نگاشته می شوند. (ر. ک. شکل ۸).

$$u = -\left(\frac{v^2}{4a^2} - a^2\right)$$

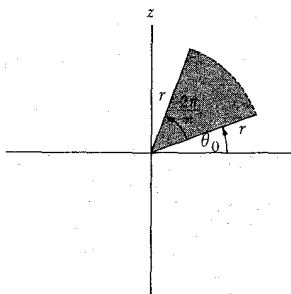


$$w = z^2$$

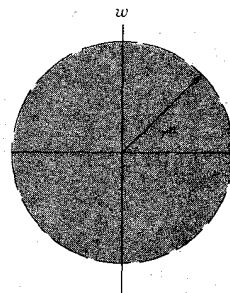


شکل ۸

برای عدد صحیح مثبت n ، تابع $w = z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ، نقاطی را که دوری آنها از مبدا r باشد بر نقاطی با دوری از مبدا r^n می‌نگارد، و نقاطی را که شناسه آنها θ باشد بر نقاطی با شناسه $n\theta$ می‌نگارد. این تابع کمان (r, θ) ، $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + (2\pi/n)$ را بر دایره‌یی به شعاع r^n و بمرکز مبدا می‌نگارد (ر. ک. شکل ۹)



$$w = z^n$$

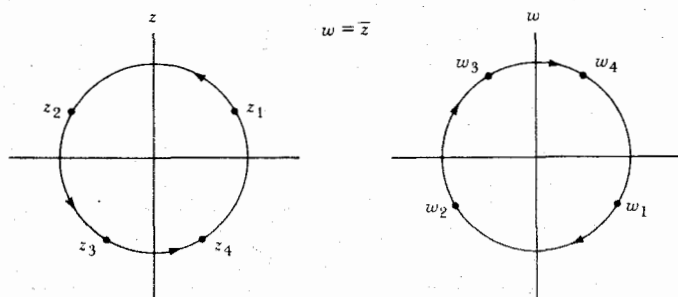


شکل ۹

تابع $w = \bar{z} = x - iy = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ هم تابع دیگری است که دایره را بر خودش می‌نگارد. این تابع نقطه (r, θ) را بر نقطه $(r, -\theta)$ می‌نگارد. بنابراین نگاره دایره واحد با جهتی مخالف حرکت عقربه‌های ساعت، دایره واحد، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است (ر. ک. شکل ۱۰)، قابل توجه است که نیم صفحه زیرین بر نیم صفحه زیرین نگاشته می‌شود.

در حالی که ترکیب تبدیلات دو خطی، تبدیل دو خطی است (تمرین ۱۰ بخش ۳-۲) حاصل جمع تبدیلات دو خطی لزوماً چنین نیست. آخرین تابعی که در این فصل مورد بررسی قرار می‌دهیم تابع زیر است:

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$



شکل ۱۰

باجداسازی قسمت‌های حقیقی و انکاری آن داریم :

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(r(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta + i \left(\frac{1}{2} \right) \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

دایره واحد، $r = 1$ ، بر $w = u = \cos \theta$ نگاشته می‌شود. در حالی که θ فاصله $[0, \pi]$ را می‌پیماید، u بطور پیوسته از ۱ به -1 کاهش می‌یابد؛ در حالیکه θ فاصله $[\pi, 2\pi]$ را می‌پیماید، u فاصله $[-1, 1]$ را می‌پیماید. بنابراین نیمه‌های زیرین و زیرین دایره واحد هر دو فاصله بسته $[-1, 1]$ نگاشته می‌شوند.

جالب است متذکر شویم که در این تبدیل، نقاط z و $1/z$ هر دو بر یک نقطه نگاشته می‌شوند. چون $1/z$ خارج دایره واحد است اگر و تنها اگر z درون دایره واحد باشد، کافی است که خواص نگاشتی آن را برای $|z| > 1$ مورد بررسی قرار دهیم:

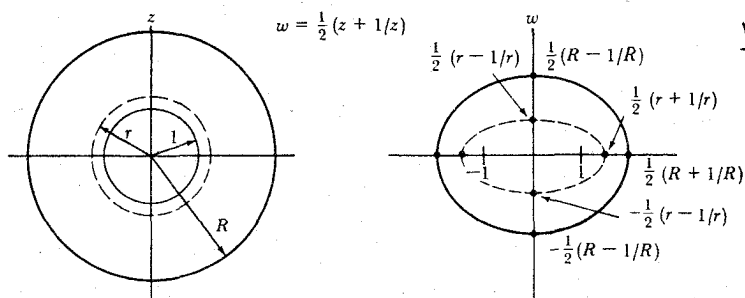
از روابط

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \theta, \quad (21)$$

دیده می‌شود که، برای $r > 1$

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{2}(r + 1/r)} \right)^2 + \left(\frac{v}{\frac{1}{2}(r - 1/r)} \right)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

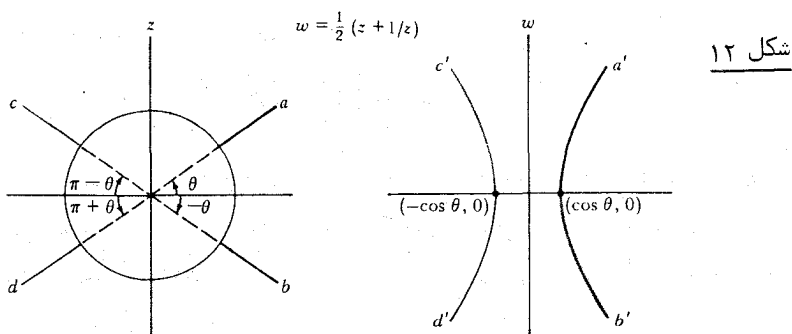
یعنی که دایره $|z| = r > 1$ بر یک بیضی که محور بزرگ آن بر محور u قرار دارد، نگاشته می‌شود. با افزایش r ، بیضی مستدیرتر می‌گردد و هم‌چنان که r به 1 کاهش می‌یابد بیضی به فاصله $[-1, 1]$ تبدیل می‌گردد (ر.ک. شکل ۱۱).



سپس بررسی می‌کنیم که پرتو $\text{Arg } z = \theta$ به چه تبدیل می‌شود. برای $r \geq 1$ با توجه به (۲۱) می‌بینیم که پرتوهای $\text{Arg } z = 0$ و $\text{Arg } z = \pi$ برخوردشان نگاشته می‌شوند، گرچه (به استثنای ∞) تنها نقاط $(1, 0)$ و $(-1, 0)$ هستند که پای‌جا می‌مانند. بطریق مشابه $\text{Arg } z = \pi/2$ بر $\text{Arg } w = \pi/2$ ($r > 1$) نگاشته می‌شود. برای دیگر مقادیر θ ، بموجب (۲۱)، داریم:

$$\left(\frac{u}{\cos \theta}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sin \theta}\right)^2 = \frac{1}{4} \left[\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \right] = 1, \quad (22)$$

که معادله یک هذلولی است. برای $(r > 1)$ هر کمان این هذلولی در همان ربعی واقع است که پرتو $\text{Arg } z = \theta$ قرار دارد (ر.ک. شکل ۱۲).



خلاصه آنکه، تابع

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

دایره واحد را دو بار بر فاصله $[-1, 1]$ و همه دوائر دیگر را بر بیضی‌ها می‌نگارد. این تابع درون و خارج دایره واحد هر دو را بر صفحه مختلط گسترش یافته، به استثنای

فاصله حقیقی $[-1, 1]$ ، می نگارد، بالاخره، این تابع پرتوهای با شناسه ثابت را بر کمانهایی از هذلولی می نگارد.

پرسشها

- ۱- در تابع $w = z^2$ ، نگاره c و نگاره $-c$ و در چه اختلاف دارند؟
- ۲- بزرگترین میدانی که تابع $w = z^2$ در آن یک به یک است کدام است؟
- ۳- چرا بحث در مورد تابع $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ ساده تر از بحث در مورد تابع $w = z + 1/z$ بود؟
- ۴- چه وقت یک پرتو دارای شناسه ثابت است؟
- ۵- بزرگترین میدانی که تابع $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ در آن یک به یک می شود کدام است؟
- ۶- چگونه می توان خواص نگاشتی دو بخش اخیر را ادغام کرد؟

تمرینها

- ۱- نشان دهید، تابع $w = z^2$ هذلولی های $x^2 - y^2 = C$ و $xy = K$ را بر خطوط راست می نگارد.
- ۲- نشان دهید، $w = ((1+z)/(1-z))^2$ ، قرص $|z| < 1$ را بر صفحه، به استثنای پرتو $(u, 0)$ ، $u \leq 0$ می نگارد.
- ۳- نشان دهید، $w = z/(1-z)^2$ قرص $|z| < 1$ را بر صفحه به استثنای پرتو $(u, 0)$ ، $u \leq -\frac{1}{4}$ می نگارد. راهنمایی:

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}.$$

- ۴- نشان دهید که، تابع $w = z^2$ قرص $|z-1| \leq 1$ را بر دایره $R=2(1+\cos\theta)$ می نگارد.
- ۵- خواص نگاشتی $w = z^{-n}$ را که در آن n عددی صحیح مثبت است، را بررسی کنید.
- ۶- نگاره قطاع $0 < \text{Arg } z < \pi/n$ ، $|z| < 1$ را برای هر یک از توابع زیر بیابید.

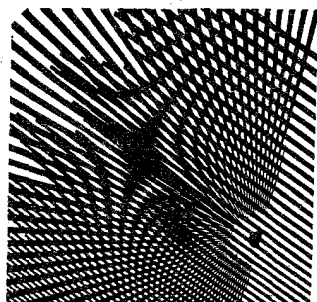
$$w = \frac{z^n + 1}{z^n - 1} \quad (\text{الف}) \quad w = \left(\frac{z^n + 1}{z^n - 1} \right)^2 \quad (\text{ب})$$

- ۷- نگاره قرص واحد $|z| \leq 1$ را تحت تابع زیر بیابید:

$$w = \prod_{k=1}^n \frac{|z_k|}{z_k} \left(\frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k z} \right)$$

- ۸- خواص نگاشتی $w = cz + 1/cz$ را وقتی که c یک عدد مختلط دلخواه باشد،

بررسی کنید.



۴. توابع مقدماتی

اکثر محصلین دبیرستان با "اثبات" زیر ممکن است گمراه شوند: فرض کنیم $a = b$ در این صورت $a^2 = ab$ ، $a^2 - b^2 = ab - b^2$ ، و $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = b(a - b)$. با تقسیم بر $a - b$ خواهیم داشت $a + b = b$ ، $2b = b$ ، و $2 = 1$. خواننده حتماً "توجه داشت که ما عمل تقسیم بر صفر را که مجاز نیست انجام دادیم. اینک عمل محالی بدون تقسیم بر صفر ارائه می‌دهیم. چون $1/-1 = -1/1$ ، با جذرگرفتن از طرفین داریم $\sqrt{(1/-1)} = \sqrt{(-1/1)}$ ، $\sqrt{1/\sqrt{-1}} = \sqrt{-1/\sqrt{1}}$ یا $1 = -1$. این فصل نشان خواهد داد که 1 واقعا "برابر 1- نیست. هم چنین خواهیم دید که نماهای مختلط و توابع مثلثاتی وجوه اشتراک فراوان دارند، و این که هر تابعی دارای نمای مختلط باشد، بایست برحسب یک لگاریتم تعریف شود.

۴-۱. تابع نمایی

تابع حقیقی $f(x) = e^x$ مجموعه اعداد حقیقی را بطور یک به یک بر مجموعه اعداد حقیقی مثبت می‌نگارد و آن در قاعده نماهای $e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}$ هم صدق می‌کند. این تابع با مشتق خودش برابر است و دارای بسط به رشته توانی زیر است:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

در تعریف تابع مختلط $w = f(z) = e^z = e^{x+iy}$ می‌خواهیم خواص عمده تابع حقیقی نظیرش را حفظ کند. اگر قرار باشد قاعده نماها معتبر بماند، باید داشته باشیم $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. آنچه باقی می‌ماند این است که برای e^{iy} یک تعریف "مستدل"

ارائه دهیم .

اگر همانند e^x می توانستیم e^{iy} را به رشته‌ای توانی بسط دهیم ، نتیجه می شد :

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \dots \quad (1)$$

باجداسازی (۱) به قسمت‌های حقیقی و انگاری اش حاصل می شد :

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \dots\right) \quad (2)$$

بسط‌های رشته‌نمایی در (۲) به ترتیب نمایش توابع $\cos y$ و $\sin y$ است . این مطالب راهنمای تعریف زیر است .

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \quad (y \text{ حقیقی}) \quad (3)$$

تاکید می شود که (۳) یک تعریف است و بحث بالا تنها بدین دلیل مطرح شده که این

تعریف موجه بنظر آید . در فصل ۸ ، رسماً " اعتبار بسط به رشته توانی مختلط را اثبات می کنیم ، و از این رو ، تعریف تائید می گردد . اینک قانون دموآور را

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos ny + i \sin ny,$$

می توان بصورت $(e^{iy})^n = e^{iny}$ نوشت . باید توجه داشت که برای هر عدد حقیقی y داریم ،

$$|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$$

تذکر - با قرار دادن $y = \pi$ در (۳) ، حاصل می گردد

$$e^{\pi i} + 1 = 0,$$

که ، به نظر مولف ، زیباترین معادله در سراسر ریاضیات است . این معادله از عمده ترین ثابت‌ها پنج ثابت و از عمده ترین عملیات سه عمل (جمع و ضرب و به نماساندن) را شامل می شود .

اینک بعضی از نتایج تعریف e^z به عنوان عدد مختلط ، رابطه

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

را بررسی می کنیم ، با قرار دادن $y = 0$ ، (۴) به تابع حقیقی e^x ساده می گردد . اگر $x = 0$ ، برای هر اعداد حقیقی y_1 و y_2 داریم :

$$\begin{aligned} e^{iy_1} e^{iy_2} &= (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) \\ &\quad + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2) \\ &= \cos (y_1 + y_2) + i \sin (y_1 + y_2) = e^{i(y_1 + y_2)}. \end{aligned}$$

بنابراین برای اعداد مختلط $z_1 = x_1 + iy_1$ و $z_2 = x_2 + iy_2$ نتیجه می شود که :

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1 + iy_1} e^{x_2 + iy_2} = e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} \\ &= (e^{x_1} e^{x_2}) (e^{iy_1} e^{iy_2}) \\ &= e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)} = e^{z_1 + z_2}, \end{aligned}$$

و قاعده برای نماها در مورد اعداد مختلط هم درست است. چون
ملاحظه می شود برای هر عدد مختلط z داریم

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x$$

$$e^z \neq 0$$

بنابراین، اکثر خواص مهم e^x در e^z نیز حفظ می شود. با این حال یک استثناء قابل توجه موجود است. تابع e^z یک به یک نیست، درواقع بازاء هر عدد مختلط z .

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z.$$

حال فرض کنیم $e^z = e^{x+iy} = 1$. در این صورت $e^x \cos y = 1$ و $e^x \sin y = 0$

از آنجا که $e^x \neq 0$ داریم $\sin y = 0$ ، یعنی $y = n\pi$ ، n عددی صحیح. ولی اگر $e^x \cos n\pi = 1$ می بایست زوج بوده و x برابر صفر باشد. بنابراین z مضرب صحیحی از $2\pi i$ است.

اکنون برای هر دو عدد مختلط z_1 و z_2 که $e^{z_1} = e^{z_2} = 1$ داریم $e^{z_1 - z_2} = 1$. در نتیجه $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ ، k عددی صحیح. بطور خلاصه تابع $f(z) = e^z$ متناوب است و دوره تناوب آن $2\pi i$ است.

اگر تابع نمائی مقداری را یک بار به پذیرد، آن تابع می بایست - چون متناوب است - آن مقدار را به دفعات نامتناهی به پذیرد. اینک نشان می دهیم، e^z هر عدد مختلط مخالف صفر و متناهی را به دفعات نامتناهی می پذیرد. اگر $e^z = a + bi$ و a و b هر دو صفر نباشند آنگاه

$$e^x \cos y = a, \quad e^x \sin y = b. \quad (5)$$

با مربع کردن هر دو جمله در (5)، بدست می آوریم $e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} = a^2 + b^2$ ، چون لگاریتم برای اعداد حقیقی مثبت خوش تعریف است، داریم $x = \frac{1}{2} \log (a^2 + b^2)$. اگر $a \neq 0$ ، عبارت دوم را به عبارت اول در (5) تقسیم می کنیم، تا بدست آوریم $y = \tan^{-1} b/a$ ، $\tan y = b/a$ بنابراین

$$z = \frac{1}{2} \log (a^2 + b^2) + i \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

یک حل معادله $e^z = a + bi$ است. اگر یکی از مقادیر $\tan^{-1} b/a$ برابر y_0 باشد آنگاه برای هر عدد صحیح k ، $y_0 + 2k\pi$ هم بایست یک مقدار برای $\tan^{-1} b/a$ باشد. اگر $a = 0$ آنگاه:

$$z = \begin{cases} \log |b| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), & b > 0, \\ \log |b| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), & b < 0, \end{cases} \quad k \text{ عدد صحیح}$$

مثال ۱- فرض کنیم $e^z = 5 - 5i$. آنگاه

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \log [5^2 + (-5)^2] + i \tan^{-1} \frac{-5}{5} \\ &= \frac{\log 50}{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \text{ عدد صحیح} \end{aligned}$$

مثال ۲- فرض کنیم $e^z = -5 + 5i$ آنگاه

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2} \log [(-5)^2 + 5^2] + i \tan^{-1} \frac{5}{-5} \\ &= \frac{\log 50}{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \text{ عدد صحیح} \end{aligned}$$

قابل توجه است که

$$\tan^{-1} \frac{-b}{a} \neq \tan^{-1} \frac{b}{-a}.$$

تعریف تابع نمائی بر حسب توابع مثلثاتی پیشنهاد می‌کند که این فرآیند را می‌توان وارونه نمود. از (۳) داریم:

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y) = \cos y - i \sin y. \quad (۶)$$

از تفریق یا جمع (۳) و (۶) خواهیم داشت:

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

از این رو طبیعی بنظر می‌رسد که توابع مثلثاتی مختلط را به ترتیب زیر تعریف کنیم:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (۷)$$

دیگر توابع مثلثاتی با نسبت‌های معمول تعریف می‌گردند:

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

با این تعاریف، اکثر خواص مثلثاتی حقیقی آشنا را می‌توان در مورد صفحه مختلط گسترش داد.

مثال ۱-

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z.$$

اثبات -

$$\begin{aligned} \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{i(z + \pi/2)} - e^{-i(z + \pi/2)}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} e^{i\pi/2} - e^{-iz} e^{-i\pi/2}}{2i} \\ &= \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z. \end{aligned}$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

مثال ۲-

اثبات -

$$\begin{aligned} 2 \sin z \cos z &= 2 \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) \\ &= 2 \left(\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{4i} \right) = \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} \\ &= \sin 2z. \end{aligned}$$

اینک در مورد استثناء: کران توابع حقیقی سینوس و کسینوس است. در حالی که در صفحه مختلط نه $\sin z$ و نه $\cos z$ کراندار نیستند. از نامساوی مثلث داریم:

$$|\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \geq \frac{|e^{-iz}| - |e^{iz}|}{2} = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

اگر z در امتداد پرتو $\text{Arg } z = \pi/2$ به ∞ نزدیک شود عبارت طرف راست بدخواه بزرگ

می‌شود، و این نشان می‌دهد، $\sin z$ کراندار نیست. بطریق مشابه

$$|\cos z| = \left| \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right| \geq \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

و چنانچه z بر پرتو $\text{Arg } z = \pi/2$ به ∞ میل کند $|\cos z|$ به ∞ نزدیک می‌شود. همانندیهای (۷) را می‌توان بکار برد و معادلاتی را که دارای توابع مثلثاتی هستند حل کرد.

مثال - همه اعداد مختلطی را که برایشان $\cos z = 2$ است بیابید.

بایست داشته باشیم $(e^{iz} + e^{-iz})/2 = 2$ که نتیجه می‌شود $e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$ که یک معادله درجه دوم نسبت به e^{iz} است. با حل آن حاصل می‌شود.

$$e^{iz} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

ولی $e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 2 \pm \sqrt{3}$ ، و از رابطه اولی نتیجه

$$e^{-y} \cos x = 2 \pm \sqrt{3}, \quad e^{-y} \sin x = 0.$$

رابطه دوم نتیجه می‌دهد که برای n عدد صحیح، $x = n\pi$ ؛ و از رابطه اولی نتیجه می‌شود که n بایستی زوج باشد بنابراین $n = -\log(2 \pm \sqrt{3})$. بنابراین $\cos z = 2$ اگر و تنها اگر

$$\begin{aligned} z &= 2k\pi - i \log(2 \pm \sqrt{3}) \\ &= 2k\pi \pm i \log(2 + \sqrt{3}), \end{aligned} \quad k \text{ عدد صحیح}$$

از دانشجو می‌خواهیم به عنوان تمرین ثابت کند که هر دوی $\sin z$ و $\cos z$ همه مقادیر صفحه مختلط را می‌پذیرند.

سرانجام توابع هذلولی را بوسیله فرمولهای زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \quad (۸)$$

به عنوان یک نتیجه مستقیم (۸) روابط زیر را داریم:

$$\sinh z = -i \sin iz, \quad \cosh z = \cos iz.$$

باید توجه داشت که هر دو $\sinh z$ و $\cosh z$ متناوب‌اند و دوره تناوب آنها $2\pi i$ است.

پرسشها

۱- برای چه توابع $f(z)$ ، تابع $e^{f(z)}$ متناوب خواهد بود؟

۲- بزرگترین ناحیه‌یی که در آن e^z یک به یک می‌باشد کدامست؟

۳- بزرگترین ناحیه‌یی که در آن e^z کراندار می‌باشد کدامست؟

۴- بزرگترین ناحیه‌یی که در آن $\sin z$ کراندار است کدام است؟

۵- چه وقت $e^{f(z)} = \overline{e^{f(z)}}$ ؟

۶- آیا همانندی‌هایی مثلثاتی موجودند که برای متغیرهای حقیقی درست باشند ولی در صفحه مختلط معتبر نباشند؟

۷- چگونه میتوان $|\sin z|$ را با $|\sin |z||$ مقایسه کرد؟

۸- $|\sin z|$ و $|\sinh z|$ را چگونه مقایسه می‌کنید؟

۹- وقتی که z بر پرتوهای متفاوت به سمت ∞ میل کند بر e^z چه می‌گذرد؟ در مورد $e^z + z$ چطور؟

تمرینها

۱- تمام مقادیر z را که در روابط زیر صدق می‌کنند بیابید.

(الف) $e^{3z} = 1$ (ب) $e^{z^2} = 1$ (پ) $e^{e^z} = 1$

۲- نشان دهید که صفرهای $\sin z$ و $\cos z$ همگی حقیقی‌اند.

۳- (الف) نشان دهید که بر پرتو θ ، $0 < \theta < \pi$ ، $\text{Arg } z = \theta$ توابع $\sin z$ و $\cos z$ کراندار نیستند.

(ب) نشان دهید که $\sin z$ تنها بر مجموعه‌هایی کراندار است که، در یک نوار افقی جای گیرند.

۴- برای $|z| = r$ ، ثابت کنید.

(الف) $e^{-r} \leq |e^z| \leq e^r$

(ب) $e^{-r^n} \leq |e^{z^n}| \leq e^{r^n}$ ، n صحیح و مثبت

تساوی چه وقت برقرار است؟

۵- همانندی‌های زیر را ثابت کنید.

(الف) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

(ب) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

(پ) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

۶- (الف) قسمت‌های حقیقی و انگاری $e^{1/2}$ ، $z \neq 0$ را جدا کنید.

(ب) نشان دهید، $|e^{1/2}|$ در ناحیه $\varepsilon > 0$ ، $|z| \geq \varepsilon$ کراندار است.

۷- (الف) ثابت کنید، e^{iz} متناوب است و دوره تناوب آن 2π است.

(ب) برای عدد مختلط مخالف صفر و دلخواه a ، نشان دهید، e^{az} متناوب است، و دوره تناوب آنرا بیابید.

۸- نامساویهای زیر را ثابت کنید.

$$|e^z + e^{z^2}| \leq e^x + e^{x^2 - y^2} \quad (\text{الف})$$

$$|e^{iz} + e^{iz^2}| \leq e^{-y} + e^{-2xy} \quad (\text{ب})$$

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1 \quad (\text{پ})$$

۹- همانندیهای زیر را ثابت کنید.

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2 \quad (\text{ب})$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 \quad (\text{پ})$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y \quad (\text{ت})$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \quad (\text{ث})$$

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y \quad (\text{ج})$$

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y \quad (\text{چ})$$

۱۰- نشان دهید

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y. \quad (\text{الف})$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y. \quad (\text{ب})$$

$$11- \text{ ثابت کنید } \tanh z = (\sinh z)/(\cosh z) \quad \text{متناوب و دوره تناوب آن } \pi i$$

است.

۴-۲. خواص نگاشتی

اهمیت قسمتهای حقیقی و انکاری یک عدد مختلط مخالف صفر، در مشخص نمودن

جایگاه آن در صفحه "مساوی" است، داریم: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ و $\tan(\arg z) = y/x$

قسمتهای حقیقی و انکاری $z = x + iy$ نقش مستقل در مشخص نمودن جایگاه e^z در صفحه

w ایفا می کنند. با تفکیک تابع $w = e^z$ به مولفه های حقیقی و انکاری اش داریم:

$$w = e^z = u + iv = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

که از آن حاصل می شود.

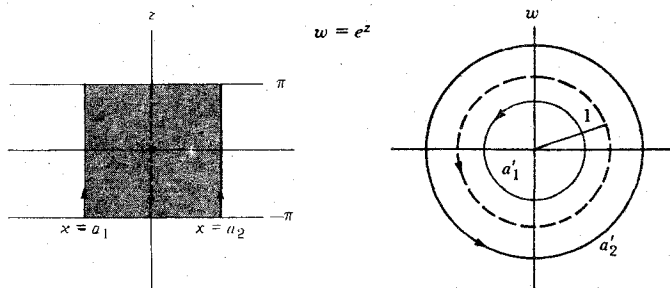
$$|e^z| = e^x, \quad \tan(\arg e^z) = \frac{v}{u} = \tan y.$$

این روابط نشان می‌دهند که کالبد e^z تنها به قسمت حقیقی z وابسته است، در حالی که شناسه e^z تنها به قسمت انگاری z وابسته است. در واقع $\arg e^z = y + 2k\pi$ (k عدد صحیح). از این رو تا اندازه جالب خواهد بود چنانچه نگاره خطوط موازی محورهای مختصات را مشخص کنیم، ولی نخست از متناوب بودن تابع نمائی استفاده می‌نمائیم. چون برای هر z ، $e^{z+2\pi i} = e^z$ ، برای هر عدد صحیح k ، نقاط $x_0 + i(y_0 + 2k\pi)$ دارای یک نگاره هستند. از این رو می‌خواهیم خود را به ناحیه $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$ محدود کنیم. هر چه در این نوار اتفاق بیافتد در نوار $-\pi + 2k\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi + 2k\pi$ نیز اتفاق خواهد افتاد. با چنین شرطی، $-\pi < y \leq \pi$ ، $\operatorname{Arg} e^z = y$.

چون که e^z دارای کالبد ثابت است، همه نقاط واقع بر خط $x = x_0$ بر نقاطی با دوری مساوی از مبدا نگاشته می‌شوند. بویژه پاره خط $x = x_0$ ، $-\pi < y \leq \pi$ بطور یک به یک بر دایره‌یی در صفحه w نگاشته می‌شود. مرکزش مبدا و شعاع آن e^{x_0} است. با افزایش y از $-\pi$ به π ، دایره در جهت مخالف حرکت عقربه ساعت پیموده می‌شود.

چون که $|e^z| = e^x > 1$ اگر و تنها اگر $x > 0$ ، نیم نوار نامتناهی $\operatorname{Re} z > 0$ ، $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$ بطور یک به یک بر خارج دایره واحد نگاشته می‌شود، در حالی که نوار $-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi$ ، $\operatorname{Re} z < 0$ بر درون آن به استثنای مبدا نگاشته می‌شود (ر. ک. شکل ۱)

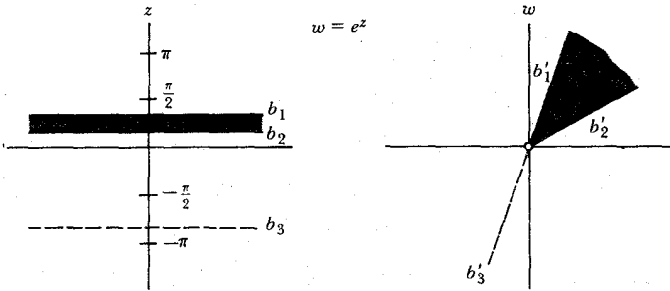
شکل ۱



همان طور که قبلاً تذکر دادیم، $\operatorname{Re} z$ نقشی در مشخص کردن شناسه e^z ندارد. از این رو نقاطی که قسمتهای انگاری برابر دارند، بر نقاطی که دارای شناسه‌های برابرند، نگاشته می‌شود. در مورد خط $y = y_0$ ، $-\pi < y_0 < 0$ ، داریم $w = e^z = e^{x+iy_0} = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0)$ ، چون که e^x ، اعداد حقیقی مثبت را می‌پیماید، خط $y = y_0$ بطور یک به یک بر پرتو $\operatorname{Arg} w = y_0$ نگاشته می‌شود. پس، نوار نامتناهی $0 < y < \pi$ بطور یک به یک بر نیم صفحه زیرین نگاشته می‌شود. در حالی که نوار $-\pi < y_0 \leq \pi$ بر نیم صفحه زیرین نگاشته می‌شود (ر.

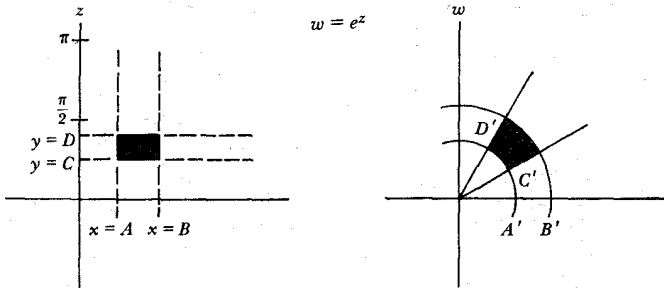
ک. شکل ۲). قابل توجه است که محور x ، $y=0$ بر محور حقیقی مثبت و خط $y=\pi$ بر محور حقیقی منفی نگاشته می‌شوند. از اینرو نوار $-\pi < \text{Im } z \leq \pi$ به یک بر صفحه سوراخ شده w نگاشته می‌شود. که منظور از صفحه سوراخ شده، تمام صفحه منهای مبدا است.

شکل ۲



دو نگارش قبلی را می‌توانیم ترکیب کنیم تا اینکه نگاره مستطیل‌ها را در تابع $w = e^z$ بیابیم. چنانچه نگاره را در شکل قطبی آن بنویسیم در این صورت مستطیل $-\pi < C \leq y \leq D \leq \pi, A \leq x \leq B$ بر ناحیه $e^A \leq R \leq e^B, C \leq \theta \leq D$ که به کمانها و پرتوها محصور است نگاشته می‌شود (ر. ک. شکل ۳).

شکل ۳



سپس خط مستقیمی را که با هیچ یک از محورهای مختصات موازی نیست در نظر می‌گیریم. نگاره این خط نه کالبد ثابت دارد و نه شناسه ثابت، با این وصف می‌بایست با بزرگ شدن x ، به مقدار کافی بزرگ شود ولی بایست هر بار که y به میزان 2π افزایش یابد یک دوران کامل نماید که نهایتاً "به یک حلزونی منتهی می‌گردد". اگر $y = mx + b$ ، $\text{Im } w \neq 0$ نگاه $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{i(mx+b)}$ از این رو $|e^z| = e^x$ و $\arg e^z = mx + b + 2k\pi$ با عدد صحیح k در شکل قطبی می‌توانیم بنویسیم $w = \text{Re}^{i\theta}$ ، با

$$\begin{aligned} R &= |e^z| = e^x, \\ \theta &= \text{Arg } e^z = mx + b + 2k\pi, \end{aligned} \quad (9)$$

که $k = k(x)$ عدد صحیح است و بطوری انتخاب می شود که θ همیشه در نامساوی $-\pi < \theta \leq \pi$ صادق باشد. چون که x مجموعه اعداد حقیقی را می پیماید. k می بایست مجموعه اعداد صحیح را به پذیرد. با حذف x از روابط در (۹) داریم

$$R = e^{(\theta - b - 2k\pi)/m} = e^{-b/m} e^{(\theta - 2k\pi)/m} \quad (10)$$

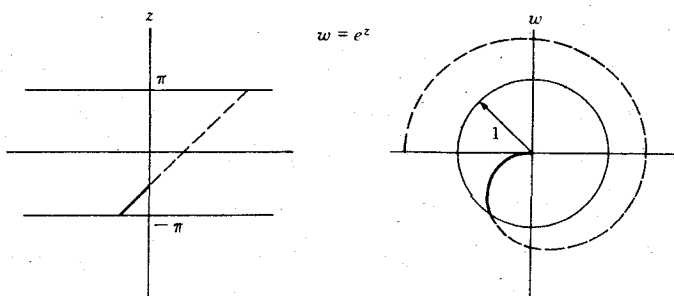
با قرار دادن $\alpha = \theta - 2k\pi$ در (۱۰) داریم:

$$R = K e^{\alpha/m}, \quad (11)$$

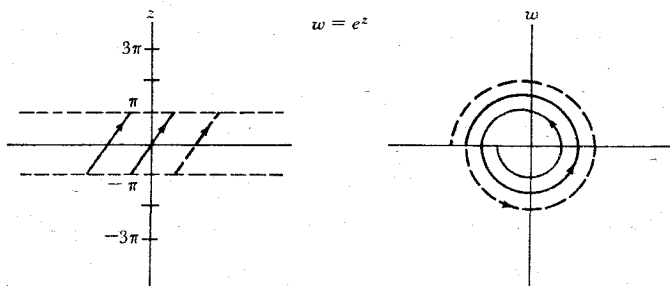
که K ثابت مثبت و α مجموعه اعداد حقیقی را می پیماید.

معادله (۱۱) نمایش چیزی است که به حلزونی لگاریتمی موسوم است. در شکل ۴، نگاره یک پاره خط و در شکل ۵ تصویر کامل تری به نمایش آمده است.

شکل ۴



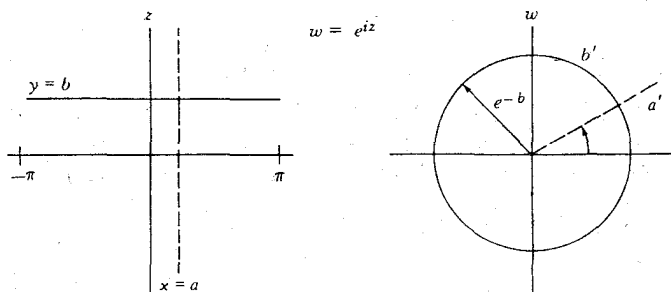
شکل ۵



چون اختلاف شناسه iz با شناسه z برابر با $\pi/2$ است، انتظار می رود تابع $w = e^{iz}$ خطوط موازی محور y (محور x) را بر همان نوع اشکالی بنگارد که تابع $w = e^z$ خطوط موازی محور x (محور y) را می نگاشت. با قرار دادن $w = e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix}$ می بینیم $|e^{iz}| = e^{-y}$ و $\arg e^{iz} = x + 2k\pi$. بنابراین پاره خط $-\pi < x \leq \pi$ ، $y = y_0$ بر دایره‌یی به مرکز مبدا و شعاع e^{-y_0} نگاشته می شود. نیم نوار نامتناهی $-\pi < x \leq \pi$ ، $y > 0$ بر درون قرص واحد سفته نگاشته می شود در حالی که نوار $-\pi < x \leq \pi$

$y < 0$ ، بر خارج آن نگاشته می شود. هم چنین، خط $x = x_0$ ، $-\pi < x_0 \leq \pi$ بر پرتو $\text{Arg } w = x_0$ نگاشته می شود (ر. ک. شکل ۶).

شکل ۶



اینک با استفاده از این خواص نگاشتی تابع نمایی، خواص توابع مثلثاتی را بررسی خواهیم کرد. همانند حالت تابع نمایی، می خواهیم $\cos z$ را به ناحیه‌یی که تابع در آن یک به یک است محدود کنیم. چون $\cos z$ دارای دوره تناوب 2π است به ناحیه $-\pi < \text{Re } z \leq \pi$ اکتفا می کنیم. بعلاوه $\cos z$ تابعی زوج است، یعنی که $\cos z = \cos(-z)$ و این بدان معنی است که نقاط ربع اول و چهارم (دوم و سوم) نگاره‌های یکسان دارند. بنابراین نگاره هر مجموعه‌یی واقع در نیم نوار نامتناهی $-\pi < \text{Re } z \leq \pi$ ، $\text{Im } z > 0$ ، در هر نیم نوار نامتناهی به شکل $(k-1)\pi < \text{Re } z \leq (k+1)\pi$ ، $\text{Im } z > 0$ عیناً تکرار می گردد. چون $\cos z$ حقیقی است اگر و تنها اگر z حقیقی باشد، کافی است نگاشت‌هایی را که در میدان

$$\{-\pi < \text{Re } z \leq \pi, \text{Im } z > 0\} \cup \{0 \leq \text{Re } z \leq \pi, \text{Im } z = 0\},$$

تعریف شده در نظر بگیریم. در این میدان تابع $w = \cos z$ یک به یک است.

متذکر می شویم، تابع $w = \frac{1}{2}(z + 1/z)$ دایره را بر بیضی‌ها و پرتوها را بر کمانهایی از هذلولیها می نگارد. می توان تبدیل $w = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + 1/e^{iz})$ را بصورت نگاشت‌های بی دربی از صفحه z بر صفحه z' و از صفحه z' به صفحه w در نظر گرفت که $z' = e^{iz}$. برای $y_0 > 0$ پاره خط $-\pi < x \leq \pi$ ، $y = y_0$ ، در صفحه z بر دایره $|z'| = e^{-y_0}$ در صفحه z' نگاشته می شود. آنگاه تابع $w = \frac{1}{2}(z' + 1/z')$ دایره $|z'| = e^{-y_0}$ در صفحه z' را بر بیضی

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{2}(e^{-y_0} + e^{y_0})}\right)^2 + \left(\frac{v}{\frac{1}{2}(e^{-y_0} - e^{y_0})}\right)^2 = 1$$

در صفحه w می نگارد، بنابراین با $w = \cos z$ پاره خط $-\pi < x \leq \pi$ ، $y_0 > 0$ بر یک بیضی

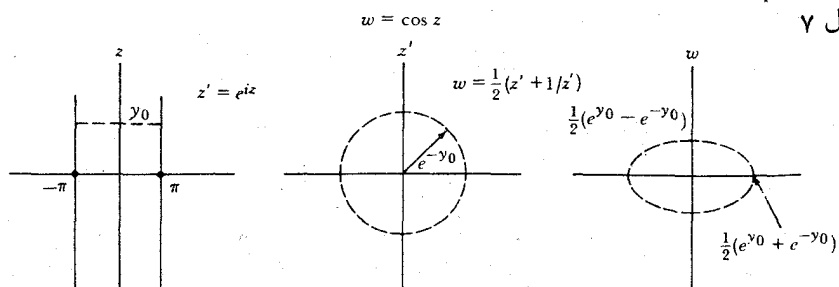
نگاشته می شود. (شکل ۷ ملاحظه شود).

بطریقی مشابه برای $y > 0$ نیم خط $x = x_0$ ، $-\pi < x_0 < \pi$ بر پاره خط $\text{Arg } z' = x_0$

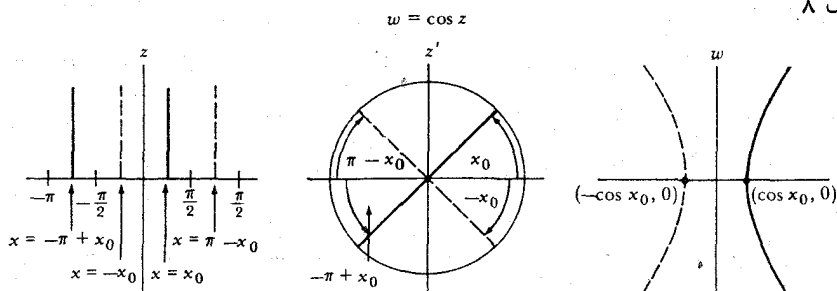
$$(u/\cos x_0)^2 - (v/\sin x_0)^2 = 1 \quad 0 < |z'| < 1$$

نگاشته می شود (شکل ۸ ملاحظه شود).

شکل ۷



شکل ۸



تذکر - برای $y > 0$ ، نگاشت های بالا برای نیم خط $x = 0$ ، $x = \pi$ ، و $x = \pm \pi/2$ معتبر نیست. اگر $x = 0$ ، $\cos z = \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y)$ بر فاصله حقیقی $u > 1$ نگاشته می شود، در حالی که نیم خط $x = \pi$ بر فاصله حقیقی $u < -1$ نگاشته می شود. نیم خط $x = \pi/2$ بر محور انگاری منفی و نیم خط $x = -\pi/2$ بر محور انگاری مثبت نگاشته می شوند. بالاخره فاصله $0 \leq x \leq \pi$ ، $y = 0$ بر فاصله حقیقی $-1 \leq u \leq 1$ نگاشته می شود.

همانندی

$$\sin z = \cos \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \quad (12)$$

ما را قادر می سازد تا خواص نگاشت $\sin z$ را از خواص نگاشت $\cos z$ استنتاج کنیم. معادله (۱۲) نشان می دهد که می توان $w = \sin z$ را به عنوان تبدیل $z' = z - \pi/2$ از صفحه

z به صفحه z' در نظر گرفت، که به دنبال آن نگاشت $w = \cos z'$ عمل کند. پس تابع $w = \sin z$ نقاط ناحیه $-\pi/2 < \operatorname{Re} z \leq 3\pi/2$ را بر آنجا می نگارد که تابع $w = \cos z$ نقاط ناحیه $-\pi < \operatorname{Re} z \leq \pi$ را می نگاشت.

مثال - تابع $w = \cos z$ پاره خط $-\pi < x \leq \pi$ ، $y = 1$ را بر بیضی

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(e+1/e)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(e-1/e)^2} = 1.$$

می نگارد. تابع $w = \sin z$ پاره خط $-\pi/2 < x \leq 3\pi/2$ و $y = 1$ را بر همان بیضی می نگارد.

پرسشها

- ۱- چه نوع از توابع، صفحه مختلط منهای مبدا را بر نوار $-\pi < \operatorname{Im} w \leq \pi$ می نگارند؟
- ۲- اگر z نقطه بی مفروض از صفحه باشد، آیا همیشه یک همسایگی این نقطه موجود است که در آن تابع e^z یک به یک باشد؟
- ۳- رفتار e^z را وقتی که z به ∞ نزدیک شود چگونه توصیف می کنید؟
- ۴- در مورد تابع e^z ، چگونه مساحت یک مستطیل با مساحت نگاره اش مقایسه می شود؟
- ۵- در مورد تابع $\cos z$ ، چگونه مساحت یک مستطیل با مساحت نگاره آن مقایسه میشود؟
- ۶- در مورد تابع e^z ، شیب یک خط مستقیم در نگاره آن که یک حلزونی لگاریتمی است، چه تاثیری می گذارد؟
- ۷- چه توابعی، به غیر از e^z ، هرگز در صفحه صفر نمی شوند؟
- ۸- بزرگترین میدانی که در آن $\sin z$ یک به یک است کدام است؟
- ۹- اگر z نقطه مفروضی در صفحه z باشد، آیا همیشه یک همسایگی این نقطه موجود است که در آن $\sin z$ یک به یک باشد؟
- ۱۰- چه تفاوت هایی میان توابع $w = \cos(z - \pi/2)$ و $w = \cos z - \pi/2$ موجود است؟

تمرینها

- ۱- نگاره مجموعه های زیر را تحت تبدیل $w = e^z$ بیابید و رسم کنید.

الف) $y = \pi/4, -5 \leq x \leq 5$	پ) $x = 3, -\pi/2 < y < \pi/2$
ب) $0 < y < \pi, -2 < x < 1$	ت) $x < 1, -\pi/3 < y < 2\pi/3$
- ۲- نگاره ناحیه $0 \leq x \leq \pi, y \geq 0$ را تحت هر یک از تبدیلهای زیر بیابید.

$$\text{الف) } w = e^{iz} \quad \text{ب) } w = ie^{iz} \quad \text{پ) } w = ie^{-iz}$$

۳- مطلوبست نگاره‌های خطوط مستقیم تحت تبدیل $w = e^{cz}$ که در آن c یک ثابت مختلط است.

۴- نشان دهید، نگاره قرص $|z| \leq 1$ تحت تبدیل $w = e^z$ درون طوق $1/e \leq |w| \leq e$ واقع است.

۵- نشان دهید، نگاره قرص $|z| \leq 1$ تحت تبدیلهای $w = \cos z$ و $w = \sin z$ درون قرص $|w| \leq (e^2 + 1)/2e$ قرار دارد.

۶- نگاره مجموعه‌های زیر را در تبدیل $w = \cos z$ بیابید.

$$\text{الف) } y \geq 0, x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ب) } y = -5, -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{پ) } -2 < y < 2, 0 \leq x < \pi \quad \text{ت) } y > 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$$

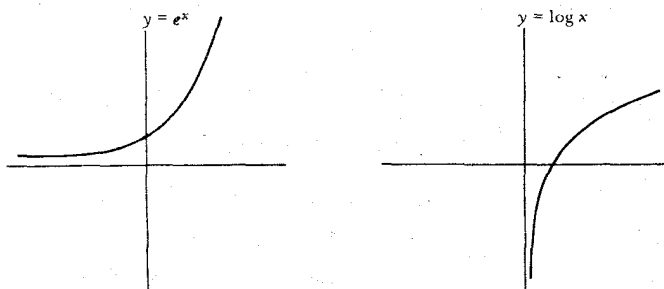
۴-۳. تابع لگاریتمی

قبل از تعریف لگاریتم یک عدد مختلط، نظری مجدد بر خواص لگاریتم حقیقی می‌افکنیم. برای هر عدد حقیقی مثبت x ، عدد حقیقی و منحصر بفرد y چنان موجود است $e^y = x$ می‌نویسیم $y = \log x$ و ملاحظه می‌کنیم که برای $x_1, x_2 > 0$ داریم

$$\log(x_1 x_2) = \log x_1 + \log x_2.$$

تابع $y = \log x$ محور حقیقی مثبت را بر مجموعه اعداد حقیقی می‌نگارد و وارون تابع $y = e^x$ است که اعداد حقیقی را بر حقیقی‌های مثبت می‌نگارد. (ر.ک. شکل ۹) چون e^x یک به یک است وارون آن نیز یک به یک است.

شکل ۹



در مورد تعریف لگاریتم عدد مختلط z ، به عنوان مقداری چون w به طوری $e^w = z$ گردد اشکالی موجود است. چون تابع نمایی متناوب است، وجود لگاریتم مختلط منحصر بفرد را منتفی می‌سازد. زیرا اگر $e^w = z$ ، آنگاه برای هر عدد صحیح k داریم $e^{w + 2k\pi i} = z$

از این رولگاریتم یک عدد مختلط z را، که با $\log z$ نمایش می‌دهیم، بصورت مجموعه همه مقادیر $w = \log z$ تعریف می‌کنیم که $z = e^w$ باشد. چون تابع نمائی هرگز صفر نمی‌شود، لگاریتمی با عدد صفر متناظر نمی‌گردد. و چون تابع نمائی بر عدد مختلط غیر صفر را به دفعات نامتناهی می‌پذیرد، پس برای هر عدد مختلط مخالف صفر تعداد مقادیر مربوط به لگاریتم نامتناهی است.

عبارت $w = \log z$ ، $z \neq 0$ ، اولین مثال از یک تابع چند مقداری است. منظور از تابع چند مقداری رابطه‌ای است که به هر مقدار مختلط بیش از یک نگاره متناظر می‌کند. چند مقداری بودن لگاریتم با چند مقداری بودن شناسه عدد مختلط ارتباط دارد. زیرا اگر قرار دهیم:

$$w = u + iv = \log z \quad \text{and} \quad z = re^{i(\theta + 2k\pi)} \quad r \neq 0 \quad k \text{ عدد صحیح}$$

معادله $z = e^w$ به شکل $e^{u+iv} = re^{i(\theta + 2k\pi)}$ در می‌آید. و از این به همانندیهای $e^u = r$ و $v = \theta + 2k\pi$ می‌رسیم، یعنی:

$$w = u + iv = \log z = \log r + i(\theta + 2k\pi) \quad k \text{ صحیح} \quad (13)$$

معادله (۱۳) را نیز می‌توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$w = \log |z| + i \arg z,$$

که در آن $\log |z|$ ، لگاریتم حقیقی $|z|$ است و $\arg z$ تنها با تقریب مضربهای 2π تعریف می‌گردد.

روشی را که برای بررسی پیوستگی و دیگر خواص توابع تک - مقداری داشتیم نمی‌توان در مورد توابع چند مقداری بکار گرفت. خوشبختانه یک تابع چند مقداری را بصورت کاملاً طبیعی می‌توان با چند تابع تک - مقداری متفاوت جایگزین نمود. در این صورت ماهیت یک تابع چند مقداری با بررسی توابع تک - مقداری متناظرش قابل بررسی است.

یک شاخه $\log z$ بنابه تعریف عبارت از هر تابع تک مقداری $\log^* z$ است که برای هر مقدار مختلط غیر صفر z در همانندی $z = e^{\log^* z}$ صدق می‌کند. به تابع چند مقداری $\log z$ به تعداد نامتناهی شاخه متناظر می‌گردد. هر یک از این شاخه‌ها وارونی از e^z اند. میان تمام شاخه‌های $\log z$ دقیقاً "یکی از آنهاست که قسمت انگاری آن $(\arg z)$ در فاصله $(-\pi, \pi]$ واقع می‌شود. این شاخه به شاخه اصلی $\log z$ موسوم است و با $\text{Log } z$ نمایانده می‌شود. اختلاف هر شاخه $\log z$ با شاخه اصلی در مضربی از $2\pi i$ است. یعنی اگر $\log^* z$ یک شاخه ثابت باشد، آنگاه بازاء یک عدد صحیح k .

$$\log^* z = \text{Log } z + 2k\pi i \quad (14)$$

باید توجه داشت

$$\text{Log } z = \text{Log } |z| + i \text{Arg } z \quad (-\pi < \text{Arg } z \leq \pi). \quad (15)$$

محدودیت (۱۵) را از دیدگاه هندسی می‌توان به عنوان بریدگی صفحه z در امتداد محور حقیقی منفی در نظر گرفت. در این صورت این پرتو به بریدگی شاخه تابع $\text{Log } z$ موسوم است. شاخه‌های دیگر $\log z$ را می‌توان با محدود کردن $\arg z$ بصورت:

$$(2k-1)\pi < \arg z \leq (2k+1)\pi, \quad k \text{ عدد صحیح}$$

تعریف نمود و در حالی که شناسه z پیوسته‌وار تغییر کند و نخواهیم از شاخه‌یی به شاخه دیگر بیافتیم مجاز نخواهیم بود که از "خط بریدگی" عبور کنیم زیرا که تک‌مقداری بودن از بین خواهد رفت.

بی‌جهت شرط محدودیت‌شناسه در فاصله $[-\pi, \pi]$ ، در (۱۵) را نباید عمده‌کنیم. برای یک مقدار ثابت و حقیقی θ ، تابع

$$\log_{\theta} z = \text{Log } |z| + i \arg z \quad (\theta < \arg z \leq \theta + 2\pi),$$

که دارای بریدگی شاخه $\arg z = \theta + 2\pi$ می‌باشد، نیز می‌تواند منظور ما را بخوبی برآورده نماید. در واقع یک بریدگی شاخه لازم نیست که حتی یک پرتو باشد. هر خم پیوسته که خود را قطع نکند و از مبدا تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد می‌تواند همین کار را انجام دهد.

اینک حدود اعتبار همانندی

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \quad (z_1, z_2 \neq 0)$$

را در صفحه مختلط بررسی می‌کنیم. برای یک شاخه ثابت، داریم:

$$\log z_1 z_2 = \text{Log } |z_1 z_2| + i \arg z_1 z_2$$

و

$$\begin{aligned} \log z_1 + \log z_2 &= \text{Log } |z_1| + \text{Log } |z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2) \\ &= \text{Log } |z_1 z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2). \end{aligned}$$

هم چنانکه در بخش ۱-۳ دیدیم، اختلاف، $\arg z_1 + \arg z_2$ با $\arg z_1 z_2$ در مضربی از 2π است.

پس بهترین کاری که می‌توان کرد عبارت است از:

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 + 2k\pi i$$

و یا

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \pmod{2\pi i}.$$

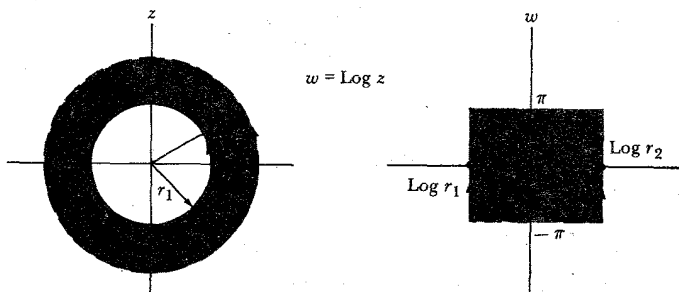
وقتی که بریدگی در امتداد محور حقیقی منفی باشد، شاخه لگاریتم مورد بررسی با معین کردن یک مقدار بخصوص از تابع کاملاً مشخص می‌گردد. به عنوان مثال شاخه اصلی

تنها شاخه‌یی است که برای آن $\log 1 = 0$. شاخه‌یی که برای آن $\log 1 = 10\pi i$ باشد، عبارت است از $\log z = \text{Log } z + 10\pi i$. هر یک از توابع $w = \text{Log } z + 2k\pi i$ صفحه، مبداء، را بر نوار نامتناهی $(2k-1)\pi < \text{Im } w \leq (2k+1)\pi$ می‌نگارند. خاطرنشان می‌شویم که تابع نمائی هر یک از نوارهای $(2k-1)\pi < \text{Im } z \leq (2k+1)\pi$ را بر صفحه سفته می‌نگارد. چون رفتار همه توابعی که با (۱۴) تعریف شوند اساساً یکی است، همیشه - مگر وقتی صراحتاً "غیر از این بیان شود - فرض می‌کنیم $k=0$ ، و توجه خواننده را به شاخه اصلی لگاریتم معطوف می‌نمائیم.

تابع $w = \text{Log } z$ در هیچ نقطه واقع بر محور حقیقی منفی پیوسته نیست. زیرا که هر چنین نقطه‌یی را می‌توان بصورت $z_0 = r_0 e^{\pi i}$ ، $r_0 > 0$ ، با $\text{Log } z_0 = \text{Log } r_0 + i\pi$ نوشت، ولی چنانچه با مقادیر زیر محور حقیقی به z_0 نزدیک شویم داریم $\lim_{z \rightarrow z_0} \text{Arg } z = -\pi$ و $\text{Log } z \rightarrow \text{Log } r_0 - i\pi \neq \text{Log } z_0$ که هنگامی که $z \rightarrow z_0$ از طریق مقادیر یاد شده میل کند.

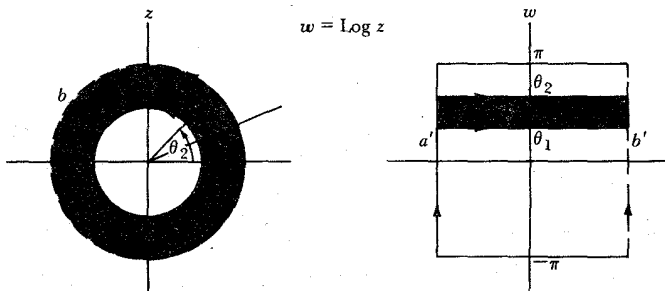
این بدان معنی نیست که تابع لگاریتمی بر محور حقیقی منفی پیوسته نیست. چیزی که نشان دادیم این است که $\text{Log } z$ ، یعنی شاخه اصلی، در این نقاط پیوسته نیست. چنانچه بریدگی را بر پرتو دیگری بیانداریم، می‌توانیم شاخه‌یی برای لگاریتم بیابیم که برای مقادیر حقیقی منفی پیوسته باشد. به عنوان مثال، تابع تک - مقداری $w = \log z$ در همه نقاط محور حقیقی منفی پیوسته است ولی بر پرتو $\arg z = 3\pi/2$ پیوسته نیست.

به بیان دیگر تابع لگاریتمی برای هر عدد مختلط غیر صفر به معنی زیر پیوسته است: بازاء $z_0 \neq 0$ مفروض، شاخه‌یی موجود است که برای آن $\lim_{z \rightarrow z_0} \log z = \log z_0$. با این حال شاخه‌یی موجود نیست که $\log z$ بازاء تمام اعداد مختلط غیر صفر پیوسته باشد. با توجه به (۱۵)، به آسانی می‌توان بعضی خواص نگاشتی تابع لگاریتمی را مشخص نمود. برای تابع $w = \text{Log } z$ ، نگاره دایره $|z| = r$ عبارتست از پاره خط $u = \text{Log } r$ ، $-\pi < v \leq \pi$ (ر. ک. شکل ۱۰).



هم چنین پرتو $\text{Arg } z = \theta$ بر خط $v = \theta$ نگاشته می شود (ر. ک. شکل ۱۱).

شکل ۱۱



پرسشها

- ۱- چه ارتباطی میان شناسه و لگاریتم یک عدد مختلط موجود است؟
- ۲- برای θ_0 ثابت، اگر مقدار اصلی را بصورت $\theta_0 - \pi < \arg z \leq \theta_0 + \pi$ تعریف کنیم چه تغییراتی رخ می دهد؟
- ۳- نتایج مترتب بر تعریف $\log 0 = \infty$ چیست؟
- ۴- نگاره حلزونی تحت تابع $w = \log z$ چیست؟
- ۵- در کدام نواحی $\log z$ کراندار است؟
- ۶- آیا $\log(z_1/z_2) = \log z_1 - \log z_2$ ؟
- ۷- آیا $\text{Log}(z_1/z_2) = \text{Log } z_1 - \text{Log } z_2$ ؟

تمرینها

- ۱- مقادیر زیر را بیابید.

$\log(x + iy)$ (پ)	$\log(3 - 2i)$ (ب)	$\log(1 - i)$ (الف)
--------------------	--------------------	---------------------
- ۲- ثابت کنید، برای همه اعداد مختلط مخالف صفر z_1 و z_2 داریم $\text{Log } z_1 z_2 = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 + 2k\pi i$ که در آن $k = 0, 1, -1$. مثالی بیاورید که نشان دهد هر یک از مقادیر k ممکن است.
- ۳- برای $z \neq 0$ ، ثابت کنید.

$$\text{Log } |z| \leq |\text{Log } z| \leq \text{Log } |z| + |\text{Arg } z|.$$

- ۴- فرض کنیم $f(z)$ در میدانی مانند \mathcal{D} تعریف شده باشد و در \mathcal{D} $f(z) \neq 0$. ثابت کنید که برای هر نقطه z واقع در \mathcal{D} ، $\text{Arg } f(z) = \text{Im } \text{Log } f(z)$.

۵- نگاره خطوط مستقیم موازی محورهای مختصات را برای توابع زیر بیابید.

$$w = \text{Log } iz. \quad (\text{الف})$$

$$w = \text{Log } (-iz) + 1 \quad (\text{ب})$$

$$w = \text{Log } z^2. \quad (\text{ب})$$

۴-۴. نماهای مختلط

همان طور که در بخش ۱-۳ دیدیم n مقدار مختلط متمایز به $z^{1/n}$ ، $z \neq 0$ ، متناظر می گردد. اگر بنویسیم $z = re^{i\theta}$ ، آنگاه $z_k = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n}$ برای $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ یک ریشه n ام متمایز می باشد. هم زمان با اینکه شناسه z مقادیر $\theta + 2\pi, \theta + 4\pi, \dots, \theta + 2(n-1)\pi$ را می پذیرد، مقادیر $z^{1/n}$ تغییر می نمایند. چنانچه $\arg z$ به یک شاخه ویژه محدود گردد، در این صورت $z^{1/n}$ یک مقدار منحصر به فرد خواهد داشت. بنظر می آید که این مطلب دال بر آن باشد که میان ریشه های n ام و لگاریتم یک عدد مختلط مخالف صفر ارتباطی برقرار باشد. در واقع تابع $z^{1/n}$ را می توان به ترتیب زیر تعریف کرد:

$$w = z^{1/n} = e^{(1/n) \text{Log } z} = e^{(1/n)(\text{Log } |z| + i \arg z)}. \quad (16)$$

این تابع، همانند تابع لگاریتمی چند مقداری است. با قرار دادن $\arg z = \text{Arg } z + 2k\pi$ عددی صحیح، مشاهده می شود که (۱۶) بازاء $k = 0, 1, \dots, n-1$ مقادیر مختلف می پذیرد. و بازاء دیگر مقادیر k ، یکی از این n ریشه تکرار می گردد. بطور عمومی تر، اگر m و n اعداد صحیح مثبت با مضارب مشترک نباشند تعریف می کنیم $(z^{1/n})^m = e^{(m/n) \log z}$ ، $z \neq 0$ ، این مقدار، هم، دارای n مقدار متمایز است این مطالب بطور کاملاً "طبیعی" ما را به تعریف زیر از z^a ، برای a های مختلط، هدایت می کند.

$$z^a = e^{a \log z}. \quad (17)$$

اگر a گویا نباشد، آنگاه بی نهایت مقدار به عبارت (۱۷) متناظر می گردد، جهت اثبات این مطلب، ابتداء فرض می کنیم که a اصم باشد، در این صورت برای $z = re^{i\theta} \neq 0$ داریم:

$$z^a = e^{a \log z} = e^{a(\text{Log } r + i(\theta + 2k\pi))} = r^a e^{ia\theta} e^{i(2k\pi a)}.$$

چون $e^{i(2k_1\pi a)} = e^{i(2k_2\pi a)}$ اگر و تنها اگر $k_1 = k_2$ نتیجه می شود که بی نهایت مقدار به z^a منسوب می شود، که کالبد همگی با هم برابر است.

حال فرض کنیم که $a = a + bi$ (حقیقی a و $b \neq 0$) در این صورت:

$$z^{a+bi} = e^{(a+bi) \log z} = e^{a \text{Log } r - b(\theta + 2k\pi)} e^{i(b \text{Log } r + a\theta + 2k\pi a)}.$$

چون $|z^{a+bi}| = r^a e^{-b(\theta + 2k\pi)}$ ، پس بازاء هر شاخه، z^{a+bi} دارای کالبدی

متفاوت است. و اختلاف هر دو تای آنها با هم در مضربی از $e^{-2n\pi}$ با n صحیح است.

مثالها

$$5^{1/2} = e^{(1/2) \log 5} = e^{(1/2)(\log 5 + 2k\pi i)} = e^{(1/2) \log 5} e^{k\pi i} = \pm \sqrt{5} \quad (1)$$

$$i^{1/2} = e^{(1/2) \log i} = e^{(1/2)i(\pi/2 + 2k\pi)} = \pm e^{\pi i/4} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i) \quad (2)$$

$$i^k = e^{i \log i} = e^{i [\log 1 + i(\pi/2 + 2k\pi)]} = e^{-(\pi/2 + 2k\pi)} \quad (3)$$

تذکره - در بعضی جاها عبارات $x^{1/2}$ و \sqrt{x} را معادله می گیرند. منظور ما از $x^{1/2}$ - $(x > 0)$ عدد حقیقی مثبت \sqrt{x} و عدد حقیقی منفی $-\sqrt{x}$ هر دو است.

جالب است تا ارتباط میان $z^\alpha z^\beta$ و $z^{\alpha+\beta}$ را، که در آن $z = re^{i\theta}$ ($r \neq 0$) است، مقایسه کنیم. اگر α و β حقیقی باشند، آنگاه:

$$z^\alpha z^\beta = e^{\alpha \log z} e^{\beta \log z} = e^{(\alpha+\beta) \log z} = e^{(\alpha+\beta) \text{Log } r} e^{i(\alpha+\beta)\theta} e^{2\pi i(k\alpha+n\beta)},$$

که در آن k و n صحیح هستند. از سوی دیگر برای هر عدد صحیح m داریم:

$$z^{\alpha+\beta} = e^{(\alpha+\beta) \log z} = e^{(\alpha+\beta) \text{Log } r} e^{i(\alpha+\beta)\theta} e^{2\pi i m(\alpha+\beta)}$$

پس اگر α و β صحیح باشند، $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$. اگر یکی از اعداد α یا β صحیح باشد آنگاه $z^\alpha z^\beta$ و $z^{\alpha+\beta}$ یک مجموعه از مقادیر را می پذیرند، گرچه لزوماً برای هر α و β تساوی برقرار نیست. در حالت عمومی $z^{\alpha+\beta}$ همه مقادیر $z^\alpha z^\beta$ را می پذیرد، ولی وارون آن درست نیست. بعنوان مثال $5^{1/2+1/2} = 5$ در حالی که $5^{1/2} 5^{1/2} = \pm 5$. نشان دادن صحت این شمول در مورد α و β مختلط را به دانشجو واگذار می کنیم.

"اثبات" $-1 = 1$ از مقدمه راکه در آن از فرض غلط $\sqrt{1/-1} = \sqrt{1}/\sqrt{-1}$ استفاده شد. یادآوری می کنیم. اگر در مقدمه نتیجه اخیر را بکار برده بودیم آنگاه قادر می بودیم به نتیجه $\pm 1 = \pm 1$ برسیم که چندان جالب نیست.

نظیر حالتی که برای تابع لگاریتمی وجود داشت، می توان توابع چند مقداری راکه دارای نماهای کسری هستند با شاخه های (تک - مقداری) جایگزین نمود. برای شرح مطلب در مورد $z = re^{i\theta}$ ($r \neq 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$) شاخه اصلی $z^{1/2}$ برابر است با

$$w_0 = z^{1/2} = e^{(1/2)(\text{Log } r + i\theta)} = \sqrt{r} e^{i(\theta/2)} \quad (-\pi < \theta \leq \pi).$$

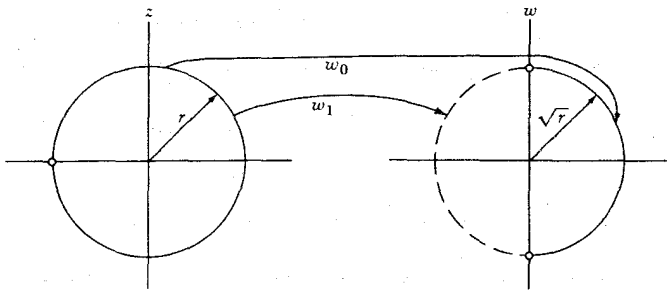
شاخه دیگر تابع برابر است با:

$$w_1 = z^{1/2} = e^{(1/2)[\text{Log } r + i(\theta + 2\pi)]} = -\sqrt{r} e^{i(\theta/2)} \quad (\pi < \theta + 2\pi \leq 3\pi).$$

هردو تابع w_0 و w_1 پیوسته‌اند، مگر بر محور حقیقی منفی. این پرتو به یک بریدگی شاخه برای هر دوی w_0 و w_1 موسوم است. هر یک از این توابع تک - مقداری را یک مشخصه یا شاخه تابع چند مقداری $w = z^{1/2}$ می‌نامند.

اینک به اثبات برخی خواص نگاشتی برای توابع w_0 و w_1 می‌پردازیم. صفحه سفته $(z \neq 0)$ توسط w_0 بر نیم صفحه راست بانضمام محور انگاری مثبت و توسط w_1 بر نیم صفحه چپ بانضمام محور انگاری منفی نگاشته می‌شود. این توابع هم چنین دایره رابر نیم دایره باستانی یکی از نقطه‌های انتهایی آن می‌نگارد (ر. ک. شکل ۱۲).

شکل ۱۲



دیگرتوابع چندمقداری با نمای کسری را میتوان بهمین ترتیب تجزیه و تحلیل نمود. تابع $w = z^{1/3}$ سه شاخه دارد. می‌نویسیم:

$$w_k = \sqrt[3]{r} e^{i(\theta + 2k\pi)/3} \quad (k = 0, 1, 2; -\pi < \theta \leq \pi).$$

هر یک از این سه تابع تک - مقداری پیوسته‌اند مگر بر محور حقیقی منفی، و دایره $|z| = r$ را بر کمان زیر می‌نگارند.

$$|w_k| = \sqrt[3]{r}, \quad \frac{(2k-1)\pi}{3} < \text{Arg } w_k \leq \frac{(2k+1)\pi}{3}.$$

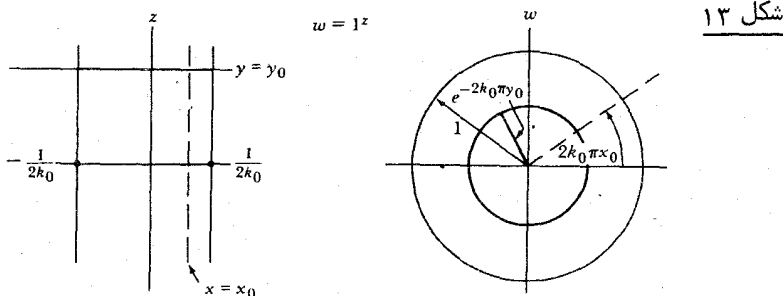
مثال بعدی بعضی خواص حیرت‌انگیز نماهای مختلط را تشریح می‌کند. تابع $w = 1^z$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$w = 1^z = e^{z \log 1} = e^{2k\pi iz} = e^{2k\pi i(x+iy)} = e^{-2k\pi y} e^{2k\pi ix}.$$

بازاء هر عدد صحیح k ، تابع $w = 1^z$ در تمام صفحه تعریف شده است. اگر $k=0$ ، یعنی با شاخه اصلی لگاریتم، آنگاه $w \equiv 1$. این همان بود که انتظار داشتیم.

ولی مشخصه دیگری برای لگاریتم در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که $k_0 > 0$ ، $k = k_0$ در این صورت تابع $w = 1^z$ متناوب و دوره تناوب آن $1/k_0$ است. اگر z عدد درست مثبتی باشد، آنگاه $1^z = 1$. اگر z حقیقی باشد آنگاه 1^z نقطه‌یی بر دایره واحد است. درواقع

بازاء x_0 ثابت، هر فاصله $x_0 - 1/2k_0 < x \leq x_0 + 1/2k_0$ بطور یک به یک بر دایره واحد نگاشته می شود. پاره خط $y = y_0$ ، $-1/2k_0 < x \leq 1/2k_0$ بر دایره $|w| = e^{-2k_0\pi y_0}$ نگاشته می شود. خط $x = x_0$ ، $-1/2k_0 < x_0 \leq 1/2k_0$ بر پرتو $\text{Arg } w = 2k_0\pi x_0$ نگاشته می شود. بنابراین نوار نامتناهی $-1/2k_0 < x \leq 1/2k_0$ بر صفحه، منهای مبدا، نگاشته می شود. بالاخره نیم صفحه زیرین بر درون قرص واحد سفته و نیم صفحه زیرین بر خارج آن نگاشته می شود (ر.ک. شکل ۱۳).



ما قبلاً "ارتباط نزدیک میان توابع نمائی و توابع مثلثاتی را بررسی کرده ایم. از این رو، وجوه اشتراک فراوان بین وارون های آنها تعجب آور نخواهد بود. نشان می دهیم که توابع مثلثاتی وارون را می توان برحسب لگاریتم تعریف کرد. اگر z عدد مختلط مفروض باشد، می خواهیم همه اعداد مختلط w را که در $z = \sin w$ صدق می کنند، بیابیم. اگر w_0 چنین جوابی باشد آنگاه $w_0 + 2k\pi$ نیز بایست جواب باشد. اگر $z = \sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$ ، آنگاه $e^{2iw} - 2ie^{iw} - 1 = 0$ که معادله درجه دوم نسبت به e^{iw} است. از حل آن حاصل می شود $e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}$. بنابراین $iw = \log [iz + (1 - z^2)^{1/2}]$ ، که به کمک آن تابع چند مقداری $w = \sin^{-1} z = -i \log [iz + (1 - z^2)^{1/2}]$ را تعریف می کنیم.

تذکر - عبارت $(1 - z^2)^{1/2}$ خودش چند مقداری است. برای محاسبه $\sin^{-1} z$ بایست ابتداءً هر یک از مقادیر $(1 - z^2)^{1/2}$ را محاسبه نمود. برای هر یک از این مقادیر آنگاه لازم است تمام لگاریتمها را مشخص نمود.

مثال ۱- برای یافتن همه مشخصه های ممکن $\sin^{-1} 0$ می نویسیم:

$$\sin^{-1} 0 = -i \log 1^{1/2} = -i \frac{2k\pi i}{2} = k\pi, \quad \text{صحیح } k$$

برای شاخه اصلی $k=0$ و $\sin^{-1} 0 = 0$

مثال ۲- برای یافتن همه مشخصه‌های ممکن $\sin^{-1} i$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\sin^{-1} i &= -i \log(-1 + 2^{1/2}) \\ &= -i [\text{Log } |-1 \pm \sqrt{2}| + i \arg(-1 \pm \sqrt{2})] \\ &= \arg(-1 \pm \sqrt{2}) - i \text{Log } |-1 \pm \sqrt{2}|.\end{aligned}$$

بازاء هر مشخصه مفروض برای ریشه دوم و برای لگاریتم قسمت حقیقی $\sin^{-1} i$ مضرب صحیحی از π است. قسمت انگاری تنها به مشخصه ریشه دوم وابسته است. بنابراین:

$$\sin^{-1} i = k\pi - i \text{Log } |-1 \pm \sqrt{2}|, \quad \text{صحیح } k$$

با انتخاب ریشه دوم مثبت و مقدار اصلی برای لگاریتم یک مشخصه ویژه عاید می‌گردد:

$$\sin^{-1} i = -i \text{Log } (\sqrt{2} - 1)$$

بطریقی مشابه می‌توان وارون دیگر توابع مثلثاتی را یافت. برای

$$z = \cos w = (e^{iw} + e^{-iw})/2 \quad \text{داریم}$$

$$w = \cos^{-1} z = -i \log [z + (z^2 - 1)^{1/2}].$$

پرسش‌ها

۱- آیا اگر $\log z^\alpha = \alpha \log z$ ، $\alpha = 0$ ؟

۲- آیا $1^{1/2} + 1^{1/2} = 2 \cdot 1^{1/2}$ ؟

۳- یک عدد مختلط به توان یک عدد مختلط، چه وقت حقیقی است؟

۴- اگر z^α ، m مقدار متمایز به پذیرد و z^β ، n مقدار متمایز به پذیرد. در مورد $z^\alpha z^\beta$ چه می‌توان گفت؟

۵- برای اعداد مختلط α و β ، $z^{\alpha\beta}$ را با $(z^\alpha)^\beta$ چگونه مقایسه می‌کنید؟

۶- برای تابع چند مقداری $w = z^{1/2}$ ، چرا مبداء این چنین نقش عمده دارد؟

۷- برای تابع $w = z^{1/2}$ ، آیا می‌توانستیم پرتوهائی به غیر از $\text{Arg } z = \pi$ را برای بریدگی شاخه انتخاب کنیم؟

۸- چگونه توابع $w = z^{1/n}$ و $w = z^n$ را مقایسه می‌کنید؟

۹- اگر m و n صحیح باشند، آیا $(z^m)^{1/n} = (z^{1/n})^m$ ؟

۱۰- توابع مثلثاتی وارون در کدام نواحی یک به یک هستند؟

۱۱- چگونه می‌توان خواص نگاشتی توابع مثلثاتی وارون را با استفاده از خواص

نگاشتی توابع مثلثاتی مشخص نمود؟

تمرینها

۱- همه مقادیر عبارات زیر را بیابید.

(الف) 5^i (ب) $(\pi i)^e$ (پ) $(2i)^i$ (ت) $\log(1+i)^{pi}$

۲- برای $z \neq 0$ ، α و β اعداد مختلط، نشان دهید که هر مقدار $z^{\alpha\beta}$ مقداری برای $(z^\alpha)^\beta$ است. وارون این مطلب چه موقع درست است؟

۳- برای $z \neq 0$ و α اصم، نشان دهید که برای بینهایت مقدار از z^α داریم $\theta_0 < \text{Arg } z^\alpha < \theta_0 + \varepsilon$ که در آن $-\pi < \theta_0 < \pi$ و $\varepsilon > 0$.

۴- قسمتهای حقیقی و انگاری عبارات زیر را جدا کنید.

(الف) x^x ($x \neq 0$) حقیقی،

(ب) $(iy)^{iy}$ ($y \neq 0$) حقیقی،

(پ) z^z ($z \neq 0$)

۵- نشان دهید برای عدد مختلط غیر صفر a ، بسته به این که کدام شاخه از لگاریتم انتخاب شود تابع a^z یا ثابت است و یا بی کران است.

۶- نگاره دایره $|z| = r$ تحت توابع چند مقداری زیر بررسی کنید.

(الف) $w = z^{1/n}$ n عددی صحیح و مثبت (ب) $w = z^{2/3}$

۷- همانندیهای زیر را ثابت کنید.

(الف) $\tan^{-1} z = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$

(ب) $\cot^{-1} z = \frac{1}{2i} \log \frac{z+i}{z-i}$

(پ) $\sec^{-1} z = \frac{1}{i} \log \frac{1+(1-z^2)^{1/2}}{z}$

(ت) $\csc^{-1} z = \frac{1}{i} \log \frac{i+(z^2-1)^{1/2}}{z}$

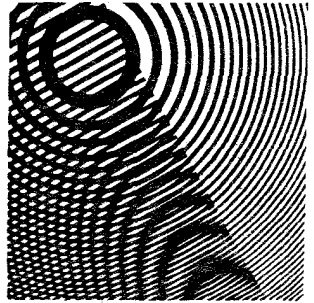
۸- همه مقادیر عبارات زیر را بیابید.

(ب) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$

(الف) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$

(ت) $\sec^{-1} i$

(پ) $\tan^{-1}(1+i)$



۵. توابع تحلیلی

در این فصل مشتق‌گیری توابع تک - مقداری با متغیر مختلط را تعریف می‌کنیم و خواهیم دید که چگونه مشتق یک تابع مختلط از یک متغیر مختلط گاهی اوقات رفتاری شبیه به مشتق یک تابع حقیقی از متغیر حقیقی دارد و دیگر مواقع با مشتقات نسبی یک تابع حقیقی از دو متغیر حقیقی قابل مقایسه است. هم‌چنین به نقش عمده همسایگی‌ها پی می‌بریم. اگر مشتق‌پذیری در یک همسایگی مفروض نباشد، در این صورت هموار بودن تابع بر یک مسیر می‌تواند مشکلات بالقوه‌یی بر مسیر دیگری ایجاد نماید.

۵-۱. معادلات کوشی - ریمان

قبلاً دیده‌ایم که هر تابع از متغیر مختلط را می‌توان به قسمت‌های حقیقی وانگاری آن تفکیک نمود. چنانچه بنویسیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ، علاقه‌مندیم که خواص $f(z)$ را با خواص مولفه‌های حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ آن مقایسه کنیم. در مورد پیوستگی، این مقایسه کاملاً "سراست است". فرض کنیم g تابعی از دو متغیر حقیقی x و y باشد. گوئیم:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = L$$

اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ موجود باشد بطوری که $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ نتیجه بدهد $|g(x, y) - L| < \varepsilon$. اگر $L = g(x_0, y_0)$ ، آنگاه $g(x, y)$ رادر (x_0, y_0) پیوسته گوئیم.

قضیه ۵-۱. تابع $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در نقطه $z_0 = x_0 + iy_0$ پیوسته است اگر و تنها اگر دو تابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در (x_0, y_0) پیوسته باشند.

اثبات - ابتداء فرض می‌کنیم $f(z)$ در $z = z_0$ پیوسته باشد در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ ، وجود دارد $\delta > 0$ بطوری که هر وقت

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

آنگاه

$$|u(x, y) - u(x_0, y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

$$|v(x, y) - v(x_0, y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

بنابراین دو تابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در (x_0, y_0) پیوسته‌اند.

برعکس اگر $u(x, y)$ و $v(x, y)$ در (x_0, y_0) پیوسته باشند، پیوستگی $f(z)$ از نامساوی زیر نتیجه می‌شود:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| + |v(x, y) - v(x_0, y_0)|.$$

با توجه به قضیه ۵-۱، بررسی دقیق‌تر مفهوم حد یک تابع از دو متغیر حقیقی عمل مفیدی می‌باشد. یادآور می‌شویم که برای تابع از یک متغیر حقیقی، وقتی که تنها دو سو برای پیمایش موجود است، حد موجود است اگر و تنها اگر حد راست و حد چپ با هم مساوی باشند. در مورد تابع دو متغیری حالتی مشابه موجود نیست زیرا در این حالت تعداد روشهای ممکن برای میل کردن نامتناهی است.

مثال ۱- فرض کنیم $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ ، $(x, y) \neq (0, 0)$. چون اگر (x, y) در امتداد هر یک از محورهای مختصات به صفر میل کند آنگاه $f(x, y) \equiv 0$ داریم:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0.$$

با اینحال، با انتخاب خط مستقیم $y = mx$ حاصل می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

چون $f(x, y)$ بر امتداد خطوط مستقیم متفاوت به مقادیر مختلفی میل می‌کند. حد آن در مبداء موجود نیست.

مثال ۲- فرض کنیم $f(x, y) = x^2y^2/(x + y^2)^3$ ، $(x, y) \neq (0, 0)$ در این حال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^4}{(x + m^2 x^2)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x}{(1 + m^2 x)^3} = 0,$$

و اگر (x, y) بر امتداد خط مستقیمی به $(0, 0)$ میل کند. آنگاه $f(x, y)$ به 0 میل می کند. ولی بر امتداد سهمی $x = y^2$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4 y^2}{(y^2 + y^2)^3} = \frac{1}{8}.$$

بنابراین، $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ موجود نیست.

مثال ۳- فرض کنیم $f(x, y) = (x^3 - 2y^3)/(x^2 + y^2)$ ، $(x, y) \neq (0, 0)$ ، می خواهیم نشان دهیم که این تابع در مبدأ حد دارد. واضح است که آزمایش تمام راهها امکان پذیر نیست، بنابراین لازم است نامساویهای مناسبی بیابیم.

روش اول - داریم:

$$\begin{aligned} |x^3 - 2y^3| &\leq |x|^3 + 2|y|^3 = |x|x^2 + 2|y|y^2 \\ &\leq \sqrt{x^2 + y^2} (x^2 + 2y^2) \leq 2(x^2 + y^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

پس

$$\left| \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2},$$

بنابراین هر وقت $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon/2 = \delta$ خواهیم داشت $|f(x, y)| < \varepsilon$ بنابراین:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

روش ۲- با تبدیل به مختصات قطبی، بایست نشان داد که اگر $r < \delta$ آنگاه $|f(r, \theta)| < \varepsilon$ ولی:

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{r^3 \cos^3 \theta - 2r^3 \sin^3 \theta}{r^2} \right| \\ &= r |\cos^3 \theta - 2 \sin^3 \theta| \leq 3r, \end{aligned}$$

و با انتخاب $\delta = \varepsilon/3$ ، نتیجه مطلوب حاصل می گردد.

هدف ما از طرح مثالهای بالا این نبود که روشهای دایهانه برای محاسبه حدود را بیابیم، بلکه منظور تاکید بر نقش عمده مسیر بود. یک تابع ممکن است در طول یک مسیر

خیلی خوشرفتار باشد، در حالی که مطالعه آن بر مسیری دیگر غیرممکن باشد. این پدیده نتایج حیرت‌انگیزی را در نظریه توابع مشتق‌پذیر بوجود می‌آورد. تابع f را در نقطه z مشتق‌پذیر گوئیم اگر چنانچه:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

موجود باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

باید توجه داشت که h از میان نقاط صفحه به 0 نزدیک می‌شود نه اینکه تنها در طول محور حقیقی.

مثال - تابع $f(z) = z^2$ در همه جا مشتق‌پذیر است زیرا:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2zh + h^2}{h} = 2z.$$

در همانی

$$f(z+h) - f(z) = \left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right) h,$$

با میل کردن h به صفر، قضیه مشهور متغیرهای حقیقی که هر تابع مشتق‌پذیر، پیوسته است حاصل می‌گردد، یعنی که

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(z+h) - f(z)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right) h \\ &= f'(z) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{h \rightarrow 0} f(z+h) = f(z)$

از سوی دیگر، تابع $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ در مبدأ پیوسته است ولی در آن مشتق-

پذیر نیست. واضح است که $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0) = 0$ ولی $(f(h) - f(0))/(h - 0) = |h|/h$ برای مقادیر مثبت حقیقی h برابر 1، برای مقادیر منفی حقیقی h برابر -1، برای مقادیر h بر محور انگاری مثبت برابر i - و برای h بر محور انگاری منفی برابر i است بنابراین $f'(0)$ موجود نیست.

شبهاتی که تاکنون میان مشتق تابع با مقادیر مختلط $f(z)$ و تابع با مقادیر حقیقی

$f(x)$ داشتیم ، قابل توجه است . در واقع ، همه قواعد مشتق‌گیری رسمی یکسانند .
خواص زیر را به صورت قضیه‌ای گردآوری می‌کنیم :

قضیه ۵-۲. (۱) اگر $f(z) = z^n$ و n صحیح باشد ، آنگاه $f'(z) = nz^{n-1}$ برای توابع مشتق‌پذیر $f(z)$ و $g(z)$ داریم :

$$(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z), \quad (2)$$

$$(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \quad (3)$$

$$(4) \text{ اگر } g(z) \neq 0 \text{ آنگاه } \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}$$

فرض کنیم g در z و f در $g(z)$ مشتق‌پذیر باشد . اگر $F(z) = f(g(z))$ آنگاه :

$$F'(z) = f'(g(z))g'(z) \quad (5)$$

اثبات - اثبات این خواص بدون کم و زیاد مشابه توابع با متغیر حقیقی است .

برای آنکه خواننده با شباهات ظاهری میان مشتق‌های حقیقی و مختلط گمراه نشود ،
اینک برخی نتایج حاصل از این شرط را که h بدون توجه به مسیر h
به مقدار معین میل می‌کرد ، بررسی می‌کنیم .

بدین منظور مسیرهای مشخصی جهت میل متغیر تخصیص می‌دهیم تا بدین وسیله
خواص قسمتهای حقیقی و انگاری تابع مشتق‌پذیر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ را استنتاج
کنیم .

ابتداءً فرض می‌کنیم h در امتداد محور حقیقی به ۰ میل کند . با تفکیک به قسمتهای
حقیقی و انگاری داریم

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{u(x+h, y) + iv(x+h, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{h} \\ &= \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h} . \end{aligned}$$

اگر f در $z = x + iy$ مشتق‌پذیر باشد ، دو عبارت طرف راست می‌بایست حد داشته
باشند و می‌بینیم که این حد همان مشتقات $u(x, y)$ و $v(x, y)$ نسبت به x اند .
بنابراین :

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} . \quad (1)$$

اینگیریم h برمحورانگاری به صفر میل کند در این صورت برای $h = ik$ ، k حقیقی داریم:

$$\frac{f(z + ik) - f(z)}{ik} = \frac{u(x, y + k) - u(x, y)}{ik} + i \frac{v(x, y + k) - v(x, y)}{ik}.$$

بنابراین

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z + ik) - f(z)}{ik} = \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$

ولی عبارات (۱) و (۲) می‌بایست برابر باشند. بنابراین

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3)$$

با برابر نهادن قسمت‌های حقیقی و انگاری در (۳) حاصل میشود.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4)$$

معادلات (۴) به معادلات کوشی-ریمان مشهوراند، و شرطی لازم برای مشتق‌پذیری در

یک نقطه را بدست می‌دهند. در مورد تابع $f(z) = \bar{z} = x - iy$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv 1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv -1.$$

چون معادلات کوشی-ریمان سازگار نیستند، تابع هیچ جا مشتق‌پذیر نیست.

برای این که به بینیم سازگاری معادلات کوشی-ریمان برای مشتق‌پذیری در یک نقطه

کافی نیست، تابع

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

را در نظر می‌گیریم. این تابع روی دو محور مختصات صفر است. بنابراین در $z = 0$

داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

و معادلات کوشی-ریمان صادق‌اند. ولی بر خط، $y = x$ داریم:

$$\frac{f(h + ih) - f(0)}{h + ih} = \frac{h \cdot h / (h^2 + h^2)}{h + ih} = \frac{1}{2(1 + i)h},$$

که با میل h به ۰ به ∞ میل می‌کند. بنابراین $f'(0)$ موجود نیست. در واقع، در $z=0$ علیرغم وجود مشتقات نسبی، تابع حتی پیوسته نیست.

اگر تابعی در نقطه‌ی پیوسته و دارای مشتقات نسبی سازگار در معادلات کوشی - ریمان باشد هنوز مشتق‌پذیری تابع تضمین نیست. تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

چون $|f(z)| \leq |x|$ ، تابع در مبدأ پیوسته است، بعلاوه

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0,$$

و بنابراین معادلات کوشی - ریمان سازگارند. ولی بر خط $y = mx$ داریم:

$$\frac{f(h+imh) - f(0)}{h+imh} = \frac{m^2 h^3 / (1+m^2) h^2}{h+imh} = \frac{m^2}{(1+im)(1+m^2)},$$

که به حد منحصربفردی مستقل از m میل نمی‌کند، بنابراین، این بار هم $f'(0)$ موجود نیست.

تاکنون سرشت‌های منفی معادلات کوشی - ریمان مورد تاکید قرار گرفت. آنها در ابتداء بمنظور اثبات عدم وجود مشتق مورد استفاده قرار گرفتند. در بخش بعد با استفاده از این معادلات و همراه با معیاری دیگر یک شرط کافی برای مشتق‌پذیری تدوین خواهیم کرد.

معادله (۳) را بطور دقیق‌تر می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (۵)$$

معادله (۵) روشی برای محاسبه مشتق بشرط وجود آن بدست می‌دهد. به عنوان

مثال تابع $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$ همه جا مشتق دارد (قضیه ۵-۲)، بنابراین از (۵) استفاده نموده و بدست می‌آوریم:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + i(2y) = 2(x + iy) = 2z.$$

اینک مشابیهی از یک قضیه معروف در متغیرهای حقیقی را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵-۳. اگر در میدان \mathcal{D} داشته باشیم $f'(z) \equiv 0$ آنگاه $f(z)$ در \mathcal{D} ثابت است.

اثبات - با توجه به (۵) برای همه نقاط \mathcal{D} داریم، $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ اکنون اگر مشتق یک تابع

از یک متغیر حقیقی در یک فاصله صفر باشد، تابع در این فاصله می‌بایست ثابت باشد. بنابراین $\partial u / \partial x = \partial u / \partial y = 0$ در \mathcal{D} موجب می‌شود که $u(x, y)$ بر هر پاره خط افقی و عمودی درون \mathcal{D} ثابت باشد. بطریق مشابه $\partial v / \partial x = \partial v / \partial y = 0$ در \mathcal{D} ، موجب می‌گردد که $v(x, y)$ به هر پاره خط افقی و عمودی درون \mathcal{D} ثابت باشد. بنابراین $f(z) = u(z) + iv(z)$ بر هر خط چند ضلعی در \mathcal{D} با اضلاع موازی محورهای مختصات ثابت است. بموجب تذکره دنبال قضیه ۲-۲، هر دو نقطه در \mathcal{D} را می‌توان با یک چنین چند ضلعی به همدیگر وصل کرد. بنابراین برای هر z_1 و هر z_2 داریم $f(z_1) = f(z_2)$ و بنابراین $f(z)$ در \mathcal{D} ثابت و اثبات تمام است.

پرسش‌ها

- ۱- تفسیر هندسی تابع پیوسته‌ای از دو متغیر چیست؟
- ۲- برای تابع دو متغیری، چرا معمولاً "اثبات عدم وجود حد ساده‌تر است؟"
- ۳- چرا رفتار توابع بر محورهای مختصات نقش اساسی داشت؟
- ۴- آیا می‌توان معادلات کوشی-ریمان را به شکل مختصات قطبی نوشت؟
- ۵- آیا می‌توانیم وجود مشتق در تابع مختلط را از نظر هندسی تغییر کنیم؟
- ۶- اگر مشتق موجود باشد، آیا مشتق تابعی پیوسته است؟
- ۷- چه وقت محاسبه حد در مختصات قطبی ساده‌تر است؟
- ۸- در این بخش، از کلمه "مسیر" بدون اینکه آنرا تعریف کنیم استفاده کردیم، چگونه "مسیر" را تعریف می‌کنید؟
- ۹- اگر تابع $f = u + iv$ مشتق پذیر باشد، آیا می‌توانیم چیزی در مورد $\partial^2 u / \partial x^2$ بگوئیم؟
- ۱۰- اگر $f(z)$ در میدانی تنها مقادیر حقیقی به پذیرد، در مورد وجود $f'(z)$ چه می‌توان گفت؟
- ۱۱- تابع $|z|$ کجا مشتق پذیر است؟

تمرینها

- ۱- اگر $f(0, 0) = 0$ ، کدام یک از توابع زیر در مبدأ پیوسته است.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4} \quad (\text{الف}) \quad b) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f(x, y) = \frac{x + y e^{-x^2}}{1 + y^2} \quad (\text{ت}) \quad \text{پ) } f(x, y) = \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{ث) } f(x, y) = \frac{(x + y^2)^2}{x^2 + y^2}$$

۲- مشخص کنید که توابع زیر کجا در معادلات کوشی - رییمان صدق می کنند و در کجا مشتق پذیر اند.

$f(z) = z^2$ (الف)	$f(z) = x^2 - y^2$ (ب)
$f(z) = 2xyi$ (پ)	$f(z) = x^2 - y^2 + 2xyi$ (ت)
$f(z) = z \operatorname{Re} z$ (ث)	$f(z) = z z $ (ج)

۳- اگر $f(z)$ در z_0 پیوسته باشد، نشان دهید که $\overline{f(z)}$ هم در z_0 پیوسته است آیا این مطلب برای مشتق پذیری هم درست است؟

۴- (الف) عدد صحیح n و عدد حقیقی غیر صفر m مفروض اند، تابعی مانند $f(z)$ چنان بسازید که بر هر خمی به شکل $y = mx^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ ولی بر هر خم $y = mx^n$ $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) \neq 0$.

(ب) تابعی مانند $f(z)$ چنان بسازید که بر هر خمی به شکل $y = mx^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0$ ولی برای آن تابع $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ موجود نباشد. ۵- اگر $f(z)$ مشتق پذیر باشد، نشان دهید.

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}.$$

عبارت اخیر را ژاکوبین $^1 u$ و v نسبت به x و y گویند.

۶- اگر $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ در نقطه (x_0, y_0) موجود باشد، نشان دهید.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(x, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0).$$

آیا می بایست $f(x, y)$ در (x_0, y_0) پیوسته باشد؟

۵-۲. تحلیلی بودن

با کوششی که نمودیم، قادر گشتیم مشتق پذیری را از معادلات کوشی - رییمان استخراج نمائیم. این شرط "هموار بودن" بر امتداد هر یک از محورهای مختصات نمی تواند رفتار یک تابع بر امتداد مسیرهای مختلف را بقدر کافی کنترل نماید. اگر چنانچه توجه خود را به عوض نقاط تنها بر همسایگی ها متمرکز کنیم، اکثر مشکلات موجود برطرف خواهد شد. یک تابع را در یک نقطه تحلیلی گوئیم اگر در همه جای یک همسایگی این نقطه

مشتق پذیر باشد. یک تابع را در یک میدان تحلیلی گوئیم اگر در همه نقاط این میدان تحلیلی باشد. تابعی را که در تمام صفحه مختلط تحلیلی باشد، تابع تام گویند.

تابع $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ تنها در مبدا مشتق دارد، بنابراین هیچ جا تحلیلی نیست. تابع $f(z) = x^2 y^2$ بر همه نقاط محورهای مختصات مشتق دارد و با این حال هیچ جا تحلیلی نیست. از سوی دیگر، چند جمله‌یی‌ها توابع تام هستند، و $f(z) = 1/(1-z)$ همه جا مگر در $z=1$ تحلیلی است.

تذکره - اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد آنگاه یک ε مثبت موجود است بطوری که $f(z)$ در تمام نقاط $N(z_0; \varepsilon)$ مشتق پذیر باشد. ولی برای هر نقطه z_1 متعلق به $N(z_0; \varepsilon)$ یک δ یافت می شود بطوری که $N(z_1; \delta) \subset N(z_0; \varepsilon)$. بنابراین $f(z)$ در z_1 هم تحلیلی است. در نتیجه $f(z)$ در یک نقطه تحلیلی است اگر و تنها اگر در همسایگی این نقطه تحلیلی باشد. بنابراین، مجموعه همه نقاطی که یک تابع مفروض آن تحلیلی است، می بایست یک مجموعه باز تشکیل دهد. به ویژه، اگر تابعی در یک مجموعه بسته تحلیلی باشد، در این صورت همیشه یک مجموعه باز شامل این مجموعه بسته موجود است بطوری که، تابع بر آن تحلیلی است.

به توابع از دو متغیر حقیقی باز می گردیم، و قضیه مقدار میانگین زیر را اثبات می - کنیم:

قضیه ۵-۴. فرض کنیم $f(x, y)$ در میدان \mathcal{D} تعریف شده و $\partial f / \partial x = f_1(x, y)$ و $\partial f / \partial y = f_2(x, y)$ در تمام نقاط \mathcal{D} پیوسته باشند. اگر (x, y) نقطه مفروضی از \mathcal{D} باشد، δ را طوری انتخاب می کنیم که برای همه نقاطی که $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ داشته باشیم $(x+h, y+k) \in \mathcal{D}$ در این صورت:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = f_1(x, y)h + f_2(x, y)k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k,$$

که در آن وقتی h و k هر دو به سمت صفر میل کنند آنگاه $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ و $\varepsilon_2 \rightarrow 0$

اثبات - می نویسیم:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)\} + \{f(x, y+k) - f(x, y)\}. \quad (6)$$

اینک تابع $f(x, y+k)$ را می توان به عنوان تابع مشتق پذیر از متغیر ξ در نظر گرفت، که در آن ξ مقادیر میان x و $(x+h)$ را می پذیرد. با بکار بردن قضیه مقدار میانگین برای یک متغیر حقیقی داریم:

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k) = f_1(x+\theta_1 h, y+k)h \quad (|\theta_1| < 1). \quad (۷)$$

بطریق مشابه

$$f(x, y+k) - f(x, y) = f_2(x, y+\theta_2 k)k \quad (|\theta_2| < 1). \quad (۸)$$

از پیوستگی f_1 و f_2 داریم

$$\begin{aligned} f_1(x+\theta_1 h, y+k) &= f_1(x, y) + \varepsilon_1, \\ f_2(x, y+\theta_2 k) &= f_2(x, y) + \varepsilon_2, \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن اگر h و k هر دو بسمت صفر میل کنند آنگاه $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ و $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. با توجه به (۹) می‌توان (۷) و (۸) را بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) - f(x, y+k) &= f_1(x, y)h + \varepsilon_1 h, \\ f(x, y+k) - f(x, y) &= f_2(x, y)k + \varepsilon_2 k. \end{aligned}$$

و اینک نتیجه از (۶) حاصل می‌گردد.

این قضیه مقدار میانگین بما امکان می‌دهد تا با استفاده از معادلات کوشی-ریمان شرایط کافی برای تحلیلی بودن را بدست آوریم.

قضیه ۵-۵. فرض کنیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در میدانی مانند \mathcal{D} تعریف شده باشد و گیریم $u(x, y)$ و $v(x, y)$ دارای مشتقات نسبی پیوسته باشد که در تمام نقاط \mathcal{D} در معادلات کوشی-ریمان صدق کنند. یعنی برای تمام نقاط \mathcal{D} داشته باشیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

در این صورت $f(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است.

اثبات - قرار می‌گذاریم $z = h + ik$ باشد، که در آن h و k اعداد حقیقی دلخواه باشند. با نقطه مفروض $z \in \mathcal{D}$ ، z می‌بایست نشان دهیم که $\lim_{j \rightarrow 0} (f(z+j) - f(z))/j$ موجود است. برای h و k های باندازه کافی کوچک، $z + (h+ik)$ در \mathcal{D} واقع است. چون فرض بر آن است، u و v مشتقات نسبی پیوسته داشته باشند. کاربرد قضیه ۵-۱ نشان می‌دهد که $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ نیز می‌بایست پیوسته باشند. بنابراین شرایط قضیه ۵-۴ صادق اند و داریم:

$$\frac{f(z + (h+ik)) - f(z)}{h+ik} = \frac{f_1(x, y)h + f_2(x, y)k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k}{h+ik}, \quad (۱۰)$$

بطوریکه با $h \rightarrow 0$ و $k \rightarrow 0$ داریم $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ و $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ ، هم چنانکه در (۵) دیدیم معادلات

کوشی - ریمن را می توان بصورت $f_1(x, y) = -if_2(x, y)$ و یا بصورت زیر نوشت :

$$if_1(x, y) = f_2(x, y). \quad (11)$$

با جایگزین نمودن (۱۱) در (۱۰)، حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \frac{f(z + (h + ik)) - f(z)}{h + ik} &= \frac{f_1(x, y)h + if_1(x, y)k + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k}{h + ik} \\ &= f_1(x, y) + \varepsilon_1 \frac{h}{h + ik} + \varepsilon_2 \frac{k}{h + ik}. \end{aligned} \quad (12)$$

ولی

$$\left| \frac{h}{h + ik} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{k}{h + ik} \right| \leq 1,$$

بنابراین دو عبارت آخر در (۱۲) با میل کردن h و k به سمت صفر، به صفر میل می کنند
بنابراین

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{f(z + (h + ik)) - f(z)}{h + ik} = f_1(x, y).$$

چون در مورد چگونگی میل کردن h و k به صفر فرض مشخصی نداشتیم، پس مشتق $f'(z)$ موجود است $f'(z) = f_1(x, y)$ چون z دلخواه بود، تابع در \mathcal{D} همه جا مشتق پذیر است و بنابراین تابع در \mathcal{D} تحلیلی است.

بطریقی مشابه می توانستیم نشان دهیم که برای تمام نقاط \mathcal{D} داریم $f'(z) = -if_2(x, y)$.

به منظور فهم بیشتر ارتباط میان معادلات کوشی - ریمن و مشتق پذیری، مراحل عمده قضیه ۵-۵ را استخراج کنیم. از شرط پیوستگی مشتقات نسبی در یک همسایگی استفاده کردیم تا بتوانیم از قضیه ۴-۵ استفاده کرده و (۱۰) را بدست آوریم. جایگزین نمودن معادلات کوشی - ریمن در (۱۰) به (۱۲) منجر گردید. آنگاه تحلیلی بودن از (۱۲) نتیجه شد.

اگر تنها مشتق پذیری در یک نقطه هدف اصلی ما می بود، می توانستیم قضیه بی مشابه ۵-۵، که در آن پیوستگی مشتقات نسبی تنها در یک نقطه لازم بود، اثبات کنیم. ولی برای توابع مختلط، تحلیلی بودن (به عوض مشتق پذیری در یک نقطه) مفهوم عمده است. در فصل ۸، نشان خواهیم داد، اگر $f(z)$ در نقطه بی تحلیلی باشد، آنگاه $f(z)$ در آن نقطه دارای مشتق از تمام مراتب می باشد، به ویژه وجود $f'(z)$ گویای آن است که

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

پیوسته است. بموجب قضیه ۵-۱، مشتقات نسبی مولفه‌های حقیقی و انکاری هم پیوسته می‌باشند.

بنابراین، معکوس قضیه ۵-۵ هم درست است. یعنی که تابع در میدان \mathcal{D} تحلیلی است اگر و فقط اگر تابع در همه نقاط میدان \mathcal{D} دارای مشتقات نسبی پیوسته‌ای باشد که در معادلات کوشی - ریمن صدق کنند.

قابل توجه است که مشتق‌پذیری در یک همسایگی برای توابع حقیقی به اندازه توابع مختلط ارزشمند نیست. تابع حقیقی $f(x) = x|x|$ برای تمام مقادیر حقیقی مشتق‌پذیر است. ولی در مبدا دارای مشتق مرتبه دوم نیست. تابع زیر همه جا مشتق‌پذیر است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ولی مشتق آن در مبدا پیوسته نیست.

اکنون بررسی تحلیلی بودن توابع مقدماتی امری کاملاً ساده است.

مثال ۱- فرض کنیم $f(z) = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y.$$

با بکار بردن قضیه ۵-۵ نتیجه می‌گیریم که $f(z) = e^z$ تابعی تام است.

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

مثال ۲- فرض کنیم $f(z) = \sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ بموجب قضیه ۵-۲ و مثال ۱ داریم:

$$f'(z) = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

مثال ۳- فرض کنیم $f(z) = \cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ در این صورت:

$$f'(z) = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

مثالهای فوق بازگوکننده یک الگوی تراجعی در نظریه متغیرهای مختلط است. نمای حقیقی، اطلاعاتی در مورد نمای مختلط بدست می دهد که آن به نوبه خود ما را به استنتاج نتایجی در مورد توابع مثلثاتی قادر می سازد. تحقیق این مطلب که توابع $\tan z$ ، $\sec z$ ، $\csc z$ دارای مشتقات منظره "میباشند"، را به دانشجو واگذار می کنیم.

ذیلا "عبارتی برای معادلات کوشی - ریمن در مختصات قطبی را که گاهی مفید است اثبات می کنیم.

قضیه ۵-۶. فرض کنیم $f = u + iv$ در $z = re^{i\theta}$ ، $r \neq 0$ ، مشتق پذیر و مشتقات نسبی آن پیوسته باشد آنگاه:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

اثبات - چون مشتقات نسبی پیوسته اند، قاعده زنجیر را می توان بکار بست. با قرار دادن $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta \quad (13)$$

و

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial v}{\partial y} (r \cos \theta). \quad (14)$$

با بکار بردن معادلات کوشی - ریمن در (۱۴)، از (۱۳) نتیجه می شود که:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r \left(\frac{\partial u}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial x} \cos \theta \right) = r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

که شرط اول را برقرار می کند. بطریق مشابه

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial u}{\partial y} (r \cos \theta) = -r \left(\frac{\partial v}{\partial y} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial x} \cos \theta \right) \\ &= -r \frac{\partial v}{\partial r}, \end{aligned}$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است.

در خاتمه این بخش قضیه بی را که فقط به مشتق پذیری در یک نقطه نیاز دارد مطرح می کنیم. گو اینکه بعداً "قضیه عمومی تری برای توابع تحلیلی اثبات خواهد شد.

قضیه ۵-۷. فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 مشتق پذیر بوده با $f(z_0) = g(z_0) = 0$

اگر $g'(z_0) \neq 0$ آنگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

اثبات - این قضیه، نتیجه‌ای تعریف مشتق است، زیرا

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)}.$$

مثال ۱- فرض کنیم $f(z) = |z|^2$ و $g(z) = z$ در این صورت:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0.$$

مثال ۲- برای $f(z) = \sin z$ داریم:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(az)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin az}{\sin z} = a \frac{\cos 0}{\cos 0} = a,$$

که در آن a عدد مختلط است.

مثال ۳- فرض کنیم $f(z) = 1 - \cos z$ و $g(z) = \sin^2 z$ در اینجا $g'(0) = 0$ ، و

با اثباتی مستقیم می‌توان از قضیه ۵-۷ پرهیز نمود.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{1 - \cos^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{(1 - \cos z)(1 + \cos z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos z} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

پرسش‌ها

۱- اگر در قضیه ۵-۴، شرط پیوستگی مشتقات نسبی موجود نباشد، چه نوع قضیه

مقدار میانگین می‌توان بدست آورد؟

۲- چه اختلافات عمده‌یی میان توابع مشتق‌پذیر و توابع تحلیلی موجود است؟

۳- برای تابع تام چه تعاریف دیگری می‌توانستیم مطرح کنیم؟

۴- چه ارتباطی میان پیوستگی یک تابع با پیوستگی مشتقات نسبی آن موجود است؟

۵- تابع تحلیلی حقیقی را چگونه می‌توانستیم تعریف کنیم؟

۶- اگر $f(z_0) = g(z_0) = 0$ و $f'(z_0)$ و $g'(z_0)$ موجود باشند و $g'(z_0) \neq 0$ ،

آیا:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} ?$$

۷- اگر تابعی در یک ناحیه کراندار تحلیلی باشد، آیا تابع کراندار است؟

۸- اگر $f(z)$ در تمام نقاط صفحه در معادلات کوشی - ریمان صدق کند، آیا تابعی نام است؟

۹- چرا شکل قطبی معادلات کوشی - ریمان در مبداء معتبر نیست؟

تمرینها۱- شرایطی برای ثابت‌های a و b و c بیابید تا توابع زیر نام گردند.

$$f(z) = x + ay - i(bx + cy) \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = ax^2 - by^2 + icxy \quad (\text{ب})$$

$$f(z) = e^z \cos ay + ie^z \sin (y + b) + C \quad (\text{پ})$$

$$f(z) = a(x^2 + y^2) + ibxy + C \quad (\text{ت})$$

$$2- \text{فرض کنیم } f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

نشان دهید:

الف) $f(z)$ همه جا در معادلات کوشی - ریمان صادق است؛ب) $f(z)$ همه جا مگر در $z=0$ تحلیلی است.پ) $f(z)$ در $z=0$ پیوسته نیست.۳- فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ توابع نام هستند. نشان دهید، توابع زیر هم نام هستند.

$$\text{الف) } f(z) + g(z) \quad \text{ب) } f(z)g(z) \quad \text{پ) } f(g(z))$$

۴- فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 تحلیلی اند. نشان دهید، $f(z)/g(z)$ در z_0 تحلیلی است اگر و تنها اگر $g(z_0) \neq 0$.۵- فرض کنیم $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$. ثابت کنید، $a_k = (f^{(k)}(0))/k!$ ،

$$(k = 0, 1, \dots, n)$$

۶- اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد. نشان دهید، $g(z) = \operatorname{Re} f(z)$ در z_0 تحلیلی است اگر و تنها اگر $g(z)$ در یک همسایگی z_0 ثابت باشد.۷- اگر $f = u + iv$ در نقطه z مشتق پذیر باشد، نشان دهید، مشتقات نسبی مراتب

اول θ و r در z موجودند.

۸- (الف) فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} که شامل مبدا نیست، تحلیلی و دارای مشتقات نسبی پیوسته باشد. با استفاده از قضیه ۵-۶ نشان دهید که در تمام نقاط \mathcal{D} داریم:

$$f'(z) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

(ب) برعکس، اگر $f(z)$ در میدان \mathcal{D} که شامل مبدا نیست دارای مشتقات نسبی پیوسته باشد و در تمام نقاط \mathcal{D} رابطه

$$e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

برقرار باشد، نشان دهید $f(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است.

۹- با استفاده از نتیجه تمرین قبل نشان دهید، مشتق z^n ، برای n صحیح، برابر nz^{n-1} است.

۱۰- حدود زیر را در صورت وجود بیابید.

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{ z } \quad (\text{ب})$	$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{3z} \quad (\text{الف})$
$\lim_{z \rightarrow 0} z \sin \frac{1}{z} \quad (\text{ت})$	$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{2 \sin z}{e^z - 1} \quad (\text{پ})$

۵-۳. توابع همساز

اگر $f(z)$ در میدانی تحلیلی باشد، آنگاه مشتقات آن را می‌توان به اشکال مختلف نوشت، به عنوان مثال بموجب (۵) می‌توانیم بنویسیم:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (15)$$

و یا

$$f'(z) = -i \frac{\partial f}{\partial y} \quad (16)$$

در فصل ۸ نشان خواهیم داد که یک تابع تحلیلی دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد. از معادله (۱۵) می‌بینیم که مشتق دوم را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$f''(z) = \frac{\partial}{\partial x} f'(z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (17)$$

با توجه به (۱۶) هم چنین خواهیم داشت:

$$f''(z) = -i \frac{\partial}{\partial y} f'(z) = -i \frac{\partial}{\partial y} \left(-i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (18)$$

با برابر نهادن (۱۷) و (۱۸) همانندی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (19)$$

که برای هر تابع تحلیلی برقرار است، پس اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در میدانی تحلیلی باشد، معادله (۱۹) نشان می‌دهد که مولفه‌های حقیقی و انکاری آن می‌بایست در معادلات با مشتقات نسبی زیر صدق کند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (20)$$

تابع با مقادیر حقیقی پیوسته $U(x, y)$ را که در میدان \mathcal{D} تعریف شده است، در همساز گویند بشرطی که دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام \mathcal{D} در معادله زیر صادق باشند.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \quad (21)$$

این معادله به معادله لاپلاس^۱ مشهور است. با بکار بردن این قضیه، (که البته بعداً ثابت خواهیم کرد) که هر تابع تحلیلی در یک میدان، در همه نقاط آن میدان دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد (در نتیجه دارای مشتق دوم پیوسته نیز می‌باشد)، از (۲۰) می‌بینیم که هر دو قسمت حقیقی و انکاری یک تابع تحلیلی توابع همسازند. اگر $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه مزدوج همساز از u نام دارد.

تذکر - این خاصیت پاد تقارنی زیر را داریم که v مزدوج همساز u است اگر و تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب، از توجه به این امر نتیجه می‌شود که هر جا f تحلیلی باشد، $if = i(u + iv) = -v + iu$ نیز تحلیلی است. معادله لاپلاس شرط لازمی برای اینکه تابعی قسمت حقیقی (یا انکاری) یک تابع تحلیلی باشد ارائه می‌دهد.

مثال - برای تابع $u(x, y) = x^2 + y$ ، داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,$$

و بنابراین u هیچ جا در معادله لاپلاس صدق نمی‌کند. بنابراین $u(x, y) = x^2 + y$ نمی‌تواند قسمت حقیقی هیچ تابع تحلیلی باشد.

اینک نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان مزدوج همساز را با استفاده از معادلات کوشی-ریمان یافت.

مثال - به آسانی می‌توان نشان داد که $u(x, y) = x + e^{-x} \cos y$ همه جا همساز است اگر یک تابع $v(x, y)$ موجود باشد بطوری که $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - e^{-x} \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (22)$$

با تابع اولیه گرفتن نسبت به y از (۲۲) حاصل می‌شود.

$$v = y - e^{-x} \sin y + \phi(x), \quad (23)$$

که در آن $\phi(x)$ یک تابع نسبت به x مشتق‌پذیر است. ولی با توجه به (۲۳) و با استفاده از معادله دیگر کوشی-ریمان حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-x} \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-x} \sin y - \phi'(x),$$

و تنها وقتی برقرار است که $\phi'(x) \equiv 0$. بنابراین $v(x, y) = y - e^{-x} \sin y + C$ ، ثابتی است حقیقی. بنابراین $v(x, y)$ مزدوج همساز $u(x, y)$ است و بموجب قضیه ۵-۵، تابع $f(z)$ تام است. در واقع

$$\begin{aligned} f(z) &= x + e^{-x} \cos y + i(y - e^{-x} \sin y + C) \\ &= x + iy + e^{-x}(\cos y - i \sin y) + iC \\ &= z + e^{-z} + iC. \end{aligned}$$

اینک دو سؤال مطرح می‌شود: معادله لاپلاس تاچه حد برای تضمین وجود یک مزدوج همساز کفایت می‌کند و در حالت عمومی، چگونه می‌توان همه این مزدوج‌های همساز را مشخص نمود؟ بهر دوی این سؤال‌ها در فصل ۱۰ پاسخ خواهیم گفت، در آنجا مزدوج همساز یک تابع همساز را در یک همسایگی یک نقطه خواهیم ساخت، بنابراین نشان خواهیم داد که یک تابع در یک همسایگی از یک نقطه همساز است اگر و تنها اگر قسمت حقیقی یک تابع

تحلیلی باشد.

همان طور که ممکن است انتظار برود، اختلاف هر دو مزدوج همساز از یک تابع همساز مفروض در یک عدد ثابت حقیقی است. زیرا اگر $v(x, y)$ و $v^*(x, y)$ مزدوجهای همساز $u(x, y)$ باشند، آنگاه بموجب معادلات کوشی - ریمن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^*}{\partial y}, \quad -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial x}.$$

بنابراین $v(x, y) = v^*(x, y) + C$ ، ثابت C .

اکثر خواص توابع تحلیلی از خواص قسمتهای حقیقی و انگاری آنها بهارث برده شده است. به عنوان مثال، اگر $u = \operatorname{Re} f(z)$ در ناحیهی ثابت باشد و در آن ناحیه $f(z)$ تحلیلی باشد، در این صورت $f(z)$ می‌بایست ثابت باشد. این مطلب از بکار بردن معادلات کوشی - ریمن حاصل می‌گردد:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

در حالی که قسمتهای حقیقی و انگاری یک تابع تحلیلی همسازند. کالبد آن لزومی ندارد همساز باشد. با اینحال با مطالعه رفتار کالبد تابع تحلیلی هنوز می‌توان خواص آنرا استنتاج نمود.

قضیه ۵-۸. فرض کنیم $|f(z)|$ در ناحیهی که $f(z)$ تحلیلی است، ثابت باشد در این صورت $f(z)$ ثابت است.

اثبات - اگر $|f(z)| = |u + iv| = C$ ، در این صورت $u^2 + v^2 = C^2$. با مشتق‌گیری خواهیم داشت:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (24)$$

از به کار گرفتن معادلات کوشی - ریمن در مورد (۲۴) داریم:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (25)$$

با حذف $\frac{\partial u}{\partial y}$ در (۲۵) بدست می‌آوریم $(u^2 + v^2)(\partial u / \partial x) = 0$ بنابراین $\partial u / \partial x = 0$. به شیوه مشابه می‌توان نشان داد

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

و اثبات تمام است.

تذکر - کلمه "ناحیه" را نمی‌توان با "دایره" جایگزین نمود. برای نشان دادن این مطلب، تابع $f(z) = z^n$ را که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، را در نظر می‌گیریم، کالبد این تابع بر هر دایره‌یی به مرکز مبدا ثابت است.

تاکنون، در بحث تحلیلی بودن به توابع تک مقداری اکتفا کردیم، صحبت از مشتقات توابع چند مقداری بی‌معنی است؛ زیرا در عبارت:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

قاعده سازگاری برای مشخص کردن این که وقتی z به سوی z_0 تغییر می‌کند، $f(z)$ چه مقداری را به پذیرد، موجود نیست. ولی، با اینحال، بحث در مورد تحلیلی بودن یک شاخه ثابت از یک تابع چند مقداری با معنی است. خاطرنشان می‌شویم که:

$$f(z) = \text{Log } z = \text{Log } |z| + i \text{Arg } z \quad (z \neq 0, -\pi < \text{Arg } z \leq \pi)$$

یک تابع تک - مقداری است که برای $-\pi < \text{Arg } z < \pi$ پیوسته است. چون $f(z)$ بر محور حقیقی منفی پیوسته نیست، قطعاً "در آنجا مشتق پذیر نیز نمی‌باشد. اینک نشان می‌دهیم که $f(z)$ در همه نقاطی که پیوسته است، تحلیلی نیز می‌باشد. با تبدیل به مختصات قطبی داریم:

$$f(z) = \text{Log } z = \text{Log } r + i\theta \quad (z = re^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi). \quad (26)$$

باید توجه کرد:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = i.$$

بر اساس تمرین ۸، بخش قبل، نتیجه می‌شود که $f'(z)$ موجود است و داریم:

$$f'(z) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{iz} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{z} \quad (-\pi < \text{Arg } z < \pi).$$

اختلاف هر شاخه $\log z$ ، که بریدگی شاخه‌اش در امتداد محور حقیقی منفی باشد، $\text{Log } z$ ، در آن صفحه بریده، یک مضرب $2\pi i$ است. و بنابراین در صفحه بریده شده مشتق آن نیز $1/z$ است.

با اینکه وقتی شاخه بریدگی بر امتداد محور حقیقی منفی باشد، $\log z$ برای مقادیر حقیقی منفی، ناپیوسته است، ولی می‌توان شاخه‌یی از $\log z$ را یافت که برای آن $\log z$ بر محور حقیقی منفی تحلیلی باشد. برای روشن شدن مطلب، به آسانی می‌توان نشان داد که تابع $f(z) = \log z$ ($0 < \text{Arg } z < 2\pi$) در تمام نقاط صفحه که در امتداد محور

حقیقی مثبت بریده شده باشد تحلیلی است و در تمام این نقاط $f'(z) = 1/z$. باید توجه داشت که نمی‌توان این تابع را بر محور حقیقی پیوسته تعریف کرد. بنابراین برای هر عدد مختلط مخالف صفر z_0 ، شاخه‌یی از $\log z$ موجود است که برای آن $\log z$ در z_0 تحلیلی و مشتق آن $1/z_0$ است.

چنانچه مشتق‌پذیری $\log z$ با $z \neq 0$ ، مورد قبول باشد، می‌توان مشتق $\log z$ را با استفاده از ارتباط وارون میان لگاریتم و نما دریافت. برای یک شاخه مشخص، قرار می‌دهیم $f(z) = \log z$ و $g(z) = e^z$. در این صورت:

$$g(f(z))' = e^{\log z} = z. \quad (27)$$

مشتق‌گیری از دو طرف (۲۷) نتیجه می‌شود.

$$f'(z) = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z} \quad \text{یا} \quad g'(f(z))f'(z) = 1$$

هم چنانکه در فصل قبل دیدیم، با مشخص کردن خواص لگاریتم، قادر خواهیم بود که خواص چندین رده از توابع وابسته را مشخص کنیم. جهت تشریح این مطلب، شاخه معینی برای $\log z$ انتخاب می‌کنیم، و می‌نویسیم:

$$f(z) = z^{1/2} = e^{(1/2) \log z} \quad (z \neq 0).$$

در این صورت با استفاده از قاعده زنجیری،

$$f'(z) = \frac{1}{2z} e^{(1/2) \log z} = \frac{1}{2z} z^{1/2} = \frac{1}{2} z^{-1/2}.$$

بطور کلی تراگر بازاء یکعدد مختلط α و یک مشخصه از $\log z$ ، $f(z) = z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ باشد، آنگاه:

$$f'(z) = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \log z} = \alpha z^{\alpha-1}.$$

تذکر - توابع z^α و α^z نباید با هم اشتباه شوند. اولی بهنگامیکه α عدد صحیح نباشد، تابع چند مقداری از z است؛ هر شاخه آن در صفحه بریده شده تحلیلی و دارای مشتقی برابر $\alpha z^{\alpha-1}$ است. تابع دومی، α^z ، که می‌توان آن را بصورت $e^{z \log \alpha}$ نوشت، یک تابع تام تک - مقداری است، البته بشرطی که برای $\log \alpha$ شاخه‌یی مشخص انتخاب گردد؛ مشتق آن $\alpha^z \log \alpha$ است.

با استفاده از قاعده زنجیری و لگاریتم می‌توان مشتق توابع مثلثاتی وارون را نیز محاسبه نمود. یادآور می‌شویم که

$$\sin^{-1} z = -i \log [iz + (1 - z^2)^{1/2}].$$

چون

$$\frac{d}{dz} (1 - z^2)^{1/2} = -z(1 - z^2)^{-1/2},$$

که در دو طرف معادله بالا یک شاخه به کار رفته، نتیجه می گیریم که:

$$\frac{d}{dz} (\sin^{-1} z) = \frac{-i[i - z(1 - z^2)^{-1/2}]}{iz + (1 - z^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}$$

بطور کلی تر، اگر f در z تحلیلی و مخالف صفر باشد، آنگاه شاخه‌یی چنان می توان انتخاب کرد که برای آن $\log f$ نیز در یک همسایگی z تحلیلی باشد و

$$\frac{d}{dz} [\log f(z)] = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

بعلاوه، $f(z) = |f(z)|e^{i \arg f(z)}$ ، بنابراین $\log f(z) = \log |f(z)| + i \arg f(z)$.
 بنابراین، $\log |f(z)|$ در همه نقاطی که $f(z)$ تحلیلی و غیر صفر است تحلیلی می باشد، زیرا که قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است. با قرار دادن $f = u + iv$ ، همساز بودن $\log |f(z)| = \log \sqrt{u^2 + v^2}$ را می توان مستقیماً "با محاسبه‌ی طولانی نیز اثبات نمود.

پرسش‌ها

- ۱- تحت چه شرایط می توان خواص توابع تحلیلی را از توابع همساز استخراج نمود؟
- ۲- تحت چه شرایطی می توان خواص توابع همساز را از توابع تحلیلی استخراج نمود؟
- ۳- توابع تحلیلی و توابع همساز در چه خواصی با هم متفاوتند؟
- ۴- چه وقت $\arg f(z)$ تابع همساز است؟
- ۵- خواص $|f(z)|$ چگونه با خواص $\log |f(z)|$ مقایسه می شوند؟
- ۶- اگر $u(x, y)$ در همه جای میدانی مانند \mathcal{D} همساز باشد، آیا تابع $v(x, y)$ ی موجود است که برای آن تابع $u(x, y) + iv(x, y)$ در همه جای \mathcal{D} تحلیلی باشد؟

تمرینها

- ۱- فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = -1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 1.$$

۲- نشان دهید که توابع زیر همسازند، و سپس مزدوج همساز آنها را بیابید.
 الف) $u = ax + by$ و a و b ثابت‌های حقیقی

ب) $x^2 + y^2 \neq 0$ ، $u = \frac{y}{x^2 + y^2}$

پ) $u = x^3 - 3xy^2$

ت) $-\pi < \text{Arg } z < \pi$ $u = \text{Arg } z$

ث) $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$

۳- عدد ثابت a را طوری انتخاب کنید که تابع $u = ax^2y - y^3 + xy$ همساز گردد، و سپس همه مزدوجهای همساز آنرا بیابید.

۴- با استفاده از روش این بخش بکوشید که تابع $v(x, y)$ را چنان بیابید تا $x^2 + iv(x, y)$ همساز گردد و توضیح دهید که این روش در چه نقطه‌ی لنگ میماند.

۵- اگر u_1 و u_2 در نقطه (x_0, y_0) همساز باشند، نشان دهید $au_1 + bu_2$ ، که a و b ثابت‌های حقیقی‌اند، نیز در (x_0, y_0) همساز است.

۶- فرض کنیم u و v دو تابع همساز مزدوج باشند، نشان دهید uv تابعی همساز است. عمومی‌ترین شرایط برای همساز بودن حاصلضرب دو تابع همساز چیست؟

۷- فرض کنیم $f(z)$ دارای مشتق مرتبه n ام باشد، نشان دهید.

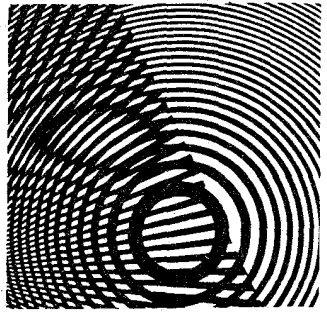
$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^{(n)} f}{\partial x^{(n)}} = (-i)^n \frac{\partial^{(n)} f}{\partial y^{(n)}}.$$

۸- مشتق توابع زیر را بیابید.

الف) $\cos^{-1} z$ ب) $\tan^{-1} z$ پ) $\sec^{-1} z$

۹- فرض کنیم $u(r, \theta)$ در یک همسایگی نقطه $z = re^{i\theta}$ همساز باشد، نشان دهید.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$



۶- رشته‌های توانی

مدتها تصور می‌شده است که فهم رشته‌ها از فهم دنباله‌ها مشکل‌تر است. هر کس که این تصور را منتشر کرده باید یا رشته‌ها و یا دنباله‌ها را نفهمیده باشد. ما نشان خواهیم داد که اختلاف اساسی میان یک دنباله و یک رشته در املا آنها نهفته است. کلمه "رشته" تنها به این دلیل به فرهنگ ریاضی افزوده شده است، که ما را قادر می‌سازد قضایای مشخصی در مورد دنباله‌ها را خلاصه‌تر فرمول‌بندی کنیم.

از دنباله‌های اعداد به دنباله‌های توابع برمی‌گردیم. در این صورت شکل همگرایی و رفتار تابع حدی هر دو مورد توجه‌اند. در همگرایی، که در هر نقطه یک مجموعه مشخص می‌شود، تابع حدی الزاما "واجد خواصی که در هر تابع دنباله موجود است، نیست و ولی اگر "رابطه" مشخصی میان دنباله توابع و مجموعه برقرار باشد، در این صورت تابع حدی الزاما "از استانداردهای معینی از دنباله پیروی خواهد کرد. این نوع قویتر از همگرایی، که در آن مجموعه بر نقاط خودش پیشی گرفته است، به همگرایی یکنواخت موسوم است. عمده‌ترین دنباله‌های توابع آنها هستند که بصورت رشته‌های توانی قابل بیان هستند. توابع حدی مربوط به این رده همیشه درون نواحی همگرایی‌شان، تحلیلی هستند. در اکثر موارد، رفتار یک رشته‌توانی شبیه یک چند جمله‌یی "بزرگ" است.

۶-۱. یادآوری دنباله‌ها

اگر دنباله (حقیقی یا مختلط) $\{a_n\}$ مفروض باشد، دنباله جدید $\{s_n\}$ به صورت $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ را به دنباله اصلی وابسته می‌کنیم. نماد $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ رشته نام دارد. بسته به اینکه دنباله $\{s_n\}$ همگرا یا واگرا باشد، رشته را همگرا یا واگرا نامند. اگر $\{s_n\}$

به s به‌گرایده در اینصورت s را حاصلجمع (یا مقدار) رشته گوئیم، و می‌نویسیم

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

بنابراین در رشته همگرا برای نمایاندن رشته و حاصلجمع آن یک نماد بکار می‌برند.

s_n را حاصلجمع جزئی و a_n را جمله n ام رشته می‌خوانند.

بنابه تعریف، هر قضیه در مورد رشته‌ها را بصورت قضیه‌یی در مورد دنباله‌ها (دنباله حاصلجمع جزئی) می‌توان فرموله کرد. معکوس مطلب هم درست است.

قضیه ۱-۶. اگر $\{s_n\}$ دنباله مفروضی باشد، آنگاه دنباله $\{a_n\}$ موجود است که

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \text{ هر}$$

اثبات - با انتخاب $a_1 = s_1$ و برای $n > 1$ ، $a_n = s_n - s_{n-1}$ خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \sum_{k=2}^n (s_k - s_{k-1}) = s_1 + (s_n - s_1) = s_n.$$

از این رو، تعریف یک رشته یک مفهوم "جدید" را سامان نمی‌دهد. صرفاً "محصول آن یک روش اضافی برای بیان قضایای جدید و دوباره‌گویی قضایای قدیم است. خواص همگرایی رشته‌های مختلط را می‌توان از خواصهای رشته‌های حقیقی استنتاج نمود، زیرا اگر

$\{a_n\}$ دنباله‌یی از اعداد مختلط باشد، می‌نویسیم $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ ، که در آن $\{\alpha_n\}$ و $\{\beta_n\}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی هستند. بموجب قضیه ۲-۳ رشته مختلط $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست اگر و تنها اگر رشته‌های حقیقی $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ هر دو همگرا باشند:

محک‌کوشی برای دنباله‌ها (قضیه ۲-۱۰) را می‌توان بصورت زیر بازگو کرد: فرض کنیم $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ رشته $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح N موجود باشد بطوری که $n > N$ ، m موجب شود که:

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon. \quad (1)$$

با قرار دادن $m = n + p$ ، (۱) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$|s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \quad (p = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

محک‌کوشی عمومی‌ترین آزمون برای همگرایی یک رشته است. بعضی از روشهایی که غالباً "در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی بکار می‌روند، مانند آزمونهای خارج قسمت و انتگرال، مفروضات زیادی می‌طلبند و تازه شرایط لازم و کافی برای همگرایی بدست

نمی‌دهند.

اکثر خواص آشنای رشته‌ها نتیجه فوری (۲) هستند. بعنوان مثال همگرایی $\{a_n\}$ به صفر شرط لازم همگرایی $\{s_n\}$ است. این مطلب با قرار دادن $p=1$ در (۲) نتیجه می‌شود.

رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرای مطلق گوئیم به شرطی که $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد. از به کار بردن نامساوی

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|$$

در (۲)، ملاحظه می‌شود که همگرایی مطلق در یک رشته، همگرایی آن رشته را تضمین می‌کند. بطور مشابه اگر برای هر n ، $|a_n| \leq |b_n|$ ، آنگاه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ را می‌توان از همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ و به کار بستن (۲) نتیجه گرفت.

فرض کنیم همه جملات دنباله $\{a_n\}$ حقیقی و مثبت باشند. در این صورت $a_n > 0$ و $s_n - s_{n-1} = a_n$ یک دنباله صعودی یکنواست. بموجب قضیه ۲-۶، رشته $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگراست اگر و تنها اگر دنباله $\{s_n\}$ کراندار باشد. اینکه مثبت بودن $\{a_n\}$ را نمی‌توان از مفروضات حذف کرد با قرار دادن $a_n = (-1)^n$ روشن می‌گردد. در اینجا با وجودیکه $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$ از نظر قدر مطلق دارای کران ۱ است ولی رشته $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ همگرا نیست.

قضیه بعدی ارتباط جالبی میان یک دنباله و حاصل جمع های جزئی آن دنباله را نشان می‌دهد.

قضیه ۲-۶. فرض کنیم برای هر n ، $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد. اگر $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

آنگاه:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n} \quad \text{واگراست؛} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2} \quad \text{همگراست.} \quad (2)$$

اثبات - به موجب محک کوشی، اگر برای هر عدد صحیح n ، عدد صحیح p بتوان یافت به طوری که:

$$\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{s_{n+2}} + \dots + \frac{a_{n+p}}{s_{n+p}} > \frac{1}{2}.$$

آنگاه (۱) واگرا خواهد بود، چون $\{s_n\}$ دنباله ای صعودی است،

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k}{s_{n+p}} = \frac{s_{n+p} - s_n}{s_{n+p}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}}. \quad (3)$$

ولی با $p \rightarrow \infty$ ، و بنابراین $s_{n+p} \rightarrow \infty$ ، می‌توان چنان بزرگ انتخاب کرد تا $s_{n+p} > 2s_n$. برای چنین انتخاب p ، از (۳) نتیجه می‌شود که $\frac{1}{2} > \sum_{k=n+1}^{n+p} (a_k/s_k)$. بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/s_n)$ واگراست. برای اثبات (۲) ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{a_n}{s_n s_{n-1}} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

با بکار بستن محک کوشی داریم:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{s_k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} \right) = \frac{1}{s_n} - \frac{1}{s_{n+p}} < \frac{1}{s_n}.$$

برای هر مقدار از پیش معلوم $\varepsilon > 0$ ، می‌توان n را باندازه کافی بزرگ انتخاب کرد که $1/s_n < \varepsilon$ ، بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/s_n^2)$ همگراست.

فرع ۱. رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ واگرا و رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ همگراست.

اثبات - قضیه ۶-۲ را با $a_n \equiv 1$ بکار ببرید.

فرع ۲- اگر $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد، آنگاه یک دنباله مثبت $\{b_n\}$ موجود است که $b_n/a_n \rightarrow 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگراست.

اثبات - $b_n = a_n/s_n$ انتخاب کرده و قضیه ۶-۲ را بکار ببرید.

این فرع نشان می‌دهد که "کندترین" رشته واگرا موجود نیست. از خواننده در تمرین ۴ می‌خواهیم تا نشان دهد که کندترین رشته همگرا موجود نیست. بعد از اثبات چند خواص اضافی برای دنباله‌ها به بحث در مورد رشته‌ها بازمی‌گیریم، ولی مطلب واضح ولی مفید زیر را ثابت می‌کنیم.

اصل تله‌موشی - فرض کنیم برای هر n ، $0 \leq a_n \leq b_n$ و فرض کنیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

اثبات - بازاء $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیح N موجود است که برای $n > N$ داریم $|b_n| < \varepsilon$. ولی در این صورت برای $n > N$ داریم $|a_n| \leq |b_n| < \varepsilon$ ، بنابراین $a_n \rightarrow 0$.

قضیه ۳-۶. برای $\alpha > 0, \beta > 0$ ، و x حقیقی، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0; \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0. \quad (2)$$

اثبات - با قراردادادن $f(x) = \log x$ و $g(x) = x^{\beta/\alpha}$ و با بکار بستن قاعده هوپیتال برای توابع از یک متغیر حقیقی حاصل می‌گردد.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(\beta/\alpha)x^{\beta/\alpha}} = 0.$$

بنابراین

$$\left(\frac{\log x}{x^{\beta/\alpha}}\right)^\alpha = \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} \rightarrow 0 \text{ داریم } x \rightarrow \infty$$

و (۱) ثابت می‌شود.

با قرار دادن $y = \log x$ در (۱) و با ملاحظه اینکه وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $y \rightarrow \infty$ ،
(۱) بدست می‌آید.

فرع برای $\alpha > 0, \beta > 0$ ، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^\alpha}{n^\beta} = 0; \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{e^{\beta n}} = 0; \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1; \quad (3)$$

$$(|r| < 1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad (4)$$

اثبات - با قرار دادن $x = n$ در قضیه ۳-۶، (۱) و (۲) بدست می‌آید.
سپس $n^{1/n} \rightarrow 1$ اگر بدانیم $(\log n)/n \rightarrow 0$ ولی این حالت خاصی از (۱) است، و (۳) ثابت می‌شود. بالاخره با قرار دادن $\beta = -\log |r|$ در (۲) داریم:

$$\frac{n^\alpha}{e^{-n \log |r|}} = n^\alpha |r|^n \geq |r|^n,$$

و (۴) از (۲) و از اصل تلموشی اثبات می‌شود.

تذکر - این خاصیت آخری برای اثبات همگرایی در اکثر رشته‌ها مفید است. با نوشتن

$$s_n = \sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r},$$

و با استفاده از اینکـــه برای $|r| < 1$ ، $\{r^n\}$ به صفر می‌گراید، نشان می‌دهیم که در این رشته هندسی داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1).$$

بنابراین، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است اگر عدد ثابت r ، $0 \leq r < 1$ و عدد حقیقی M چنان موجود باشند که برای $n > N$ داشته باشیم $|a_n| \leq Mr^n$.

فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله کرانداری از اعداد مختلط باشد، A مجموعه حدود زیر دنباله‌های $\{a_n\}$ باشد، بعضی خواص A قبلاً مورد بحث قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال مجموعه A غیرتهی است (قضیه ۲-۷) و متشکل از یک نقطه است، اگر و تنها اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد (قضیه ۲-۵). اگر دنباله $\{a_n\}$ حقیقی و کراندار باشد، آنگاه مجموعه A دارای کوچکترین کران بالاست (خاصیت دوکیند).

فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله کراندار حقیقی و A مجموعه حدود زیر دنباله‌ای $\{a_n\}$ باشد، با قرار دادن $a^* = \text{lub } A$ ، a^* را حد زیرین $\{a_n\}$ نامیم، و می‌نویسیم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a^*.$$

این تعریف را می‌توان به دنباله‌های حقیقی بی‌کران گسترش داد. اگر $\{a_n\}$ - دنباله بی‌کران باشد، می‌گوئیم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty;$$

در حالیکه اگر همه a_n مگر یک تعداد متناهی از آنها، از هر عدد حقیقی از پیش معلوم، کوچکتر باشد، می‌گوییم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

همتای مفید برای حد زیرین، حد زیرین است. برای دنباله کراندار $\{a_n\}$ ، قرار می‌دهیم {مجموعه حدود زیر دنباله‌ها} $a_* = \text{glb}$ ، و می‌نویسیم:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a_*.$$

اگر $\{a_n\}$ از پائین بی‌کران باشد گوئیم:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty;$$

در حالیکه همه a_n ها، مگر یک تعداد متناهی از آنها، از هر عدد حقیقی از پیش معلوم بزرگتر باشد گوئیم که:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

بیان قضایا برحسب حد زیرین و حد زیرین به عوض برحسب حد، یک مزیت مشخص دارد. در دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته (شامل $\pm\infty$ است)، حد زیرین و حد زیرین یک دنباله حقیقی همیشه موجود است. این به ما امکان می‌دهد، بدون اینکه نگران وجود حد باشیم، قضایا را در مورد دنباله‌ها اثبات کنیم.

مثال ۱- فرض کنیم $a_n = n \sin^2(n\pi/4)$ ، چون برای هر n ، $0 \leq a_n < \infty$ ، هیچ زیر دنباله‌ای از $\{a_n\}$ نمی‌تواند به مقداری کوچکتر از صفر و یا بزرگتر از ∞ بگراید. برای اینکه نشان دهیم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{و} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

کافی است یک زیر دنباله (از میان زیر دنباله‌های متعدد) بیابیم که به مقدار مطلوب میل کند. داریم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (4n+2) = \infty$$

و

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \cdot 0 = 0.$$

مثال ۲- فرض کنیم $a_n = (1 + 1/n) \cos n\pi$ آنگاه.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1$$

و

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1.$$

مثال ۳- فرض کنیم $a_n = \sin(n\pi/2) + \sin(n\pi/4)$ آنگاه.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n+1} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۹

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{4n-1} = -\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

مثال ۴- فرض کنیم $a_n = n \cos n\pi$ آنگاه.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \infty$$

۹

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = -\infty.$$

مثال ۵- فرض کنیم $a_n = 5n \cos n\pi - n^2$. آنگاه برای هر n ، $a_n \leq 5n - n^2$ ، بنابراین

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

روشن است که حد زیرین وحد زیرین هر دو منحصر بفردند، و دنباله حقیقی $\{a_n\}$ به L ، L متناهی، می‌گراید اگر و تنها اگر:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

ولی بعضی از قضایای متعارف حد برای حد زیرین وحد زیرین هر دو نادرست‌اند.

مثال - فرض کنیم $a_n = (-1)^n$ و $b_n = (-1)^{n+1}$ در این صورت:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0 \neq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

۹

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0 \neq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2.$$

با اینحال، نامساوی‌های زیر درست‌اند.

قضیه ۶-۴. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی کراندار و حقیقی باشند، آنگاه:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (۱)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (۲)$$

اثبات - فرض کنیم $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ و $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ، فرض کنیم نامساوی (۱) درست نباشد در این صورت برای یک $\varepsilon > 0$ ، زیر دنباله $\{a_{n_k} + b_{n_k}\}$ از $\{a_n + b_n\}$ موجود است که برای هر n_k داشته باشیم، $a_{n_k} + b_{n_k} > a + b + \varepsilon$ ، ولی در این صورت یکی از نامساویهای

$$a_{n_k} > a + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{یا} \quad b_{n_k} > b + \frac{\varepsilon}{2}$$

برای دفعات نامتناهی برقرارند.

این موجب می‌گردد که $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a + \varepsilon/2$ یا $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \geq b + \varepsilon/2$ (چرا؟)، این متناقض فرض است و (۱) را ثابت می‌کند. اثبات (۲) مشابه است، و از آن صرف‌نظر می‌کنیم.

قضیه زیر در تعیین خواص همگرایی رشته‌های توانی مفید است.

قضیه ۵-۶ (آزمون ریشه) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ی مختلط، و $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = L$ ، در این صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ، اگر $L < 1$ بطور مطلق همگرا و اگر $L > 1$ ، واگراست.

اثبات - اگر $L < 1$ ، r را طوری انتخاب می‌کنیم که $L < r < 1$. برای همه n ها، مگر یک تعداد متناهی، داریم: $|a_n|^{1/n} < r$ ، یعنی که:

$$|a_n| < r^n \quad (n > N)$$

اینک همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ نتیجه همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ ($|r| < 1$) است. اگر $L > 1$ ، آنگاه برای یک تعداد نامتناهی n ، $|a_n|^{1/n} > 1$ ، ولی در این صورت بدفعات نامتناهی $|a_n| > 1$ ، بنابراین $a_n \nrightarrow 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نمی‌تواند همگرا باشد.

تذکر - هنگامیکه $L = 1$ ، آزمون ریشه هیچ اطلاعاتی به ما نمی‌دهد. رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ واگرا و رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ همگراست. در حالی که:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \right|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n^2} \right|^{1/n} = 1.$$

پرسشها

- ۱- چه نوع از قضایای دنباله‌های حقیقی برای دنباله‌های مختلط هم برقرارند؟
- ۲- چه معنایی بر اینکه کندترین رشته همگرا موجود نیست مترتب است؟
- ۳- چرا اصل تله‌موشی چنین نام گرفته است؟
- ۴- برای کدام رشته‌های همگرا می‌توانید حاصلجمع را مشخص کنید؟
- ۵- چه تعریف دیگری برای حد زیرین و حد زیرین می‌توانستیم بدهیم؟
- ۶- آیا می‌توان حد زیرین را برحسب حد زیرین تعریف کرد؟
- ۷- محاسن و معایب اینکه حد زیرین یک دنباله مجاز باشد مقادیر $\pm \infty$ را بپذیرد. را بیان کنید.
- ۸- چگونه حد زیرین حاصلضرب با حاصلضرب حدود زیرین مقایسه می‌شود؟
- ۹- آیا می‌توان قضیه ۴-۶ را ترمیم کرد تا دنباله‌های بی‌کران را نیز شامل شود؟
- ۱۰- اگر برای هر n ، $|a_n|^{1/n} < 1$ ، آیا الزاماً $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست؟

تمرینها

- ۱- فرض کنیم $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ ، α_n و β_n حقیقی، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|$ هر دو همگرا باشند.
- ۲- فرض کنیم $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ اگر $a_k = 1/k$ ، نشان دهید که برای هر n ، $s_{2n+1} - s_{2n} > \frac{1}{2}$. اگر $a_k = (-1)^{k+1}/k$ ، نشان دهید که برای هر n و p داریم ، $|s_{n+p} - s_n| < 2/n$.
- ۳- فرض کنیم برای هر n ، $a_n > 0$. نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست اگر و تنها اگر برای اعداد صحیح M و N . عدد صحیح p موجود باشد ، بطوری که $\sum_{n=N}^{N+p} a_n > M$.
- ۴- فرض کنیم $a_n > 0$ و فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست . اگر $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ ، نشان دهید که:

(الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{r_n}$ واگراست (راهنمایی: قرار دهید $a_n = r_n - r_{n+1}$ و محک کوشی را به کار ببرید) .

(ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ همگراست (راهنمایی: نشان دهید $a_n/\sqrt{r_n} < 2(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$.)
- ۵- فرض کنیم A مجموعه حدود زیر دنباله‌ای یک دنباله مختلط باشد ، نشان دهید مجموعه A بسته است .
- ۶- فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله مختلط باشد ، نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ اگر و تنها اگر: $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.

۷- اگر برای هر n ، $a_n \geq b_n$ ، نشان دهید:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \quad (\text{الف})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (\text{ب})$$

۸- فرض کنیم دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ، کراندار و مثبت باشند، نشان دهید:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (\text{الف})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (\text{ب})$$

مثالهایی بیاورید که برای آنها در (الف) و (ب) تساوی برقرار نگردد.

۹- فرض کنیم $\{a_n\}$ حقیقی و $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ، $a \neq 0$ ، برای دنباله حقیقی $\{b_n\}$ نشان دهید.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (\text{الف})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (\text{ب})$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (\text{پ})$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad (\text{ت})$$

۱۰- اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ حقیقی و کراندار باشند و $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ موجود باشد، نشان دهید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

۱۱- برای هر دنباله حقیقی $\{a_n\}$ ، نشان دهید:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n). \quad (\text{راهنمایی: تمرین ۱۰ را بکار ببرید})$$

۱۲- نشان دهید $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ متناهی، اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار باشد: برای هر $\varepsilon > 0$ ،

$$(۱) \text{ برای همه } n \text{ ها، مگر یک تعداد متناهی، } a_n < L + \varepsilon$$

$$(۲) \text{ به دفعات نامتناهی، } a_n > L - \varepsilon$$

۱۴- نشان دهید $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ، متناهی، اگر و تنها اگر شرایط زیر برقرار

باشد: برای هر $\varepsilon > 0$,

$$(1) \text{ به دفعات نامتناهی، } a_n < L + \varepsilon$$

$$(2) \text{ برای همه } n \text{ ها، مگر یک تعداد متناهی، } a_n > L - \varepsilon$$

۱۴- فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله مختلط باشد.

الف) اگر $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L < 1$ ، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است.

ب) اگر $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L > 1$ ، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

۱۵- فرض کنیم برای هر n ، $a_n > 0$. نشان دهید:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

۱۶- دنباله $\{a_n\}$ را برای هر n به ترتیب زیر تعریف می‌کنیم $a_{2n-1} = 1/2^n$ و $a_{2n} = 1/3^n$. نشان دهید:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty;$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

آیا رشته زیر همگراست؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

۲-۶. همگرایی یکنواخت

دنباله توابع $\{f_n\}$ روی مجموعه E به f همگرایی نقطه‌ای است $(f_n \rightarrow f)$ اگر به هر $z_0 \in E$ و هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح $N = N(\varepsilon, z_0)$ چنان متناظر شود که:

$$\text{هر وقت } n > N(\varepsilon, z_0) \text{ آنگاه } |f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$$

تذکر- اینکه دنباله توابع $\{f_n\}$ روی مجموعه E همگرایی نقطه‌ای است، بدین معنی است که برای هر $z_0 \in E$ ، دنباله $\{f_n(z_0)\}$ همگرا باشد. تابع حدی f در این حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = f(z_0) \quad (z_0 \in E).$$

عدد صحیح N در تعریف همگرایی نقطه‌ای، در حالت عمومی، ممکن است با نقاط مجموعه، تغییر کند. ولی چنانچه یک عدد صحیح N بتوان یافت که برای همه این نقاط

قابل استفاده باشد، در اینصورت همگرایی، یکنواخت نام دارد. یعنی، دنباله توابع $\{f_n\}$ روی E به f همگرایی یکنواخت است $(f_n \rightrightarrows f)$ اگر به هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ چنان متناظر شود که برای هر $z \in E$

$$\text{هر وقت } n > N(\varepsilon) \text{ آنگاه } |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

روشن است که همگرایی یکنواخت بر یک مجموعه موجب همگرایی (نقطه‌ای) می‌گردد. بیانی برای نفی همگرایی یکنواخت، بهنگام ارائه مثالهایی که نشان دهند معکوس این مطلب درست نیست، مفید خواهد بود. همگرایی $\{f_n\}$ به f روی E یکنواخت نیست اگر یک $\varepsilon > 0$ چنان موجود باشد که به ازاء هر عدد صحیح N ، یک عدد صحیح $n (> N)$ و یک $z_n \in E$ موجود باشد بطوریکه $|f_n(z_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$.

اختلاف میان پیوستگی و پیوستگی یکنواخت را یادآورید. یک تابع پیوسته روی یک مجموعه پیوسته یکنواخت است اگر چنانچه یک $\delta = \delta(\varepsilon)$ ی واحد بتوان یافت که برای تمام نقاط مجموعه مورد استفاده قرار گیرد.

در فصل ۲ نشان دادیم که $f(z) = 1/z$ بر مجموعه $0 < |z| < 1$ پیوسته است ولی پیوسته یکنواخت نیست. مثال زیر مشابه همین مطلب در مورد همگرایی است.

مثال ۱- دنباله $f_n(z) = 1/nz$ روی مجموعه $0 < |z| < 1$ به $f(z) \equiv 0$ همگرایی نقطه‌ای است ولی همگرایی یکنواخت نیست.

اثبات - برای نشان دادن همگرایی نقطه‌ای، یک z_0 دلخواه انتخاب می‌کنیم، $0 < |z_0| < 1$ ، $\varepsilon > 0$ مفروض، اگر $N = N(z_0, \varepsilon)$ عدد صحیحی بزرگتر از $1/\varepsilon |z_0|$ باشد، برای $n > N$ داریم $|1/nz_0| < \varepsilon$.

اگر همگرایی یکنواخت می‌بود، یک عدد صحیح N موجود می‌بود که برای هر z ، $0 < |z| < 1$ می‌داشتیم $|1/Nz| < \varepsilon < 1$ ولی این نامساوی برای $z = 1/N$ برقرار نیست.

تذکر - نشان دادیم که همگرایی در مثال بالا یکنواخت نیست زیرا که:

برای هر n ،

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1$$

مثال ۲- دنباله $f_n(z) = 1/(1+nz)$ در ناحیه $|z| \geq 2$ همگرایی یکنواخت است ولی در ناحیه $|z| \leq 2$ همگرایی یکنواخت نیست.

اثبات - دنباله $\{f_n\}$ همه جا به تابع:

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

همگرای نقطه‌ای است. اگر $|z| \geq 2$ ، آنگاه

$$|f_n(z)| = \left| \frac{1}{1+nz} \right| \leq \frac{1}{|nz| - 1} \leq \frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n}.$$

بنابراین هر وقت $|f_n(z)| < \varepsilon$ ، $n > 1/\varepsilon$ و این همگرایی یکنواخت در ناحیه $|z| \geq 2$ را اثبات می‌کند.

اگر همگرایی برای $|z| \leq 2$ یکنواخت بود، عدد صحیح N می‌موجود بود که برای هر z در این ناحیه، $|f_N(z) - f(z)| < \frac{1}{2}$ ولی برای هر n ،

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \frac{1}{1+n \cdot (1/n)} - 0 \right| = \frac{1}{2}$$

تذکر - قضیه ۲-۱۶ مبین آن است که هر تابع پیوسته روی مجموعه فشرده، پیوسته یکنواخت است، مثال فوق نشان می‌دهد که همگرایی نقطه‌ای، حتی بر مجموعه فشرده، لزوماً موجب همگرایی یکنواخت نیست.

مثال ۳- دنباله $f_n(z) = z^n$ روی مجموعه $|z| < 1$ همگرایی نقطه‌ای و بر مجموعه $|z| \leq r < 1$ همگرای یکنواخت است.

اثبات - همگرایی نقطه‌ای برای $|z| < 1$ ، از فرع قضیه ۵-۲ نتیجه می‌شود. چون $r^n \rightarrow 0$ ($r < 1$)، عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ را چنان می‌توان یافت که $r^n < \varepsilon$ ($n > N$)، ولی در این صورت:

$$|z^n| \leq r^n < \varepsilon \quad (|z| \leq r, n > N(\varepsilon)).$$

بنابراین، $\{f_n(z)\}$ در قرص $|z| \leq r$ ، همگرای یکنواخت به صفر است.

اگر همگرایی بر مجموعه $|z| < 1$ یکنواخت می‌بود، آنگاه برای n باندازه کافی بزرگ و برای هر z ، $|z| < 1$ می‌داشتیم $|z^n| < \varepsilon$. با انتخاب $z = 1 - 1/n$ ، داریم $z^n = (1 - 1/n)^n$ و از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی داریم:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \quad n \rightarrow \infty$$

بنابراین $|z^n| > \frac{1}{3}$ ($z = 1 - 1/n$, $n > N$)، و همگرایی بر $|z| < 1$ یکنواخت نیست.

مثال ۴- دنباله $f_n(z) = z/n^2$ برای $|z| \leq R$ به $f(z) \equiv 0$ همگرایی یکنواخت است ولی در صفحه همگرایی یکنواخت نیست.

اثبات - برای $|z| \leq R$ ، نامساوی

$$|f_n(z)| \leq \frac{R}{n^2} < \varepsilon \quad (n > \sqrt{R/\varepsilon})$$

نشان می‌دهد که بر قرص $|z| \leq R$ همگرایی یکنواخت است. ولی اگر در صفحه همگرایی یکنواخت می‌بود، بازاء یک N صحیح و برای هر z می‌داشتیم $|z|/N^2 < 1$. انتخاب $z = N^2$ به تناقض مطلوب می‌انجامد.

همگرایی یکنواخت دنباله $\{f_n\}$ روی مجموعه E را اغلب می‌توان از همگرایی $\{f_n\}$ در نقطه‌یی مانند $z = z_0$ استنتاج نمود، بدین ترتیب که نشان دهیم برای هر $z \in E$ - مساوی $|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(z_0) - f(z_0)|$ برقرار است اگر دنباله‌یی همگرایی یکنواخت نباشد، معمولاً "یک نقطه بد" موجود است که باید کشف کرد. در مثالهای ۱، ۲، ۳ و ۴ نقاط بد به ترتیب عبارت بودند از: $z = 0$ ، $z = 1$ و $z = \infty$. برای هر یک از چنین نقاط z_0 ، عبارت $\lim_{z \rightarrow z_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z))$ را نمی‌توان با عبارت زیر جایگزین کرد.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) \right).$$

بعنوان مثال در مثال ۲:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+nz} \right) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1+nz} \right) = 1.$$

اهمیت همگرایی یکنواخت در این است که تغییر در تربیت حدیابی را مجاز می‌کند و این مطلب، بنوبه خود، موجب می‌شود که تابع حدی، اکثر خواص دنباله را برای خود محفوظ بدارد.

قضیه ۶-۶. فرض کنیم $\{f_n\}$ روی E به تابع f همگرای یکنواخت است. اگر هر f_n در نقطه‌ای مانند $z_0 \in E$ پیوسته باشد، آنگاه تابع حدی f هم در z_0 پیوسته است.

یعنی:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{z \rightarrow z_0} f_n(z) \right).$$

اثبات - باید نشان داد که برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود است به طوری که برای هر z در E که در شرط $|z - z_0| < \delta$ صدق کند داشته باشیم $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ نامساوی زیر برای هر n برقرار است.

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(z_0)| + |f_n(z_0) - f(z_0)| \quad (۴)$$

همگرایی یکنواخت $\{f_n\}$ ما را مجاز می‌کند که N ی مستقل از z انتخاب کنیم بطوری که:

$$|f(z) - f_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (z \in E).$$

با قرار دادن $n = N$ در (۴)، داریم:

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + |f_N(z) - f_N(z_0)| + \frac{\varepsilon}{3}. \quad (۵)$$

از پیوستگی f_N در $z = z_0$ نتیجه می‌شود که برای z های باندازه کافی نزدیک به z_0 داریم:

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (۶)$$

باترکیب (۵) و (۶) نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

تذکر - قضیه ۶-۶. یک شرط لازم، ولی نه کافی، را برای همگرایی یکنواخت، بیان می‌دارد. در مثال ۳، نشان دادیم که دنباله توابع پیوسته $\{z^n\}$ در ناحیه $|z| < 1$ به تابع $f(z) \equiv 0$ همگرای یکنواخت نیست. در حالی که در مثال ۲، ناپیوستگی تابع حدی در $z = 0$ همگرایی یکنواخت دنباله $\{1/(1+nz)\}$ در هر میدانی شامل مبدا را منتفی می‌سازد.

تعریف و بحث ما را جمع به همگرایی یکنواخت برای توابع با مقادیر حقیقی از یک متغیر حقیقی به قوت خود باقی می‌ماند. در واقع، همان نتایج را از چهار مثال قبل، با عوض کردن z به x و با تعویض ناحیه‌ها به فواصل متناظرشان، می‌توان بدست آورد. بعلاوه، در

همگرایی یکنواخت توابع حقیقی یک تعبیر هندسی جالب موجود است. اگر $\{f_n(x)\}$ روی مجموعه E به $f(x)$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه برای n باندازه کافی بزرگ داریم.

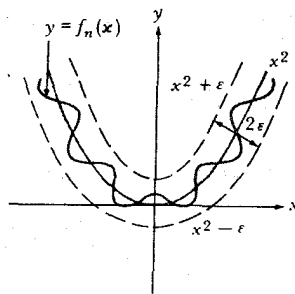
$$\text{برای هر } x \text{ در } E \quad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

این بدان معنی است که یک نوار منحنی بعرض 2ε موجود است که نمودار تمام توابع $y = f_n(x)$ ، با $n > N$ در این نوار جای دارند، و دوری هر یک از نمودارها از منحنی $y = f(x)$ ، هرگز بزرگتر از ε نیست.

مثال - فرض کنیم $f_n(x) = x^2 + \sin nx/n$ داریم:

$$|f_n(x) - x^2| = \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \quad (x \text{ حقیقی})$$

و برای $n > 1/\varepsilon$ ، $|f_n(x) - x^2| < \varepsilon$ بنابراین دنباله $\{f_n(x)\}$ روی مجموعه اعداد حقیقی همگرای یکنواخت به $f(x) = x^2$ است (ر. ک. شکل ۱).



شکل ۱

بدون شک هیچ بحث همگرایی بدون محک کوشی کامل نخواهد شد. با بازگویی قضیه ۱-۲ برای توابع می بینیم که دنباله $\{f_n(z)\}$ روی E همگرای نقطه‌ای است اگر و فقط اگر برای هر $z_0 \in E$ ، $\{f_n(z_0)\}$ دنباله‌ای کوشی باشد. یعنی برای هر $z_0 \in E$ ، و هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح $N = N(\varepsilon, z_0)$ موجود باشد که هر وقت $n, m > N$ ، آنگاه $|f_n(z_0) - f_m(z_0)| < \varepsilon$.

دنباله $\{f_n\}$ را روی E کوشی یکنواخت گوئیم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ چنان متناظر گردد که برای هر $z \in E$ ، هر وقت $n, m > N(\varepsilon)$ ، آنگاه:

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$$

قضیه ۶-۷. یک دنباله از توابع روی مجموعه E همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگر آن دنباله روی E کوشی یکنواخت باشد.

اثبات - فرض کنیم $\{f_n\}$ روی E به f همگرای یکنواخت باشد. در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ مفروض

$$z \in E \text{ برای هر } n > N(\varepsilon) \text{ برای } |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ولی در این حالت، برای $n, m > N(\varepsilon)$ ، داریم:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f(z)| + |f_m(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

بنابراین، دنباله $\{f_n\}$ روی E کوشی یکنواخت است.

برعکس، فرض کنیم $\{f_n\}$ روی E کوشی یکنواخت است. به ویژه، برای هر $z_0 \in E$ دنباله $\{f_n(z_0)\}$ کوشی است. و بدین لحاظ $\{f_n\}$ به f همگرای نقطه‌ای است می‌خواهیم نشان دهیم که این همگرایی یکنواخت است. برای $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ موجود است بطوری که برای هر $n, m > N$ و برای هر $z \in E$ داریم:

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (۷)$$

با ثابت گرفتن $n (> N)$ و با تغییر دادن m ، (۷) تبدیل به:

$$|f_n(z) - f(z)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad (۸)$$

می‌گردد. چونکه (۸) برای $z \in E$ و هر $n > N(\varepsilon)$ برقرار است، همگرایی $\{f_n\}$ به E روی f یکنواخت است.

در بخش قبل، دیدیم که خواص دنباله‌های اعداد مختلط را می‌توان به عنوان خواصی برای رشته‌های اعداد مختلط بازگو کرد. مابقی این بخش منحصراً به این تبدیل از دنباله‌های توابع مختلط به رشته‌های توابع مختلط اختصاص دارد. همانطور که انتظار می‌رود، کار ما به موازات بخش قبل خواهد بود.

بازاء هر دنباله مفروض $\{f_n(z)\}$ که روی مجموعه E تعریف شده باشد، دنباله جدیدی از توابع $\{S_n(z)\}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n f_k(z). \quad (۹)$$

برای تمام مقادیر z که برایشان $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$ موجود است، گوئیم رشته $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ همگراست و می‌نویسیم:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z).$$

اگر $\{S_n(z)\}$ بر مجموعه E همگرایی یکنواخت باشد، آنگاه رشته $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ راروی E همگرایی یکنواخت می‌نامیم بعلاوه رشته $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ همگرایی مطلق است اگر $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$ همگرا باشد. با بازگو کردن محک کوشی، داریم:

قضیه ۸-۶. رشته $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ روی مجموعه E همگرایی یکنواخت است اگر و تنها اگر برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $N = N(\varepsilon)$ چنان متناظر شود که برای هر $z \in E$ داشته باشیم:

$$n > N(\varepsilon) \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

اثبات - S_n را با (۹) تعریف می‌کنیم و قضیه ۶-۷ را به کار می‌بریم.

با استفاده از قضیه ۸-۶ می‌توان یک شرط کافی برای همگرایی یکنواخت اثبات نمود که به آزمون M -وایراشتراس یا آزمون همگرایی مغلوب موسوم است.

قضیه ۹-۶. فرض کنیم $\{M_n\}$ دنباله‌یی از اعداد حقیقی باشد، و فرض کنیم برای هر $z \in E$ و هر n داشته باشیم $|f_n(z)| \leq M_n$ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ روی مجموعه E ، همگرایی یکنواخت (و مطلق) است.

اثبات - باز $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح N موجود است که برای $n > N$ داریم:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon \quad (p = 1, 2, 3, \dots).$$

ولی

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k < \varepsilon.$$

اینک همگرایی یکنواخت نتیجه قضیه ۸-۶ و همگرایی مطلق از آزمون مقایسه نتیجه می‌شود.

مثال ۱- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ برای $|z| < 1$ همگرایی مطلق و برای $|z| \leq r < 1$ همگرایی

یکنواخت است .

اثبات - داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{|z|}{1-|z|} \quad (|z| < 1),$$

و این همگرایی مطلق را ثابت می‌کند . همگرایی یکنواخت . برای $|z| \leq r$ ، نتیجه آزمون M - (قضیه ۹-۶) با $M_n = r^n$ می‌باشد .

هم چنین می‌توان نشان داد که این رشته همگرایی یکنواخت نیست . با قرار دادن

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^n z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1 - z},$$

دنباله $\{S_n(z)\}$ برای $|z| < 1$ همگرایی نقطه‌ای به $f(z) = z/(1-z)$ است . با انتخاب $z = 1 - 1/n$ ، داریم :

$$|S_{n-1}(z) - f(z)| = \left| \frac{z^n}{1-z} \right| = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

چون $(1 - 1/n)^n \rightarrow 1/e$ ، نتیجه می‌شود که برای n باندازه کافی بزرگ $|S_{n-1}(z) - f(z)| \geq n/3$. بنابراین ، همگرایی یکنواخت این رشته را نمی‌توان به قرص $|z| < 1$ گسترش داد .

مثال ۲- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos nz)/n^2$ بر خط حقیقی همگرایی یکنواخت و مطلق است .

اثبات - چون برای z حقیقی داریم $|\cos nz| \leq 1$ ، می‌توان قضیه ۹-۶ را با

$$M_n = 1/n^2$$

بکارگرفت و نتیجه مطلوب را بدست آورد . با نوشتن $\cos nz = (e^{inz} + e^{-inz})/2$ خواننده می‌تواند تحقیق کند که با میل n به ∞ ، $\cos nz/n^2$ به 0 نمی‌گراید ، مگر اینکه z حقیقی باشد . از اینرو $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos nz)/n^2$ همگراست اگر و تنها اگر z حقیقی باشد .

مثال ۳- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} 2z^2/(n^2 + |z|)$ در صفحه همگرایی مطلق ، و برای هر $R > 0$ در

$|z| \leq R$ ، همگرایی یکنواخت است .

اثبات - برای هر نقطه z_0 در صفحه ، داریم :

$$\frac{2|z_0^2|}{n^2 + |z_0|} \leq \frac{2|z_0^2|}{n^2}.$$

همگرایی مطلق در صفحه، نتیجه همگرایی $2|z_0|^2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ است و همگرایی یکنواخت روی قرص $|z| \leq R$ از آزمون M_- ، با $M_n = 2R^2/n^2$ ، نتیجه می‌گردد.

مثال ۴- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$ برای $\operatorname{Re} z > 1$ همگرایی مطلق و برای $\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon$ ، $\varepsilon > 0$ همگرایی یکنواخت است.

اثبات - برای $z = x + iy$ داریم $n^z = e^{z \log n} = e^{(x+iy) \log n}$ بنابراین:

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{e^{x \log n}} = \frac{1}{n^x},$$

و برای $x = \operatorname{Re} z > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

همگراست، همگرایی یکنواخت برای $\operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon$ از آزمون M_- با $M_n = 1/n^{1+\varepsilon}$ نتیجه می‌شود.

تذکر - رشته بالا، که به تابع ریمن - زتا موسوم است، و در نظریه اعداد از اهمیت عمده‌ی برخوردار است مفصلتر در فصل ۱۴ بررسی خواهد شد.

پرسش‌ها

- ۱- چه نوع دنباله‌هایی از توابع در صفحه همگرایی یکنواخت‌اند؟
- ۲- آیا دنباله‌یی از توابع بی‌کران می‌تواند همگرایی یکنواخت باشد؟
- ۳- چگونه تعریف می‌کنید که: $\{f_n\}$ همگرایی یکنواخت به بی‌نهایت است؟
- ۴- آیا می‌شود که دنباله‌یی از توابع روی هر زیر مجموعه فشرده از یک ناحیه همگرایی یکنواخت باشد ولی روی خود آن ناحیه همگرایی یکنواخت نباشد؟
- ۵- آیا می‌شود دنباله‌یی از توابع روی هر زیر مجموعه فشرده یک ناحیه همگرایی نقطه‌ای باشد ولی در آن ناحیه همگرایی نقطه‌ای نباشد؟
- ۶- آیا می‌شود دنباله‌یی از توابع ناپیوسته همگرایی یکنواخت به یک تابع پیوسته باشد؟
- ۷- آیا می‌شود همگرایی یک دنباله از توابع، در یک ناحیه یکنواخت باشد ولی مطلق نباشد؟ مطلق باشد و یکنواخت نباشد؟
- ۸- فرض کنیم که برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح N موجود است بطوری که برای هر

z در E داریم $|f_N(z) - f(z)| < \varepsilon$ آیا $\{f_n\}$ به f در E همگرای یکنواخت است؟ آیا $\{f_n\}$ در E همگرای نقطه‌ای است؟

۹- چگونه می‌توان قضیه ۶-۹ را به صورت قضیه‌یی برای دنباله‌ها بیان کرد؟

۱۰- اگر دنباله‌یی از توابع مشتق‌پذیر همگرای یکنواخت باشد، آیا تابع حدی هم

مشتق‌پذیر است؟

تمرینها

۱- نشان دهید $f_n = u_n + iv_n$ به $f = u + iv$ همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگر

$\{u_n\}$ همگرای یکنواخت به u و $\{v_n\}$ همگرای یکنواخت به v باشد.

۲- فرض کنیم $\{f_n\}$ به f روی E همگرای یکنواخت و $\{g_n\}$ به g روی E همگرای

یکنواخت باشد.

(الف) نشان دهید $\{f_n + g_n\}$ به $f + g$ روی E همگرای یکنواخت است.

(ب) اگر به علاوه برای هر $z \in E$ و هر n ، $|f_n| \leq M$ و $|g_n| \leq M$ ، نشان دهید

$\{f_n g_n\}$ به $f g$ روی E همگرای یکنواخت است.

۳- فرض کنیم $f(z)$ روی مجموعه E بی‌کران است. فرض کنیم برای هر n ، $f_n(z) \equiv f(z)$ ،

و گیریم $g_n(z) = 1/n$.

(الف) نشان دهید $f_n(z)$ و $g_n(z)$ هر دو روی مجموعه E همگرای یکنواخت‌اند.

(ب) نشان دهید $f_n(z)g_n(z)$ همگرای نقطه‌ای است ولی روی E همگرای یکنواخت

نیست.

۴- نشان دهید $\{f_n\}$ بر یک مجموعه متناهی همگرای یکنواخت است اگر و تنها اگر

همگرای نقطه‌ای باشد.

۵- تعمیم زیر از قضیه ۶-۹ را ثابت کنید: فرض کنیم $\{f_n\}$ به f روی E همگرای

یکنواخت باشد، و برای تعدادی نامتناهی n ، f_n در E پیوسته باشد. در

این صورت تابع حدی f هم در z_0 پیوسته است.

۶- فرض کنیم $\{f_n\}$ روی مجموعه فشرده E به f همگرای یکنواخت است و هر f_n

روی E پیوسته یکنواخت است، ثابت کنید f روی E پیوسته یکنواخت است. آیا می‌توان

فرض فشردگی را حذف کرد؟

۷- اگر $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ روی E همگرای یکنواخت باشد، نشان دهید که $\{f_n(z)\}$

روی E به صفر همگرای یکنواخت است. آیا معکوس این این مطلب درست است؟

۸- فرض کنیم z حقیقی و $E = \{z: |z| \leq r\} \cup \{z: r \leq |z| \leq 1\}$ و $0 < r < 1$

نشان دهید، همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (z^n/n)$ بر E یکنواخت است ولی مطلق نیست.

۹- مطلوبست تعیین جاهایی که دنباله‌های زیر همگرایی نقطه‌ای و همگرایی یکنواخت‌اند.

$$\text{الف) } \frac{z}{z^2 + n^2} \quad \text{ب) } ze^{-nz}$$

$$\text{پ) } \frac{e^{nz}}{n} \quad \text{ت) } \frac{1}{1+z^n}$$

۱۰- نشان دهید که رشته‌های زیر روی مجموعه‌های یاد شده همگرایی یکنواخت‌اند.

$$\text{الف) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{z^{2n} + 1} \quad \text{برای } |z| \leq r < 1$$

$$\text{ب) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2 - 1)^n} \quad \text{برای } |z| \geq r > \sqrt{2}$$

$$\text{پ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z^2 - 1)^n} \quad \text{برای } \operatorname{Re} z \geq 2$$

$$\text{ت) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n} + 1}{n^{z+1}} \quad \text{برای } \varepsilon \leq \operatorname{Re} z \leq R < \infty$$

$$\text{ث) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^n \quad \text{برای } \operatorname{Re} z \geq \varepsilon > 0$$

۱۱- در چه ناحیه‌هایی رشته‌های زیر همگرایی یکنواخت‌اند؟ همگرایی مطلق‌اند؟

$$\text{الف) } \sum_{n=1}^{\infty} (1-z)z^n \quad \text{ب) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{(1+z^2)^n}$$

$$\text{پ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{n^2 - z^2} \quad \text{ت) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n}$$

$$\text{ث) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n}$$

۳-۶. رشته‌های ماکلورن و تیلر

ماتاسفانه دانستن اینکه رشته دلخواه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ در نقطه $z = z_0$ همگراست (یا واگراست)، هیچگونه آگاهی در مورد رشته در دیگر نقاط به ما نمی‌دهد، با اینحال، می‌توانیم دنباله‌های خصوصی از $\{f_n(z)\}$ را در نظر بگیریم و رده‌بی از توابع راباییم. که برای آنها رفتار رشته در یک نقطه، خواص آن در یک ناحیه را مشخص کند. این رده نقش عمده‌ی در نظریه توابع تحلیلی دارد.

فرض کنیم $f_n(z) = a_n(z-b)^n$ ، که a_n و b ثابت‌های مختلط‌اند. عبارت

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n, \quad (10)$$

به رشته‌ی توانی در $z - b$ موسوم است. اگر $b = 0$ ، (۱۰) به

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (11)$$

رشته‌ای توانی در z تبدیل می‌گردد. توجه ما به خواص رشته‌های توانی تعریف شده با (۱۱) معطوف خواهد بود. با تعویض z با $z - b$ ، این خواص به سادگی به رشته‌های تعریف شده با (۱۰) منتقل می‌گردند.

قضیه ۱۰-۶. فرض کنیم که رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $z = z_0$ همگراست. آنگاه

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|$ برای $|z| < |z_0|$ همگرا خواهد بود (یعنی، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برای $|z| < |z_0|$ همگرای مطلق است).

اثبات - چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ همگرا می‌باشد داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n z_0^n = 0$ بنابراین - این عدد ثابت M موجود است که برای هر n ، $|a_n z_0^n| \leq M$ و

$$|a_n| |z|^n = \left| a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0} \right)^n \right| \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n. \quad (12)$$

برای $|z| < |z_0|$ ، رشته‌هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} |z/z_0|^n$ همگراست. از این رو به موجب (۱۲)،

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \frac{M}{1 - \left| \frac{z}{z_0} \right|} \quad (|z| < |z_0|).$$

فرع ۱- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $z = z_0$ واگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برای $|z| > |z_0|$ واگراست.

اثبات - همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برای یک نقطه z_1 با $|z_1| > |z_0|$ ، موجب همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ می‌گردد، که با فرض ما متناقض است.

فرع ۲- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برای همه مقادیر حقیقی z همگرا باشد، آنگاه این رشته برای همه مقادیر مختلط همگراست.

اثبات - فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ با z_0 مقدار مختلط، واگرا باشد، بموجب فرع ۱ برای $|z_0| > R$ رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ واگراست که با فرض ما متناقض است.

از قضیه ۱۰-۶ می‌توان برای تعیین کران دقیقی برای ناحیه‌یی که یک رشته توانی در آن همگراست استفاده نمود.

قضیه ۱۱-۶. به هر رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ، یک عدد $0 \leq R \leq \infty$ متناظر می‌شود بطوری که رشته:

(۱) در $|z| < R$ همگرای مطلق است.

(۲) در $|z| \leq R_0 < R$ همگرای یکنواخت است.

(۳) برای $|z| > R$ واگراست.

اثبات - اگر رشته برای تمام مقادیر مخالف صفر z واگرا باشد، آنگاه روشن است که $R = 0$. اگر رشته برای یک مقدار مخالف صفری همگرا باشد، قرار می‌دهیم:

$$S = \left\{ r: \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z|^n \text{ همگرا باشد } |z| < r \right\},$$

و تعریف می‌کنیم:

$$R = \begin{cases} \text{lub } S, & \text{اگر } S \text{ کراندار باشد} \\ \infty, & S \text{ بی کران} \end{cases}$$

می‌خواهیم نشان دهیم، که این R در شرایط (۱) و (۲) و (۳) صدق می‌کند. برای هر نقطه z_0 ، $|z_0| < R$ عدد حقیقی ρ را می‌توان چنان یافت که:

$$|z_0| < \rho < R. \quad (13)$$

عدد ρ می‌بایست در S باشد؛ زیرا در غیراین صورت R نمی‌توانست کوچکترین کران بالای آن گردد. بنابراین به موجب (۱۳) و تعریف مجموعه S ، رشته $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z_0|^n$ همگراست. چون z_0 دلخواه بود (۱) ثابت می‌شود.

همگرایی یکنواخت رشته در ناحیه $|z| \leq R_0 < R$ از (۱) و آزمون M -با انتخاب $M_n = |a_n| R_0^n$ نتیجه می‌شود و بدین ترتیب (۲) ثابت می‌گردد.

در پایان، همگرایی رشته در نقطه z_1 با $|z_1| > R$ ، بنابه قضیه ۱۰-۶، همگرایی مطلق به ازاء $|z| < |z_1|$ را ایجاد می‌کرد. ولی در این صورت $|z_1|$ عنصری از S می‌شد؛ و این با فرض اینکه R یک کران بالای مجموعه S است متناقض است. بدین ترتیب (۳) ثابت می‌شود.

عدد R را که در قضیه ۱۱-۶ تعریف شد، شعاع همگرایی می‌نامند. یک رشته توانی همیشه درون دایره $|z| = R$ همگراست و خارج آن واگراست. ولی هیچگونه اصل عمومی که

رفتار رشته را روی این دایره مشخص کند موجود نیست. ممکن است در همه و یا بعضی نقاط روی دایره همگرا باشد و یا در هیچیک از نقاط دایره همگرا نباشد.

مثال ۱- رشته $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ برای $|z| < 1$ همگرا و در همه جای دایره همگرایی آن، $|z| = 1$ ، واگراست. باید توجه داشت که رشته بر قرص باز $|z| < 1$ همگرای یکنواخت نیست.

مثال ۲- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$ در $z = -1$ همگراست و در $z = 1$ واگراست. بنابراین شعاع همگرایی آن می‌بایست $R = 1$ باشد (چرا؟)

مثال ۳- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$ برای $|z| \leq 1$ همگرای مطلق (ویکنواخت) است. اگر $z = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) آنگاه $(z^n/n^2) \rightarrow \infty$. بنابراین شعاع همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n^2)$ برابر $R = 1$ می‌باشد.

مثال ۴- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ برای هر مقدار مختلط مخالف صفر نمی‌تواند همگرا باشد زیرا که $|nz|^n \rightarrow \infty$ ($z \neq 0$). بنابراین $R = 0$.

مثال ۵- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n^n)$ همگراست. برای اثبات، $z = z_0$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای $N > |z_0|$

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{z_0^n}{n^n} \right| < \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{z_0}{N} \right|^n = \frac{|z_0/N|^N}{1 - |z_0/N|}.$$

و همگرایی مطلق $\sum_{n=1}^{\infty} (z_0^n/n^n)$ نتیجه می‌گردد. چون z_0 دلخواه بود $R = \infty$. به موجب قضیه ۱-۶ رشته بر همه زیر مجموعه‌های فشرده صفحه همگرای یکنواخت است.

تاکنون شعاعهای همگرایی رشته‌های توانی گوناگونی را مشخص نمودیم و تنها روش مورد استفاده که گاهی هم پیرزحمت بود آزمایش نقاط متمایز جهت همگرایی و واگرایی و سپس کارگرفتن قضیه ۱-۶ بوده است. ولی یک رشته توانی با ضرایب تعریف می‌گردد، و تنها این ضرایب‌اند که مشخص‌کننده شعاع همگرایی می‌باشند.

قضیه ۱-۶. شعاع همگرایی رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر با $1/A = R$ است که

در آن $A = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$. اگر $A = 0$ آنگاه $R = \infty$ ؛ اگر $A = \infty$ آنگاه $R = 0$. اثبات - برای هر نقطه z_0 ، داریم :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n z_0^n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} |z_0| = |z_0| A.$$

به موجب قضیه ۶-۵، رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ ، به هنگامی که $|z_0| A < 1$ ، یعنی، برای $|z_0| < R$ ، همگرایی مطلق است و بازاء $|z_0| A > 1$. یعنی به ازاء $|z_0| > R$ واگراست. با توجه به قضیه ۶-۱۱، شعاع همگرایی $1/A = R$.

هنگامیکه $A = 0$ ، رشته همه جا همگراست؛ و هنگامیکه $A = \infty$ رشته تنها در $z = 0$ همگراست .

فرض کنیم رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R است . می‌خواهیم تا سرحد امکان رفتار تابع $f(z)$ را، که با این رشته توانی تعریف می‌شود، در نقاط درونی دایره همگراییش توصیف نماییم . بررسی پیوستگی $f(z)$ به ازاء $|z| < R$ به صورت ضمنی در کار ما نهفته است . برای اینکه نشان دهیم تابع در نقطه دلخواه z_0 ، $|z_0| < R$ پیوسته است، به این نکته توجه می‌کنیم که (به موجب قضیه ۶-۱۱) دنباله $S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ در قرص $|z| \leq R' < R$ ، $|z_0| < R'$ به طور یکنواخت به $f(z)$ میل می‌کند . چون $S_n(z)$ برای هر n ، در $z = z_0$ پیوسته است . با استفاده از قضیه ۶-۶، پیوستگی تابع حدی $f(z)$ در $z = z_0$ به ثبوت می‌رسد .

اثبات مشتق‌پذیری $f(z)$ به این سراسازی نیست . ممکن است انتظار داشته باشیم که مشتقات یک دنباله همگرایی یکنواخت از توابع مشتق‌پذیر به یک تابع مشتق‌پذیر برگراید . در حالیکه، برای دنباله $f_n(z) = (\sin nz)/\sqrt{n}$ ، گوا اینکه $\{f_n(z)\}$ همگرایی یکنواخت بر خط حقیقی است ولی دنباله $f'_n(z) = \sqrt{n} \cos nz$ به ازاء هیچ مقدار حقیقی همگرا نیست .

خوشبختانه، این رفتار غیرعادی برای دنباله حاصلجمع‌های جزیی یک رشته توانی نمی‌تواند رخ دهد . به یک معنی، یک رشته توانی را می‌توان به عنوان یک چند جمله‌یی از درجه نامتناهی تصور کرد؛ در واقع، یک چند جمله‌یی را می‌توان به صورت یک رشته توانی تعریف کرد که همه ضرایب آن، مگر یک تعداد متناهی، صفر باشند . مشتق یک چند جمله‌یی $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ برابر است با:

$$P'_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

قضیه‌یی مشابه همین مطلب برای رشته‌های توانی ثابت می‌کنیم . ولی ابتداء به لم

زیر نیازمندیم

لم - دورشته توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

دارای یک شعاع همگرایی هستند.

اثبات - با استفاده از خواص حد زیرین (بخش ۶-۱، تمرین ۹) داریم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |n a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$$

و اینک لم از قضیه ۶-۱۲ نتیجه می‌شود.

قضیه ۶-۱۳. اگر تابع $f(z)$ حد نقطه‌ای رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $|z| < R$ باشد

$$\text{آنگاه } f'(z) \text{ در } |z| < R \text{ تحلیلی است، و } f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

اثبات - اگر z_0 ، $|z_0| < R$ مفروض باشد، نشان خواهیم داد که هر وقت

$$|z - z_0| < \delta = \delta(\varepsilon, z_0) \text{ آنگاه:}$$

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| < \varepsilon$$

برای z پس نزدیک به z_0 ، عدد حقیقی ρ چنان موجود است که در نامساویهای زیر صدق کند.

$$|z_0| \leq \rho, \quad |z| \leq \rho \quad (\rho < R). \quad (14)$$

برای هر عدد صحیح N می‌نویسیم:

$$P_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$$

و

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \sum_{n=0}^N a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \\ &= \frac{P_N(z) - P_N(z_0)}{z - z_0} + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0}. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $P'_N(z_0) = \sum_{n=1}^N n a_n z_0^{n-1}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| \quad (15) \\
 &= \left| \frac{P_N(z) - P_N(z_0)}{z - z_0} - P'_N(z_0) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right| \\
 &\leq \left| \frac{P_N(z) - P_N(z_0)}{z - z_0} - P'_N(z_0) \right| \\
 &\quad + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1} \right|.
 \end{aligned}$$

سه عبارت آخری را به ترتیب با A_1 و A_2 و A_3 می‌نمایانیم. ابتداءً N را بس بزرگ انتخاب می‌کنیم تا $A_2 + A_3 < \varepsilon/2$ و سپس δ را بس کوچک انتخاب می‌کنیم تا $A_1 < \varepsilon/2$ از (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} \right| &= |z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1}| \quad (16) \\
 &\leq |z|^{n-1} + |z|^{n-2}|z_0| + \dots + |z_0|^{n-1} \leq n\rho^{n-1}.
 \end{aligned}$$

به موجب لم فوق $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$ همگراست و به موجب محک‌کوشی عدد صحیح مانند N می‌توان یافت که:

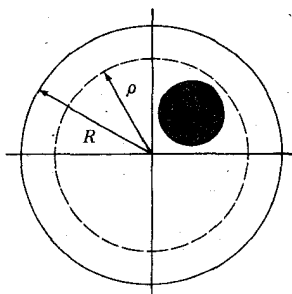
$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (17)$$

با توجه به (۱۷) و با جایگزینی (۱۶) در (۱۵) حاصل می‌شود

$$A_2 + A_3 \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (18)$$

از مشتق‌پذیری چند جمله‌یی $P_N(z)$ در $z = z_0$ نتیجه می‌شود که:

$$A_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{برای} \quad |z - z_0| < \delta \quad (19)$$



شکل ۲

اگر (۱۸) و (۱۹) را ترکیب نمائیم، قضیه از (۲۵) نتیجه می‌گردد.

تذکر ۱- یک رشته توانی را همیشه می‌توان بصورت یک چند جمله‌یی بعلاوه یک "دم" نوشت. اساس این اثبات بر این بود که نشان دهیم این دم بی‌اثر است.

تذکر ۲- قضیه ۶-۱۳ مبین آنست هر تابعی که با رشته توانی اش تعریف شود درون دایره همگراییش تحلیلی است. در فصل ۸، معکوس این نیز اثبات می‌گردد. یعنی هر تابع که در یک قرص تحلیلی باشد، حد نقطه‌ای یک رشته توانی است. بررسی قضیه ۶-۱۳ آشکار می‌سازد که خیلی بیش از آنچه در ابتداء قصد اثبات داشتیم اثبات کرده‌ایم. نشان دادیم که رشته توانی:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

دارای مشتقی به صورت:

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \dots$$

است که این به نوبه خود یک رشته توانی است که شعاع همگرایی آن برابر با شعاع همگرایی $f(z)$ است. از این رو قضیه ۶-۱۳ را می‌توان مکرر به کار بست و نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} f''(z) &= 2a_2 + 6a_3 z + 12a_4 z^2 + 20a_5 z^3 + \dots, \\ f'''(z) &= 6a_3 + 24a_4 z + 60a_5 z^2 + \dots, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (20)$$

$$f^{(k)}(z) = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} z + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} z^2 + \dots,$$

هر یک از روابط فوق درون دایره همگرایی $f(z)$ برقرارند. با قرار دادن $z=0$ در (۲۰) حاصل می‌گردد:

$$f^{(k)}(0) = k! a_k. \quad (21)$$

این نتایج را در قضیه زیر جمع‌بندی می‌کنیم:

قضیه ۶-۱۴. اگر تابع $f(z)$ حد نقطه‌یی یک رشته توانی در یک همسایگی از مبدا باشد، آنگاه $f(z)$ در هر یک از نقاط درون دایره همگرایی از همه مراتب مشتق دارد. بعلاوه، ضرایب رشته‌های توانی منحصر بفرد بوده و به وسیله رابطه (۲۱) به مشتقات $f(z)$ در مبدا مربوط می‌شوند.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

به بسط $f(z)$ به رشته ماکلورن موسوم است

تمام نتایج حاصل در مورد رشته‌های توانی را به آسانی می‌توان برای بسط‌هایی با توانهای $z - b$ ، که در آن b هر عددی مختلط است، بازگو کرد. به عنوان مثال، رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - b)^n$ درون دایره

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}} \text{ که } |z - b| < R$$

به تابع تحلیلی $f(z)$ همگرای مطلق است. بعلاوه، بسط رشته تیلر

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z - b)^n$$

برای $|z - b| < R$ برقرار است.

پرسش‌ها

- ۱- فرض کنید یک رشته توانی در $z = z_0$ همگرا و در $z = z_1$ واگراست. چه ارتباطی میان z_0 و z_1 موجود است؟
- ۲- فرض کنید یک رشته توانی در همه اعداد صحیح همگراست. این رشته نمایش - دهنده چگونه تابعی است؟
- ۳- آیا مجموعه S ، تعریف شده در قضیه ۱-۶، مجموعه‌ای بسته‌بی است؟
- ۴- چه وقت نواحی همگرایی مطلق و همگرایی یکنواخت یک رشته توانی بر همدیگر منطبق می‌شوند؟
- ۵- خواص همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ را چگونه می‌توان مقایسه کرد؟
- ۶- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ همگرا باشد، در مورد شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ چه می‌توان گفت؟
- ۷- رشته‌های توانی که دارای شعاع همگرایی $R=0$ یا $R=\infty$ اند در چه زمینه‌هایی با دیگر رشته‌های توانی تفاوت دارند؟
- ۸- فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌یی از توابع مشتق‌پذیر است، و $\{f_n\}$ بر مجموعه‌بی مانند E به یک تابع مشتق‌پذیر همگرای یکنواخت است. آیا می‌بایست $\{f_n\}$ بر E همگرا باشد؟
- ۹- در مورد حاصلجمع و حاصلضرب رشته‌های توانی چه می‌توان گفت؟
- ۱۰- کدام دسته از توابع تحلیلی را می‌توان نشان داد که دارای نمایش رشته توانی

می‌باشند؟

۱۱- آیا قضاای این بخش برای رشته‌های توانی حقیقی برقرارند؟

تمرینها

۱- فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به شعاع همگرایی R باشد. نشان دهید که دنباله $\{a_n z_0^n\}$ برای $|z_0| > R$ ، بی‌کران است.

۲- (الف) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ همگرا و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ واگرا باشد، و $|z_1| = |z_2|$ ، نشان دهید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی $R = |z_1|$ است.

(ب) اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد، نشان دهید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی $R = 1$ میباشد.

۳- فرض کنیم $|a_n|$ یک دنباله نزولی است. نشان دهید، شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ حداقل ۱ است.

۴- فرض کنیم $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در یک دنباله بی‌کران از نقاط همگرا باشد، نشان دهید این رشته توانی همه جا همگراست.

۵- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح است. ثابت کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ یا یک تابع نام است و یا شعاع همگرایی آن حداکثر یک میباشد.

۶- نشان دهید یک رشته توانی بر هر زیر مجموعه فشرده درون دایره همگراییش، همگرای یکنواخت است.

۷- فرض کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n/a_{n+1}| = R$ نشان دهید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R است.

۸- نشان دهید که شعاع همگرایی هر رشته توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر است با $R = \liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{-1/n}$.

۹- نشان دهید برای هر عدد صحیح k ، $\sum_{n=1}^{\infty} (n^k/n^{\log n}) z^n$ دارای شعاع همگرایی $R = 1$ می‌باشد.

۱۰- شعاع همگرایی رشته‌های توانی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k + a^n) z^n. \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{a^n} z^n. \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) n^2 z^n. \quad (\text{ت}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n - 1}{n} z^n. \quad (\text{پ})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 5n + 3i^n}{2n + 1} (z - 2)^n. \quad (\text{ث})$$

۱۱- شعاع همگرایی رشته‌های توانی زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2 + 4n} z^{2n}. \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^n n^k}. \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}. \quad (\text{ت}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n^2}}. \quad (\text{پ})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{4^n + 5^n} z^n. \quad (\text{ث})$$

۱۲- فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ی از اعداد مختلط است که حاصلجمع‌های جزئی آن $\sum_{i=1}^n a_i$ کراندار است. اگر $\{b_n\}$ دنباله‌ی حقیقی باشد که یکنوا به ۰ نزول کند، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ همگراست (راه‌نمایی: فرض کنید $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$ و تساوی $\sum_{i=m}^n a_i b_i = \sum_{i=m}^n (s_i - s_{i-1}) b_i$ را در نظر بگیرید).
۱۳- (الف) نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n)$ بر دایره $|z|=1$ همه جا مگر در $z=1$ همگراست.

(ب) نشان دهید برای $|z_1|=1$ $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)(z/z_1)^n$ بر دایره واحد، همه جا، مگر در $z=z_1$ همگراست.
(پ) فرض کنید $|z_1|=|z_2|=\dots=|z_p|=1$ نشان دهید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{z_1^n} + \dots + \frac{1}{z_p^n} \right) z^n$$

بر دایره واحد همه جا مگر در نقاط z_1, z_2, \dots, z_p همگراست.

۱۴- بسط‌های تیلر چند جمله‌ی $P(z)=z^3+3z^2-2z+1$ را بر حسب توانهای زیر بنویسید:

$$z-1 \quad (\text{الف}) \quad z+2 \quad (\text{ب}) \quad z-i \quad (\text{پ})$$

۴-۳. عملیات بر رشته‌های توانی

مطالعه ما در مورد رشته‌های توانی بر محور سه سؤال زیر دور زده است.

(۱) برای چه مقادیر z ، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ همگراست؟

(۲) تابع $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n = f(z)$ در نقاطی که رشته همگراست واحد چه خواصی

ممکن است باشد؟

(۳) تحت چه شرایطی می‌توان تابع $f(z)$ را در یک همسایگی یک نقطه با رشته

توانی نمایش داد؟

دو سؤال اول تقریباً " بطور کامل حل شده‌اند. رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ یا همه جاهمگراست، یا تنها در $z=b$ همگراست و یا اینکه یک دایره همگرایی موجود است که رشته در درون آن همگرای مطلق و در خارج آن واگراست. تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ در درون دایره همگرایی تحلیلی است و از تمام مراتب مشتق دارد. تنها رفتار تابع بر دایره بعنوان معما باقی می‌ماند.

سؤال سوم تاکنون به طور کامل مورد بحث قرار نگرفته است. می‌دانیم که $f(z)$ را نمی‌توان در یک همسایگی یک نقطه با یک رشته توانی نمایش داد، مگر این که در هریک از نقاط این همسایگی دارای مشتق از تمام مراتب باشد. بعلاوه، اگر $f(z)$ در یک همسایگی $z=b$ دارای نمایش رشته توانی باشد، آنگاه این نمایش منحصر بفرد است و ضرایب آن توسط رابطه $\sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(b)/n!)(z-b)^n$ با مشتقات تابع در $z=b$ مربوط می‌شوند، ولی ما تاکنون محکی نداریم که وجود بسط رشته توانی را تضمین نماید. به عنوان مثال، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

ابتداءً ثابت می‌کنیم که $f(z)$ تام است. با توجه به قضیه ۶-۱۳ کافی است نشان دهیم که $(n!)^{1/n} \rightarrow \infty$ از نامساوی

$$n! \geq n(n-1) \cdots \left(n - \frac{n}{2}\right) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2},$$

شروع می‌کنیم و از طرفین ریشه n ام می‌گیریم تا حاصل شود

$$(n!)^{1/n} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \rightarrow \infty.$$

بنابراین $f(z)$ همه جا تحلیلی است، بعلاوه $f(0) = 1$ و، به موجب قضیه ۶-۱۳

$$f'(z) = f(z) \quad \text{برای هر } z$$

در این لحظه ظن قوی بر این خواهد بود که $f(z) = e^z$ در واقع، اگر e^z نمایش رشته توانی داشته باشد، آنگاه

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (22)$$

برای اینکه صحت (۲۲) را بیش از این باور کنیم باید توجه داشته باشیم که برای همه x های حقیقی داریم $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ این مطلب در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماشی با استفاده از فرمول تیلر با باقیمانده در (۳) ثابت شده است.

یعنی که:

$$f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x),$$

در آن $R_n(x)$ ——— بر حسب یک انتگرال حقیقی تعریف می‌شود و این انتگرال با میل n به ∞ به صفر می‌گراید.

اثبات (۲۲) در مورد z مختلط تا بررسی نظریه انتگرال مختلط به تعویق می‌افتد، ولی کم حوصله‌ترین خواننده هم ترجیح می‌دهد که چنین انتظاری بکشد. نه تنها ثابت خواهیم کرد که همگی همانندیه‌های رشته توانی حقیقی، از قبیل:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots,$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots,$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

در صفحه مختلط هم برقرارند، بلکه معکوسی از قضیه ۶-۱۳ را نیز ثابت خواهیم کرد. یعنی ثابت می‌کنیم که هر تابع تحلیلی یک بسط رشته تیلر دارد. به ویژه، اگر $f(z)$ یک تابع تام باشد، نمایش آن به رشته تیلر

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(b)}{n!} (z-b)^n$$

برای همه اعداد ثابت مختلط b و z برقرار است.

از این نظر که مطلب فوق در متغیر حقیقی مشابهی ندارد، بیشتر موجب شگفتی است.

مثال ۱- تابع $f(x) = x|x|$ برای همه x های حقیقی مشتق پذیر است، ولی چون $f''(0)$ موجود نیست قابل بسط به رشته ماکلورن نمی‌باشد.

مثال ۲- تابع $f(x) = 1/(1+x^2)$ برای همه x های حقیقی دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، در حالی که بسط ماکلورن آن

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

تنها در فاصله حقیقی $(-1, 1)$ برقرار است. ظاهراً "در ماهیت این تابع چیزی نیست که موجب این محدودیت باشد. ولی با جایگزین کردن x با متغیر مختلط z ،

می‌بینیم که تابع $f(z) = 1/(1+z^2)$ در $z = \pm i$ تحلیلی نیست. و همین مطلب مانع همگرایی یک رشته ماکلورن آن در خارج دایره $|z| = 1$ می‌شود. بویژه برای مقادیر حقیقی z این رشته در خارج فاصله $[-1, 1]$ نمی‌تواند همگرا باشد.

مثال ۳ تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{تابع}$$

برای همه مقادیر حقیقی، دارای مشتق از تمام مراتب است. چون برای هر عدد صحیح n ، $f^{(n)}(0) = 0$ داریم: $\sum_{n=0}^{\infty} (f^{(n)}(0)/n!) x^n \equiv 0$ بنابراین رشته ماکلورن آن، تابع را تنها در مبدأ نمایش می‌دهد.

بار دیگر، به توابع؛ متغیر مختلط باز گردیم، حاصلجمع دو چند جمله‌یی از درجه n . یک چند جمله‌یی از درجه حداکثر n است و ضرایب آن از جمع کردن ضرایب جمله به جمله تشکیل می‌شود، یعنی:

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k + \sum_{k=0}^n b_k z^k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) z^k.$$

حاصلضرب دو چند جمله‌یی از درجه n ، یک چند جمله‌یی از درجه $2n$ است. ولی ارتباط میان ضرایب چندان ساده نیست. داریم:

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n) \\ = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 \\ + \cdots + a_n b_n z^{2n}. \end{aligned}$$

به عبارت دقیق‌تر

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k z^k \right) \left(\sum_{k=0}^n b_k z^k \right) = \sum_{k=0}^{2n} c_k z^k,$$

که در آن

$$\begin{aligned} c_k &= a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0 \\ &= \sum_{m=0}^k a_m b_{k-m}. \end{aligned}$$

اگر بدانیم که دو تابع دارای رشته‌های توانی هستند، آنگاه اطلاعات در مورد حاصلجمع و حاصلضرب آنها قابل حصول است.

قضیه ۶-۱۵. فرض کنیم $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ به ترتیب دارای شعاعهای همگرایی R_1 و R_2 باشند. در این صورت $f(z) + g(z)$ و $f(z)g(z)$ دارای نمایش‌هایی به رشته توانی است که شعاع همگرایی آنها حداقل $R = \min \{R_1, R_2\}$ است. اثبات - قرار دهیم:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{و} \quad T_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k.$$

در این صورت

$$S_n(z) + T_n(z) = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) z^k$$

و

$$S_n(z) T_n(z) = \sum_{k=0}^{2n} c_k z^k,$$

که $c_k = \sum_{m=0}^k a_m b_{k-m}$ برای هر z_0 با $|z_0| < R$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z_0) = f(z_0) \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z_0) = g(z_0).$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(z_0) + T_n(z_0)) = f(z_0) + g(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z_0^n$$

و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z_0) T_n(z_0) = f(z_0) g(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n.$$

چون z_0 اختیاری بود، هر دو رشته در $|z| < R$ همگرا هستند و بدین ترتیب اثبات تمام است.

تذکر - شعاعهای همگرایی برای $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ در واقع ممکن است بزرگتر از $\min \{R_1, R_2\}$ باشد، اگر $a_n \equiv 1$ و $b_n \equiv -1$ ، آنگاه $R_1 = R_2 = 1$ ولی

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - 1) z^n \equiv 0,$$

و رشته برای همه مقادیر z همگراست. اگر

$$a_n = \begin{cases} 2, & n=0, \\ 2^n, & n \geq 1, \end{cases} \quad \text{و} \quad b_n = \begin{cases} -1, & n=0, \\ 1, & n \geq 1, \end{cases}$$

آنگاه $R_1 = \frac{1}{2}$ و $R_2 = 1$. درحالی که برای $n \geq 1$

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_n b_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \\ &= 2 - 2^n + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 - 2^n + \frac{2 - 2^n}{1 - 2} = 0. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 = a_0 b_0 = -2,$$

و رشته برای همه z ها همگراست. قابل توجه است که

$$f(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^n = 2 + \frac{2z}{1-2z} = \frac{2(1-z)}{1-2z} \quad \left(|z| < \frac{1}{2}\right)$$

و

$$g(z) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = -1 + \frac{z}{1-z} = -\frac{(1-2z)}{1-z} \quad (|z| < 1).$$

اضولا "تنها تابعی که تاکنون بسط ماکلورن آن "به شکل بسته‌یی" برایمان شناخته شده است، رشته هندسی است:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$$

برای هر عدد مختلط مخالف صفر a ، این رابطه به همانندی زیر منجر می‌گردد:

$$\frac{1}{a-z} = \frac{1}{a(1-z/a)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^{n+1}} z^n \quad (|z| < |a|).$$

هم‌چنین برای دو عدد مختلط متمایز a و b داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-a)(z-b)} &= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b} \right) \\ &= \frac{1}{a-b} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) z^n \right] \end{aligned}$$

که در ناحیه زیر برقرار است:

$$|z| < R = \min \{|a|, |b|\}. \quad (23)$$

یک بسط ماکلورن برای $1/(1-z)^2$ را می‌توان به دو روش یافت:

روش ۱- با قرار دادن $a_n \equiv b_n \equiv 1$ در اثبات قضیه ۶-۱۴، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \quad (|z| < 1).\end{aligned}$$

روش ۲- فرض کنیم

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$$

بموجب قضیه ۶-۱۳

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad (|z| < 1). \quad (24)$$

معمولا "تشخیص این که یک رشته مفروض همگراست یا نه بمراتب ساده‌تر از یافتن مقدار یک رشته همگرای معلوم است. به عنوان مثال هر دانشجوی درس حساب و دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌تواند نشان دهد، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^3)$ همگراست. ولی باهوشترین ریاضیدانهای جهان تاکنون نتوانسته‌اند روشی جهت یافتن حاصلجمع آن بیابند. با این حال همیشه اینطور نیست؛ شکل بسته رشته هندسی به ما امکان می‌دهد تا مقدار اکثر رشته‌ها را بیابیم.

مثال ۱- حاصلجمع $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ را بیابید.
بموجب (۲۴)، داریم:

$$zf'(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad (|z| < 1). \quad (25)$$

با قرار دادن $z = \frac{1}{2}$ در (۲۵)، حاصل می‌شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

جالب توجه است که بدانیم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

پارادکس ظاهری موجود را می‌توان با توجه به این نکته که جمله طرف راست صفر است مرتفع کرد.

مثال ۲- حاصلجمع $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2/3^n)$ را بیابید.

با مشتق‌یابی از (۲۵) و ضرب در z داریم

$$\frac{z + z^2}{(1-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n \quad (|z| < 1). \quad (26)$$

با قرار دادن $z = \frac{1}{3}$ ، (۲۶) منجر به:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^2}{(1 - \frac{1}{3})^3} = \frac{3}{2}.$$

می‌شود. روش بکار رفته در این مثالها را می‌توان در مورد هر رشته‌یی به شکل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{z_0^n} \quad (k, |z_0| > 1 \text{ صحیح مثبت}).$$

بکار گرفت. گاهی اوقات ممکن است یک رشته توانی را که به صورت بازگشتی تعریف شده است، به "شکل بسته" بدست آورد.

مثال ۳- دنباله فیبوناچی^۱ بدین صورت تعریف می‌شود که برای هر n ،

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \text{ فرض کنیم } a_1 = 1 \text{ و } a_0 = 0 \text{ یا } a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

در این صورت:

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^{n+2} = z + \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} + a_n) z^{n+2} \\ &= z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+2} \\ &= z + z \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} + z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\ &= z + zf(z) + z^2 f(z). \end{aligned}$$

که با حل آن، حاصل می‌شود:

$$f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

محاسبات فوق تنها در نقاطی که رشته همگراست، برقرار است. ریشه‌های مخرج

$f(z)$ عبارتند از: $z = (1 \pm \sqrt{5})/2$ ، بنابه (۲۳)، دیده می‌شود که شعاع همگرایی $f(z)$ برابر با $(\sqrt{5} - 1)/2$ است.

با عملیاتی بر رشته هندسی می‌توان بسطهای رشته تیلر را نیز یافت. به عنوان مثال

می‌دانیم که برای هر عدد مختلط b ، $b \neq 1$ ، همانندی زیر:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-b-(z-b)} = \frac{1}{(1-b)(1-[(z-b)/(1-b)])} \\ &= \frac{1}{(1-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-b}{1-b}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-b)^{n+1}} (z-b)^n \end{aligned}$$

هروقت

$$\left| \frac{z-b}{1-b} \right| < 1,$$

یعنی هر وقت

$$|z-b| < |1-b|.$$

برقرار است. بنابراین، تابع $f(z)$ ، حول تمام نقاط به استثنای $b=1$ ، بسط تیلر دارد. به خواننده توصیه می‌شود که صحت رابطه زیر را تحقیق کند.

$$\frac{f^{(n)}(b)}{n!} = \frac{1}{(1-b)^{n+1}} \quad \text{برای هر } n$$

پرسش‌ها

۱- اختلاف میان رشته‌های توانی حقیقی و مختلط در چیست؟

۲- آیا خارج قسمت دو رشته توانی نمایشی بصورت رشته توانی دارد؟

۳- فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ دارای نمایش رشته توانی هستند، در مورد $f(g(z))$

چه می‌توان گفت؟

۴- فرض کنید $f(z)$ دارای بسط ماکلورنی با شعاع همگرایی R است. آیا می‌شود که

$f(z)$ در z_0 با $|z_0| > R$ تحلیلی باشد؟ آیا می‌شود که $f(z)$ در همه جای $|z|=R$

تحلیلی باشد؟

۵- فرض کنید که می‌دانیم تابعی دارای نمایش رشته توانی است. در این صورت چه

عملیاتی را باید انجام داد، تا مقدار رشته‌های نامتناهی مشخص را محاسبه نمود؟

۶- اگر $a_n \neq 0$ ، شعاع‌های همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} (1/a_n) z^n$ را چگونه

می‌توان مقایسه کرد؟

۷- اگر تابعی حول دو نقطه متمایز بسط تیلر داشته باشد، شعاع‌های همگرایی این

دو رشته توانی چگونه مقایسه می‌شوند؟

۸- در مورد نمایش رشته توانی برای توابع کسری چه می‌توان گفت؟

۹- آیا می‌شود که رشته‌ای توانی در یک قرص $|z| < R$ همگرا باشد بدون اینکه در آنجا همگرای مطلق باشد؟ در مورد قرص بسته $|z| \leq R$ چطور؟

تمرینها

۱- فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R_1 ، $0 < R_1 < \infty$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R_2 ، $0 < R_2 < \infty$ ، باشد نشان دهید:

- (الف) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ دارای شعاع همگرایی حداقل برابر با $R_1 R_2$ است.
 (ب) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n/b_n) z^n$ ($b_n \neq 0$) دارای شعاع همگرایی حداکثر برابر با R_1/R_2 است.
 مثالهایی بیاورید که نشان دهند برقراری نامساوی در (الف) و (ب) ممکن است.
 ۲- فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به شعاع همگرایی R ، $0 < R < \infty$ است شعاع همگرایی رشته‌های

زیر را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^k} z^n. \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^k z^n. \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n. \quad (\text{ت}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n. \quad (\text{پ})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n! z^n. \quad (\text{ث})$$

کدام یک از جوابها در حالت $R=0$ یا $R=\infty$ تغییر پیدا می‌کنند.

۳- فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به شعاع همگرایی R است. مثالی بیاورید که در آن $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$ (k صحیح مثبت) و $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$ دارای شعاع همگرایی R ، و شعاع همگرایی بزرگتر از R باشند.

۴- (الف) فرض کنید $f(z)$ را بتوان حول $z=a$ به رشته تیلر بسط داد، نشان دهید که اگر برای هر عدد صحیح n ، $|f^{(n)}(a)| \leq M$ ، آنگاه $f(z)$ تام است.
 (ب) نشان دهید که اگر برای یک عدد صحیح k و هر n ، $|f^{(n)}(a)| \leq n^k$ ، آنگاه $f(z)$ تام است.

۵- حاصل جمع رشته‌های زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5in}{(1+i)^n} \quad (\text{پ}) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(3^n - 2^n)}{6^n} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n - 1}{3^n} \quad (\text{الف})$$

۶- تابع $f(z)$ را فرد گوئیم چنانچه $f(-z) = -f(z)$ و زوج گوئیم چنانچه $f(-z) = f(z)$. اگر $f(z)$ نمایش رشته توانی داشته باشد، نشان دهید.
 (الف) $f(z)$ فرد است اگر و تنها اگر ضرایب زوج رشته توانی آن همگی صفر باشند.

(ب) $f(z)$ زوج است اگر و تنها اگر ضرایب فرد همگی صفر باشند.

(ج) $f'(z)$ فرد (زوج) است اگر $f(z)$ زوج (فرد) باشد.

۷- فرض کنید $a_n + Aa_{n-1} + Ba_{n-2} = 0$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) ، نشان دهید که

رابطه:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{a_0 + (a_1 + a_0 A)z}{1 + Az + Bz^2}$$

در تمام نقاطی که رشته توانی همگراست، برقرار است، شعاع همگرایی چقدر است؟

۸- برای دنباله فیبوناچی که بصورت $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ با $a_0 = 0$ و $a_1 = 1$

تعریف می‌شود، نشان دهید که:

$$a_n \leq \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1} \right)^n \quad , \quad \text{برای هر } n$$

۹- فرض کنید a ، b و c اعداد مختلط مخالف صفر متمایز باشند. یک بسط رشته

توانی برای $f(z) = 1/(z-a)(z-b)$ حول نقطه $z=c$ بیابید، و شعاع همگرایی آن را بیابید.



۷. انتگرال گیری مختلط و قضیه کوشی

(یکی از عمده ترین قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال، به حق، قضیه اساسی محاسبات انتگرال، نامیده شده است. از یک سو انتگرال را با مشتق گیری مربوط می کند، و از سوی دیگر روشی برای محاسبه انتگرال بدست می دهد. در این فصل به دنبال مشابه مختلط آن هستیم. البته، اشکال در این است که میان هر دو نقطه، بی نهایت مسیر موجود است که می توان بر آنها انتگرال گرفت. قضیه کوشی، که قضیه اساسی انتگرال گیری مختلط است، مبین آن است که برای توابع تحلیلی بر میدانهای ویژه یی، یک مسیر همان اندازه مناسب است که دیگر مسیرها تناسب دارند).

۷-۱. خم ها

ابتداء به یادآوری برخی خواص انتگرال ریمان می پردازیم. فرض کنیم $f(t)$ و $g(t)$ توابعی با مقادیر حقیقی باشند که بر فاصله $a \leq t \leq b$ پیوسته اند. در این صورت برای هر دو عدد ثابت حقیقی c_1 و c_2 داریم:

$$\int_a^b (c_1 f(t) + c_2 g(t)) dt = c_1 \int_a^b f(t) dt + c_2 \int_a^b g(t) dt \quad (1)$$

و

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt. \quad (2)$$

اینک تابع با مقادیر مختلط $F(t) = F_1(t) + iF_2(t)$ را در نظر می گیریم که در آن توابع با مقادیر حقیقی $F_1(t)$ و $F_2(t)$ در فاصله $a \leq t \leq b$ پیوسته اند. انتگرال معین

$F(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\int_a^b F(t) dt = \int_a^b F_1(t) dt + i \int_a^b F_2(t) dt. \quad (3)$$

ملاحظه می کنیم که:

$$\operatorname{Re} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} F(t) dt = \int_a^b F_1(t) dt,$$

$$\operatorname{Im} \int_a^b F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Im} F(t) dt = \int_a^b F_2(t) dt.$$

خیلی از خواص انتگرال حقیقی برای انتگرال مختلط نیز معتبر است. به عنوان مثال خاصیت خطی بودن که در (۱) بیان شده است برای توابع مختلط و اعداد مختلط ثابت برقرار است. برای اثبات کافی است قسمت های حقیقی و انکاری تفکیک شوند. برای اثبات (۲) برای توابع مختلط، فرض می کنیم:

$$\int_a^b F(t) dt = R e^{i\alpha} \quad (R > 0, -\pi < \alpha \leq \pi).$$

در این صورت:

$$\int_a^b e^{-i\alpha} F(t) dt = e^{-i\alpha} \int_a^b F(t) dt = R = \left| \int_a^b F(t) dt \right|. \quad (4)$$

با توجه به (۴) و خواص انتگرال حقیقی

$$\begin{aligned} R &= \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\alpha} F(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} e^{-i\alpha} F(t) dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\alpha} F(t)| dt = \int_a^b |F(t)| dt. \end{aligned}$$

وقتی که $\int_a^b F(t) dt = 0$ ، صحت نامساوی روشن است.

بحث ما تا این جا کمکی به بررسی توابع مختلط از متغیرهای مختلط نکرده است.

حل این مسئله نیازمند انتگرال گیری بر خم های عمومی تری است تا بر فواصل حقیقی.

یک خم پیوسته (یک کمان) در صفحه مختلط بصورت پارامتری به شکل زیر تعریف

می شود.

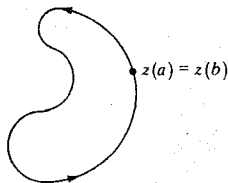
$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b), \quad (5)$$

که در آن $x(t)$ و $y(t)$ توابعی حقیقی و پیوسته از متغیر حقیقی t هستند. ما از

این به بعد تمام خمها را پیوسته می گیریم و بنابراین کلمه "خم" و "کمان" را می توان به عوض هم دیگر بکار گرفت.

به هنگام بحث در مورد خم‌ها یک ابهام طبیعی بروز می‌کند. با وجود اینکه یک خم بنا به تعریف یک تابع است، و خواص آن هم خواص تابع است ولی مابه مجموعه‌ای نقطه‌ای که نمایش نمودار تابع است نیز "خم" اطلاق می‌کنیم. از این رو یک خم در عین حال که تابعی پیوسته است، یک مجموعه همبند و فشرده از نقاط نیز می‌باشد. وقتی که خواص توپولوژیکی یک خم مورد بحث باشد، گاهی خم را با C می‌نمایانیم و توجهی به ساخت پارامتری منحنی نداریم.

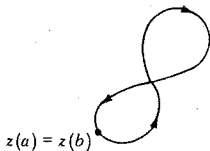
در مورد یک خم C که با (۵) تعریف شده است، نقطه $z(a)$ - نقطه آغازی و $z(b)$ نقطه پایانی نامیده می‌شود. اگر نقاط آغازی و پایانی برهم منطبق شوند ($z(a) = z(b)$) در این صورت C را یک خم بسته می‌نامند. اگر هر وقت $t_1 \neq t_2$ ، داشته باشیم $z(t_1) \neq z(t_2)$ ، در این صورت C با خودش تلاقی نمی‌کند و این خم را ساده می‌نامند. خم بسته‌یی را که در فاصله $a \leq t \leq b$ ساده باشد، خم ساده بسته و یا خم ژردان^۱ نامند.



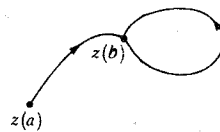
ساده بسته



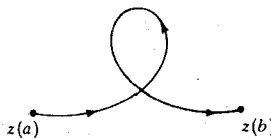
ساده است، بسته نیست



بسته است، ساده نیست



ساده است، بسته نیست



بسته نیست، ساده نیست

هر خم ساده بسته صفحہ را به دو میدان مجز تقسیم می‌کند. و یا بطور رسمی تر داریم:

قضیه خم ژردان اگر C یک خم ساده بسته (ژردان) باشد، آنگاه مکمل C ، از دو مجموعه مجزا تشکیل می‌شود، یک میدان کراندار موسوم به درون (یا داخل) و دیگری یک میدان

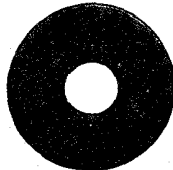
بی کران موسوم به بیرون (یا خارج) است خم C مرز هر یک از این دو میدان است.

اثبات این قضیه شهودی و قابل تجسم، بسیار مشکل است. خواننده‌یی که نمی‌خواهد صحت قضیه را همینطوری قبول کند می‌تواند اثبات آنرا در کتاب نویمان^۱ (۴) پیدا کند.

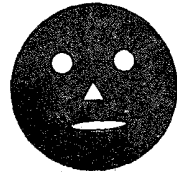
میدان \mathcal{D} همبند ساده است اگر درون هر خم ساده بسته واقع در \mathcal{D} ، تماما "متعلق به \mathcal{D} باشد. تعبیر زیر به فهم تعریف کمک می‌کند. از نظر توپولوژیکی، یک میدان همبند ساده را می‌توان بطور پیوسته بصورت نقطه منقبض کرد^۲. قابل توجه است که قرص واحد سفته $A = \{z: 0 < |z| < 1\}$ را می‌توان به یک میدان به اندازه دلخواه کوچک منقبض کرد، ولی آنرا نمی‌توان به یک نقطه از A منقبض کرد^۳. از نظر هندسی، یک میدان همبند ساده حفره‌ای درونش ندارد، زیرا اگر خم ساده بسته‌یی این حفره را احاطه کرده باشد، آنگاه این خم را نمی‌توان به ماوراء حفره منقبض کرد. در اینجا نیز حذف تنها یک نقطه در میدان معادل با ایجاد یک حفره در آن است، میدانی که همبند ساده نباشد، همبند چندگانه می‌نامند.



همبند ساده



همبند چندگانه



همبند چندگانه

تذکر ۱- در بحث میدانهای همبند ساده، به صفحه مختلط متناهی محدود شدیم. در نتیجه خارج یک دایره، همبند ساده نیست، زیرا که از یک جهت دایره و از سوی دیگر نقطه ∞ مانع منقبض شدن میدان به یک نقطه می‌گردد. در صفحه گسترش یافته، خارج یک دایره، همبند ساده است چون می‌توان آنرا در نقطه ∞ "منقبض" کرد.

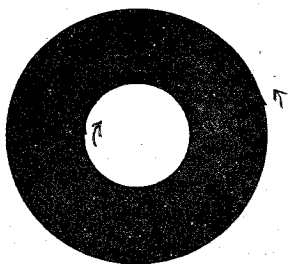
تذکر ۲- در حالیکه توابع تحلیلی بنایه تعریف لازم است تک - مقداری باشند، جالب است که مفهوم مختصرتر و عام‌تر از تحلیلی را، که توابع چند مقداری را نیز شامل می‌گردد مورد بحث قرار دهیم، سعی ما بر آنست که بگوئیم $\log z$ در صفحه سفته تحلیلی است زیرا که برای هر مقدار $z_0 \neq 0$ شاخه‌یی از $\log z$ را می‌توان یافت که برای آن $\log z$ در z_0 تحلیلی باشد. همانطور که در فصل ۱۴ خواهیم دید. به لحاظ وجود این خاصیت برای لگاریتم، قادریم که تابع چند مقداری $\log z$ را در صفحه سفته، منظم

بنامیم . باید توجه داشت که یک بریدگی شاخه برای لگاریتم ، یک تابع چند مقداری را به یک تابع تک - مقداری تبدیل می‌کند ، و هم چنین یک میدان همبند چندگانه (صفحه سفته) را به یک میدان همبند ساده تبدیل می‌کند . بعد از تعریف دقیق کلمه "منظم" در فصل ۱۴ نشان خواهیم داد یک تابع منظم که در یک میدان همبند ساده منظم باشد، می‌بایست در آنجا تک‌مقداری (و در نتیجه تحلیلی) باشد . این مطلب به قضیه تکمیدانی معروف است .

گوئیم که مرز C از یک میدان دارای جهت مثبت است و یا در جهت مثبت پیموده شده است ، بشرط آنکه شخصی که C را می‌پیماید همیشه میدان در طرف چپ او قرار گیرد . مرز یک قرص دارای جهت مثبت است اگر در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده و دارای جهت منفی است اگر هم جهت با حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شود .

نکته قابل توجه: مثبت را با خلاف حرکت عقربه‌های ساعت معادل بگیرید . برای طوق شکل ۱، جهت مثبت بر امتداد دایره خارجی خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است ، در حالی که بر امتداد دایره درونی جهت مثبت موافق حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد .

شکل ۱



بالین حال اگر خم ساده بسته بی بدون وابستگی به یک ناحیه مفروض باشد، فرض می‌کنیم که میدان درون خم است ، و بنابراین جهت مثبت، خلاف حرکت عقربه‌های ساعت خواهد بود .

تذکر - اینکه ما مفهوم خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را بی‌چون و چرا می‌پذیریم ، علتش فریبی است که در کلمه "ساده" در عبارت مرز ساده بسته نهفته است . مثالهایی از خم‌های ساده بسته موجودند که به معنی شهودی کلمه ، "ساده" نیستند ، و تقریباً یک مربع کامل را اشغال می‌کنند . برای چنین خمی ، خواننده باید عمر خود را صرف دنبال کردن جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت نماید . درحالی که تعریف ما برای جهت بیشتر شهودی است تا دقیق ، ولی برای تمام خمهایی که ما در این کتاب با آنها مواجه هستیم مناسب است .

فرض کنیم

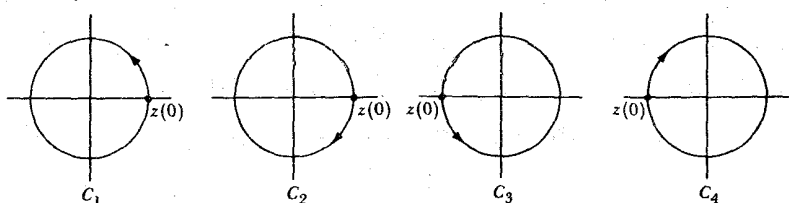
$$C_1: z_1(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$C_2: z_2(t) = e^{-it} = \cos t - i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$C_3: z_3(t) = -e^{it} = -\cos t - i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$C_4: z_4(t) = -e^{-it} = -\cos t + i \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

چهار خم بالا همگی دایره واحد را می‌پیمایند. اختلاف آنها با یکدیگر یا در نقطه آغازی و یا در جهت است. آغاز خم‌های C_1 و C_2 ، $(1, 0)$ است، در حالیکه آغاز C_3 و C_4 ، نقطه $(-1, 0)$ است. C_1 و C_3 دارای جهت مثبت هستند، در حالیکه خم‌های C_2 و C_4 جهت منفی دارند (ر. ک. شکل ۲)



خمی که دارای مشتق پیوسته باشد هموار نامیده می‌شود. فرض کنیم C خم همواری باشد که دارای معادلات پارامتری زیر است:

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

اگر تابع مختلط $f(z)$ بر C پیوسته باشد، نتیجه می‌گردد که $f(z(t))z'(t)$ باز $a \leq t \leq b$ پیوسته است. در اینصورت انتگرال $f(z)$ بر C بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (6)$$

تذکر ۱- انتگرال مختلط را می‌توانستیم، همانند تعریف انتگرال ریمان. بصورت حدی از یک مجموع تعریف کنیم. در این صورت (۶) را می‌توانستیم بصورت یک قضیه استنتاج کنیم که برای خم هموار C و $f(z)$ پیوسته بر C معتبر باشد. یک مزیت (۶) در این است که قادر خواهیم بود از خواص آشنای انتگرال ریمان استفاده کنیم. جهت مقایسه ایندو تعریف به کتاب دیری و اهرینگ (۵) مراجعه کنید.

تذکر ۲- عبارت زیر علامت انتگرال در طرف راست (۶) با جایگزینی $z = z(t)$ ، $dz = z'(t) dt$ در طرف چپ، بدست می‌آید.

تذکر ۳- در حالت خاصی که $z(t) = t$ ، خم یک فاصله حقیقی است و (۶) به یک انتگرال به شکل (۳) ساده می‌گردد.

تذکر ۴- مقدار انتگرال حقیقی $\int_a^b f(x) dx$ به تابع و نقاط انتهایی فاصله $[a, b]$ وابسته است. مقدار انتگرال مختلط $\int_C f(z) dz$ ممکن است به تابع $f(z)$ و همه نقاط خم C ، و نه تنها نقاط انتهایی C ، وابسته باشد.

مثال- مقدار $\int_C |z|^2 dz$ را در امتداد خمهای زیر بیابید.

$$C = C_1 : z_1(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq 1), \quad \text{(الف)}$$

$$C = C_2 : z_2(t) = t^2 + it \quad (0 \leq t \leq 1). \quad \text{(ب)}$$

بموجب (۶) داریم:

$$\begin{aligned} \int_{C_1} |z|^2 dz &= \int_0^1 |t + it|^2 (1 + i) dt \\ &= (1 + i) \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} |z|^2 dz &= \int_0^1 |t^2 + it|^2 (2t + i) dt \\ &= \int_0^1 2t(t^4 + t^2) dt + i \int_0^1 (t^4 + t^2) dt = \frac{8}{15} + \frac{8}{15}i. \end{aligned}$$

علیرغم آنکه خط راست C_1 و سهمی C_2 دارای نقاط آغازی و پایانی مشترک می‌باشند (ر.ک. شکل ۳):

$$\int_{C_1} |z|^2 dz \neq \int_{C_2} |z|^2 dz.$$

ولی با اینحال باید توجه داشت که:

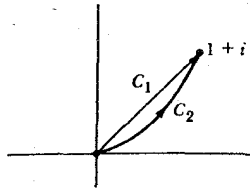
$$\begin{aligned} \int_{C_1} z^2 dz &= \int_0^1 (t + it)^2 (1 + i) dt \\ &= \int_0^1 -2t^2 dt + i \int_0^1 2t^2 dt \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \end{aligned}$$

$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 (t^2 + it)^2 (2t + i) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3) dt + i \int_0^1 (5t^4 - t^2) dt \\
 &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.
 \end{aligned}$$

این یک تصادف نیست که:

$$\int_{C_1} z^2 dz = \int_{C_2} z^2 dz.$$



شکل ۳

بعـدا "نشان خواهیم داد که مقدار $\int_C z^2 dz$ تنها به نقاط آغازی و پایانی خم هموار C وابسته است. هدف این فصل مشخص کردن ردهء توابعی است که انتگرال شان به مسیر وابسته نیست، یعنی توابعی که برای آنها

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

بر هر دو هموار C_1 و C_2 که دارای نقاط آغاز و پایانی مشترک باشند.

پرسش‌ها

- ۱- آیا یک نقطهء "تنها" یک خم است؟
- ۲- آیا یک خم ساده بسته، یک خم ساده است؟
- ۳- آیا اگر در تعریف خم، پارامتر t را در فاصله $[0, 1]$ محدود می‌کردیم، تفاوتی ایجاد می‌شد؟
- ۴- چه ارتباطی میان همبند ساده و همبند موجود است؟
- ۵- آیا می‌شود که یک میدان و مکمل آن هر دو همبند ساده باشند؟
- ۶- آیا می‌شود که یک میدان بی‌نهایت حفره داشته باشد؟
- ۷- اگر از یک میدان همبند ساده یک نقطه را برداریم، آیا میدان جدید همبند ساده است؟

۸- چرا پیوسته بودن مشتق یک خم حایز اهمیت بود؟

- ۹- چه ارتباطی میان مستقل بودن یک انتگرال از مسیر و صفر بودن یک انتگرال بر یک خم بسته موجود است؟
- ۱۰- چرا هر خم، فشرده و همبند است.

تمرینها

- ۱- خم $z(t) = a \cos t + ib \sin t$ ($-\pi \leq t \leq \pi$) را که در آن a, b اعداد حقیقی مثبت‌اند توصیف نمایید.

۲- خم

$$z(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i \frac{2t}{1+t^2} \quad (-R \leq t \leq R).$$

را توصیف کنید. وقتی $R \rightarrow \infty$ چه اتفاقی می‌افتد؟

- ۳- خم پارامتری شده بی بیابید که مسیرهای زیر را به پیماید.

الف) پاره خط $z=i$ تا $z=1-i$

ب) پاره خط $z=1$ تا $z=2+3i$

پ) مربعی به رئوس $1, \pm i, \pm 1-i$ که در جهت مثبت پیموده شده است و نقطه آغازی آن $1-i$ است.

ت) قسمتی از دایره $|z-1|=2$ که در نیم صفحه راست واقع است.

۴- یک معادله پارامتری از سهمی $y=2x^2-3$ به نقطه آغازی $z=-1-i$ و نقطه پایانی $z=2+5i$ بیابید.

۵- خم‌های ساده بسته زیر را در مختصات قطبی پارامتری کنید.

الف) $x^2+y^2=4$ (ب) $4x^2+y^2=1$ (پ) $x^2+(y+1)^2=9$

۶- $\int_C \bar{z} dz$ را در امتداد خمهای زیر بیابید.

الف) $z(t) = e^{it}$ ($-\pi \leq t \leq \pi$)

ب) $z(t) = e^{2it}$ ($-\pi \leq t \leq \pi$)

پ) $z(t) = e^{it} - 1$ ($-\pi \leq t \leq \pi$)

ت) $z(t) = t + it$ ($0 \leq t \leq 2$)

ث) $z(t) = 5e^{it} + 3$ ($0 \leq t \leq \pi$)

۷- در امتداد خم C ، $G: z(t) = e^{it}$ ($-\pi \leq t \leq \pi$)، مقدار $\int_C f(z) dz$ را

برای هر یک از توابع زیر بیابید.

الف) $f(z) = z^2$ (ب) $f(z) = \frac{1}{z}$

$$f(z) = 2\bar{z} - i\left(z + \frac{1}{z}\right). \quad (ت)$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}. \quad (پ)$$

۲-۷. پارامتری کردن

فرض کنیم $C: z(t)$ خم همواری باشد که در فاصله $[a, b]$ تعریف شده است. با تقسیم فاصله به دو زیر فاصله $[a, c]$ و $[c, b]$ و با تحدید پارامتر t در فواصل $[a, c]$ و $[c, b]$ ، به ترتیب دو خم C_1 و C_2 بدست می‌آیند. برای هر تابع $f(z)$ که بر C پیوسته باشد داریم:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^c f(z(t)) z'(t) dt + \int_c^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz. \end{aligned}$$

بطریق مشابه خم C را می‌توان به صورت "مجموع n خم نوشت".

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C_1 + \dots + C_n} f(z) dz \\ &= \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \end{aligned} \quad (۷)$$

تذکر - منظور از حاصلجمع دو خم، خمی است که از وصل کردن نقطه پایانی اولی به نقطه آغازی دومی حاصل می‌شود. این حاصلجمع را نباید با حاصلجمع جمله به جمله توابعی که بر یک مجموعه تعریف شده‌اند اشتباه کرد.

یک تابع را بر یک فاصله پیوسته بخشی گویند، چنانچه تعداد نقاط ناپیوستگی آن حداکثر متناهی، و حد چپ و حد راست آن در تمام نقاط فاصله موجود باشند. خمی که مشتق آن پیوسته بخشی باشد، مرز نام دارد. چون هر مرز C را می‌توان بصورت حاصلجمع تعدادی متناهی از خم‌های هموار، $C_1 + C_2 + \dots + C_n$ نوشت، انتگرال یک تابع پیوسته در امتداد یک مرز به صورت (۷) تعریف می‌شود.

مثال - مقدار $\int_C z dz$ را بر مرز C بصورت زیر بیابید.

$$C: z(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 2 + i(t-1), & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

خم‌های C_1 و C_2 را به‌ترتیب با تحدید پارامتر t از خم C به فواصل $[0, 1]$ و $[1, 2]$ تعریف می‌کنیم (ر. ک. شکل ۴) داریم:

$$\begin{aligned}\int_C z \, dz &= \int_{C_1} z \, dz + \int_{C_2} z \, dz \\ &= \int_0^1 2t(2dt) + \int_1^2 \{2 + i(t-1)\}(i \, dt) \\ &= \int_0^1 4t \, dt - \int_1^2 (t-1) \, dt + \int_1^2 2i \, dt \\ &= 2 - \frac{1}{2} + 2i = \frac{3}{2} + 2i.\end{aligned}$$

یادآور می‌شویم که، در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، درازای (کمان) L از یک خم هموار در صفحه که با معادلات پارامتری

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

مشخص شده باشد برابر است با

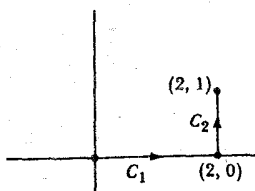
$$L = \int_a^b \sqrt{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt.$$

اگر C خم همواری (یا مرزی) در صفحه باشد و برای آن معادله پارامتری مختلط

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

بکار ببریم، درازای آن به صورت زیر است:

$$L = \int_a^b |z'(t)| \, dt = \int_a^b \left| \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \right| \, dt. \quad (۸)$$



شکل ۴

در حالت خاص که خم، پاره خط $z_0 = x_0 + iy_0$ تا $z_1 = x_1 + iy_1$ باشد وبصورت

پارامتری

$$\begin{aligned}z(t) &= z_0 + t(z_1 - z_0) \\ &= x_0 + t(x_1 - x_0) + i(y_0 + t(y_1 - y_0)) \quad (0 \leq t \leq 1),\end{aligned}$$

مشخص شده باشد، داریم $z'(t) = z_1 - z_0$. بنابراین، همانطور که انتظار داشتیم،

$$L = \int_0^1 |z'(t)| dt = \int_0^1 |z_1 - z_0| dt = |z_1 - z_0|.$$

وقتی که z بر C باشد، نماد $|dz|$ بصورت $|dz| = |z'(t)| dt$ تعریف می شود و بنابراین (۸) را بصورت زیر نیز می توان نوشت:

$$L = \int_C |dz|, \quad (9)$$

که در آن C بوسیله $z(t)$ پارامتری شده است.

تذکر - صحبت از درازای یک خم دلخواه بامعنی است. با اینحال چنانچه خم، مرز نباشد، ممکن است درازای خم متناهی نباشد. درازای یک خم دلخواه $z(t)$ ، $a \leq t \leq b$ ، را می توان بصورت کوچکترین کران بالای حاصل جمع هایی به شکل

$$\sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})|,$$

تعریف کرد، که در آن $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. اگر درازای خم متناهی باشد، خم را راستی پذیر می نامند.

خواننده می بایست تحقیق کند که هر مرز راستی پذیر است. و برای مرز، این تعریف با (۹) مطابقت دارد. در تمرین ۱، مثالی از یک خم راستی ناپذیر داده شده است.

آنچه در زیر می آید همتای مختلط یک قضیه معروف در متغیرهای حقیقی است.

قضیه ۷-۱. فرض کنیم $f(z)$ بر مرز C که به درازای L است، پیوسته می باشد، و بر C ، $|f(z)| \leq M$. آنگاه

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| \leq M \int_C |dz| = ML.$$

اثبات - اگر C بر فاصله $[a, b]$ با $z(t)$ پارامتری شده باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \\ &= \int_C |f(z)| |dz|, \end{aligned}$$

و بدین ترتیب نامساوی اولی اثبات می شود، چون

$$\begin{aligned}\int_C |f(z)| |dz| &= \int_a^b |f(z(t))| |z'(t)| dt \\ &\leq M \int_a^b |z'(t)| dt = ML,\end{aligned}$$

نامساوی دوم ثابت می‌شود.

مثال - کران بالایی برای $|\int_C dz/(z^2 + 10)|$ بیابید، که در آن C دایره زیر می‌باشد.

$$C: z(t) = 2e^{it} \quad (-\pi \leq t \leq \pi).$$

داریم:

$$\begin{aligned}\left| \int_C \frac{dz}{z^2 + 10} \right| &\leq \int_C \frac{|dz|}{|z^2 + 10|} \leq \int_C \frac{|dz|}{10 - |z|^2} \\ &\leq \frac{1}{6} \int_C |dz| = \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

با بیان دقیق می‌توان گفت که درازای یک خم برحسب پارامترهای آن تعریف می‌شود، ولی از نظر هندسی روشن است که، در مورد خمهای ساده، درازای خم به نحوه پارامتری کردن آن بستگی ندارد. مثلاً، خمهای

$$C_1: z_1(t) = e^{it} \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

$$C_2: z_2(t) = e^{2it} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

هر دو پیمایش نیمه دایره واحد است، بعلاوه

$$\int_{C_1} |dz_1| = \int_0^\pi |z_1'(t)| dt = \int_0^\pi dt = \pi,$$

$$\int_{C_2} |dz_2| = \int_0^{\pi/2} |z_2'(t)| dt = \int_0^{\pi/2} 2dt = \pi.$$

مهرزهای C_1 و C_2 ، در حالی که منتج از پارامتری کردنهای متفاوت اند و به مفهوم صوری متفاوت اند، ولی هر دو به یک درازا می‌باشند.

تذکر - خمهای e^{it} ($0 \leq t \leq 2\pi$) و e^{2it} ($0 \leq t \leq 2\pi$) هر دو نمایش مجموعه نقاط دایره واحد هستند. درازای اولی 2π و درازای دومی 4π است. ولی، باید توجه داشت

که خم دومی ساده نیست زیرا دایره واحد را دوبار می پیماید.

قضیه بعدی یک محک عمومی برای تغییر در پارامتری کردن، بدون تغییری در طول خم، بدست می دهد.

قضیه ۷-۲. فرض کنیم $z(t) = x(t) + iy(t)$ ، $a \leq t \leq b$ یک مرز باشد. فرض کنیم $t = \phi(r)$ یا $a = \phi(c)$ ، $b = \phi(d)$ ، $\phi'(r) > 0$ بطوریکه t با r افزایش یابد. اگر $-\phi'(r)$ در فاصله $[c, d]$ پیوسته بخشی باشد، آنگاه درازای $z(t)$ برابر است با:

$$L = \int_c^d |z'(\phi(r))| \phi'(r) dr.$$

اثبات - بموجب (۸) و قاعده زنجیری

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b |x'(t) + iy'(t)| dt \\ &= \int_a^b |x'(\phi(r)) + iy'(\phi(r))| d\phi(r) \\ &= \int_c^d |z'(\phi(r))| \phi'(r) dr, \end{aligned}$$

و اثبات کامل است.

فرض کنیم $f(z)$ بر مرز C ، $a \leq t \leq b$ ، $z(t) \in C$ ، پیوسته است و $t = \phi(r)$ در شرایط قضیه ۷-۲ صدق می کند، در این صورت با بکار بردن قاعده زنجیری حاصل می گردد.

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_c^d f(z(\phi(r))) z'(\phi(r)) \phi'(r) dr. \end{aligned} \quad (10)$$

چون $z'(\phi(r))\phi'(r)$ مشتق $z(\phi(r))$ نسبت به r است، خم C را می توان با $z(\phi(r))$ ، $c \leq r \leq d$ پارامتری کرد، بدون اینکه در مقدار انتگرال تاثیری بگذارد. مرز

$$-C: z(-t) = x(-t) + iy(-t) \quad (-b \leq t \leq -a)$$

نمایشگر همان مرز است که در جهت عکس

$$C: z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

پیموده شود.

داریم:

$$\int_{-c}^a f(z) dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) z'(-t) (-1) dt$$

و با جایگزینی

$$\begin{aligned} \int_{-c}^a f(z) dz &= \int_b^a f(z(r)) z'(r) dr \\ &= - \int_a^b f(z(r)) z'(r) dr = - \int_c^a f(z) dz. \end{aligned}$$

تذکر - با بیان ساده، معادلات (۱۰) و (۱۱) مبین آنند که مقدار انتگرال بر مرز ساده C ، که C به عنوان یک مجموعه نقطه‌یی در صفحه مد نظر باشد، تنها به پارامتری نمودن خم از لحاظ جهت وابسته است.

مثال ۱ مقدار $\int_C |z| dz$ را بر خط راست C که مبدأ را به $1+i$ وصل می‌کند، محاسبه می‌کنیم. خط را به ترتیب زیر پارامتری می‌کنیم:

$$C: z(t) = t + it \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (12)$$

در این صورت $z'(t) = 1 + i$ و

$$\int_C |z| dz = \int_0^1 |t + it| (1 + i) dt = \sqrt{2}(1 + i) \int_0^1 t dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

علت پارامتری نمودن به شکل (۱۲) تنها بدین دلیل بود که طبیعی‌ترین شکل آن بود. می‌توانستیم C را بصورت زیر نیز پارامتری کنیم.

$$C: z(t) = x(t) + ix(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

که $x(a) = 0$ ، $x(b) = 1$ و $x'(t) > 0$. در این صورت $z'(t) = (1+i)x'(t)$ و

$$\begin{aligned} \int_C |z| dz &= \int_a^b |x(t) + ix(t)| (1+i)x'(t) dt \\ &= (1+i)\sqrt{2} \int_a^b x(t)x'(t) dt \\ &= (1+i)\sqrt{2} \left(\frac{(x(b))^2 - (x(a))^2}{2} \right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

مثال ۲ مقدار $\int_C |z| dz$ را بر مستطیل C با گوشه‌های -1 ، 1 ، $1+i$ ، $-1+i$

محاسبه می‌کنیم. این مرز حاصلجمع چهار مرز هموار (خطوط راست) است، داریم:

$$\int_C |z| dz = \int_{C_1} |z| dz + \int_{C_2} |z| dz + \int_{C_3} |z| dz + \int_{C_4} |z| dz,$$

که

$$C_1: z_1(t) = t \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

$$C_2: z_2(t) = 1 + it \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$C_3: z_3(t) = -t + i \quad (-1 \leq t \leq 1),$$

$$C_4: z_4(t) = -1 - it \quad (-1 \leq t \leq 0).$$

و پس از حل بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \int_C |z| dz &= \int_{-1}^1 |t| dt + i \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt - \int_{-1}^1 \sqrt{t^2+1} dt \\ &\quad - i \int_{-1}^0 \sqrt{1+t^2} dt \\ &= \int_{-1}^1 (|t| - \sqrt{t^2+1}) dt = 1 - \sqrt{2} - \text{Log}(\sqrt{2}+1). \end{aligned}$$

تذکر - به صورتی که در (۷) تعریف شده، مرز C حاصلجمع چهار خم C_1 و C_2 و C_3 و C_4 نمی‌باشد. زیرا که این چهار خم بر چهار زیر فاصله متمایز، از فاصله‌یی که C بر آن تعریف شده است، پارامتری نشده‌اند. ولی به موجب (۱۵) نحوه پارامتری نمودن اساسی نیست، و بهمین دلیل می‌توانیم تعریف آزادتری از "حاصلجمع" را به پذیریم که به پارامتری نمودن خاصی نیاز نداشته باشد. در واقع، حتی می‌توان انتگرال را بدون اینکه x و y نسبت به پارامتر مشترکی مانند t بیان کنیم محاسبه کنیم، در مثال ۲ می‌توانستیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \int_C |z| dz &= \int_{-1}^1 |x| dx + \int_0^1 |1+iy| i dy \\ &\quad + \int_1^{-1} |x+i| dx + \int_1^0 |-1+iy| i dy. \end{aligned}$$

در اینجا در واقع برای C_1 و C_3 پارامتر x و برای C_2 و C_4 پارامتر y به کار رفته است.

مثال ۳ - مقدار انتگرال $\int_C |z| dz$ را بر دایره‌یی به مرکز مبدا و شعاع r محاسبه می‌کنیم. خم را به ترتیب زیر پارامتری می‌کنیم.

$$C: z(t) = re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

در این صورت:

$$\begin{aligned} \int_C |z| dz &= \int_0^{2\pi} |re^{it}| ire^{it} dt = ir^2 \int_0^{2\pi} e^{it} dt \\ &= ir^2 \int_0^{2\pi} (\cos t + i \sin t) dt = 0. \end{aligned}$$

تذکر - چون انتگرال گیری بر دایره از عملیات جاری و متداول، است نماد $\int_{|z-z_0|=r} f(z) dz$ را برایش معرفی می کنیم که معنایش انتگرال $f(z)$ بر دایره $|z-z_0|=r$ در جهت مثبت می باشد.

مثال ۴- مقدار $\int_{|z|=r} z^n dz$ را برای هر عدد صحیح n محاسبه می کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} z^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it} dt \\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt \\ &= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} [\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t] dt. \end{aligned}$$

$$\int_{|z|=r} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases} \quad \text{اگر}$$

توجه داشته باشید که مقدار این انتگرال به شعاع دایره بستگی پیدا نکرد.

پرسشها

۱- آیا می شود (۷) را به حالت نامتناهی هم گسترش داد؟

۲- عبارتهای زیرین را چگونه می شود تفسیر کرد؟

$$\int_C |f(z)| dz; \quad \int_C f(z) |dz|; \quad \int_C |f(z)| |dz|.$$

۳- آیا بدون فرض پیوستگی $f(z)$ در تمام نقاط C ، $\int_C f(z) dz$ می تواند تعریف

شود؟

۴- اگر $f(z)$ بر مرز C پیوسته باشد، آیا $|f(z)|$ لزوماً بر C ماکزیمم خود را

اختیار می کند؟

۵- آیا جهت یک خم بر درازای آن تاثیر دارد؟

۶- چرا معمولاً "انتگرال گیری بر دایره ساده تر از انتگرال گیری بر مربع است؟

تمرینها

۱- نشان دهید، خم زیر راستی پذیر نیست.

$$z(t) = \begin{cases} t \left(\cos \left(\frac{1}{t} \right) + i \sin \left(\frac{1}{t} \right) \right), & 0 < t \leq 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

۲- ثابت کنید، هر خم (پیوسته) کراندار است.

۳- نشان دهید:

$$\left| \int_{|z|=1} \frac{2z+1}{5+z^2} dz \right| \leq \frac{3\pi}{2} \quad (\text{ب}) \quad \left| \int_{|z|=1} \frac{dz}{3+5z^2} \right| \leq \pi \quad (\text{الف})$$

۴- درازای مرزهای زیر را بیابید:

$$z(t) = 3e^{2it} + 2 \quad (-\pi \leq t \leq \pi) \quad (\text{الف})$$

$$z(t) = e^t \cos t + ie^t \sin t \quad (-\pi \leq t \leq \pi) \quad (\text{ب})$$

۵- انتگرالهای $\int_C x dz$ ، $\int_C y dz$ ، $\int_C \bar{z} dz$ را بر هر یک از مرزهای زیر بیابید:

(الف) پاره خط از مبدا تا $1+i$

(ب) پاره خط از مبدا تا $1-i$

(پ) دایره $|z|=1$

۶- انتگرالهای زیر را بر هر یک از مرزهای مثال قبل محاسبه کنید.

$$\int_C z dz, \quad \int_C |z| dz, \quad \int_C z |dz|, \quad \int_C |z| |dz|$$

۷- مقدار $\int_C (1/z) dz$ را بر مربعی به رئوس $1 \pm i$ محاسبه کنید.

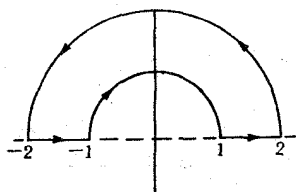
۸- مقدار انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int_C e^z dz$ بر پاره خط از مبدا تا $2+2i$

(ب) $\int_C (e^z + z + 1) dz$ بر پاره خط از $-1+i$ تا $1-i$

(پ) $\int_C \cos z dz$ بر پاره خط از مبدا تا $1+i$

۹- مقدار انتگرال $\int_C (z/\bar{z}) dz$ را بر خم ساده بسته C واقع در شکل زیر محاسبه کنید.



۳-۷. انتگرالهای خطی

همانطور که یک تابع مختلط را می‌توان برحسب توابع حقیقی نوشت، یک انتگرال مختلط را نیز می‌توان برحسب انتگرالهای با مقادیر حقیقی نوشت، فرض کنید

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

بر مرز C پیوسته است و این مرز هم بصورت

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (a \leq t \leq b).$$

پارامتری شده است. در این صورت بموجب (۶)

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b (u(z(t)) + iv(z(t)))(x'(t) + iy'(t)) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

با قراردادن $u = u(z(t))$ و $v = v(z(t))$ و تفکیک نمودن (۱۳) در مولفه‌های آن داریم:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b (ux' - vy') dt + i \int_a^b (uy' + vx') dt. \quad (14)$$

عبارتی به شکل $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ را یک انتگرال خطی حقیقی گویند. از (۱۴) ملاحظه می‌شود که انتگرال (خطی) مختلط را می‌توان برحسب دو انتگرال خطی بیان کرد؛ یعنی:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C u dy + v dx. \quad (15)$$

ملاحظه می‌شود که طرف راست (۱۵) با جایگزینی $f = u + iv$ و $dz = dx + i dy$ در طرف چپ بدست می‌آید. هر یک از معادلات (۱۴) یا (۱۵) را می‌توان بعوض (۶) بعنوان تعریف انتگرال مختلط در نظر گرفت. در اینجا مثالی می‌آوریم تا روشهای مختلف محاسبه انتگرال مختلط را تشریح کنیم.

مثال - مطلوب است $\int_C z^2 dz$ ، که در آن C مرز پارامتری $(0 \leq t \leq 1)$ و $C: z(t) = t^2 + it$ است.

روش ۱- بموجب (۶) داریم:

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_0^1 (t^2 + it)^2 (2t + i) dt \\ &= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3) dt + i \int_0^1 (5t^4 - t^2) dt \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i. \end{aligned}$$

روش ۲- با قرار دادن $x = x(t) = t^2$ و $y = y(t) = t$ ، از (۱۵) یا از (۱۴)، حاصل می شود.

$$\begin{aligned}\int_C z^2 dz &= \int_C (x^2 - y^2) dx - 2xy dy + i \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^1 [(t^4 - t^2)(2t) - 2t^2 t] dt + i \int_0^1 [(2t^2 t)(2t) + (t^4 - t^2)] dt \\ &= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3) dt + i \int_0^1 (5t^4 - t^2) dt = -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}i.\end{aligned}$$

تذکر - در نگاه اول، چنین بنظر می رسد که (۱۵) فایده یی ندارد، و تنها روشی مشکل و وقت گیر برای محاسبه انتگرالهای مختلط ارائه می کند. از (۱۵) به ندرت برای محاسبه مستقیم انتگرال استفاده می کنیم. با اینحال، اهمیت (۱۵) در این است که به ما امکان می دهد قضایای انتگرال مختلط را با استفاده از قضایای انتگرالهای خطی حقیقی استنتاج کنیم. بدین ترتیب روشی برای محاسبه انتگرال مختلط خواهیم یافت که به مراتب ساده تر از (۶) است.

فرض کنیم $f(x)$ بر فاصله $[a, b]$ پیوسته است. به موجب قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، تابع $F(x)$ ی موجود است بطوری که بر $[a, b]$ ، $F'(x) = f(x)$ و

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

این قضیه رفتار یک تابع بر مرز یک مجموعه (دو نقطه) را با رفتار تابعی متناظر، یعنی مشتق آن را، بر تمامی مجموعه (یک فاصله بسته) مربوط می سازد. قضیه بعدی مشابهی دو بعدی از این مطلب را عنوان می کند.

قضیه ۷-۳. (قضیه گرین) گیریم توابع $P(x, y)$ ، $Q(x, y)$ و مشتقات آنها در میدان همبند ساده و بسته پیوسته باشد و مرز (توپولوژیکی) R همان مرز C باشد. در این صورت:

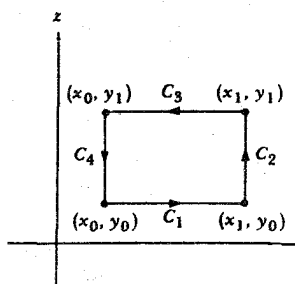
$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

که در آن C در جهت مثبت پیموده می شود.

اثبات - قضیه را در حالت خاصی که C یک مستطیل (و درون آن) و اضلاع مستطیل موازی محورهای مختصات باشند، ثابت می کنیم (ر. ک. شکل ۵).

گیریم در شکل ۵، $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ ، با ملاحظه اینکه بر C_1 و C_3 ، $dy \equiv 0$ و بر C_2 و C_4 ، $dx \equiv 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy &= \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy \\ &+ \int_{x_1}^{x_0} P(x, y_1) dx + \int_{y_1}^{y_0} Q(x_0, y) dy. \end{aligned}$$



شکل ۵

از ترکیب انتگرالها بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \int_{x_0}^{x_1} \{P(x, y_0) - P(x, y_1)\} dx \\ &+ \int_{y_0}^{y_1} \{Q(x_1, y) - Q(x_0, y)\} dy. \end{aligned} \quad (17)$$

با به کار بردن قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال در مورد توابع زیرانتگرالهای طرف راست (۱۷)، به دست می آید.

$$\begin{aligned} \int_C P dx + Q dy &= \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} -\frac{\partial P}{\partial y} dy dx + \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \\ &= \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (18)$$

که تغییر ترتیب انتگرال گیری در (۱۴) را با تغییر انتگرال مکرر بعنوان حجم، می توان توجیه نمود. بدین ترتیب قضیه برای مستطیل شکل ۵ ثابت می شود. برای اثبات کامل به کتاب اپوستل^۱ مراجعه کنید.

مثال ۱- انتگرال $\int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$ را بر مربع $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ می یابیم.

روش ۱- با حل مستقیم

$$\begin{aligned} \int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy &= \int_0^1 x \cdot 0 \, dx + \int_0^1 (1 + y^2) \, dy \\ &+ \int_1^0 x \cdot 1 \, dx + \int_1^0 (0 + y^2) \, dy \\ &= 0 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

روش ۲- به موجب قضیه گرین

$$\int_C xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy = \int_0^1 \int_0^1 (2x - x) \, dx \, dy = \frac{1}{2}.$$

مثال ۲- انتگرال $\int_C x \, dy - y \, dx$ را بر مثلثی به رئوس $(1, 1)$ ، $(2, 1)$ و $(2, 2)$

می یابیم.

روش ۱- داریم:

$$\int_C x \, dy - y \, dx = \int_1^2 -1 \, dx + \int_1^2 2 \, dy + \int_2^1 y \, dy - y \, dy,$$

که انتگرال آخری با $y = x$ پارامتری شده است. پس از حل داریم:

$$\int_C x \, dy - y \, dx = -1 + 2 + 0 = 1.$$

روش ۲- با استفاده از قضیه گرین

$$\int_C x \, dy - y \, dx = \iint_R (1 + 1) \, dx \, dy = 2 \iint_R dx \, dy.$$

ولی $2 \iint_R dx \, dy = 2(\frac{1}{2}) = 1$ و بنابراین است و بنابراین

به متغیرهای مختلط باز می گردیم تا دلیل مطرح کردن قضیه گرین روشن گردد.

قضیه ۷-۴. (قضیه "ضعیف" کشی) اگر $f(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} تحلیلی (و یا

مشتق پیوسته) باشد، و C مرز بسته‌ی واقع در درون \mathcal{D} باشد، آنگاه $\int_C f(z) \, dz = 0$

اثبات - قرار می دهیم $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. به موجب معادلات کوشی -

ریمان برای توابع تحلیلی، برای تمام نقاط میدان داریم:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (19)$$

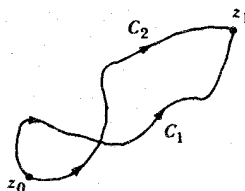
چون $f'(z)$ از پیش پیوسته فرض شده است، پس چهار مشتقات نسبی نیز میبایست پیوسته باشند. موقتا "فرض کنیم که C یک مرز ساده است. در این صورت از کار بستن قضیه گرین در مورد (۱۵) حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy \\ &= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

که در آن R ناحیهء محصور به C است. — توجّه به (۱۹) هر دو تابع زیر انتگرالها در R متحد با صفر هستند. بدین ترتیب قضیه برای حالتی که C مرز ساده بسته‌یی باشد ثابت می شود. برای حالت یک مرز بسته عمومی، بهمین شیوه از حالت عمومی تری از قضیه گرین قابل اثبات است. به کتاب اپرستل (۷) مراجعه کنید.

فرع — در شرایط قضیه فوق، فرض کنید C_1 و C_2 دو مرز دلخواه در این میدان باشند که نقاط آغازی و پایانی آنها مشترک باشند، آنگاه:

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$



شکل ۶

اثبات — فرض کنیم C_1 و C_2 دارای به ترتیب نقاط آغازی و پایانی مشترک z_0 و z_1 می باشند (ر. ک. شکل ۶). گیریم $C = C_1 - C_2$. در این صورت:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C_1 - C_2} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{-C_2} f(z) dz \\ &= \int_{C_1} f(z) dz - \int_{C_2} f(z) dz. \end{aligned}$$

چون C مرزی بسته است، پس $\int_C f(z) dz = 0$ ، که از آن نتیجه می شود

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

تذکر ۱- این فرع (و هم چنین قضیه) مبین آن است که مقدار انتگرال در این میدان

به مسیر وابسته نیست. یعنی که مقدار انتگرال تنها به نقطه آغازی و نقطه پایانی وابسته است، تنها به شرط آن که مرز، درون میدانی باشد که تابع در آن میدان بطور پیوسته مشتق پذیر است. پس، در شرایط موجود در قضیه، می توان به عبارت $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$ معنی بخشید. مقدار آن را می توان با محاسبه انتگرال خطی مختلط $\int_C f(z) dz$ بر مرزی که در این میدان بوده و نقطه آغازی آن z_0 و نقطه پایانی آن z_1 باشد، پیدا کرد. در حالت خاص، اگر مرز C بسته باشد ($z_1 = z_0$)، در این صورت:

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_0}^{z_0} f(z) dz = 0.$$

تذکر ۲- قضیه کوشی، در شکل کنونی آن، ضعیف است زیرا فرض بر این بود که تابع تحلیلی دارای مشتق پیوسته باشد (تا بتوان از قضیه گرین استفاده کرد). در عین حالی که ممکن است این محدودیت ناچیز به نظر برسد، به ما این امکان را نمی دهد که قضیه کوشی را برای رده همه توابع تحلیلی بکار بندیم. در بخش بعد، این فرض محدود کننده حذف خواهد شد. و سپس، در فصل ۸ نشان خواهیم داد که در واقع هر تابع تحلیلی همیشه مشتق پیوسته دارد.

اینک میزان اعتبار قضیه کوشی در مورد میدانهای همبند چندگانه را بررسی می کنیم. یادآور می شویم که

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i.$$

پس — وجودیکه تابع $1/z$ بر همه جای دایره واحد تحلیلی است، مقدار انتگرال فوق صفر نیست. قضیه کوشی به این دلیل کاربرد ندارد که قرص سفته همبند ساده نیست. برای آنکه دریابیم این تابع چه اشکالی دارد، ملاحظه می کنیم که $1/z$ مشتق شاخه های مختلف فراوانی از $\log z$ است. فرض کنیم با یک نقطه دلخواه w بر دایره واحد شروع کنیم و روی دایره و در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت در یک دور کامل انتگرال بگیریم. در حالیکه نقطه پایانی $we^{2\pi i}$ در صفحه در همان محلی است که نقطه آغازی w قرار دارد. ولی شناسه آن به میزان 2π افزایش یافته است. با انتخاب یک شاخه مشخص برای لگاریتم و با یک بریدگی شاخه بر پرتو $\arg z = -\alpha$ ، $w = e^{i\alpha}$ ، اینک می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz &= \int_{|z|=1} \frac{d}{dz} \log z = \log z \Big|_w^{we^{2\pi i}} \\ &= \log we^{2\pi i} - \log w. \end{aligned}$$

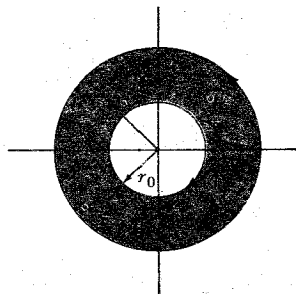
عبارت اخیر به صورت زیر ساده می شود:

$$\begin{aligned} \log |\omega e^{2\pi i}| + i \arg \omega e^{2\pi i} - (\log |\omega| + i \arg \omega) \\ = i(\arg \omega e^{2\pi i} - \arg \omega) = 2\pi i. \end{aligned}$$

پس انتگرال صفر نیست چون تابع $1/z$ دارای توابع اولیه متفاوت بسیار است. مقدار انتگرال در ارتباط با تغییرات شناسه تابع چند مقداری $\log z$ می باشد. در مورد میدانهای همبند ساده. این مشکل وجود ندارد، زیرا در این حالت، هم چنانکه خواهیم دید، در چنین میدانی توابع تحلیلی دارای توابع اولیه تک - مقداری می باشند.

با اینحال، فرض کنیم $1/z$ را بر مرز توپولوژیکی G از یک ناحیه همبند چندگانه بصورت طوق $0 < r_0 < |z| < r_1$ انتگرال بگیریم. اگر انتگرال گیری در جهت مثبت باشد (یعنی که میدان همیشه در طرف چپ بیافتد)، همانطور که در شکل ۷ ملاحظه می شود، داریم:

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z} dz &= \oint_{|z|=r_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{|z|=r_0} \frac{1}{z} dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{ir_1 e^{i\theta}}{r_1 e^{i\theta}} d\theta + \int_0^{-2\pi} \frac{ir_0 e^{i\theta}}{r_0 e^{i\theta}} d\theta = 2\pi i - 2\pi i = 0. \end{aligned}$$



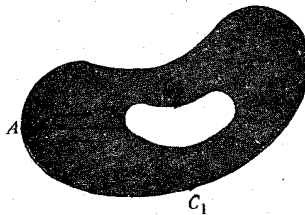
شکل ۷

این مطلب که مقدار انتگرال در این جا صفر شد نتیجه ای از قضیه کشی زیر برای ناحیه های همبند چندگانه است:

قضیه ۷-۵. فرض کنیم $f(z)$ در یک ناحیه همبند چندگانه و بر مرز آن تحلیلی باشد (و مشتقات آن پیوسته باشد)، در این صورت $\int_C f(z) dz = 0$ ، انتگرال گیری بر C در جهت مثبت انجام می گیرد.

ما روش اثباتی را شرح می دهیم که یک ناحیه همبند چندگانه را به یک ناحیه همبند ساده "تبدیل" می نماید. جهت توضیح مطلب، ناحیه همبند چندگانه شکل ۸ را در نظر

بگیرید.

شکل ۸

فرض کنید پاره خط AB ، موسوم به برش عبوری را که مرز خارجی C_1 را به مرز داخلی C_2 وصل کند رسم کنیم. در این صورت میدان محصور به مرز C_1 ، پاره خط AB ، مرز BA ، و پاره خط C_2 (با پیمایشی مطابق شکل ۸) همبند ساده است. این به آن دلیل است که در ناحیه جدید هیچ خم بسته‌ی مجاز نیست که پاره خط AB را قطع کند. فرض کنیم C نمایشگر مرز این میدان باشد، در این صورت به موجب قضیه کوشی برای میدانهای همبند ساده، داریم:

$$\int_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = 0.$$

باید توجه داشت که $\int_{AB} f(z) dz = -\int_{BA} f(z) dz$ پس:

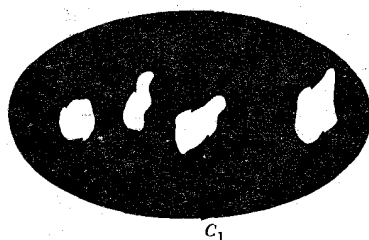
$$\int_{C_1+C_2} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = 0.$$

و بدین ترتیب بحث در مورد قضیه کوشی برای ناحیه شکل ۸ پایان می‌پذیرد. در شکل ۹، قضیه کوشی را برای میدانی $(n-1)$ حفره‌ای نمایش داده‌ایم. به روشی مشابه حالت یک حفره‌ی، بدست می‌آید که:

$$\int_{C_1+C_2+\dots+C_n} f(z) dz = 0. \quad (20)$$

معادله (۲۰) را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} f(z) dz &= - \left[\oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz \right] \\ &= \oint_{-C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{-C_n} f(z) dz. \end{aligned}$$



شکل ۹

به بیان دیگر، اگر بر هر یک از مرزهای درونی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت انتگرال بگیریم، بطوری که $(n-1)$ مرز درونی دارای جهت منفی خواهد بود آنگاه نتیجه می‌شود که مقدار انتگرال بر مرز خارجی برابر با حاصلجمع مقادیر انتگرال بر مرزهای درونی است.

در یک ناحیه همبند چندگانه پیچیده‌تر، شاید برقراری ارتباط بین مرزهای درونی با بیرونی با خط مستقیم ممکن نباشد. ولی برای هر ناحیه همبند چندگانه، همیشه یک خط چند ضلعی می‌توان یافت که برش عبوری لازم را فراهم آورد. در واقع قضیه گرین را نیز می‌توان از میدانهای همبند ساده به میدانهای همبند چندگانه تعمیم داد. و بدین ترتیب می‌توانیم قضیه کوشی را مستقیماً "برای میدانهای همبند چندگانه اثبات نمائیم."

تذکر - شرط تحلیلی بودن بر مرز C در قضیه ۷-۵ بدین معنی است که تابع در میدانی شامل C تحلیلی باشد.

پرسش‌ها

- ۱- چه اختلافی بین انتگرالهای خطی حقیقی و مختلط موجود است؟ بین انتگرال خطی و انتگرال ریمان؟
- ۲- در اثبات قضیه گرین برای مستطیل‌ها از پیوستگی مشتقات نسبی کجا استفاده شد؟
- ۳- چرا قضیه گرین همتایی دوبعدی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است؟
- ۴- در قضیه گرین، اگر جهت پیمایش بر C در جهت منفی باشد، نتیجه چه می‌شود؟
- ۵- قضیه گرین چگونه می‌تواند روشی برای محاسبه مساحت یک ناحیه بدست دهد؟
- ۶- فرض کنید $f(z)$ در میدان همبند ساده‌یی با مرز C ، دارای مشتق پیوسته است، آیا می‌توان با استفاده از قضیه کوشی نتیجه گرفت $\oint_C f(z) dz = 0$ ؟

۷- فرض کنید بازاء یک مرز C ، $\int_C f(z) dz = 0$ ، آیا در مورد $f(z)$ چیزی می توان گفت ؟

۸- آیا برای تابعی که در ناحیه خارج یک قرص دارای مشتق پیوسته است ، میتوان قضیه کوشی را بکار برد .

۹- آیا از قضیه کوشی می توان برای محاسبه انتگرالهای ریمان استفاده نمود ؟

تمرینها

۱- انتگرالهای خطی زیر را محاسبه کنید .

الف) $\int_C xy dx + (x^2 + y^2) dy$ که در آن C ربع دایره واقع در ربع اول با شعاع $r = 2$ و مرکز مبداء می باشد .

ب) $\int_C x^2 y dx + (2x + 1)y^2 dy$ بر روی مربعی به رئوس $(1, -1)$ ، $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ و $(-1, -1)$.

پ) $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ روی منحنی C که توسط $y = a \sin^3 t$ ، $x = a \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) که توسط $y = a \sin^3 t$ ، $x = a \cos^3 t$ پارامتری شده است .

ت) $\int_C \frac{xy^2}{x^2 + y^2} dy$ بر امتداد دایره $|z| = r$

ث) $\int_C (x^2 + xy) dy$ بر امتداد سهمی $y = x^2$ از $(-2, 4)$ تا $(2, 4)$

۲- فرض کنیم C مرز ساده بسته ای باشد که ناحیه ای به مساحت A را احاطه کرده است ، ثابت کنید .

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = - \int_C y dz = -i \int_C x dz = -\frac{i}{2} \int_C \bar{z} dz.$$

۳- با ترمیم اثبات قضیه گرین برای یک مستطیل نشان دهید

$$\int_C P(x, y) dx = - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy,$$

$$\int_C Q(x, y) dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy.$$

۴- قضیه کوشی را در مورد توابع زیر تحقیق کنید . C مربعی به گوشه های $\pm 1 \pm i$ است .

الف) $3z - 2$ ب) $z^2 + 3z - 1$

۵- با محاسبه $\int_{|z|=1} e^z dz$ ، نشان دهید که

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\theta + \sin \theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos \theta} \sin(\theta + \sin \theta) d\theta = 0.$$

۶- انتگرالهای زیر را بر هر مرز بین نقاط نمایش داده شده به عنوان حدود انتگرال محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi+i} e^{iz} dz \quad (\text{ب}) \qquad \int_{-\pi i}^{\pi i} e^z dz \quad (\text{الف})$$

$$\int_{1-i}^{2+i} (z^2 + 3z - 2) dz \quad (\text{پ})$$

۴-۷. قضیه کوشی

قضیه کوشی (هم چنین موسوم به قضیه کوشی - گورسا^۱) را به صورتهای مختلف اثبات خواهیم کرد که هر یک متضمن محووظات هندسی و توپورلوزیکی گوناگون است. گورسانشان داد که قضیه ۴-۷ را بدون فرض پیوستگی $f'(z)$ می توان اثبات کرد. قضیه در ساده ترین صورتش برای یک مستطیل ثابت شده است. اثبات متضمن ساختمانی شبیه آن چیزی است که در اثبات قضیه هاین - برل (قضیه ۲-۱۱) بکار رفت.

قضیه ۴-۷. فرض کنیم $f(z)$ در میدانی شامل مستطیل C و درون آن تحلیلی است، در این صورت $\int_C f(z) dz = 0$.

اثبات - C را به چهار مستطیل مساوی تقسیم می کنیم (ر. ک. شکل ۱۰)، و آنها را با $C^{(1)}$ ، $C^{(2)}$ ، $C^{(3)}$ و $C^{(4)}$ نمایش می دهیم. انتگرالها روی اضلاع مشترک دارای جهت های مخالف اند و بنابراین همدیگر را حذف می کنند. بنابراین، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C^{(1)}} f(z) dz + \int_{C^{(2)}} f(z) dz \\ &\quad + \int_{C^{(3)}} f(z) dz + \int_{C^{(4)}} f(z) dz. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی مثلث

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz \right| &\leq \left| \int_{C^{(1)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{C^{(2)}} f(z) dz \right| \\ &\quad + \left| \int_{C^{(3)}} f(z) dz \right| + \left| \int_{C^{(4)}} f(z) dz \right|. \end{aligned} \quad (21)$$

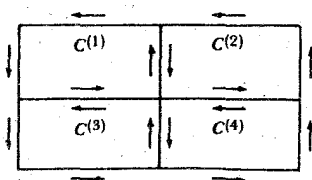
پس، حداقل برای یکی از انتگرالهای طرف راست (۲۱)، که با $\int_{C_1} f(z) dz$ می-

نمایانیم، داریم:

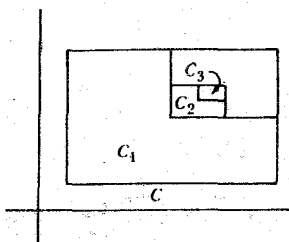
$$\left| \int_{C_1} f(z) dz \right| \geq \frac{\left| \int_C f(z) dz \right|}{4}.$$

سپس مستطیل C_1 را به چهار مستطیل مساوی دیگر تقسیم می‌کنیم و همانند فوق برای یکی از این مستطیل‌ها، که با C_2 نمایش می‌دهیم، داریم:

$$\left| \int_{C_2} f(z) dz \right| \geq \frac{\left| \int_{C_1} f(z) dz \right|}{4} \geq \frac{\left| \int_C f(z) dz \right|}{4^2}.$$



شکل ۱۰



شکل ۱۱

با ادامه این فرآیند، دنباله $\{C_n\}$ از مستطیل‌های تودرتو بدست می‌آید (ر. ک. شکل ۱۱). هر یک در نامساوی زیر صدق می‌کنند.

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \geq \frac{\left| \int_{C_{n-1}} f(z) dz \right|}{4} \geq \frac{\left| \int_C f(z) dz \right|}{4^n}. \quad (22)$$

بسمه موجب لم پیش از قضیه ۲-۱۱، دقیقاً "یک نقطه، موسوم به z_0 ، به همه مستطیل‌ها متعلق است. برای هر n ، نقطه z_0 روی مستطیل C_n و یا درون آن است. بویژه، z_0 در میدان تحلیلی بودن $f(z)$ واقع است. پس برای $\varepsilon > 0$ مفروض $\delta > 0$ موجود است به طوری که

$$f'(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \eta(z), \quad (23)$$

که در آن هر وقت $|z - z_0| < \delta$ نگاه $|\eta(z)| < \varepsilon$

با حل (۲۳) برای $f(z)$ و بعد از انتگرال گیری، حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}\int_{C_n} f(z) dz &= \int_{C_n} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z)(z - z_0)\} dz \quad (24) \\ &= \int_{C_n} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\} dz + \int_{C_n} \eta(z)(z - z_0) dz,\end{aligned}$$

که برای هر n برقرار است. عبارت زیر انتگرال اول دارای مشتق پیوسته است. پس با استفاده از قضیه ضعیف کوشی داریم:

$$\int_{C_n} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\} dz = 0.$$

بنابراین (۲۴) بصورت زیر ساده می شود:

$$\int_{C_n} f(z) dz = \int_{C_n} \eta(z)(z - z_0) dz.$$

اینک n را به حدی بزرگ انتخاب می کنیم که $C_n \subset N(z_0; \delta)$ آنگاه:

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{C_n} \eta(z)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq \int_{C_n} |\eta(z)| |z - z_0| |dz| \leq \varepsilon \int_{C_n} |z - z_0| |dz|.\end{aligned}$$

درازای قطر و محیط مستطیل C_n را به ترتیب با D_n و L_n می نمایانیم در این صورت برای هر z در C_n داریم: $|z - z_0| \leq D_n$ و

$$\left| \int_{C_n} f(z) dz \right| \leq \varepsilon D_n L_n = \varepsilon \frac{D}{2^n} \frac{L}{2^n} = \frac{\varepsilon DL}{4^n}, \quad (25)$$

که در آن D و L به ترتیب نمایشگر درازای قطر و محیط C است. با ترکیب (۲۵) با (۲۲) حاصل می شود.

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq 4^n \frac{\varepsilon DL}{4^n} = \varepsilon DL.$$

چون ε اختیاری است، $\left| \int_C f(z) dz \right| = 0$ و اثبات کامل است.

در اینجا لحظه‌ی تأمل می کنیم و آنچه را که ثابت کرده و آنچه که مواجهه بوده ایم جمع بندی می کنیم. در بخش قبل، ثابت کردیم، برای تابعی که در یک میدان مشتق پیوسته دارد، انتگرال بر هر مرز بسته در این میدان صفر است، و یا، به بیانی معادل، انتگرال بر هر مرزی در این میدان تنها به نقاط انتهایی مرز بستگی دارد. قضیه قبل فرض پیوستگی مشتق را در حالتی که مرز یک مستطیل باشد غیر ضروری می کند.

هدف ما این است که نشان دهیم مستطیل را می توان با هر مرز بسته دلخواه در درون

میدان تعویض کرد. برای انجام این کار، ابتداء نشان می دهیم که انتگرال هر تابع پیوسته که در یک میدان دارای تابع اولیه باشد مستقل از مسیر است و سپس نشان می دهیم، هر تابعی که در یک قرص تحلیلی باشد، تابع اولیه دارد. و بعد از آن نشان می دهیم که هر تابع تحلیلی در میدان همبند ساده دارای تابع اولیه است. بالاخره با "تبدیل" میدانهای همبند چندگانه به میدانهای همبند ساده، همانند بخش قبل، قضیه کوشی را برای میدانهای همبند چندگانه گسترش می دهیم.

قضیه ۷-۷. فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} پیوسته است و فرض کنید یک تابع مشتق پذیر $F(z)$ در \mathcal{D} موجود است به طوری که $F'(z) \equiv f(z)$ در \mathcal{D} . در این صورت برای هر مرز C در \mathcal{D} که با $a \leq t \leq b$ پارامتری شده است، داریم:

$$\int_C f(z) dz = F(z(b)) - F(z(a)).$$

اثبات - چون $F(z)$ در \mathcal{D} مشتق پیوسته دارد، بدست می آوریم که:

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C F'(z) dz = \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (F(z(t))) dt = F(z(b)) - F(z(a)), \end{aligned}$$

آخرین تساوی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می شود. برای به کار بردن نماد آشنا تر، بگیریم در قضیه بالا $z(a) = z_0$ و $z(b) = z_1$ در این صورت نتیجه به صورت زیر بیان می شود:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0)$$

بر هر مرزی که در این میدان واقع بوده و نقطه آغازی آن z_0 و نقطه پایانی آن z_1 باشد. اگر مرز بسته باشد به طوری که $z(a) = z(b) = z_0$ آنگاه:

$$\int_C f(z) dz = \int_{z_0}^{z_0} f(z) dz = F(z_0) - F(z_0) = 0.$$

مثال - تابع $f(z) = z^2$ همه جا پیوسته است و دارای تابع اولیه $F(z) = z^3/3$ می باشد. پس برای هر مرز C در صفحه از z_0 تا z_1

$$\int_C z^2 dz = \int_{z_0}^{z_1} z^2 dz = \frac{z_1^3}{3} - \frac{z_0^3}{3}.$$

قضیه ۷-۷. به گونه بی فرینبده مشابه با قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

است. در حالی که یک اختلاف عمده میان آنها موجود است. قضیه اساسی مبین آن است که تابع پیوسته $f(x)$ که بر $[a, b]$ تعریف شده است دارای تابع اولیه‌یی مانند $-F(x)$ صادق در رابطه زیر است:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(t) dt = F(x_1) - F(x_0) \quad (a \leq x_0 < x_1 \leq b).$$

در حالیکه قضیه ۷-۷ صرفاً بر این دلالت دارد که اگر تابع پیوسته $f(z)$ تابع اولیه داشته باشد، آنگاه نتیجه مربوطه درست خواهد آمد. اینکه پیوستگی شرط کافی برای وجود یک تابع اولیه نیست، از مثال زیر روشن می‌گردد:

مثال - اگر تابع همه جا پیوسته $f(z) = \bar{z}$ تابع اولیه‌یی می‌داشت، آنگاه نتیجه قضیه ۷-۷ را نیز به دنبال داشت، در حالی که

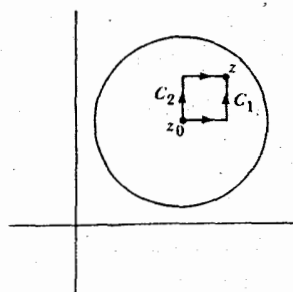
$$\int_{|z|=1} \bar{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i \neq 0.$$

اینک ارتباط موجود میان توابع اولیه و توابع تحلیلی را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۷-۸. فرض کنیم $f(z)$ در میدانی شامل قرص $|z - z_0| \leq r$ تحلیلی باشد

$$\text{آنگاه} \quad \int_{|z-z_0|=r} f(z) dz = 0$$

اثبات - به موجب قضیه ۷-۷ کافی است یک تابع $-F(z)$ به یابیم که برای $F'(z) = f(z)$ ، $|z - z_0| \leq r$ نقطه‌یی مانند $z = x + iy$ در قرص انتخاب می‌کنیم و گیریم C_1 مرزی باشد مرکب از یک پاره خط افقی از $z_0 = x_0 + iy_0$ تا $x + iy_0$ و به دنبال آن یک پاره خط قائم از $x + iy_0$ تا $x + iy$ ، هم چنین گیریم C_2 مرزی باشد مرکب از پاره خط قائم از $z_0 = x_0 + iy_0$ تا $x_0 + iy$ و به دنبال آن پاره خط افقی از $x_0 + iy$ تا $x + iy$ (ر. ک. شکل ۱۲).



شکل ۱۲

تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \int_{c_1} f(z) dz \\
 &= \int_{x_0}^x f(t + iy_0) dt + \int_{y_0}^y f(x + it) i dt.
 \end{aligned} \quad (26)$$

به موجب قضیه ۶-۷

$$\begin{aligned}
 \int_{c_1 - c_2} f(z) dz &= \int_{c_1} f(z) dz + \int_{-c_2} f(z) dz \\
 &= \int_{c_1} f(z) dz - \int_{c_2} f(z) dz = 0.
 \end{aligned}$$

پس $F(z)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \int_{c_2} f(z) dz \\
 &= \int_{y_0}^y f(x_0 + it) i dt + \int_{x_0}^x f(t + iy) dt.
 \end{aligned} \quad (27)$$

با محاسبه مشتق جزئی $F(z)$ نسبت به y در (۲۶) حاصل می‌شود.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_0}^y f(x + it) i dt \right) = if(x + iy) = if(z). \quad (28)$$

به طریق مشابه، با محاسبه مشتق $F(z)$ در (۲۷) نسبت به x ، حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_0}^x f(t + iy) dt \right) \\
 &= f(x + iy) = f(z).
 \end{aligned} \quad (29)$$

با توجه به (۲۸) و (۲۹) داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i \frac{\partial F}{\partial y} = f(z). \quad (30)$$

ولسی (۳۰) همان معادلات کوشی - ریمنان برای $F(z)$ است. بعلاوه پیوستگی $\partial F / \partial x$ و $\partial F / \partial y$ نتیجه پیوستگی $f(z)$ می‌باشد. پس می‌توان قضیه ۵-۵ را بکار برد و تحلیلی بودن F را در z ثابت کرد. چون z اختیاری بود، $F(z)$ در قرص $|z - z_0| \leq r$ تحلیلی است. بالاخره، از (۵) در فصل ۵، نتیجه می‌گیریم که $F'(z) = \partial F / \partial x = f(z)$.

دایره دارای این خاصیت است که هر نقطه درون دایره را می‌توان با دو خط شکسته متمایز به مرکز آن صل کرد بطوری که، این دو خط شکسته روی هم تشکیل پیرامون مستطیلی

$$F(z) = \int_{C_2} f(z) dz.$$

فرض کنیم $z_1 = x_1 + iy_1$ آخرین نقطه برخورد C_1 با C_2 میان z_0 و $z = x + iy$ باشد. هم چنین فرض کنیم، در این آخرین مستطیل، C_1 مرکب باشد از خط افقی و به دنبال آن خط قائم، در حالی که C_2 عبارت باشد از خط قائم و به دنبال آن خط افقی همانطور که در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

با توجه به قضیه ۶-۷، مقدار انتگرال $f(z)$ از z_0 تا z_1 ، بر هر دو مرز C_1 و C_2 برابر است و این مقدار مشترک را با K نمایش می دهیم. باقی مانده اثبات، همانند قضیه ۷-۸ است، زیرا داریم:

$$F(z) = \int_{C_1} f(z) dz \quad (۳۱)$$

$$= K + \int_{x_1}^x f(t + iy_1) dt + \int_{x_1}^x f(x + it) i dt$$

و

$$F(z) = \int_{C_2} f(z) dz \quad (۳۲)$$

$$= K + \int_{y_1}^y f(x_1 + it) i dt + \int_{x_1}^x f(t + iy) dt.$$

از (۳۱) بدست می آید.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{y_1}^y f(x + it) i dt \right) = if(x + iy) = if(z)$$

و از (۳۲) نتیجه می شود:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{x_1}^x f(t + iy) dt \right) = f(x + iy) = f(z).$$

پس

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i \frac{\partial F}{\partial y} = f(z). \quad (۳۳)$$

معادل ساده (۳۳) نمایش معادلات کوشی - ریمان برای $F(z)$ است. چون $f(z)$ پیوسته است. مشتقات نسبی $F(z)$ هم پیوسته اند. بنابراین $F(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است و $F'(z) = \partial F / \partial x = f(z)$ در \mathcal{D} و اثبات کامل است.

تذکر ۱- مفاهیم توپولوژیکی که در اثبات قضیه ۷-۹ بکار رفت به ما اجازه می دهد

که با تعداد متناهی از مستطیل‌ها درون میدان همبند ساده‌کار کنیم، در نتیجه از قضیه ۶-۷ استفاده کنیم. ولی اساس قضیه ۶-۷ شامل "انقباض" یک مستطیل به یک نقطه است. در نتیجه قضیه کوشی مالا" بر این نکته متکی است که $\int_{z_0}^{z_0} f(z) dz = 0$.

تذکر ۲- قضیه ۵-۷ که تعمیم قضیه "ضعیف" کوشی (قضیه ۴-۷) از میدانهای همبند ساده به میدانهای همبند چندگانه بود، ماهیت توپولوژیکی محض داشت، و هیچ جا از پیوستگی مشتقات نسبی استفاده به عمل نیامد. بنابراین، قضیه کوشی برای ناحیه همبند چندگانه نیز برقرار است و اثبات عبارت است از اینکه، همانند قضیه ۵-۷، ناحیه همبند چندگانه را "تبدیل" به ناحیه همبند ساده نمائیم. این تعمیم قضیه کوشی در محاسبه انتگرالها بر مرزی که یک ناحیه را احاطه کرده است که در آن تابع تحلیلی نیست، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

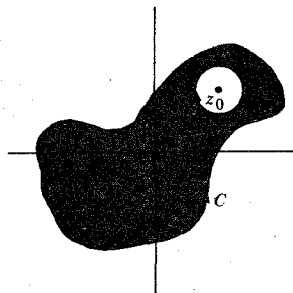
مثال - مقدار $\int_C 1/(z - z_0) dz$ را بر مرز ساده بسته‌ای مانند C که مبدأ درون آن است، محاسبه کنید. برای یک $\varepsilon > 0$ ، دایره $C_1: |z - z_0| = \varepsilon$ درون مرز C قرار می‌گیرد. هم چنین $f(z) = 1/(z - z_0)$ در ناحیه میان C و دایره $|z - z_0| = \varepsilon$ ، که ناحیه‌یی همبند چندگانه است، تحلیلی می‌باشد (ر. ک. شکل ۱۴). بنابراین

$$0 = \int_{C+C_1} \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_C \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

بنابراین

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = - \oint_{C_1} \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{-C_1} \frac{dz}{z - z_0}.$$

باید توجه داشت که جهت مثبت بر C_1 در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است به طوری که جهت مثبت $-C_1$ ، خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد. $-C_1$ را با $z(t) = \varepsilon e^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$ پارامتری می‌کنیم و داریم:



شکل ۱۴

$$\oint_C \frac{1}{z - z_0} dz = \oint_{-C_1} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)}{z(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{it}}{\epsilon e^{it}} dt = 2\pi i.$$

بنابراین اعتبار قضیه کوشی در مورد ناحیه‌های همبند چندگانه نگرانی موجود در مورد نحوه پارامتری کردن مرزهای بدشکل را برطرف می‌کند. روش بکار رفته در مثال بالا نشان می‌دهد $\oint_C 1/(z - z_0) dz$ برابر با $2\pi i$ یا 0 است، برحسب اینکه z_0 درون و یا بیرون مرز ساده بسته C باشد. برای محاسبه انتگرال هیچگونه آگاهی اضافی لازم نیست.

تذکر - قضیه کوشی را برای ناحیه‌های همبند چندگانه مستقیماً، همانند روشی که برای ناحیه همبند ساده داشتیم، نمی‌توان اثبات کرد، زیرا که توابع تحلیلی در میدانهای همبند چندگانه لزوماً دارای تابع اولیه (تک‌مقداری) نیستند. در مثال بالا، $\log(z - z_0)$ در صورتی که به یک شاخه اکتفا شود تابع اولیه تحلیلی $1/(z - z_0)$ می‌باشد. مفهوم لگاریتم تحلیلی در میدانهای همبند ساده در قضیه زیر روشن‌تر می‌گردند:

قضیه ۷-۱. اگر $f(z)$ در یک میدان همبند ساده \mathcal{D} تحلیلی و غیر صفر باشد، آنگاه تابعی مانند $g(z)$ ، تحلیلی در \mathcal{D} ، موجود است به طوری که $e^{g(z)} = f(z)$.

اثبات - چون $f(z)$ در \mathcal{D} هرگز صفر نمی‌شود، تابع $f'(z)/f(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است. بعلاوه انتگرال $f'(z)/f(z)$ میان هر دو نقطه \mathcal{D} ، که میدانی همبند ساده است، به مسیر بستگی ندارد. تابع $g(z)$ را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(z) = \int_{z_0}^z \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \text{Log } f(z_0), \quad (34)$$

کنه در آن z_0 نقطه ثابتی از \mathcal{D} است و z نقطه‌ی دلخواه در \mathcal{D} و مسیر انتگرال گیری هر مسیری است که در \mathcal{D} باشد. قرار می‌دهیم $h(z) = f(z)e^{-g(z)}$ و ملاحظه می‌کنیم که:

$$\begin{aligned} h'(z) &= f'(z)e^{-g(z)} - f(z)g'(z)e^{-g(z)} \\ &= f'(z)e^{-g(z)} - f(z)\frac{f'(z)}{f(z)}e^{-g(z)} = 0. \end{aligned}$$

پس $h(z)$ در \mathcal{D} ثابت است. برای تعیین این ثابت، قرار می‌دهیم $z = z_0$ بدست می‌آوریم.

$$h(z_0) = f(z_0)e^{-g(z_0)} = f(z_0)e^{-\text{Log } f(z_0)} = 1.$$

پس در سراسر \mathcal{D} ، $f(z)e^{-g(z)} \equiv 1$ و قضیه ثابت می گردد.

برای آنکه بدانیم فرض همبند ساده بودن میدان، اساسی است، ملاحظه می کنیم که $1/z$ در صفحه سفته هرگز صفر نمی شود و هیچ تابع تحلیلی $g(z)$ موجود نیست که بتوان را بصورت $e^{g(z)}$ نوشت. (یادآور می شویم که هیچ شاخه ای از $\log z$ در صفحه سفته تحلیلی نیست).

فرع - اگر $f(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} تحلیلی و مخالف صفر باشد، آنگاه یک شاخه تحلیلی از $(f(z))^{1/n}$ (n عددی صحیح و مثبت) در \mathcal{D} قابل تعریف است.

اثبات - قرار می دهیم $f(z) = e^{g(z)}$ ، بطوری که $g(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است، و $(f(z))^{1/n}$ را با $e^{(1/n)g(z)}$ تعریف می کنیم.

تذکر - بطور عام تر، هر یک از n تابع $e^{(g(z) + 2k\pi i)/n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) یک شاخه تحلیلی از $(f(z))^{1/n}$ است.

پرسش ها

۱- اگر $f(z)$ در میدانی تحلیلی باشد و C مرزی در این میدان باشد، آیا $\int_C |f(z)| dz = 0$ ؟

۲- در اثبات قضیه ۷-۹، از همبند ساده بودن میدان کجا استفاده کردیم ؟

۳- فرض کنید $f(z)$ بر مرز C تحلیلی است، آیا $\int_C f(z) dz = 0$ ؟

۴- چه ارتباطی میان قضیه ۷-۷ و قضیه گرین موجود است ؟

۵- در اثبات قضیه ۷-۸، کجا فرض تحلیلی بودن مورد نیاز بود ؟

۶- چه اختلافی میان قضیه کوشی و قضیه ضعیف کوشی موجود است ؟

۷- اگر مرز C از مبدأ بگذرد، در مورد $\int_C (1/z) dz$ چه می توان گفت ؟

۸- اگر C خم بسته ای غیر ساده باشد، $\int_C (1/z) dz$ چه مقادیری را ممکن است به -

پذیرند ؟

۹- آیا تابع $g(z)$ در قضیه ۷-۱۰ منحصر بفرد است ؟

تمرینها

۱- مقدار $\int_{|z|=1} |z| dz$ را بر مرزهای متفاوت محاسبه کنید. آیا $|z|$ تابع اولیه ای

دارد ؟

۲- یک تابع $f(z)$ مثال بزنید که برای هر $r > 0$ ، $\int_{|z|=r} f(z) dz = 0$ در عین حال

که $f(z)$ همه جا تحلیلی نباشد.

۳- مطلوبست $\int_C dz/(1+z^2)$ ، که در آن C دایره زیر است.

$$\text{الف) } |z-i|=1 \quad \text{ب) } |z+i|=1$$

$$\text{پ) } |z|=2 \quad \text{ت) } |z-1|=1$$

۴- عبارت زیر انتگرال را به قسمت‌های حقیقی و انگاری تفکیک کنید. و در صورت

امکان، عبارت $\int_C e^z/z dz$ را برای C زیر محاسبه کنید.

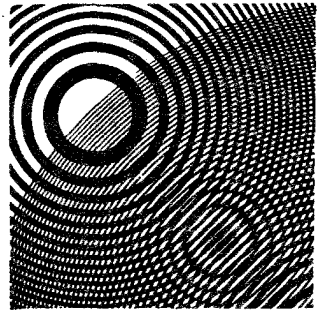
$$\text{الف) دایره } |z|=1$$

$$\text{ب) دایره } |z-2|=1$$

$$\text{پ) مربعی به رئوس } \pm 1 \pm i$$

۵- فرض کنید $\text{Re } z_0 > 0$ و $\text{Re } z_1 > 0$. مقدار $\int_{z_0}^{z_1} (1/z) dz$ را در طول مرزهای واقع

در نیم صفحه راست محاسبه کنید.



۸- کاربردهای قضیه کوشی

اکثر قضایای موثر و زیبایی که در این فصل ثابت می شوند، سهمی در متغیرهای حقیقی ندارند. با وجود آنکه قضیه کوشی فی الواقع زیباست، ولی اهمیت آن در کاربردهایش نهفته است. در این فصل، قضایای متعددی را اثبات می کنیم که در فصل قبل به آنها اشاره شد. خواهیم دید که یک تابع تحلیلی دارای مشتق از تمام مراتب می باشد و آنرا می توان بوسیله یک رشته نمایی، نمایش داد. قضیه اساسی جبر به روشهای گوناگون اثبات خواهد شد. در واقع آنچنان روابط زیبایی میان قضایای گوناگون این فصل موجود است که به نظر می رسد اثبات دوباره هر قضیه کار ارزنده بی باشد.

۸-۱. فرمول انتگرال کوشی

اگر $f(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} تحلیلی باشد. می دانیم که بر امتداد هر مرز بسته C درون \mathcal{D} ، $\int_C f(z) dz = 0$. به هنگامیکه تابع در تمام نقاط مگر در یک تعداد متناهی، تحلیلی باشد، تغییر جالبی رخ خواهد داد. هم چنانکه در فصل قبل دیدیم بر هر مرز ساده بسته با جهت مثبت C که z_0 درون آن باشد داریم:

$$\int_C \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i$$

اینک تعمیم (۱) را بیان می داریم:

قضیه ۸-۱. (فرمول انتگرال اول کوشی) فرض کنیم $f(z)$ در یک میدان همبند ساده که شامل مرز ساده بسته C است تحلیلی باشد. اگر z_0 درون C باشد آنگاه:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

تذکر - اگر $f(z) \equiv 1$ نتیجه قضیه به (۱) ساده می شود.

اثبات قضیه ۸-۱- باز $\varepsilon > 0$ مفروض، دایره $C_1: |z - z_0| = r$ را درون G می سازیم که بس کوچک باشد تا برای هر z بر C_1 ، $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ، بموجب قضیه کوشی برای ناحیه های همبند چندگانه،

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

از اینرو

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{C_1} \frac{f(z_0) + (f(z) - f(z_0))}{z - z_0} dz \\ &= \int_{C_1} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz + \int_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

چونکه $\int_{C_1} dz/(z - z_0) = 2\pi i$ ، خواهیم داشت:

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0) + \int_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

اگر بتوان نشان داد که انتگرال طرف راست صفر است قضیه ثابت می گردد. داریم:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| &\leq \int_{C_1} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} |dz| \\ &< \frac{\varepsilon}{r} \int_{C_1} |dz| = \frac{\varepsilon}{r} (2\pi r) = 2\pi \varepsilon. \end{aligned}$$

چونکه ε اختیاری است، انتگرال صفر است. بدین ترتیب اثبات تمام است.

تذکر - قضیه ۸-۱، مقدار $f(z)$ را در هر نقطه درون G برحسب مقادیر روی G بدست می دهد. به بیان دیگر اگر بدانیم $f(z)$ درون و بر مرز یک ناحیه همبند ساده تحلیلی است، آنگاه مقادیر $f(z)$ بر مرز مقادیر $f(z)$ در درون را کاملاً مشخص می کند. مشابه این قضیه برای توابع از یک متغیر حقیقی موجود نیست. به عنوان مثال، توابع $f_n(x) = x^n$ ، $0 \leq x \leq 1$ همگی دارای مقادیر مرزی برابرند ($f(0) = 0, f(1) = 1$) ولی در نقاط درونی با یکدیگر مخالفاند.

سپس مشتق یک تابع تحلیلی را برحسب یک انتگرال محاسبه می کنیم. نمادهای قضیه

۸-۱ را بکار می‌بریم و h را از نظر قدر مطلق بس کوچک انتخاب می‌کنیم که $z_0 + h$ درون C بیفتد. در این صورت:

$$f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + h)} dz.$$

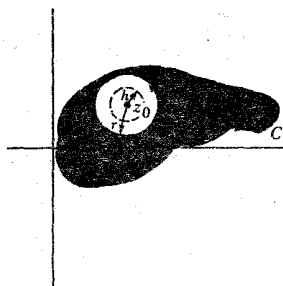
بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{\frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{z - z_0 - h} - \frac{1}{z - z_0} \right) f(z) dz}{h} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz. \end{aligned} \quad (2)$$

وقتی که $h \rightarrow 0$ ، تابع زیر انتگرال به $f(z)/(z - z_0)^2$ نزدیک می‌شود. جهت اثبات این مطلب می‌توان از درون انتگرال حد گرفت، می‌بایست نشان دهیم که تفاضل

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - h)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \right| \\ = \left| \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} dz \right| \end{aligned} \quad (3)$$

را می‌توان به دلخواه کوچک کرد. اگر دایره $G_1: |z - z_0| = r$ درون C مفروض باشد، h را بس کوچک انتخاب می‌کنیم که $|h| \leq r/2$ (ر. ک. شکل ۱). بموجب قضیه کوشی برای نواحی همبند چندگانه،



شکل ۱

$$\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} dz \\ = \frac{h}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)} dz. \end{aligned}$$

چون $f(z)$ بر C_1 پیوسته است، کراندار است $|f(z)| \leq M$. سپس (۳) از بالا دارای کران زیر می باشد:

$$\begin{aligned} \frac{|h|}{2\pi} \int_{C_1} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2 |z - z_0 - h|} |dz| &\leq \frac{|h|M}{2\pi r^2} \int_{C_1} \frac{|dz|}{|z - z_0| - |h|} \\ &\leq \frac{|h|M}{\pi r^3} \int_{C_1} |dz| \\ &= |h| \left(\frac{2M}{r^2} \right). \end{aligned}$$

بنابراین (۳) با h به صفر میل می کند. با توجه به (۲) و (۳)

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - h)(z - z_0)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz. \end{aligned} \quad (۴)$$

معادله (۴) مقدار $f'(z)$ را در هر نقطه درون C نسبت به مقادیر $f(z)$ بر C بیان می کند. ما بنابه فرض می دانستیم که $f(z)$ در همه نقاط درون C مشتق پذیر است. ولی فرآیند فوق قابل تکرار است. از (۴) حاصل می شود

$$\frac{f'(z_0 + h) - f'(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\{2(z - z_0) - h\}f(z)}{(z - z_0)^2(z - z_0 - h)^2} dz. \quad (۵)$$

همانند قبل می توانیم نشان دهیم که از درون انتگرال می توان حد گرفت. بنابراین از (۵) می رسم به:

$$f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz. \quad (۶)$$

معادله (۶) آگاهیهای افزون بر آنچه ما انتظار داشتیم، بما می دهد. اولاً "وجود $f''(z)$ در همه نقاط درون C روشن می شود. سپس مشتق دوم را می توان برحسب مقادیر $f(z)$ بر C محاسبه کرد. این بحث به دفعات نامتناهی قابل تکرار است. با استقرار می توان نشان داد که مشتق n ام به صورت زیر است:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

بنابراین مشتقات از تمام مراتب در هر یک از نقاط درونی، برحسب مقادیر تابع بر مرز قابل محاسبه است. این نتیجه درخشان را به صورت قضیه زیر جمع بندی می کنیم:

قضیه ۸-۲. (فرمول انتگرال کوشی) فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند ساده‌یی که شامل مرز بسته ساده C است تحلیلی باشد. در این صورت $f(z)$ در هر نقطه z_0 درون C دارای مشتق از تمام مراتب است و

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

تذکر ۱- در حالی که قضیه ۸-۲ به عنوان یک خاصیت همه جایی بیان شده است. ولی در حقیقت خاصیتی از میدانهای همبند ساده است که خاصیتی موضعی است. زیرا که اگر تابعی در یک نقطه تحلیلی باشد، در یک همسایگی (همبند ساده) این نقطه نیز تحلیلی است، در نتیجه تابعی که در یک نقطه تحلیلی است می‌بایست در آن نقطه دارای مشتق از تمام مراتب باشد.

تذکر ۲- فرمول انتگرال کوشی برای ناحیه‌های همبند چندگانه نیز برقرار است. ما آنرا برای میدان همبند چندگانه شکل ۲ اثبات می‌کنیم. در تمرینات از خواننده می‌خواهیم که آن را برای حالت عمومی اثبات نماید.



شکل ۲

فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند R تحلیلی است و مرز R مرکب است از مرز $G = C_1 \cup C_2$. دایره Γ را به مرکز z_0 در R رسم می‌کنیم، در این صورت به موجب قضیه کوشی برای میدانهای همبند چندگانه داریم:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

از این رو به موجب قضیه ۸-۱،

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \end{aligned}$$

یعنی $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)/(z - z_0) dz$ و بدین ترتیب ضیه ۸-۱ برای میدان
همیند چندگانه R ثابت می شود. به طریق مشابه می توان نشان داد که نتیجه قضیه ۸-۲
برای میدان همیند چند گانه R نیز معتبر است (ر. ک. شکل ۲).
فرمول انتگرال کوشی برای محاسبه انتگرالهای مشخص بر مرز به ما کمک می کند:

$$\int_{|z|=2} \frac{z - 3 \cos z}{(z - \pi/2)^2} dz. \quad \text{مثال - مطلوب است}$$

با قرار دادن $f(z) = z - 3 \cos z$ داریم:

$$\int_{|z|=2} \frac{z - 3 \cos z}{(z - \pi/2)^2} dz = 2\pi i f' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 8\pi i.$$

اکنون قادریم که قضیه تیلر را برای توابع مختلط اثبات کنیم.

قضیه ۸-۳. فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی است و مرز C ، است؛ اگر z_0 نقاطی از \mathcal{D} باشد، $f(z)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots,$$

این رشته برای $|z - z_0| < \delta$ همگراست، که در آن δ دوری z_0 تا نزدیکترین نقطه C است.

اثبات - دایره C_1 رابه مرکز z_0 و شعاع ρ ، $\rho < \delta$ ، رسم می کنیم. گیریم z نقطه‌یی
درون C_1 باشد. به موجب فرمول کوشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (7)$$

قرار می دهیم $|z - z_0| = r$. در این صورت $|z - z_0| = r < \rho = |\xi - z_0|$ (ر. ک. شکل ۳) و

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\xi - z_0)} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^2 + \dots \right) \end{aligned} \quad (8)$$

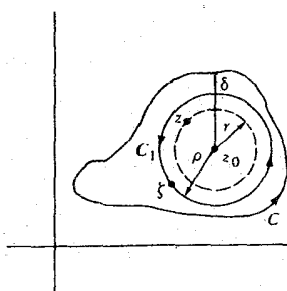
$$\begin{aligned}
 & + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \\
 & = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \cdots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n-1} + \frac{((z - z_0)/(\zeta - z_0))^n}{1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)} \right).
 \end{aligned}$$

به موجب (۷)، می‌توان (۸) را در $f(\zeta)$ ضرب کرده و انتگرال گرفت تا حاصل شود.

$$\begin{aligned}
 f(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta + \cdots \\
 & + \frac{(z - z_0)^{n-1}}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n} d\zeta + R_n,
 \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



شکل ۳

به موجب فرمول انتگرال کوشی، (۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} (z - z_0)^{n-1} + R_n.$$

اکنون چنانچه بتوان نشان داد R_n با میل کردن n به ∞ ، به صفر میل می‌کند، قضیه ثابت می‌گردد. فرض کنیم بر C_1 ، $|f(z)| \leq M$ (ر. ک. شکل ۳). در این صورت

$$R_n \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_1} \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^n \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| |d\zeta| \leq \frac{M \left(\frac{r}{\rho} \right)^n}{2\pi} \int_{C_1} \frac{1}{|\zeta - z|} |d\zeta|. \quad (10)$$

با استفاده از نامساوی

$$\frac{1}{|\zeta - z|} = \frac{1}{|\zeta - z_0 - (z - z_0)|} \leq \frac{1}{|\zeta - z_0| - |z - z_0|} = \frac{1}{\rho - r},$$

(۱۰) منجر به

$$R_n \leq \frac{M}{2\pi(\rho - r)} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \int_{C_1} |d\zeta| = \frac{M\rho}{\rho - r} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

چونکه $r < \rho$ با $n \rightarrow \infty$ ، $(r/\rho)^n \rightarrow 0$ - بنابراین.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

و اثبات کامل است.

تذکر - به موجب آزمون M (قضیه ۹-۶) رشته تیلر $f(z)$ روی زیر مجموعه‌های فشرده از قرص $|z - z_0| < \delta$ همگرای یکنواخت نیز می‌باشد.

در بخش ۳-۶ دیدیم که یک رشته توان درون دایره همگرایی‌اش نمایش‌دهنده یک تابع تحلیلی است. قضیه ۸-۳، در واقع معکوس این مطلب است. بنابراین تابع $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی است. اگر و تنها اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ در قرصی دایره‌یی مانند $|z - z_0| \leq r$ معتبر باشد، که در آن

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

قضیه ۸-۳. بسط‌های ماکلورن زیر را که در فصل ۶ بدون اثبات بیان کردیم، توجیه می‌کند.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

اینک به بررسی برخی ارتباط‌های میان همگرایی یکنواخت و انتگرال‌گیری می‌پردازیم:

قضیه ۸-۴. فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع باشند که بر مرز C پیوسته‌اند و فرض کنیم که روی C ، $\{f_n(z)\}$ به طور یکنواخت به $f(z)$ می‌گراید. در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \int_C f(z) dz.$$

بیان قضیه بدین صورت است که ما می‌بایست نشان دهیم دنباله $\int_C f_n(z) dz$ به

$\int_C f(z) dz$ می‌گراید.

اثبات - باید توجه داشت که به موجب قضیه ۶-ع، $f(z)$ بر C پیوسته است و بنابراین - این $\int_C f(z) dz$ موجود است. با $\varepsilon > 0$ مفروض، عدد صحیح $N = N(\varepsilon)$ موجود است که برای $n > N$ و هر z بر C داریم $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. اگر درازای C را با L بنمایانیم. نتیجه می‌شود که برای $n > N$ داریم:

$$\left| \int_C f_n(z) dz - \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_C (f_n(z) - f(z)) dz \right| \leq \int_C |f_n(z) - f(z)| |dz| < \varepsilon L.$$

چونکه ε اختیاری است، اثبات کامل است.

فرع - فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌ی از توابع پیوسته و $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ بر مرز C همگرای یکنواخت است. آنگاه

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_C f_n(z) dz \right) = \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz.$$

اثبات - قرار می‌دهیم که $S_n(z) = \sum_{k=0}^n f_k(z)$ در این صورت:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_C f_n(z) dz \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \int_C f_k(z) dz \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C S_n(z) dz. \end{aligned}$$

ولی به موجب قضیه فوق داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C S_n(z) dz = \int_C \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz.$$

تذکر - اثبات ما از قضیه ۸-۳ تقلیدی از اثبات در حالت حقیقی بود. با توجه به فرع اینک می‌توانیم اثبات ساده‌تری ارائه دهیم که جمله باقی مانده در آن ظاهر نشود. به عوض (۸) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

که همگرایی بر C یکنواخت است. بنابراین می‌توان در $f(\zeta)/2\pi i$ ضرب کرد و جمله به جمله انتگرال گرفت که این مستقیماً "منجر به مطالب زیر می‌گردد:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \right) f(\zeta) d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n.
 \end{aligned}$$

ممکن است تصور کنیم که چنانچه برای هر مرز ساده بسته z_0 که C نقطه درونی آن است، $\int_C f(z) dz = 0$ آنگاه $f(z)$ در نقطه z_0 تحلیلی خواهد شد. متأسفانه این معکوس قضیه کوشی درست نیست. به عنوان مثال $\int_C (1/z^2) dz = 0$ بر هر مرز ساده بسته C که مبدأ درون آن باشد صفر است. این به دلیل آن است که $f(z)$ در ناحیه میان C و دایره ای مانند $|z| = \varepsilon$ واقع در درون C تحلیلی است. از این رویه موجب قضیه کوشی برای ناحیه های همبند چندانگانه داریم

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{1}{z^2} dz &= \int_{|z|=\varepsilon} \frac{1}{z^2} dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^2 e^{2i\theta}} d\theta \\
 &= \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

ولی یک معکوس نسبی از برای قضیه کوشی وجود دارد.

قضیه ۸-۵. (قضیه موررا) فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} پیوسته باشد. اگر بر هر مرز ساده بسته C درون \mathcal{D} ، $\int_C f(z) dz = 0$ آنگاه $f(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است.

اثبات - z_0 را در \mathcal{D} ثابت می گیریم، مقدار تابع

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

بسه مسیر انتگرال گیری از z_0 تا z درون \mathcal{D} وابسته نیست. h را بس کوچک انتخاب می کنیم تا پاره خط z تا $(z+h)$ درون \mathcal{D} باشد و خارج قسمت زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{F(z+h) - F(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left[\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right] \\
 &= \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.
 \end{aligned}$$

در این صورت

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\xi) - f(z)) d\xi, \quad (11)$$

کسره در آن مسیر از z تا $(z+h)$ پاره خط راست در نظر گرفته شده است. به موجب پیوستگی $f(z)$ ، برای $|h|$ بس کوچک، $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$ ، چون که پاره خط از z تا $(z+h)$ به دارازی $|h|$ است. از (۱۱) نتیجه می شود:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| < \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon.$$

بنابراین، $F(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است و $F'(z) = f(z)$. علاوه $F(z)$ می بایست دارای مشتق از تمام مراتب باشد. به ویژه، برای همه نقاط \mathcal{D} داریم $F''(z) = f'(z)$ که بدین ترتیب تحلیلی بودن $f(z)$ ثابت می شود.

فرع - فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} تحلیلی باشد. اگر z_0 نقطه بی از \mathcal{D} باشد، آنگاه $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ در \mathcal{D} تحلیلی است.

اثبات - به موجب قضیه کوشی برای میدانهای همبند ساده، بر هر مرز C درون \mathcal{D} داریم $\int_C f(z) dz = 0$. بنابراین $f(z)$ در مفروضات (و هم در نتیجه) قضیه مررا صدق می کند. از این رو اثبات فرع در مضمون اثبات قضیه مررا نهفته است.

خاطر نشان می شویم که حتی اگر $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی باشد مع الوصف اینطور نیست که بر هر مرز بسته ساده در \mathcal{D} داشته باشیم $\int_C f(z) dz = 0$. تابع $f(z) = 1/z$ در طوق محصور به دایره $|z| = \frac{1}{2}$ و $|z| = 2$ تحلیلی است. ولی $\int_{|z|=1} (1/z) dz = 2\pi i$. با اینکه این دایره درون طوق جای دارد. باید توجه داشت که درون $|z| = 1$ در طوق جای ندارد و همین دلیل است قضیه کوشی در اینجا کاربرد ندارد. برای میدان همبند ساده ایمن مطلب درست است که: انتگرال روی هر مرز ساده بسته در میدان صفر است.

با توجه به قضیه مررا می توانیم بگوئیم که یک شرط لازم و کافی برای تابع پیوسته که در یک میدان همبند ساده تحلیلی باشد این است که مقدار انتگرال مستقل از مسیر انتگرال گیری باشد. بایک نظر سطحی ممکن است تصور شود که قضیه مررا در اثبات تحلیلی بودن توابع مفید نیست، چونکه ممکن نیست همه مرزهای ساده بسته را آزمایش نمود. ولی اثبات قضیه بعدی، هر گونه شکی را در مورد کارایی قضیه مررا، برطرف می نماید.

قضیه ۸-۶. فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله بی از توابع تحلیلی باشد که بر زیر-مجموعه های فشرده \mathcal{D} به تابع $f(z)$ همگرای یکنواخت باشد. در این صورت $f(z)$ در

\mathcal{D} تحلیلی است.

اثبات - کافی است نشان دهیم $f(z)$ در نقطه دلخواه z_0 در \mathcal{D} تحلیلی است. همسانی \mathcal{D}' از z_0 را درون \mathcal{D} می سازیم، به موجب قضیه ۶-۶، $f(z)$ می بایست در تمام نقاط \mathcal{D}' پیوسته باشد. به موجب قضیه ۸-۴، برای هر مرز ساده بسته C درون \mathcal{D}' داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f(z) dz \quad (12)$$

چون $f_n(z)$ در \mathcal{D}' تحلیلی است. برای هر n ، و هر مرز ساده بسته C ، $\int_C f_n(z) dz = 0$ (توجه به (۱۲))، به موجب قضیه مرزا، $f(z)$ می بایست در \mathcal{D}' تحلیلی باشد. به ویژه $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و اثبات تمام است.

تذکر - فرض همگرایی یکنواخت بر زیر مجموعه های فشرده، بعوض همگرایی یکنواخت بر تمام میدان، انعطاف پذیری مورد نیاز جهت بررسی سئوالات معینی در فصل های بعد را فراهم می سازد.

با نوشتن قضیه ۸-۶، برحسب رشته خواهیم داشت: اگر $\{f_n(z)\}$ دنباله یی از توابع تحلیلی باشد و $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ بر زیر مجموعه های فشرده \mathcal{D} به $f(z)$ همگرایی یکنواخت باشد، آنگاه $f(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است. این مطلب با توجه به اینکه برای هر مرز ساده بسته درون \mathcal{D} داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_C f_k(z) dz \right) = \int_C \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \right) dz = \int_C f(z) dz = 0.$$

نتیجه می گردد.

فرع - فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله یی از توابع تحلیلی در میدان \mathcal{D} باشد، و $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ ورشته بر زیر مجموعه های فشرده \mathcal{D} همگرایی یکنواخت باشد. در این صورت:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z).$$

اثبات - به موجب قضیه ۸-۶، $f(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است. بنابراین از قضیه ۸-۲.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

که C برمرز ساده بسته‌ی درون \mathcal{D}' ، که \mathcal{D}' هم یک همسایگی z درون \mathcal{D} ، می‌باشد. هم چنین باید توجه داشت که برای هر n

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

چون که برای ζ بر C ، $\sum_{n=0}^{\infty} [f_n(\zeta)/(\zeta - z)^2]$ همگرای یکنواخت به $f(\zeta)/(\zeta - z)^2$ است، داریم:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z). \end{aligned}$$

در حالت عمومی برای هر عدد صحیح k ، داریم:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

و

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(z)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

چون که برای ζ بر C ، $\sum_{n=0}^{\infty} [f_n(\zeta)/(\zeta - z)^{k+1}]$ به $f(\zeta)/(\zeta - z)^{k+1}$ همگرای یکنواخت است، همانند فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای هر z در \mathcal{D} ،

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

تذکره. یک اختلاف میان رشته‌های حقیقی و مختلط را متذکر می‌شویم رشته حقیقی $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n^2$ بر خط حقیقی همگرای یکنواخت است. ولی مشتق‌یابی جمله به جمله منجر به $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nx)/n$ می‌گردد که در $x=0$ همگرا نیست. در حالت مختلط، در مورد یک رشته از توابع تحلیلی که بر زیر مجموعه‌های فشرده میدانی، همگرای یکنواخت باشد، می‌توان جمله به جمله مشتق گرفت و مشتق حاصلجمع را بدست آورد. با این حال، این مطلب برای مرز میدان قابل گسترش نیست. به عنوان مثال با اینکه تابع $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n^2)$ در قرص $|z| \leq 1$ همگرای یکنواخت است، ولی مشتق‌یابی جمله به جمله در $z=1$ حاصل می‌کند $f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ که همگرا نیست.

فرض کنیم $f(z)$ یک تابع تام است. به موجب قضیه ۸-۳، $f(z)$ دارای نمایش رشته توانی.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

است، که برای همه z ها معتبر است. بنابه قضیه ۶-۱۳ و بنابه فرع قضیه ۸-۶، مشتق حاصلجمع برابر است با حاصلجمع مشتقات. یعنی برای هر z ، $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ، اکنون بنابه فرع قضیه ۸-۴، می توان جمله به جمله انتگرال گرفت. به بیان دیگر

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^z f(\zeta) d\zeta = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}, \end{aligned}$$

که در آن انتگرال بر هر مرزی که مبدأ را به z وصل کند محاسبه می شود. از ترکیب این نتایج می توان نمایش رشته های توانی مفید را یافت.

مثال ۱- $f(z) = \sin^2 z$ را به یک رشته ماکلورن بسط دهید. البته می توانستیم مشتق گرفته مستقیماً "بسط ماکلورن را بیابیم".

روش ۱- چونکه $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n+1}/(2n-1)!] \cdot z^{2n-1}$ داریم:

$$\sin^2 z = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right).$$

با گردآوردن جملات و مرتب کردن آنها به ترتیب صعودی درجات، حاصل می شود.

$$\sin^2 z = z^2 - \frac{1}{3} z^4 + \left(\frac{2}{5!} + \frac{1}{(3!)^2} \right) z^6 + \dots$$

در این شکل یافتن جمله عمومی مشکل است.

روش ۲- داریم:

$$f'(z) = 2 \sin z \cos z = \sin 2z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} (2z)^{2n-1}.$$

ولی

$$\begin{aligned} f(z) = \sin^2 z &= \int_0^z f'(\zeta) d\zeta + f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^z \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} (2\zeta)^{2n-1} d\zeta \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}. \end{aligned}$$

روش ۳- همانندی مثلثاتی به کار می بریم

$$\begin{aligned}\sin^2 z &= \frac{1 - \cos 2z}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2z)^{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{(2n)!} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}.\end{aligned}$$

مثال ۲- تابع $f(z) = \text{Log}(1+z)$ را برای $|z| < 1$ به رشته ماکلورن بسط دهید.

داریم:

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n.$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}f(z) = \text{Log}(1+z) &= \int_0^z f'(\zeta) d\zeta + f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z (-1)^n \zeta^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots\end{aligned}$$

باید توجه داشت که شاخه اصلی لگاریتم را انتخاب کرده تا $\text{Log } 1 = 0$ گردد. بطور عمومی تر، هرگاه $\log 1 = 2k\pi i$ ، داریم:

$$\begin{aligned}f(z) = \log(1+z) &= \int_0^z f'(\zeta) d\zeta + f(0) \\ &= 2k\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots.\end{aligned}$$

پرسشها

- ۱- اگر برای همه نقاط درون C داشته باشیم $\int_C (f(z)/z - z_0) dz$ ، $f(z_0) = (1/2\pi i) \int_C (f(z)/z - z_0) dz$ آیا f درون C تحلیلی است؟
- ۲- اگر مشتقات از تمام مراتب، دو تابع متفاوت در نقطه‌ای برابر باشند. دو تابع چه ربطی با هم دارند؟
- ۳- اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)) dz$ ، آیا $\{f_n(z)\}$ بر C همگرای یکنواخت است؟
- ۴- اگر دنباله‌ای از توابع بر همه زیر مجموعه‌های فشرده یک میدان همگرای یکنواخت باشد، آیا می‌بایست در تمام میدان همگرای یکنواخت باشد؟
- ۵- اگر $\{f_n(z)\}$ دنباله‌ای از توابع تحلیلی در میدان D باشد و $\{f_n(z)\}$ در

۵ به $f(z)$ بگرایید، آیا $f(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است؟

۶- فرض کنید $\{f_n(z)\}$ به یک تابع تحلیلی همگرای یکنواخت است، در مورد توابع $\{f_n(z)\}$ چه می توان گفت؟

۷- اگر $f(z)$ درون مرز ساده بسته C تحلیلی و $\int_C f(z) dz = 0$ ، آیا $f(z)$ درون C تحلیلی است؟

۸- اگر $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ در مورد $f^{(k-1)}(z)$ چه می توان گفت؟

۹- اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ، آیا می شود که $f'(z_0)$ موجود باشد و برابر $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ نباشد.

تمرینها

۱- فرمول انتگرال کوشی را برای میدانهای همبند چندگانه اثبات کنید.

۲- (الف) اگر $P(z)$ یک چند جمله ای از درجه n باشد، ثابت کنید.

$$\int_{|z|=2} \frac{P(z)}{(z-1)^{n+2}} dz = 0.$$

(ب) اگر n و m اعداد صحیح مثبت باشند، نشان دهید که بر هر مرز C که z_0 درون آن باشد داریم:

$$\int_C \frac{(n-1)! e^z}{(z-z_0)^n} dz = \int_C \frac{(m-1)! e^z}{(z-z_0)^m} dz$$

۳- انتگرالهای زیر را که در آن C دایره $|z|=3$ است محاسبه کنید.

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{(z-2)^2} dz \quad (\text{پ}) \quad \int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz \quad (\text{ب}) \quad \int_C \frac{e^z}{z-2} dz \quad (\text{الف})$$

$$\int_C \frac{3z^4 + 2z - 6}{(z-2)^3} dz \quad (\text{ث}) \quad \int_C \frac{e^z \sin z}{(z-2)^2} dz \quad (\text{ت})$$

۴- با استفاده از کسرهای جزئی انتگرالهای زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^2+1} dz \quad (\text{ب}) \quad \int_{|z|=2} \frac{1}{z^2-i} dz \quad (\text{الف})$$

$$\int_{|z|=3} \frac{z^3+3z-1}{(z-1)(z+2)} dz \quad (\text{ت}) \quad \int_{|z|=2} \frac{1}{z^4-1} dz \quad (\text{پ})$$

۵- انتگرال $\int_C z/((16-z^2)(z+i)) dz$ را که در آن C هر یک از دوائر زیر باشد

محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} |z| = 2. & \text{ب)} & |z - 4| = 2. \\ |z| = \frac{1}{2}. & \text{ت)} & |z| = 5. \end{array} \quad \text{پ)} \quad |z + 4| = 2.$$

۶- ضرایب پنج جمله اول در بسط ماکلورن توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف)} \quad e^z \sin z. \quad \text{ب)} \quad \frac{1}{\cos z}.$$

$$\text{پ)} \quad e^{z+z^2}. \quad \text{ت)} \quad e^{z/(1-z)}.$$

۷- فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ در z_0 تحلیلی اند و

$$\begin{aligned} f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \\ g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(n-1)}(z_0) = 0. \end{aligned}$$

اگر $g^{(n)}(z_0) \neq 0$ نشان دهید

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

این یک تعمیم از قضیه ۵-۷ است.

۸- حدود زیر را، یا با استفاده از تمرین قبل و یا با استفاده از قضیه ۸-۳، محاسبه کنید:

$$\text{الف)} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad \text{ب)} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z - z^3}$$

$$\text{پ)} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{e^z - 1} \quad \text{ت)} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z}{\cos z - 1}$$

۹- اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی باشد و برای هر n ، $|f^{(n)}(z_0)| \leq n^k$ (k ثابت)

نشان دهید که $f(z)$ تابع تام است.

۱۰- نشان دهید که رشته‌های زیر در میدانهای داده شده نمایش توابع تحلیلی

هستند و مشتق آنها را بیابید.

$$\text{الف)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (\operatorname{Re} z > 1)$$

$$\text{ب)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} \quad (z \neq \pm 1, \pm 2, \dots)$$

۱۱- فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} تحلیلی اند. ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z) dz &= f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) \\ &\quad - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z) dz, \end{aligned}$$

که در آن مسیر انتگرال گیری بر مرزی از z_0 تا z_1 است که در درون \mathcal{D} واقع باشد .
۱۲- فرض کنید $f(z)$ بر C پیوسته است ولی لزوماً "تحلیلی نیست"، نشان دهید که تابع

$$F(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

در هر z که بر C نباشد تحلیلی است، و

$$F'(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

۱۳- با انتخاب یک مشخصه ویژه، بسطهای ماکلورن هر یک از توابع زیر را بیابید و ناحیه‌ی را که در آن هر یک از این بسطها برقرار است بیان کنید
الف) $(1+z)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$
ب) $\tan^{-1} z$
پ) $\sin^{-1} z$

۲-۸. نامساوی کوشی و کاربردها

در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، اغلب آگاهی ما از تابع بر پایه رفتار مشتق آن می‌باشد. به عنوان مثال اگر مشتق تابع در فاصله‌ی مثبت، منفی و یا صفر باشد آنگاه تابع در آن فاصله به ترتیب صعودی، نزولی و یا ثابت خواهد بود. در آنالیز مختلط عکس این مطلب درست است. یعنی از رفتار یک تابع تحلیلی استفاده می‌کنیم و رفتار مشتق آنرا تخمین می‌زنیم.

قضیه ۲-۸. (نامساوی کوشی) فرض کنیم $f(z)$ درون و بر دایره C به مرکز z_0 و شعاع

$$r \text{ تحلیلی است. اگر بر } C, |f(z)| \leq M, \text{ آنگاه } |f^{(n)}(z_0)| \leq Mn!/r^n$$

اثبات - به موجب فرمول انتگرال کوشی

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &\leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |dz| \\ &\leq \frac{n! M}{2\pi r^{n+1}} \int_C |dz| = \frac{n! M}{2\pi r^{n+1}} (2\pi r) = \frac{n! M}{r^n}. \end{aligned}$$

از نامساوی کوشی می توان قضیه زیر را اثبات کرد:

قضیه ۸-۸. (قضیه لیوویل)^۱ تابع تام کراندار ثابت است.

اثبات - فرض کنید $f(z)$ تابعی تام است و برای هر z ، $|f(z)| \leq M$ ، کافی است نشان دهیم $f'(z) \equiv 0$. برای هر عدد مختلط داده شده z_0 ، به موجب نامساوی کوشی برای هر عدد حقیقی مثبت r داریم $|f'(z_0)| \leq M/r$ با $r \rightarrow \infty$ ، نتیجه می شود که $-f'(z_0) = 0$. چون که z_0 اختیاری است قضیه ثابت می شود.

تذکر - البته قضیه یی مشابه برای قضیه لیوویل در متغیر حقیقی موجود نیست. تابع $-f(x) = \sin x$ ، غیر ثابت است و همه جا مشتق پذیر کراندار است.

قضیه لیوویل مبین آن است که برای تابع تام غیر ثابت $f(z)$ به دنباله یی از نقاط مانند $\{z_n\}$ موجود است، به طوری که $f(z_n) \rightarrow \infty$. نتیجه دقیق تری از این مطلب را می توان بصورت زیر عنوان کرد:

قضیه ۹-۸. هر تابع تام غیر ثابت به هر عدد مختلط به قدر دلخواه نزدیک می شود.

اثبات - فرض کنیم $f(z)$ تابعی است تام و علاوه عدد مختلط z موجود است بطوری که برای هر $|f(z) - a| \geq \varepsilon$. در این صورت تابع $g(z) = 1/[f(z) - a]$ تام است و $|g(z)| = 1/|f(z) - a| \leq 1/\varepsilon$. بنابه قضیه لیوویل، $g(z)$ ثابت است. بنابراین $f(z) = 1/g(z) + a$ نیز می بایست ثابت باشد.

فرع - فرض کنیم $f(z)$ تابع تام غیر ثابتی باشد. بازاء هر عدد مختلط مفروض a

دنباله $\{z_n\}$ موجود است $f(z_n) \rightarrow a$

اثبات - به موجب ۹-۸، بازاء هر n نقطه z_n موجود است که $f(z_n) \in N(a; 1/n)$ چون $1/n \rightarrow 0$ نتیجه می شود $f(z_n) \rightarrow a$

تذکر - با اینکه یک تابع تام غیر ثابت هر چه قدر بخواهیم به هر مقدار مختلط نزدیک می گردد ولی لزوماً "هر مقدار مختلط را نمی پذیرد". به عنوان مثال $f(z) = e^z$ - هرگز صفر نمی شود. با این حال با $n \rightarrow \infty$ ، $f(-n) = e^{-n} \rightarrow 0$ این نکته که e^z همه دیگر اعداد مختلط را می پذیرد، استنتاج ویژه یی از قضیه زیر است:

قضیه پیکار^۱ - تابع تام غیر ثابت هر مقدار مختلط را، با یک استثناء ممکن، می پذیرد.

برای اثبات قضیه پیکار به کتاب دپری و ارینگ^۲ (۹) مراجعه کنید.
قضیه بعدی ما تخمینی بر میزان رشد، یک تابع تام است.

قضیه ۸-۱۰. فرض کنیم $f(z)$ تابعی تام است و برای یک عدد حقیقی غیر منفی مانند λ داریم $|f(z)| \leq Mr^\lambda$ ($|z| = r \geq r_0$). در این صورت $f(z)$ یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر λ است.

اثبات - فرض کنیم

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

به موجب نامساوی کوشی بر دایره $|z| = r$ داریم:

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{Mr^\lambda}{r^n} = \frac{M}{r^{n-\lambda}}.$$

وقتی $r \rightarrow \infty$ می بینیم که هر وقت $n > \lambda$ ، نگاه $a_n = 0$. بنابراین $f(z)$ یک چند جمله‌ای است که درجه اش از λ بیشتر نیست.

تذکر - وقتی $\lambda = 0$ ، قضیه ۸-۱۰ به قضیه لیبویل تبدیل می گردد. انتخاب $0 < \lambda < 1$ نشان می دهد که لازم نیست $f(z)$ را کراندار فرض کنیم (مگر اینکه رشد آن میزان کندی داشته باشد) تا اینکه بتوان نتیجه گرفت $f(z)$ می بایست ثابت باشد.

هر تابع تام که جمله‌یی نباشد به تابع تام متعالی موسوم است.
 $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ قرار می دهیم. قضیه ۸-۱۰ مبین آن است که برای تابع تام متعالی $f(z)$ ، تابع $M(r, f)$ - سریعتر از هر توان r رشد می کند. این بدان معنی نیست که بر هر مسیری که به ∞ برویم $f(z) \rightarrow \infty$ به عنوان مثال، داریم $M(r, e^z) = e^r$ ولی با $z \rightarrow \infty$ بر امتداد محور حقیقی منفی، $e^z \rightarrow 0$. چند جمله‌یی‌ها تا اندازه‌یی متفاوت اند. رشد چند جمله‌یی‌ها به وسیله درجه آنها مشخص می شود:

قضیه ۸-۱۱. فرض کنید $a_n \neq 0$ ، نگاه برای $|z| = r$ $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

1. Picard

2. Depree and Oehring

بس بزرگ

$$\frac{|a_n|}{2} r^n \leq |P(z)| \leq \frac{3|a_n|}{2} r^n.$$

اثبات - داریم:

$$P(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right).$$

به موجب نامساوی مثلث

$$\begin{aligned} r^n \left(|a_n| - \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right) &\leq |P(z)| \\ &\leq r^n \left(|a_n| + \left| \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \right). \end{aligned}$$

برای

$$\left| \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq \frac{|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|}{r} = \frac{K}{r}.$$

بنابراین

$$r^n \left(|a_n| - \frac{K}{r} \right) \leq |P(z)| \leq r^n \left(|a_n| + \frac{K}{r} \right) \quad (r > 1).$$

و قضیه برای $K/r < |a_n|/2$ ، یعنی وقتی که $r > 2K/|a_n|$ ، اثبات می‌گردد.

قضیه ۸-۱۰ و ۸-۱۱، امکان مقایسه‌ی میان رشد چند جمله‌ی‌ها و توابع متعالی فراهم می‌سازد. اگر $P(z)$ چند جمله‌ی و $f(z)$ تابع متعالی باشد، آنگاه برای $r \rightarrow \infty$ ، $M(r, P)/M(r, f) \rightarrow 0$ یعنی که برامتداد "بهترین مسیر" تابع متعالی خیلی سریعتر از چند جمله‌ی به بی‌نهایت میل می‌کند. با این حال به هنگامیکه $z \rightarrow \infty$ بر هر مسیری، $P(z) \rightarrow \infty$ در فصل ۹ نشان خواهیم داد که هیچ تابع متعالی چنین خاصیتی را ندارد. با بیانی ساده می‌توان گفت که، یک تابع متعالی خیلی سریعتر از یک چند جمله‌ی رشد می‌کند، در حالی که یک چند جمله‌ی موزون تر از یک تابع متعالی رشد می‌کند. یک خاصیت عمده چند جمله‌ی‌ها در قضیه ۸-۱۲ آمده است. قضیه ۸-۱۲. (قضیه اساسی جبر) یک چند جمله‌ی غیر ثابت حداقل یک صفر دارد.

اثبات - فرض کنیم $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ ، اگر $a_n \neq 0$ ،

هرگز صفر نباشد، $1/P(z)$ تام است. به موجب قضیه ۸-۱۱، با $z \rightarrow \infty$ ، $1/P(z) \rightarrow 0$. بنابراین برای $|z| \geq R$ ، $|1/P(z)| < 1$. ولی $1/P(z)$ بر مجموعه فشرده $|z| \leq R$ پیوسته است (و در نتیجه کراندار است). بنابراین $1/P(z)$ بر تمام صفحه کراندار است و به موجب قضیه لیوویل می بایست ثابت باشد. این موجب می گردد که $P(z)$ ثابت باشد که با فرض ما متناقض است.

فرع ۱- هر چند جمله‌یی از درجه n دقیقاً " n صفر (که لزوماً متمایز نیستند) دارد.

اثبات - قضیه اساسی جبر وجود حداقل یک صفر r_1 را نشان می دهد. از عبارت $z - r_1$ می توان فاکتورگیری کرد و یک چند جمله‌یی از درجه $n-1$ باقی می ماند. با بکار بستن قضیه در مورد چند جمله‌یی جدید، صفر جدیدی بدست می آید. این فرآیند را می توان n بار تکرار کرد.

فرع ۲- هر چند جمله‌یی از درجه n ، هر عدد مختلط را دقیقاً " n بار می پذیرد.

اثبات - اگر $P(z)$ یک چند جمله‌یی از درجه n باشد آنگاه:

$$Q(z) = P(z) - a$$

هم یک چند جمله‌یی از درجه n است. بموجب فرع ۱، $Q(z)$ ، n صفر دارد. ولی صفرهای $P(z)$ ، نقاط " a " ی $Q(z)$ اند.

تذکر - فرع ۲، در حالت چند جمله‌یی، حل کامل تری در مقایسه با قضیه ۸-۹ را به دست می دهد. یک چند جمله‌یی از درجه n ، نه تنها به عدد مختلط هر قدر بخواهیم نزدیک می شود، بلکه هر مقداری را عملاً " n بار می پذیرد. ولی وجود n ریشه، گویای هیچ گونه اطلاعاتی در مورد جایگاه آنها نیست. در بخش ۸-۴ روشی برای تقریب به جایگاه صفرهای بعضی توابع تحلیلی را بررسی خواهیم کرد.

اینک می بینیم که چگونه رفتار یک تابع در یک دنباله نقاط بر رفتار تابع در جاهای دیگر تاثیر می گذارد.

قضیه ۸-۱۳. فرض کنیم $f(z)$ در قرص $|z - z_0| < R$ تحلیلی است و $\{z_n\}$

دنباله‌یی از نقاط متمایز است که به z_0 می گراید. اگر برای هر n ، $f(z_n) = 0$ ، آنگاه

$$\text{همه جای } |z - z_0| < R, f(z) \equiv 0$$

اثبات داریم:

$$f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (|z - z_0| < R). \quad (13)$$

چونکه $f(z)$ در z_0 پیوسته است، نتیجه می‌شود که برای $z_n \rightarrow z_0$ ،
 $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$ بنا براین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = 0 = f(z_0) = a_0.$$

بنابراین $f(z)$ ، جمله ثابت ندارد و می‌توان نوشت:

$$f(z) = (z - z_0) \left(a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-1} \right).$$

با قرار دادن $z = z_n$ و تقسیم بر $z_n - z_0$ منجر به این می‌شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n)}{z_n - z_0} = 0 = a_1.$$

به طریق مشابه

$$f(z) = (z - z_0)^2 \left(a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-2} \right),$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n)}{(z_n - z_0)^2} = 0 = a_2.$$

با روش استقرایی نشان می‌دهیم که برای هر k ، $a_k = 0$ و قضیه ثابت است.

فرع - فرض کنیم $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی است. در این صورت یا در یک همسایگی

$f(z) \equiv 0$ ، یا اینکه عدد حقیقی r موجود است به طوری که در قرص سفته

$$f(z) \neq 0, 0 < |z - z_0| \leq r.$$

اثبات - فرض کنیم چنین r ی موجود نیست. در این صورت در هر قرص سفته

$0 < |z - z_0| \leq 1/n$ نقطه z_n چنان موجود است که $f(z_n) = 0$. چون که $z_n \rightarrow z_0$

کاربرد از قضیه ۸-۱۳ نشان می‌دهد که $f(z)$ می‌بایست در یک همسایگی z_0 متحد با
صفر باشد.

تذکر - همتای این قضیه در متغیر حقیقی موجود نیست. تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

برای تمام x های حقیقی مشتق پذیر است و برای هر n ، $f(1/n) = 0$ ، با این حال در هر همسایگی مبدأ، $f(x) \neq 0$.

اینک قضیه قبل را به یک میدان دلخواه تعمیم می دهیم.

قضیه ۸-۱۴. فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی باشد و $\{z_n\}$ دنباله‌یی از نقاط متمایز باشد که به نقطه z_0 در \mathcal{D} می‌گراید. اگر برای هر n ، $f(z_n) = 0$ ، آنگاه در سراسر \mathcal{D} ، $f(z) \equiv 0$.

اثبات - دو مجموعه متمایز زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \{a \in \mathcal{D} : f(a) \equiv 0 \text{ در یک همسایگی } a\}$$

$$B = \{a \in \mathcal{D} : a \text{ در یک همسایگی سوده } z \text{ برای هر } f(z) \neq 0\}$$

به موجب فرع قضیه ۸-۱۳، هر نقطه در \mathcal{D} یا در A است و یا در B است. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که هر دو مجموعه A و B باز هستند. چون که میدان $\mathcal{D} = A \cup B$ همینند است، یا A تهی است، یا B تهی است. به موجب قضیه ۸-۱۳، z_0 متعلق به A است. بنابراین $B = \emptyset$. این بدان معنی است $A = \mathcal{D}$ و در \mathcal{D} ، $f(z) \equiv 0$. به عنوان نتیجه‌یی از قضیه ۸-۱۴ داریم:

قضیه ۸-۱۵. (قضیه همانی) فرض کنیم $\{z_n\}$ دنباله‌یی از نقاط است که یک نقطه حدى در \mathcal{D} دارد. اگر $f(z)$ و $g(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی باشند و برای هر n داشته باشیم $f(z_n) = g(z_n)$ ، آنگاه در سراسر \mathcal{D} ، $f(z) \equiv g(z)$.

اثبات - فرض کنیم z_0 نقطه حدى $\{z_n\}$ باشد. به موجب قضیه ۲-۸، زیر دنباله $\{z_{n_k}\}$ موجود است که به z_0 می‌گراید. با قرار دادن $h(z) = f(z) - g(z)$ ، می‌بینیم که برای تمام نقاط دنباله $\{z_{n_k}\}$ ، $h(z_{n_k}) = 0$ ، کاربردى از قضیه ۸-۱۴، نشان می‌دهد که در \mathcal{D} ، $h(z) \equiv 0$ که از آنجا قضیه ثابت است.

تذکر- اینکه نقطه حدى z_0 در میدان تحلیلی بودن باشد، یک شرط اساسی است. تابع غیر ثابت $f(z) = e^{1/(1-z)}$ در $|z| < 1$ تحلیلی است. برای $z_n = 1 - 1/2n\pi i$

$$e^{1/(1-z_n)} = e^{2n\pi i} = 1 \text{ داریم}$$

باید توجه داشت که $1 \rightarrow \{z_n\}$ و $f(z)$ در نقطه ۱ تحلیلی نیست.

مثال - آیا تابع $f(z)$ ی موجود است که در $|z| < 1$ تحلیلی و در شرط زیر صدق

کند؟

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (14)$$

تابع $f(z) = z$ تحلیلی است و در شرط $f(1/2n) = 1/2n$ صدق می کند. بموجب قضیه همانی این تنها چنین تابع تحلیلی است. چونکه

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) \neq \frac{1}{2n},$$

پس هیچ تابع تحلیلی موجود نیست که در (۱۴) صدق کند. قابل توجه است که می توان تابعی مانند $f(z)$ ساخت که در $|z| < 1$ تحلیلی باشد و برای هر n در شرط زیر صدق کند.

$$f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}$$

با قرار دادن $z = 1/(2n+1)$ داریم $1/2n = z/(1-z)$ بنابراین $f(z) = z/(1-z)$ در شرط مذکور صدق می کند.

تذکر ۱- فرمول انتگرال کوشی مبین آن است که رفتار یک تابع تحلیلی بر مزر ساده بسته مشخص رفتار تابع درون مرز است. قضیه همانی بیش از این آگاهی در اختیار ما می گذارد. آن قضیه مبین آن است که رفتار تابع بر هر دنباله نقاط بردرون یاروی مرز ساده بسته مشخص رفتار تابع در تمام نقاط میدان است.

تذکر ۲- اینک روش ساده‌ی برای اثبات همانندیهای متعارف مثلثاتی داریم، به

عنوان مثال تابع

$$f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$$

تابعی است تام و بر محور حقیقی برابر با یک است. بنابراین در صفحه مختلط $f(z) \equiv 1$ ، یعنی که برای هر z

$$\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1$$

پرسش‌ها

- ۱- آیا "نامساوی کوشی" در حالتی که دایره با یک مرز ساده بسته جایگزین شود متناظری دارد؟
- ۲- آیا یک تابع تام غیر ثابت می‌تواند در یک نیم صفحه کراندار باشد؟
- ۳- آیا می‌شود که قسمت حقیقی یک تابع تام غیر ثابت کراندار باشد؟
- ۴- چرا قضیه ۸-۹ یک تعمیم قضیه لیوویل است؟
- ۵- اگر تابع غیر ثابتی همه جا در خارج یک قرص تحلیلی باشد، آیا می‌تواند کراندار باشد؟
- ۶- در مورد توابع تامی که مقدار صفر را نمی‌پذیرند چه می‌توان گفت؟
- ۷- چه ایرادی بر اثبات زیر وارد است؟
- چونکه $e^z \neq 0$ ، پس $1/e^z$ کراندار است. بنابراین به موجب قضیه لیوویل $1/e^z$ ثابت است.
- ۸- اگر دو تابع تام در یک تعداد نامتناهی نقاط برابر باشند، آیا هر دو می‌بایست برابر باشند؟

تمرین‌ها

- ۱- اگر $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $|z| < R$ تحلیلی و $f(x)$ برای $-R < x < R$ ، حقیقی باشد، نشان دهید که برای هر n ، حقیقی است. هم چنین نشان دهید $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.
- ۲- فرض کنید $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ، $a_n \neq 0$ ، با $\varepsilon > 0$ مفروض، نشان دهید که یک R موجود است که $r > R$ موجب

$$(1 - \varepsilon) |a_n| r^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon) |a_n| r^n \quad (|z| = r).$$
 می‌گردد.
- ۳- فرض کنید که $f(z)$ تابع تام و برای هر z ، $|f(z)| \leq |e^z|$ ثابت کنید که $|K| \leq 1$ ، $f(z) = Ke^z$.
- ۴- فرض کنید $f(z)$ تام و a و b دو عدد ثابت مثبت باشند، اگر برای هر z

$$f(z+a) = f(z+bi) = f(z)$$
 نشان دهید که $f(z)$ ثابت است.
- ۵- فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ بر $|z| \leq 1$ تحلیلی باشد و فرض کنیم برای $|z| \leq 1$ ، $|f(z)| \leq 1$ ، با بکار بردن نامساوی کوشی ثابت کنید.

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \frac{|z|^k}{1 - |z|} \quad (|z| < 1). \quad (\text{الف})$$

ب) اگر $|z_1| \leq r$ ، $|z_2| \leq r$ و $0 < r < 1$ و $z_1 \neq z_2$ آنگاه

$$\left| \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} \right| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

۶- اگر $f(z)$ و $g(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی باشند و در \mathcal{D} داشته باشیم

$$f(z)g(z) \equiv 0 \quad \text{ثابت کنید که در } \mathcal{D} \text{ یا } f(z) \equiv 0 \quad \text{و یا } g(z) \equiv 0$$

۷- فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی اند و بر یک دنباله نقاط $\{z_n\}$

که به نقطه z_0 در \mathcal{D} می‌گرایند داشته باشیم:

$$\frac{f'(z_n)}{f(z_n)} = \frac{g'(z_n)}{g(z_n)}$$

نشان دهید که در \mathcal{D} ، $f(z) = Kg(z)$. (راهنمایی: قرار دهید $h(z) = f(z)/g(z)$)

نشان دهید $h'(z) = 0$

۸-۳. قضیه ماکزیم کالبد

فرض کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته با مقادیر حقیقی باشد که بر فاصله $[a, b]$ تعریف

شده است و در این فاصله $F'(x) = f(x)$. در این صورت میانگین مقدار $f(x)$ در این فاصله عبارتست از:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{F(b) - F(a)}{b-a}.$$

به علاوه به موجب قضیه میانگین، عبارت فوق به ازای یک ξ ، $a < \xi < b$ برابر است

با $F'(\xi)$.

قضیه بعدی نشان می‌دهد، برای توابعی که درون و بر یک دایره تحلیلی باشند،

میانگین مقادیر بر روی دایره برابر است با مقدار تابع در مرکز دایره.

قضیه ۸-۶ (قضیه میانگین گاوس)^۱ . فرض کنیم $f(z)$ در قرص بسته $|z - z_0| \leq r$

تحلیلی است آنگاه

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

اثبات - بموجب فرمول انتگرال کوشی

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

با قرار دادن $z = z_0 + re^{i\theta}$ ، بدست می آید:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

اگر $f(z)$ ثابت باشد (مثلاً $f(z) = C$) آنگاه قضیه گاوس نکته بدیهی زیر را می دهد:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = C.$$

قضیه بعدی نشان می دهد، برای توابع غیر ثابت، حتماً "می بایست نقطه‌ی بردايره $|z| = r$ موجود باشد که $|f(z)| > |f(z_0)|$."

قضیه ماکزیم کالبد (شکل اول). اگر $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی باشد، آنگاه $|f(z)|$

در \mathcal{D} نمی تواند ماکزیمی اختیار کند، مگر اینکه تابع ثابت باشد.

اثبات - فرض کنیم $|f(z)|$ در نقطه z_0 متعلق به \mathcal{D} ماکزیم داشته باشد. قرص $|z - z_0| \leq R$ را درون \mathcal{D} انتخاب می کنیم. بازاء $0 \leq r \leq R$ ، قضیه میانگین گاوس نتیجه می دهد:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

بسیار موجب فرض $|f(z_0)| \leq |f(z_0 + re^{i\theta})|$. فرض کنیم به ازاء نقطه‌ای مانند $z = z_0 + r_1 e^{i\theta_1}$ ($r_1 \leq R$) داریم:

$$|f(z_0 + r_1 e^{i\theta_1})| < |f(z_0)|.$$

در این صورت از آنجا که $|f(z)|$ پیوسته است، نامساوی اکید می بایست برکمانی از دایره $|z - z_0| = r_1$ برقرار باشد، بنابراین:

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r_1 e^{i\theta})| d\theta < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| d\theta \\ &= |f(z_0)|, \end{aligned}$$

که تناقض آشکار است.

از سوی دیگر، اگر $|f(z)|$ بر قرص $|z - z_0| \leq R$ ثابت باشد آنگاه به موجب قضیه ۸-۵، $f(z)$ می بایست در این قرص ثابت باشد. از قضیه همانندی نتیجه می شود که

$f(z)$ در تمامی میدان ثابت است. بنابراین $|f(z)|$ نمی تواند ماکزیم در نقطه‌یی از \mathbb{D} داشته باشد مگر اینکه $f(z)$ ثابت باشد و اثبات کامل است.

قضیه ماکزیم کالبد (شکل دوم). اگر $f(z)$ در یک میدان کراندار \mathbb{D} تحلیلی و بر بستار آن، $\bar{\mathbb{D}}$ پیوسته باشد، آنگاه $|f(z)|$ ماکزیمی بر مرز دارد. علاوه $|f(z)|$ ماکزیم در نقاط درونی ندارد مگر اینکه تابع ثابت باشد.

اثبات - ابتداءً ملاحظه می کنیم چون \mathbb{D} کراندار است، $\bar{\mathbb{D}}$ فشرده است. بنابراین به موجب قضیه ۱۵-۲، $|f(z)|$ حایبی در $\bar{\mathbb{D}}$ ماکزیم دارد. به موجب شکل اول قضیه، ماکزیم در نقاط درونی نیست، بنابراین ماکزیم بر مرز است.

تذکر - لازم نیست که میدان همبند ساده باشد. به عنوان مثال اگر تابعی بر طوق باز $1/R < |z| < R$ تحلیلی و بر طوق بسته $1/R \leq |z| \leq R$ پیوسته باشد، آنگاه ماکزیم کالبد این تابع می بایست بر مرز باشد. کالبد تابع $f(z) = z$ ماکزیم آن بر مرز خارجی است، در حالیکه کالبد $f(z) = 1/z$ ماکزیم آن بر مرز داخلی است.

به عنوان کاربردی برای قضیه ماکزیم قدر مطلق، قضیه اساسی جبر رادو باره اثبات می کنیم.

فرض کنیم $a_n \neq 0$ ، $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ صفری نداشته باشد، در این صورت $1/P(z)$ یک تابع تام است که صفر ندارد. با توجه به قضیه ۸-۱۱ با $z \rightarrow \infty$ ، $1/P(z) \rightarrow 0$ هنگامیکه r بس بزرگ است،

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| < \left| \frac{1}{P(0)} \right| = \left| \frac{1}{a_0} \right| \quad (|z| = r).$$

پس تابع پیوسته $|1/P(z)|$ ماکزیمی بر مرز مجموعه فشرده $|z| \leq r$ ندارد. بنابراین $|1/P(z)|$ می بایست ماکزیمی در نقطه درونی داشته باشد که با قضیه ماکزیم کالبد متناقض است. بنابراین $P(z)$ می بایست صفری در قرص $|z| \leq r$ داشته باشد و اثبات کامل است.

در مورد یک تابع تحلیلی غیر ثابت، امکان دارد می نیمم در میدان و نه بر مرز داشته باشد. برای دیدن قرار می دهیم $f(z) = z^n$ در این صورت:

$$0 = |f(0)| = \min_{|z| \leq r} |f(z)| < \min_{|z|=r} |f(z)| = r^n.$$

در واقع کالبد یک تابع در صفر تابع همیشه یک می نیمم اختیار می کند. با اینحال

همای زیر برای قضیه ماکزیم کالبد موجود است.

قضیه می نیم کالبد - فرض کنید $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی و در \mathcal{D} ، $f(z) \neq 0$ ، در این صورت $|f(z)|$ نمی تواند می نیمی در \mathcal{D} داشته باشد مگر اینکه $f(z)$ ثابت باشد. اگر $|f(z)|$ هم چنین بر \mathcal{D} پیوسته باشد و \mathcal{D} فشرده باشد، در این صورت $f(z)$ می نیمی بر مرز دارد.

اثبات - اگر $f(z) \neq 0$ در \mathcal{D} . آنگاه $1/f(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است. تابع $|f(z)|$ در نقطه z_0 متعلق به \mathcal{D} می نیم است اگر و تنها اگر $|1/f(z)|$ در z_0 ماکزیم داشته باشد. قضیه اینک با بکار بستن قضیه ماکزیم کالبد در مورد $1/f(z)$ ثابت می گردد.

جای تعجب نیست که قضیه اساسی جبر را بتوان از قضیه می نیم کالبد استنتاج نمود. با توجه به قضیه ۸-۱۱ وقتی که r بس بزرگ باشد، چند جمله‌ی

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \quad (a_n \neq 0),$$

در نامساوی زیر صادق است

$$|P(z)| > |P(0)| = |a_0| \quad (|z| = r).$$

اگر بخواهیم قضیه می نیم کالبد برقرار باشد، می بایست فرض $P(z) \neq 0$ در $|z| < r$ دروغ باشد، یعنی که $P(z)$ می بایست در قرص $|z| < r$ صفری داشته باشد.

در این فصل صحبت از تابع حقیقی $|f(z)|$ می باشد. اگر $f(z)$ نام باشد، قضیه لیوویل مبنی آن است که $M(r, f)$ بی کران است. علاوه اگر $M(r, f) \leq Mr^2$ آنگاه قضیه ۸-۱۰ مبنی آن است که $f(z)$ یک چند جمله‌ی با درجه حداکثر λ است. قضیه ماکزیم کالبد مبنی آن است که $M(r, f)$ یک تابع صعودی از r است و اینک خاصیت دیگری برای $M(r, f)$:

قضیه ۸-۱۷. فرض کنیم $f(z)$ بر قرص $|z| < R$ تحلیلی است، در این صورت برای $0 \leq r < R$ $M(r) = M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ تابعی پیوسته است.

اثبات - با $r_0 < R$ مفروض $0 \leq r_0 < R$ می خواهیم نشان دهیم که به هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ متناظر است که:

$$\text{هر وقت } |r_1 - r_0| \leq \delta \quad \text{آنگاه} \quad |M(r_1) - M(r_0)| < \varepsilon$$

چونکه $|f(z)|$ بر زیر مجموعه‌های فشرده $|z| < R$ پیوسته یکنواخت است و هر وقت $|r_1 - r_0| \leq \delta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) داریم:

$$||f(r_1 e^{i\theta})| - |f(r_0 e^{i\theta})|| < \varepsilon$$

ابتداءً فرض کنیم $r_0 \leq r_1 \leq r_0 + \delta$ و $|f(r_1 e^{i\theta})| = M(r_1)$ اگر به ازاء بیش از یک مقدار θ ، $|f(r e^{i\theta})|$ بر دایره $|z| = r_1$ ماکزیم داشته باشد، گیریم θ_1 یکی از چنین مقادیری باشد. به موجب قضیه ماکزیم کالبد، $M(r_1) \geq M(r_0)$ پس هر وقت $r_0 \leq r_1 \leq r_0 + \delta$ آنگاه:

$$0 \leq M(r_1) - M(r_0) \leq |f(r_1 e^{i\theta_1})| - |f(r_0 e^{i\theta_1})| < \varepsilon$$

از سوی دیگر، اگر $r_0 - \delta \leq r_1 \leq r_0$ ، قرار می‌دهیم $M(r_0) = |f(r_0 e^{i\theta_0})|$. در این صورت

$$0 \leq M(r_0) - M(r_1) \leq |f(r_0 e^{i\theta_0})| - |f(r_1 e^{i\theta_0})| < \varepsilon.$$

پس $M(r)$ در r_0 پیوسته و اثبات کامل است.

اگر $f(z)$ بر $|z| \leq R$ تابعی تحلیلی و غیر ثابت باشد و بر $|z| = R$ ، $|f(z)| \leq M$ ، در این صورت قضیه ماکزیم کالبد سین آن است که برای $|z| < R$ داریم $|f(z)| < M$. در لم بعدی روشهایی را بررسی می‌کنیم که این کران را در درون قرص ترمیم می‌نماید.

لم شوارتز^۱: فرض کنیم $f(z)$ برای $|z| < R$ تحلیلی است و $f(0) = 0$ اگر در $|z| < R$ ، $|f(z)| \leq M$ ، آنگاه $|f(z)| \leq (r/R)M$ ($|z| = r < R$)، و تساوی تنها هنگامی برقرار است که $f(z) = (M/R)e^{i\theta}z$ با α حقیقی.

اثبات - چونکه $f(0) = 0$ ، پس می‌توان نوشت:

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = zg(z),$$

که $g(z)$ بر $|z| < R$ تحلیلی است. باید توجه داشت که $g(0) = a_1 = f'(0)$ ، به موجب قضیه ماکزیم کالبد برای $g(z)$ داریم:

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq \max_{|z|=R'} |g(z)| \quad (r < R' < R). \quad (15)$$

یعنی،

$$\max_{|z|=r} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \max_{|z|=R'} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \quad (r < R' < R),$$

و یا

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{r}{R'} \max_{|z|=R'} |f(z)| \leq \frac{r}{R'} M.$$

چونکه R' را می‌توان به دلخواه نزدیک R انتخاب نمود پس

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{r}{R} M.$$

شایان توجه است که در (۱۵) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $g(z)$ ثابت باشد. پس $|g(z)| = M/R$ ($|z| = r < R$) اگر و فقط اگر $|f(z)| = (r/R)M$. اینک لم باتوجه به قضیه ۸-۵ ثابت می‌گردد.

تذکر- لم شوارتس را می‌توان برحسب تابع $M(r, f)$ بیان کرد. زیرا اگر $|z| < R$ در $|z| < R$ تحلیلی باشد و $f(0) = 0$ ، آنگاه $M(r, f) \leq (r/R')M(R', f)$ ($r < R' < R$).

فرع ۱- فرض کنیم $f(z)$ برای $|z| < R$ تحلیلی است و $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$. اگر در $|z| < R$ ، $|f(z)| \leq M$ ، آنگاه $|f(z)| \leq (r/R)^n M$ ($|z| = r < R$) و تساوی تنها وقتی برقرار است که $f(z) = (M/R^n)e^{ia}z^n$ ، α حقیقی.

اثبات - می‌نویسیم $f(z) = z^n g(z)$ و قضیه ماکزیم کالبد را برای $g(z)$ بکار می‌بریم.

اگر $f(0) \neq 0$ ، لم شوارتس را می‌توان ترمیم نمود تا فرغ ۲ استنتاج گردد.

فرع ۲- فرض کنیم $f(z)$ برای $|z| < R$ تحلیلی است. اگر در $|z| < R$ ، $|f(z)| \leq M$ ، آنگاه $|f(z) - f(0)| \leq (2r/R)M$ ($|z| = r < R$).

اثبات - قرار می‌دهیم $g(z) = f(z) - f(0)$ آنگاه $g(0) = 0$ و

$$|g(z)| \leq |f(z)| + |f(0)| \leq 2M.$$

و با بکار بستن لم شوارتس برای $g(z)$ ، حاصل می‌شود.

$$|g(z)| = |f(z) - f(0)| \leq \frac{2r}{R} M \quad (|z| = r < R).$$

تذکر - از فرع ۲ می‌توان اثبات دیگری برای قضیه لیوویل ارائه کرد.

فرض کنیم $f(z)$ تابعی است تام و برای هر z ، $|f(z)| \leq M$. اگر z_0 نقطه مفروضی بوده و $|z_0| = r_0$ و $\varepsilon > 0$ ، R را با $R > 2r_0 M/\varepsilon$ انتخاب می‌کنیم، در این صورت:

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \frac{2r_0 M}{R} < \varepsilon.$$

چونکه ε اختیاری است، $f(z_0) = f(0)$ ولی z_0 هم اختیاری است پس برای هر z ، $f(z) = f(0)$ ، یعنی $f(z)$ ثابت است.

پرسش‌ها

- ۱- فرض کنید $f(z)$ درون و بر مرز ساده بسته C تحلیلی است. آیا می‌شود $|f(z)|$ بر C ثابت باشد بدون اینکه $f(z)$ ثابت باشد؟
- ۲- آیا می‌توان یک تابع $f(z)$ را ساخت که $M(r_0, f) = |f(r_0 e^{i\theta_0})|$ و $M(r_1, f) = |f(r_1 e^{i\theta_1})|$ با $\theta_1 \neq \theta_0$ ؟
- ۳- اگر $f(z)$ تحلیلی باشد، آیا $M(r, f)$ مشتق‌پذیر است؟
- ۴- اگر $f(z)$ پیوسته باشد، آیا $M(r, f)$ پیوسته است؟
- ۵- فرض کنید $f(z)$ در $|z| \leq r$ تحلیلی است. آیا دو نقطه متمایز $z_0 = r e^{i\theta_0}$ و $z_1 = r e^{i\theta_1}$ موجودند بطوری که برای هر z ، $|z| < r$ داشته باشیم $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ و $|f(z)| \leq |f(z_1)|$ ؟
- ۶- اگر تابعی بر ناحیه‌یی که بسته نیست غیر ثابت و تحلیلی باشد، آیا کالبد آن می‌تواند بر این ناحیه ماکزیم داشته باشد؟
- ۷- فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر مرز ساده بسته C تحلیلی هستند و بر C $|f(z) - g(z)| = 0$ آیا رابطه $f(z) = g(z)$ در درون C برقرار است؟ اگر بر C ، $|f(z)| - |g(z)| = 0$ آن وقت چه؟
- ۸- تعریف می‌کنیم که $m(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$ با $M(r, f)$ چه خواص مشترکی دارد؟

تمرینها

- ۱- اگر $f(z)$ در قرص $|z - z_0| \leq r$ تحلیلی و مخالف صفر باشد، نشان دهید:

$$\log |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(z_0 + r e^{i\theta})| d\theta.$$
- ۲- فرض کنید $f(z)$ تابع غیر ثابت و تحلیلی در میدان \mathbb{D} است و بر بستار آن $\bar{\mathbb{D}}$ پیوسته است. اگر $|f(z)|$ بر مرز \mathbb{D} ثابت باشد، نشان دهید که $f(z)$ صفری در \mathbb{D} دارد.

۳- قرار می‌دهیم که $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ و $m(r, f) = \min_{|z|=r} |f(z)|$ برای توابع تام زیر $M(r, f)$ و $m(r, f)$ را بیابید و همه نقاط بر $|z|=r$ را که در آنجاها ماکزیمم و مینیمم وجود دارد مشخص کنید.

$$f(z) = z^n \quad (\text{ب}) \quad f(z) = e^z \quad (\text{الف})$$

$$f(z) = z^2 - z + 1 \quad (\text{ت}) \quad f(z) = z^2 + 1 \quad (\text{پ})$$

۴- نشان دهید که $\max_{|z|=r} |e^{z^2 - iz}|$ در نقاط ir با $r \leq \frac{1}{4}$ و در نقاط $re^{i\theta}$ با $\theta = \sin^{-1}(1/4r)$ و $r > \frac{1}{4}$ واقع می‌شود (راهنمایی: ملاحظه کنید که $|e^{z^2 - iz}| = e^{\operatorname{Re}(z^2 - iz)}$ سپس $\operatorname{Re}\{z^2 - iz\}$ را ماکزیمم کنید).

۵- با نمادهای تمرین ۳، نشان دهید که اگر $f(z)$ تحلیلی باشد، $m(r, f)$ پیوسته است.

۶- گیریم $P(z)$ یک چند جمله‌یی است و قرار می‌دهیم $f(z) = P(z)e^z$ نشان دهید که با $r \rightarrow \infty$ ، $M(r, f) \rightarrow \infty$ و $m(r, f) \rightarrow 0$.

۷- $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ را که یک چند جمله‌یی است در نظر می‌گیریم. نشان دهید که برای همه r های بزرگ، نقاط z_0 و z_1 می‌بایست بر دایره $|z|=r$ موجود باشند بطوری که:

$$|e^{P(z_0)}| = e^{(1/2)r^n}, \quad |e^{P(z_1)}| = e^{-(1/2)r^n}.$$

(راهنمایی: از قضیه ۸-۱۱ و از این نکته که $|e^{P(z)}|$ پیوسته است استفاده کنید).

۸- اگر $f(z)$ بر $|z| < 1$ تحلیلی و $|f(z)| < 1$ و $f(0) = 0$ نشان دهید که $|f'(0)| \leq 1$. تساوی تنها وقتی است که $f(z) = e^{iz}$ ، α حقیقی.

۹- فرض کنید برای $|z| \leq 1$ ، $f(z)$ تحلیلی است و برای $|z| \leq 1$ ، $|f(z)| \geq 1$. اگر $f(0) = 1$ ، نشان دهید f ثابت است.

۱۰- فرض کنید $f(z)$ در $|z| < R$ تحلیلی است و $f(0) = 0$. ثابت کنید

$$F(z) = f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \dots$$

برای $|z| < R$ تحلیلی است و

$$|F(z)| \leq \frac{r}{1-r} \quad (|z| = r < R).$$

۱۱- لم شوارتز استفاده کنید).

z_0 تحلیلی است و $f(z_0) = 0$. در این صورت

وجود است که شامل هیچ صفر دیگری از

نیست. پس $f(z)$ را می توان بصورت

$$f(z) = (z - z_0)^k F(z) \quad (k \text{ یک عدد صحیح و مثبت})$$

نوشته که در آن $F(z)$ در z_0 تحلیلی است و در این همسایگی و بر مرز آن صفری ندارد. باید توجه داشت که

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} F(z) + (z - z_0)^k F'(z),$$

بنابراین

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{F'(z)}{F(z)} \quad (16)$$

و

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_C \frac{k}{z - z_0} dz + \int_C \frac{F'(z)}{F(z)} dz. \quad (17)$$

عبارت زیر نشانه آخرین انتگرال در طرف راست (۱۷) درون و بر روی C تحلیلی است. پس به موجب قضیه کوشی، مقدار انتگرال صفر است و

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_C \frac{k}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{k}{\varepsilon e^{i\theta}} i \varepsilon e^{i\theta} d\theta = 2\pi i k.$$

یعنی که

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k,$$

که k مرتبه صفر $f(z)$ است. عبارت $f'(z)/f(z)$ به مشتق لگاریتمی $f(z)$ موسوم است زیرا در تمام نقاطی که $f(z)$ تحلیلی و مخالف صفر است، این عبارت برابر مشتق $\log f(z)$ است.

سپس فرض کنیم $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی است و بر C مخالف صفر است. بموجب قضیه ۸-۱۴، $f(z)$ حداکثر یک تعداد متناهی صفر درون C دارد. فرض کنیم صفرها در نقاط z_1, z_2, \dots, z_n باشند و به ترتیب مراتب آنها $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ باشد. در این صورت

$$f(z) = (z - z_1)^{\alpha_1} (z - z_2)^{\alpha_2} \dots (z - z_n)^{\alpha_n} F(z), \quad (18)$$

که $F(z)$ صفری درون و بر C ندارد. با تشکیل مشتق لگاریتمی در (۱۸)، حاصل می گردد.

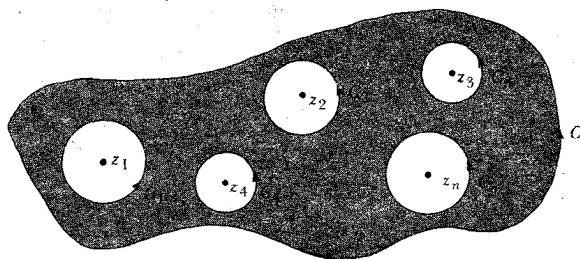
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{z - z_i} + \frac{F'(z)}{F(z)}. \quad (19)$$

انتگرال گیری از (۱۹) منجر می گردد به:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{z - z_i} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F'(z)}{F(z)} dz \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\alpha_i}{z - z_i} dz \right). \end{aligned} \quad (20)$$

— مرکز هر یک از نقاط z_i ، دوایر G_i را درون C رسم می کنیم که صفرهای دیگری برای $f(z)$ درون این دوایر موجود نباشد (ر. ک. شکل ۴) در این صورت برای هر z_i داریم:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\alpha_i}{z - z_i} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_i} \frac{\alpha_i}{z - z_i} dz = \alpha_i. \quad (21)$$



شکل ۴

از بکار بستن (۲۱) در (۲۰) حاصل می شود

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (22)$$

پس عبارت $(1/2\pi i) \int_C f'(z)/f(z) dz$ می تواند به عنوان "تابع شمارشی" برای صفرهای $f(z)$ درون C به حساب آید، که یک صفر با چند بارگی k ، k بار شمرده می شود. اگر $f(z)$ در یک همسایگی سوده z_0 تحلیلی باشد و عدد صحیح مثبت n را بتوان یافت به طوری که

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0, \infty,$$

در این صورت گوئیم که یک قطب از مرتبه n در z_0 داریم. اگر $n=1$ ، قطب راساده گویند. در بخش ۹-۱۰ نشان خواهیم داد تابع $f(z)$ را که در z_0 دارای قطب مرتبه n است، می توان به صورت $f(z) = F(z)/(z - z_0)^n$ نمایش داد که $F(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی است و $F(z_0) \neq 0$ ، هم چنانکه در (۱۶) مشاهده می گردد، اگر $f(z)$ صفری در z_0 داشته

باشد آنگاه $f'(z)/f(z)$ یک قطب ساده در z_0 خواهد داشت.
معادله (۲۲) را اینک می توان بصورت زیر تعمیم داد:

قضیه ۸-۱۸. فرض کنیم $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد مگر در یک تعداد متناهی قطبها درون C ، و فرض کنیم بر C ، $f(z) \neq 0$. اگر N و P به ترتیب تعداد صفرها و قطبهای درون C باشند، آنگاه:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

اثبات - فرض کنیم صفرهای $f(z)$ در نقاط z_1, \dots, z_n با چند بارگیهای به ترتیب $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ باشند و قطبهای $f(z)$ در نقاط w_1, \dots, w_m با چند بارگیهای به ترتیب β_1, \dots, β_m باشند، در این صورت $f(z)$ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$f(z) = \frac{(z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_n)^{\alpha_n}}{(z - w_1)^{\beta_1} \dots (z - w_m)^{\beta_m}} F(z),$$

که $F(z)$ تحلیلی است و هیچ صفر و هیچ قطب درون ندارد. با تشکیل مشتق لگاریتمی، داریم:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{z - z_i} - \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{z - w_i} + \frac{F'(z)}{F(z)}. \quad (23)$$

با انتگرال گرفتن از (۲۳) حاصل می شود

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\alpha_i}{z - z_i} dz \right) - \sum_{i=1}^m \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\beta_i}{z - w_i} dz \right). \quad (24)$$

سپس هر صفر و قطب $f(z)$ را با دوایر متمایز که این دوایر شامل صفرها و قطبهای دیگر نباشند، محصور می کنیم. در این صورت عیناً همانطور که از (۲۰) به (۲۲) رسیدیم می توانیم از (۲۴) به رابطه زیر برسیم:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=1}^m \beta_i = N - P. \quad (25)$$

در واقع این که (۲۵) همیشه بدون ارتباط با تابع $f(z)$ و مرز بسته C ، عددی صحیح است عجیب بنظر می رسد. این پدیده ریشه در خواص لگاریتم دارد. فرض کنیم، $f(z)$ بر مرز ساده بسته C تحلیلی و مخالف صفر است، قرار می دهیم.

$$\log f(z) = \text{Log } |f(z)| + i \arg f(z),$$

که در آن شاخه خاصی از لگاریتم انتخاب شده است، در این صورت

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_C \frac{d}{dz} \log f(z) = \operatorname{Log} |f(z)| \Big|_C + i \arg f(z) \Big|_C. \quad (26)$$

چونکه نقاط آغازی و پایانی مرز بسته C می‌بایست برهم بیافتند، $\operatorname{Log} |f(z)| \Big|_C = 0$. پس (۲۶) به رابطه زیر ساده می‌شود:

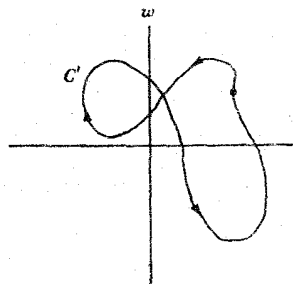
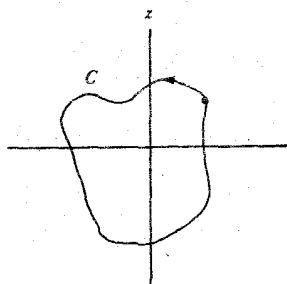
$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \arg f(z) \Big|_C. \quad (27)$$

بنابراین مقدار انتگرال تنها به تغییرات خالص در شناسه $f(z)$ بهنگام پیمایش z بر مرز C وابسته است.

اکنون نگاره مرز ساده بسته C در تحت $f(z)$ ، مرز بسته C' است، که لزوماً "ساده نیست". اگر $f(z)$ صفری درون C نداشته باشد، آنگاه C' مبدأ را احاطه نمی‌کند. بنابراین $\arg f(z)$ ، هنگامیکه $f(z)$ مرز C' را می‌پیماید، به مقدار اصلی‌اش باز می‌گردد (ر. ک. شکل ۵). این بدان معنی است که تغییرات خالص در $\arg f(z)$ بهنگام پیمایش z بر مرز C برابر است با صفر، یعنی که:

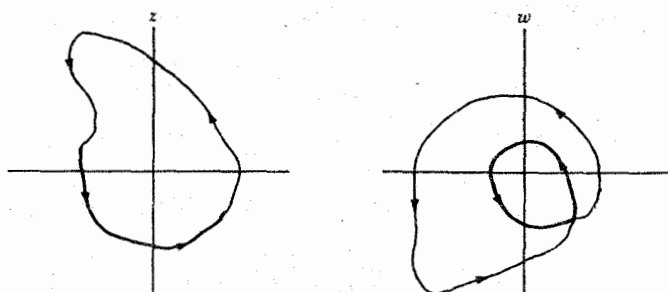
$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \arg f(z) \Big|_C = 0.$$

از سوی دیگر اگر $f(z)$ صفرهایی درون C داشته باشد، آنگاه C' دور مبدأ می‌بایست به پیچ (چرا؟) هر بار که C' حول مبدأ می‌گردد (در جهت مثبت)، شناسه $f(z)$ به میزان 2π افزایش می‌یابد. در شکل ۶، مرز ساده بسته C تحت تابع $f(z) = z^2$ بر مرز بسته C' نگاشته شده است و دوبار دور مبدأ گردیده است. هنگامیکه z به نقطه آغازی خود بر C باز می‌گردد، $\arg f(z)$ بر C' به میزان 4π افزایش می‌یابد.



شکل ۵

شکل ۶



باید توجه داشت، اینکه مبدأ درون مرز ساده بسته C باشد یا نباشد، ارتباطی به مسئله کنونی ما ندارد. مبدأ تنها نسبت به C' ، نگاره خم، نقش تعیین کننده دارد. تغییرات خالص در $\arg f(z)$ به هنگام پیمایش z بر مرز C به وردنش شناسه $f(z)$ بر C موسوم است و با $\Delta_C \arg f(z)$ نمایانده می شود. و با این نماد می توان (۲۷) را بصورت زیر نوشت:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i \Delta_C \arg f(z).$$

پس نتیجه قضیه ۸-۱۸ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = N - P. \quad (28)$$

همانندی (۲۸) به اصل شناسه موسوم است.

تذکر- برای هر صفر $f(z)$ درون C ، خم C' یک بار حول مبدأ در جهت مثبت می گردد، در حالی که برای هر قطب $f(z)$ ، درون C ، خم C' یک بار حول مبدأ در جهت منفی می گردد. برای اثبات این مطلب به تعریف دقیق شماره گشت نیازمندیم (کتاب الفرس^۱ (۱۰) ملاحظه شود).

دو لم زیر از نتایج اصل شناسه است:

لم ۱- فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی است و $f(z)$ و $g(z)$ صفری بر C ندارند. در این صورت

$$\Delta_C \arg f(z)g(z) = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg g(z).$$

اثبات - فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ به ترتیب درون C دارای N_1 و N_2 صفر باشند. در این صورت به موجب اصل شناسه

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z) = N_1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg g(z) = N_2.$$

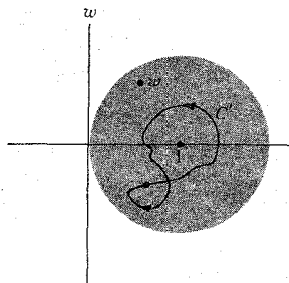
ولی $f(z)g(z)$ درون C دارای $N_1 + N_2$ صفر است. پس

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)g(z) = N_1 + N_2,$$

و اثبات کامل است.

لم ۲- فرض کنیم $h(z)$ بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی است و برای هر z بر C ، $|h(z)| < 1$. در این صورت $\Delta_C \arg(1 + h(z)) = 0$.

اثبات - مرز ساده بسته C با $w = F(z) = 1 + h(z)$ بر مرز بسته C' درون قرص $|w - 1| < 1$ نگاشته می شود (ر. ک. شکل ۷). چون که قرص در نیم صفحه راست واقع است، می توان صفحه را امتداد محور حقیقی منفی برید و شاخه یی (شاخه اصلی) برای $\arg F(z)$ به هنگامیکه $F(z)$ ، C' را می پیماید، بدست آورد. بنابراین

$$\Delta_C \arg F(z) = \Delta_C \arg(1 + h(z)) = 0.$$


شکل ۷

تذکر - تابع $F(z) = 1 + h(z)$ لازم نیست که برای z درون C تحلیلی باشد تا این که برای $\log F(z)$ شاخه یی برای z بر روی C موجود باشد. با توجه به اصل شناسه، ما تنها نشان داده ایم که تعداد صفرها و قطب های $F(z)$ درون C برابر است. به عنوان مثال $h(z) = 1/2z$ - در نامساوی $|h(z)| < 1$ بردایره واحد صدق می کند. تابع $F(z) = 1 + h(z)$ یک صفر ساده (در $z = -\frac{1}{2}$) و یک قطب ساده (در مبدا) دارد.

با ترکیب این لم‌های توان قضیه ۸-۱۹ را اثبات نمود.

قضیه ۸-۱۹ (قضیه روشه)^۱. فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی مرز ساده‌بسته C تحلیلی اند و بر C ، $|g(z)| < |f(z)|$. آنگاه $f(z) + g(z)$ و $f(z)$ درون C تعداد صفرهای برابر دارند.

اثبات - می‌نویسیم:

$$f(z) + g(z) = f(z) \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right)$$

و توجه می‌کنیم که به موجب لم ۱،

$$\Delta_C \arg(f(z) + g(z)) = \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right). \quad (29)$$

چونکه بر C ، $|g(z)/f(z)| < 1$ با بکار بردن لم ۲ حاصل می‌شود.

$$\Delta_C \arg \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = 0.$$

پس (۲۹) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\Delta_C \arg(f(z) + g(z)) = \Delta_C \arg f(z). \quad (30)$$

اگر N تعداد صفرهای $f(z) + g(z)$ درون C باشد. آنگاه به موجب (۳۰) و اصل شناسه، $\Delta_C \arg f(z) = N$ ، بدین ترتیب اثبات کامل است.

اثبات قضیه روشه سرشتی "هندسی" داشت و هم اینک یک اثبات "تحلیلی" برای آن بیان می‌کنیم:

اثبات مجدد قضیه روشه: گیریم $\{\phi_t(z)\}$ خانواده‌ی از توابع باشد که با $\phi_t(z) = f(z) + tg(z)$ ($0 \leq t \leq 1$) تعریف شود. بر مرز C داریم:

$$|\phi_t(z)| = |f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0.$$

چونکه $|f(z)| - |g(z)|$ بر مجموعه فشرده C پیوسته است، پس بر آن می‌نیم، مثلاً " m " دارد پس برای هر z بر C ،

$$|\phi_t(z)| \geq m > 0 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (31)$$

تعریف می‌کنیم که

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi'_t(z)}{\phi_t(z)} dz.$$

ملاحظه می‌شود که $h(t)$ معرف تعداد صفرهای $\phi_t(z)$ درون C است. به‌ویژه $h(0)$ و $h(1)$ به ترتیب معرف صفرهای $\phi_0(z) = f(z)$ و $\phi_1(z) = f(z) + g(z)$ درون C می‌باشند. اگر بتوانیم نشان دهیم $h(0) = h(1)$ ، اثبات کامل خواهد بود. چونکه $h(t)$ یک تابع پله‌ای است، کافی است ثابت کنیم $h(t)$ پیوسته است، زیرا که تنها تابع پله‌ای پیوسته، تابع ثابت است.

به ازاء t_2 و t_2 مفروض در $[0, 1]$ داریم:

$$\begin{aligned} h(t_2) - h(t_1) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{f' + t_2 g'}{f + t_2 g} - \frac{f' + t_1 g'}{f + t_1 g} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{(t_2 - t_1)(g'f - f'g)}{(f + t_2 g)(f + t_1 g)} \right) dz. \end{aligned} \quad (32)$$

چون که $f(z)$ ، $g(z)$ ، $f'(z)$ و $g'(z)$ بر C تحلیلی هستند، کراندار نیز می‌باشند، می‌توان فرض کرد که

$$|f(z)|, |g(z)|, |f'(z)|, |g'(z)| \leq M. \quad (33)$$

در ازای C را با L نمایش می‌دهیم، در این صورت از (۳۲) و (۳۳) بدست می‌آید که:

$$|h(t_2) - h(t_1)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|t_2 - t_1| 2M^2}{m^2} L = K |t_2 - t_1|,$$

که در آن K عدد ثابتی مستقل از t_2 و t_1 می‌باشد. با $\varepsilon > 0$ مفروض داریم

$$|h(t_2) - h(t_1)| > \varepsilon \quad \text{آنگاه} \quad |t_2 - t_1| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

پس $h(t)$ بر $[0, 1]$ پیوسته است و اثبات کامل است.

تذکره - در قضیه روشه شرط $|g(z)| < |f(z)|$ بر C رانمی‌توان با $|g(z)| \leq |f(z)|$ بر C جایگزین نمود. این مطلب را با قرار دادن $g(z) = -f(z)$ می‌توان دید زیرا که در این صورت $f(z) + g(z) \equiv 0$ درون C و به تعداد صفرهای $f(z)$ هم ارتباطی ندارد.

بعنوان اولین کاربرد قضیه روشه، قضیه زیر را ثابت می‌کنیم:

قضیه ۸-۲۰ (قضیه هرویتس)^۱. فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع تحلیلی درون و بر روی مرز ساده بسته C باشد. و فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ درون C به $f(z)$ همگرای یکنواخت است. اگر $f(z)$ صفری بر C نداشته باشد، آنگاه تعداد صفرهای $f(z)$ در درون C برابر است با تعداد صفرهای $f_n(z)$ در درون C برای n های بس بزرگ.

اثبات - ابتداء باید توجه داشت، بموجب قضیه ۸-۶ تابع حدی $f(z)$ درون و بر روی C تحلیلی است. فرض کنیم $m > 0$ نمایشگر می‌نیم $|f(z)|$ بر C باشد. چونکه $\{f_n(z)\}$ بر C همگرای یکنواخت است. پس با $n > N(m)$ و بر C داریم

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|$$

پس به موجب قضیه روشه، تعداد صفرهای $f(z)$ درون C برابر تعداد صفرهای تابع زیر است:

$$f(z) + (f_n(z) - f(z)) = f_n(z) \quad (n > N).$$

با استفاده از قضیه روشه می‌توان اثبات دیگری برای قضیه اساسی جبر بدست داد.

فرض کنیم

$$\begin{aligned} P_n(z) &= a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \\ &= P_{n-1}(z) + a_n z^n \quad (a_n \neq 0). \end{aligned}$$

در این صورت برای $|z| = r > 1$ داریم

$$\begin{aligned} \left| \frac{P_{n-1}(z)}{a_n z^n} \right| &\leq \frac{(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|) r^{n-1}}{|a_n| r^n} \\ &= \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|a_n| r}. \end{aligned}$$

پس به ازاء $|z| = r > \max\{(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)/|a_n|, 1\}$ و بر دایره $|z| = r$ داریم:

$$|P_{n-1}(z)| < |a_n z^n|$$

چون که $a_n z^n$ درون $|z| = r$ دارای n صفر (همگی در مبدا) است، پس تابع

$$P_n(z) = P_{n-1}(z) + a_n z^n.$$

نیز n صفر درون دایره $|z| = r$ دارد.

تذکر - این اثبات قضیه اساسی جبر از اثباتهای قبلی خیلی قانع کننده تر است. اول اینکه، مستقیماً ثابت می‌کنیم که یک چند جمله‌یی n ریشه دارد (در حالی که قبلاً "حداقل یکی" ثابت شد). ثانیاً، و مهم‌تر اینکه کرانی برای کالبد ریشه‌ها بر حسب ضرایب بدست می‌آید. ما اینک می‌دانیم که همگی ریشه‌ها درون قرص

$$|z| \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-1}|}{|a_n|} \quad (|z| > 1).$$

واقعند.

برای تقریب زدن هر جایگاه صفرهای یک تابع تحلیلی، غالباً "قضیه روشه به ماکمک می‌نماید.

مثال - نشان دهید که پنج ریشه چند جمله‌یی

$$P(z) = z^5 + 6z^3 + 2z + 10$$

درون طوق $1 < |z| < 3$ واقعند

فرض کنیم $f(z) = z^5 + 6z^3 + 2z$ و $g(z) = 10$. بر دایره $|z| = 1$

$$|f(z)| \leq |z|^5 + 6|z|^3 + 2|z| = 9.$$

پس $P(z) = f(z) + g(z)$ و $g(z)$ درون $|z| < 1$ صفرهای مساوی دارند، یعنی هیچ کدام صفر ندارند. ملاحظه می‌شود که بر $|z| = 1$ ، $|P(z)| \geq 1$ و $P(z)$ نمی‌تواند صفری بر دایره داشته باشد.

این بار $f(z) = z^5$ و $g(z) = 6z^3 + 2z + 10$. بر $|z| = 3$ داریم

$$|g(z)| \leq 6 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 + 10 < |f(z)| = 3^5.$$

پس صفرهای $P(z)$ می‌بایست در $|z| < 3$ یعنی درون طوق $1 < |z| < 3$ باشند.

تذکر - با قرار دادن $f(z) = 6z^3$ و $g(z) = z^5 + 2z + 10$ می‌توانیم نشان دهیم سه صفر $P(z)$ درون $1 < |z| < 2$ و در نتیجه دو ریشه دیگر در طوق $2 < |z| < 3$ واقع است.

عنوان آخرین کاربرد قضیه روشه قضیه زیر را اثبات می‌کنیم:

قضیه ۸-۲۱ (قضیه نگاشت باز). تابع تحلیلی غیر ثابت مجموعه‌های باز را بر

مجموعه‌های باز می‌نگارد.

اثبات - فرض کنیم $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی است. می بایست نشان دهیم که نگاره هر همسایگی بس کوچک z_0 در صفحه z شامل یک همسایگی $w_0 = f(z_0)$ در صفحه w است. $\delta > 0$ را طوری انتخاب می کنیم که تابع $f(z) - w_0$ بر قرص $|z - z_0| \leq \delta$ تحلیلی باشد و به طوری که $f(z) - w_0$ صفری بر دایره $|z - z_0| = \delta$ نداشته باشد. و این کار با توجه به فرع قضیه ۸-۱۳ شدنی است. فرض کنیم m می نیم مقدار $|f(z) - w_0|$ بر دایره $|z - z_0| = \delta$ باشد. نشان خواهیم داد که نگاره قرص $|z - z_0| < \delta$ در تحت تابع $f(z)$ شامل قرص $|w - w_0| < m$ می باشد (ر. ک. شکل ۸)

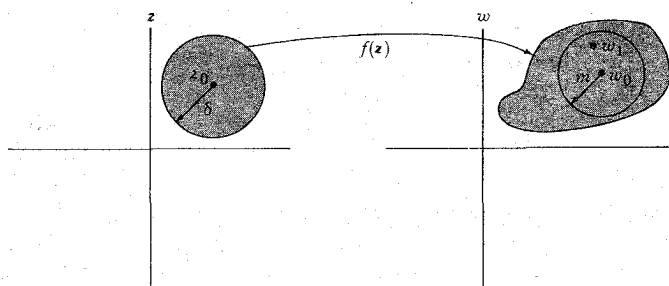
نقطه w_1 را در قرص $|w - w_0| < m$ می گیریم. در این صورت بر دایره $|z - z_0| = \delta$ داریم

$$|w_0 - w_1| < m \leq |f(z) - w_0|$$

به موجب قضیه روشه، تابع

$$(f(z) - w_0) + (w_0 - w_1) = f(z) - w_1$$

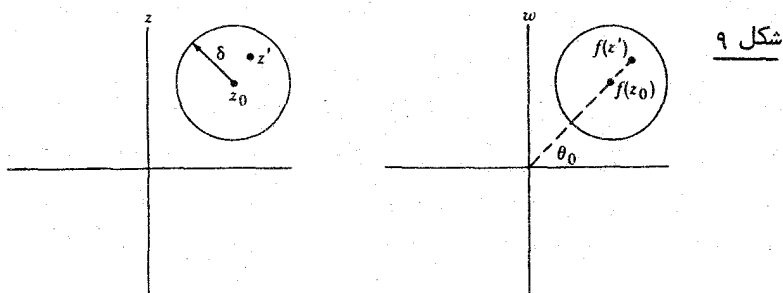
و تابع $f(z) - w_0$ در $|z - z_0| < \delta$ اصفه های مساوی دارند. چونکه $f(z) - w_0$ حداقل یک صفر دارد (در z_0)، تابع $f(z) - w_1$ نیز حداقل یک صفر خواهد داشت. یعنی که حداقل یک بار $f(z) = w_1$. چون که w_1 اختیاری بود، نگاره قرص $|z - z_0| < \delta$ می بایست شامل همه نقاط قرص $|w - w_0| < m$ باشد.



شکل ۸

فرع - تابع تحلیلی غیر ثابت میدان را بر میدان می نگارد.

اثبات - یادآور می شویم که میدان، مجموعه باز همبند است و با توجه به این قضیه ما تنها باید نشان دهیم که تابع تحلیلی مجموعه همبند را بر مجموعه همبند می نگارد. ولی این از تمرین ۸ بخش ۲-۵ نتیجه می شود، زیرا که تابع تحلیلی، پیوسته هم می باشد. با استفاده از قضیه نگاشت باز اثبات کوتاهی بر قضیه ماکزیم کالبد می توان ارائه کرد.



فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی است و z_0 نقطه‌یی در \mathcal{D} است. اگر $f(z)$ ثابت نباشد، آنگاه نگاره قرص $|z - z_0| < \delta$ شامل یک قرص $|w - f(z_0)| < m$ در صفحه w است. اگر $f(z_0) = Re^{i\theta_0}$ ، آنگاه به ازاء هر ε ، $0 < \varepsilon < m$ ، نقطه z' در قرص $|z - z_0| < \delta$ متناظر می‌گردد و به طوری که $f(z') = (R + \varepsilon)e^{i\theta_0}$ (ر. ک. شکل ۹).
پس

$$|f(z')| = R + \varepsilon > |f(z_0)| = R,$$

بنابراین z_0 ماکزیمم برای $|f(z)|$ نیست.

پرسش‌ها

- ۱- آیا می‌شود که $f(z)$ در یک همسایگی سوده z_0 تحلیلی باشد، در حالی که به ازاء هر n ، $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z)$ موجود نباشد؟
- ۲- اهمیت ثابت $2\pi i$ در چیست؟
- ۳- چگونه خواص $\Delta_C \arg f(z)$ یا $\log f(z)$ مقایسه می‌شوند؟
- ۴- آیا با استفاده از قضیه روزه می‌توان ربعی از صفحه را که صفرهای یک تابع تحلیلی در آن واقع می‌شود مشخص کرد؟
- ۵- آیا می‌توان قضیه روزه را برای حالتی که قطبی نیز در درون مرز باشد گسترش داد؟
- ۶- آیا یک تابع پیوسته غیر ثابت، مجموعه‌های باز را بر مجموعه‌های باز می‌نگارد؟
- ۷- آیا یک تابع تحلیلی مجموعه‌های بسته را بر مجموعه‌های بسته می‌نگارد؟

تمرین‌ها

- ۱- اگر $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد و بر C ، $f(z) \neq a$ ،

نشان دهید که تعداد دفعاتی که $f(z)$ درون G مقدار a را می‌پذیرد، عبارت است از:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz.$$

۲- فرض کنید $f(z)$ درون و بر مرز ساده بسته G تحلیلی است مگر در یک تعداد متناهی قطب درون G . صفرها را (که هیچ کدام بر G نیستند) با z_1, \dots, z_n و قطب‌ها را با w_1, \dots, w_m می‌نمایانیم. اگر $g(z)$ درون و بر روی G تحلیلی باشد، ثابت کنید که:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n g(z_i) - \sum_{i=1}^m g(w_i)$$

که در آن هر صفر و هر قطب در حاصلجمع به میزان چندبارگی آن ظاهر می‌گردد.

۳- اگر $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ ، $1/2\pi i \int_{|z|=R} z P'(z) / P(z) dz$ را برای مقادیر بزرگ R محاسبه کنید.

۴- اگر $f(z)$ در z_0 تحلیلی باشد، نشان دهید، $f(z)$ صفری از مرتبه k در z_0 دارد اگر و فقط اگر $1/f(z)$ قطبی از مرتبه k در z_0 داشته باشد.

۵- اگر $f(z)$ در قرص $|z| < 1$ تحلیلی و مخالف صفر باشد، ثابت کنید، برای $0 < r < 1$

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta\right) = |f(0)|.$$

۶- نشان دهید، چند جمله‌یی $z^4 + 4z - 1$ یک ریشه در قرص $|z| < \frac{1}{2}$ دارد و سه ریشه دیگر در طوق $\frac{1}{2} < |z| < 2$ جای دارند.

۷- اگر $a > e$ ، ثابت کنید، معادله $e^z = az^n$ درون دایره واحد n ریشه دارد. وقتی $n = 2$ ، نشان دهید هر دو ریشه حقیقی هستند.

۸- اگر $a > 1$ ، ثابت کنید $f(z) = z + e^{-z}$ دقیقاً "در یک نقطه در نیم صفحه راست برابر a می‌گردد.

۹- نشان دهید، هر چقدر R کوچک باشد، همه صفرهای تابع

$$1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \dots + \frac{1}{n! z^n}$$

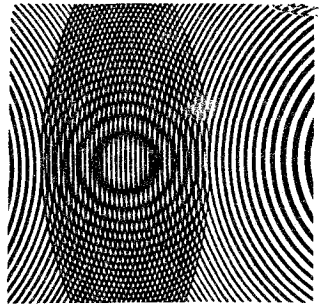
برای n به اندازه کافی بزرگ، درون قرص $|z| < R$ قرار دارند.

۱۰- فرض کنید $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع تحلیلی است که بر زیر مجموعه‌های فشرده میدان \mathcal{D} به $f(z)$ همگرای یکنواخت است. فرض کنید برای هر n ، $f_n(z_n) = 0$ ،

هر z_n متعلق به \mathcal{D} است. نشان دهید، هر نقطه حدى $\{z_n\}$ که به \mathcal{D} متعلق باشد، یک صفر $f(z)$ است. (راهنمایی: قضیه هرویتس را بکار ببرید).

۱۱- فرض کنید $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f(z) - f(z_0)$ دارای صفری از مرتبه n در z_0 است. نشان دهید، همسایگی‌های $N(z_0; \delta)$ و $N(f(z_0); \varepsilon)$ موجودند به طوری که هر نقطه در $N(f(z_0); \varepsilon)$ حداقل نگاره یک و حداکثر نگاره n نقطه متمایز از $N(z_0; \delta)$ می‌باشد.

۱۲- فرض کنید $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f'(z_0) \neq 0$. نشان دهید، تابع تحلیلی $g(z)$ موجود است. بطوری که در یک همسایگی z_0 ، $f(g(z)) = z$. این به قضیه تابع وارون موسوم است.



۹- رشته لران وقضیه مانده

در این فصل رفتار تابع را در نقاطی که تحلیلی نیست بررسی می‌کنیم. در حالی که این توابع را نمی‌توان به یک رشته تیلر بسط داد، نشان خواهیم داد که بسطی به رشته لران امکان پذیر است. اینک از انتگرال مختلط که در فصل ۷ بنا کردیم و در فصل ۸ تکمیل کردیم، برای محاسبه انتگرالهای معین از توابع حقیقی استفاده می‌کنیم.

۹-۱. رده بندی تکینه‌ها

گوئیم که یک تابع تک - مقداری در یک نقطه تکینه دارد اگر چنانچه در آن نقطه تحلیلی نباشد. علاوه اگر تابع در یک همسایگی سوده این نقطه تحلیلی باشد، آنگاه گوئیم که تکینه تنها است. رفتار تابع $f(z)$ در نزدیکی یک تکینه تنهای z_0 را میتوان به شرح زیر توصیف نمود:

- (۱) $f(z)$ در یک همسایگی z_0 کراندار است. مثال: قرار می‌دهیم $f(z) = (\sin z)/z$ ، $z \neq 0$. در این صورت $f(z)$ در یک همسایگی مبداء کراندار است. این مثال چندان جالب نیست زیرا که با تعریف $f(0) = 1$ ، می‌توان $f(z)$ را تحلیلی کرد.
- (۲) اگر z به z_0 میل کند. $f(z)$ ممکن است به ∞ میل کند. مثال: قرار می‌دهیم $f(z) = 1/z$ ، $z \neq 0$. در این حالت $f(z)$ در مبداء یک تکینه تنها دارد و اگر $z \rightarrow 0$ آنگاه $1/z \rightarrow \infty$.

(۳) ممکن است $f(z)$ نه در (۱) صادق و نه در (۲) صادق باشد. مثال: قرار می‌دهیم $f(z) = e^{1/z}$ ، $z \neq 0$. در این مورد توجه کنید که برای $z = x$ ، حقیقی، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0.$$

پس در یک همسایگی مبدا، $e^{1/z}$ نه کراندار است و نه به ∞ میل می کند.

ملاحظه کنید که از شیوه "زیرکانه" ای که (۳) را بیان داشتیم، نتیجه می شود که هر تکنیک تنها در یکی از حالات (۱) و (۲) و یا (۳) صدق خواهد کرد. هر یک از این سه نوع تکنیک تنها دارای سرشت های عمده بی هستند که در سه قضیه بعد بدست خواهند آمد.

قضیه ۹-۱ (قضیه ریمان). اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تکنیک تنها داشته باشد و در یک همسایگی سوده z_0 کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ را میتوان در z_0 به گونه بی تعریف کرد که در z_0 تحلیلی باشد.

اثبات - بازاء R ، $R > 0$ ، $f(z)$ در قرص سفته

$$0 < |z - z_0| \leq R.$$

تحلیلی است: اگر z_1 نقطه مفروضی درون قرص باشد، عدد مثبت r را طوری انتخاب می کنیم که $R > |z_1 - z_0| < R$. تابع $f(z)$ در طوق محصور به دوایر $C: |z - z_0| = R$ و $C_1: |z - z_0| = r$ تحلیلی است (ر. ک. شکل ۱) بنابراین بموجب فرمول انتگرال کوشی

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_1} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_1} d\xi. \quad (1)$$

ملاحظه می شود که مقدار (۱) به انتخاب r وابسته نیست. ثابت می کنیم آخرین انتگرال طرف راست (۱) صفر است، و برای این کار نشان می دهیم که برای مقادیر بس کوچک r ، قدر مطلق آنرا به دلخواه می توان کوچک کرد. چون که $f(z)$ در این قرص کراندار است، مثلاً " $|f(z)| \leq M$ " داریم:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z_1} d\xi \right| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{C_1} \frac{|d\xi|}{|\xi - z_1|} \leq \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi r}{|z_1 - z_0| - r}. \quad (2)$$

پس (۲) با r به صفر میل می کند و (۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_1} d\xi. \quad (3)$$

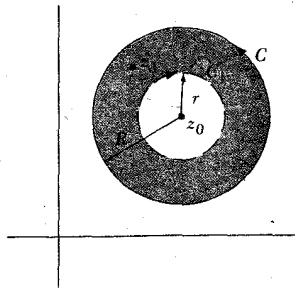
چونکه z_1 در قرص $0 < |z - z_0| < R$ اختیاری بود، (۳) برای هر z با $0 < |z - z_0| < R$ به صورت زیر در می آید:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (4)$$

در اثبات قضیه ۸-۲ نشان دادیم که انتگرال طرف راست (۴) برای $|z - z_0| < R$ نمایشگر یک تابع تحلیلی است. پس با تعریف

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi,$$

تابع $f(z)$ در تمامی قرص $|z - z_0| < R$ تحلیلی می‌گردد و بدین ترتیب اثبات تمام است.



شکل ۱

فرع - اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تکینه تنها داشته باشد و در یک همسایگی z_0 کراندار باشد، آنگاه $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ موجود است.

اثبات - چون که تابع تحلیلی پیوسته است، $f(z_0)$ در قضیه ۹-۱ می‌بایست به گونه‌یی تعریف شده باشد که $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ به‌ویژه $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ می‌بایست موجود باشد.

ما نشان دادیم توابعی که در شرایط قضیه ۹-۱ صادق باشند. صرفاً به این دلیل تکینه دارند که در نقطه مورد بحث بطور "مناسب" تعریف نشده‌اند. اگر $f(z)$ در z_0 تکینه تنها داشته باشد و اگر $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ موجود باشد، در این صورت گوئیم که این تکینه برادشتنی است. قضیه ۹-۱ مبین آن است که اگر تابعی در یک همسایگی سوده نقطه‌یی تحلیلی و کراندار باشد، در بدترین حالت در آن یک تکینه برداشتنی دارد. در تمام مقاصد عملی می‌توان چنین تابعی را تحلیلی فرض کرد. پس به هنگامیکه از $(\sin z)/z$ به عنوان تابع تام صحبت می‌شود منظور این است که $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} (\sin z)/z = 1$ قابل توجه است که بسط ماکلورن برای این تابع عبارت است از:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

یادآور می‌شویم، تابع $f(z)$ که در همسایگی سوده $z = z_0$ تحلیلی است، دارای قطبی

از مرتبه k (k عدد صحیح مثبت) است اگر چنانچه

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = A \neq 0, \infty$$

اینک به بررسی تکنیکه‌های نوع (۲) می‌پردازیم:

قضیه ۹-۲. اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تکنیکه نداشته باشد و با $z \rightarrow z_0$ ، $f(z) \rightarrow \infty$ ،

آنگاه $f(z)$ در $z = z_0$ قطب دارد.

اثبات - اگر با $z \rightarrow z_0$ ، $f(z) \rightarrow \infty$ ، آنگاه $g(z) = 1/f(z)$ در یک همسایگی سوده

z_0 کراندار است. به موجب قضیه ۹-۱ ، $g(z)$ در z_0 تکنیکه برداشتی دارد و می‌توان نوشت:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

که نتیجه می‌شود:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = a_0 = 0.$$

اکنون ضرایب $g(z)$ همگی نمی‌تواند صفر باشد زیرا، این بدان معنی است که در

یک همسایگی سوده z_0 ، $f(z) \equiv \infty$. فرض کنیم a_k اولین ضریب مخالف صفر

$g(z)$ باشد. در این صورت:

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

و

$$\frac{1}{f(z)(z - z_0)^k} = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots \quad (5)$$

پس

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)(z - z_0)^k} = a_k \neq 0;$$

یعنی

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \frac{1}{a_k}.$$

پس، $f(z)$ در $z = z_0$ قطب مرتبه k دارد و قضیه ثابت می‌گردد.

تذکر - اگر $f(z)$ در z_0 قطب داشته باشد، بنابه تعریف نتیجه می شود با $z \rightarrow z_0$ ، $f(z) \rightarrow \infty$ پس قضیه ۹-۲ یک شرط لازم و کافی را برای اینکه تکنی تنها، قطب باشد بیان می دارد.

فرع - اگر $f(z)$ در $z = z_0$ قطب داشته باشد، آنگاه $f(z)$ را می توان بصورت زیر نوشت:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

که k مرتبه قطب است

اثبات - نمادهای قضیه ۹-۲ را بکار می بریم، بموجب (۵)، تابع

$$\frac{1}{f(z)(z - z_0)^k} = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots \quad (a_k \neq 0)$$

در $z = z_0$ تحلیلی است. چونکه $a_k \neq 0$ ، با استفاده از پیوستگی تابع می توان نشان داد که یک همسایگی z_0 موجود است که در آن

$$\frac{1}{f(z)(z - z_0)^k} \neq 0.$$

پس $f(z)(z - z_0)^k$ در z_0 تحلیلی است و بسط

$$f(z)(z - z_0)^k = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - z_0)^m \quad \left(c_0 = \frac{1}{a_k} \neq 0 \right)$$

در یک همسایگی z_0 برقرار است، یعنی که

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - z_0)^{m-k} \quad (6)$$

با قرار دادن $n = m - k$ و $b_n = c_{m+k}$ در (۶) حاصل می شود.

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - z_0)^{m-k} = \sum_{n=-k}^{\infty} b_n (z - z_0)^n.$$

یک تکنی تنها که نه برداشتنی باشد و نه قطب باشد به تکنی تنهای اساسی، موسوم است. رفتار تابع در همسایگی نقطه‌یی که در آن تکنی تنهای اساسی دارد کاملاً "حیرت-انگیز است.

قضیه ۹-۳ (کازوراتی - وایرشراس) ^۱. اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تکیه تنهای اساسی داشته باشد، آنگاه در هر همسایگی سوده z_0 ، $f(z)$ به هر عدد مختلط، هر چقدر بخواهیم نزدیک می شود.

اثبات - فرض کنیم، به ازاء عدد مختلط a و برای هر z در قرص سفته $0 < |z - z_0| < \delta$ داشته باشیم

$$|f(z) - a| \geq \varepsilon > 0$$

قرار می دهیم $g(z) = 1/(f(z) - a)$ در این صورت

$$|g(z)| = \left| \frac{1}{f(z) - a} \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{اگر} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \quad \text{آنگاه}$$

پس به موجب قضیه ۹-۱، $g(z)$ در $z = z_0$ تکیه برداشتنی دارد و می توانیم بنویسیم:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a} = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

ملاحظه می شود که $\lim_{z \rightarrow z_0} 1/(f(z) - a) = a_0$ دو حالت قابل بررسی موجود است:

حالت ۱- $a_0 \neq 0$. در این صورت $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = 1/a_0 + a$ و $f(z)$ در $z = z_0$ تکیه برداشتنی دارد.

حالت ۲- $a_0 = 0$ فرض کنیم a_k اولین ضریب مخالف صفر باشد، در این صورت:

$$1/(f(z) - a)(z - z_0)^k = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots$$

در این حالت

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k (f(z) - a) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \frac{1}{a_k},$$

و $f(z)$ در $z = z_0$ قطب مرتبه k دارد. چون که بنا به فرض هر دو حالت منتفی است. پس نامساوی $|f(z) - a| \geq \varepsilon > 0$ نمی تواند درست باشد و اثبات تمام است.

فرع - فرض کنیم $f(z)$ در $z = z_0$ تکیه تنهای اساسی داشته باشد. به ازاء هر عدد مختلط a ، دنباله $\{z_n\}$ موجود است به طوری که $z_n \rightarrow z_0$ و $f(z_n) \rightarrow a$.

اثبات - دنباله $\{\delta_n\}$ را اختیار می کنیم که برای هر n ، $\delta_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$

به موجب قضیه ۹-۳ دنباله‌ی از نقاط $\{z_n\}$ موجود است بطوری که برای $0 < |z_n - z_0| < \delta_n$ ،
 $|f(z_n) - a| < 1/n$ پس به هنگامی که $z_n \rightarrow z_0$ ، $f(z_n) \rightarrow a$.

یک تعمیم قضیه ۹-۳ به صورت زیر است:

قضیه بزرگ پیکار - در همسایگی تکینه تنه‌ای اساسی، تابع هر مقدار مختلط را، با
 یک استثناء ممکن، به دفعات نامتناهی می‌پذیرد.

جهت اثبات به کتاب هیل^۱ (۱۱) مراجعه کنید.

تابع $e^{1/z}$ در $z=0$ تکینه تنه‌ای اساسی دارد و هرگز مقدار صفر نمی‌پذیرد. بموجب
 قضیه بزرگ پیکار، $e^{1/z}$ می‌بایست در یک همسایگی مبدا، تمام دیگر مقادیر را به دفعات
 نامتناهی بپذیرد. ما این مطلب را با یافتن نقاطی که در آنجاها $e^{1/z} = i$ تشریح می‌کنیم.
 ابتداء توجه می‌کنیم که $|e^{1/z}| = |i| = 1$ تنها وقتی که $\operatorname{Re} z = 0$ قرار می‌دهیم
 $z = iy$ ، y حقیقی، در این صورت

$$e^{1/iy} = e^{-i/y} = \cos \frac{1}{y} - i \sin \frac{1}{y} = i$$

اگر و تنها اگر $1/y = -\pi/2 + 2n\pi$ ، n صحیح. با قرار دادن

$$z_n = \frac{1}{i(-\pi/2 + 2n\pi)},$$

برای هر n ، خواهیم داشت $e^{1/z_n} = i$. ملاحظه می‌شود که به تعداد نامتناهی
 z_n در هر همسایگی مبدا قرار دارد. می‌توان به نقطه ∞ بعنوان تکینه تنها اطلاق نمود.
 تابع $f(z)$ در $z = \infty$ تکینه تنها دارد. اگر چنانچه $f(z)$ در یک همسایگی سوده ∞ تحلیلی
 باشد، یعنی که عدد حقیقی R موجود باشد بطوری که برای $R < |z| < \infty$ ، تابع $f(z)$
 تحلیلی باشد.

باید توجه داشت که $f(z)$ برای $|z| > R$ تحلیلی است اگر و تنها اگر $f(1/z)$ برای
 $|1/z| < 1/R$ تحلیلی باشد. پس $f(z)$ در $z = \infty$ تکینه تنها دارد اگر و تنها اگر $f(1/z)$ در
 $\bar{z} = 0$ تکینه تنها داشته باشد. علاوه بنابر تعریف این تکینه تنه‌ای $f(z)$ در $z = \infty$ به ترتیب
 برداشتنی، قطب و یا اساسی است چنانچه تکینه $f(1/z)$ در $z = 0$ برداشتنی، قطب و یا
 اساسی باشد.

مثال ۱- تابع $f(z) = z^2 + 1$ دارای یک تکیه اساسی تنها از مرتبه ۲، در $z = \infty$ است زیرا که $f(1/z) = (1/z^2) + 1$ تکیه اساسی تنها در $z = 0$ دارد.

مثال ۲- تابع $f(z) = e^z$ در $z = \infty$ دارای تکیه اساسی تنها است، زیرا که یک $f(1/z) = e^{1/z}$ در $z = 0$ تکیه اساسی تنها دارد.

با این تعریف، مجدداً رفتار توابع تام را بررسی می‌کنیم، اگر $f(z) = \sum_{n=0}^k a_n z^n$ چند جمله‌یی از درجه k باشد، آنگاه

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^k} \left(a_k + \sum_{n=0}^{k-1} a_n z^{n-k} \right)$$

در $z = 0$ قطب مرتبه k دارد. پس $f(z)$ در $z = \infty$ قطب مرتبه k دارد. اینک ملاحظه می‌گردد که قضیه ۸-۱۱، حالت خاص قضیه ۹-۳ است. یعنی که با $z \rightarrow \infty$ ، $f(z) \rightarrow \infty$ ، زیرا $f(z)$ در $z = \infty$ قطب دارد. شایان توجه است که تابع تام $f(z)$ در $z = \infty$ قطب مرتبه k دارد اگر و فقط اگر

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^k} = A \neq 0, \infty. \quad (7)$$

بعلاوه اگر (۷) برقرار باشد آنگاه (بنابه قضیه ۸-۱۰) $f(z)$ یک چند جمله‌یی از درجه k است. پس تابع تام متعالی نمی‌تواند در $z = \infty$ قطب داشته باشد. و این بدان معنی است که توابع تام متعالی در $z = \infty$ می‌بایست تکیه اساسی داشته باشند.

اینک می‌توان یک مقایسه جالب میان قضیه ۸-۹ و قضیه ۹-۳ انجام داد. قضیه ۸-۹ صرفاً "بیانگر آن است که یک تابع تام هر چقدر بخواهیم به هر عدد مختلط نزدیک می‌شود، قضیه ۹-۳ مبین آن است که یک تابع تام متعالی هر چقدر بخواهیم به هر عدد مختلط که خارج دایره $|z| = R$ باشد نزدیک می‌شود. البته رفتار تابع تام غیر متعالی (یک چند جمله‌یی) قبلاً " بطور کامل مورد بحث قرار گرفته است.

سپس مثالی از یک تکیه‌یی که تنها نیست می‌آوریم: تابع

$$f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$$

در مبدأ تکیه دارد زیرا که $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ موجود نیست. بعلاوه نقاط $z_n = 1/n\pi$ نیز تکیه‌های $f(z)$ می‌باشند چونکه با $n \rightarrow \infty$ ، $z_n \rightarrow 0$ پس هر همسانی مبدأ شامل تکیه‌های $f(z)$ می‌باشد. پس تکیه در $z = 0$ تنها نیست.

تذکر - دیدیم که تکینه‌های تنهای یک تابع تک - مقداری، فقط تکینه‌های برداشتنی، قطب‌ها و تکینه‌های اساسی هستند. مبداء را می‌توان به عنوان تکینه‌های تابع چندمقداری $\log z$ تصور کرد، زیرا که در هر نقطه مفروض بااستثنای مبداء یک شاخه از این تابع تحلیلی است. نقطه z_0 را یک نقطه شاخه تابع $f(z)$ گوئیم، اگر چنانچه هر مرز ساده بسته C در نظرگیریم که z_0 درون آن باشد و z مرز C را به پیماید آنگاه $f(z)$ به مقدار اولیه‌اش باز نگردد. مبداء نقطه شاخه $\log z$ است. تمام توابع چند مقداری نقاط شاخه دارند (و هیچ تابع تک - مقداری نقطه شاخه‌یی ندارد). چونکه تابع تحلیلی می‌بایست تک - مقداری باشد، پس هیچ تکینه تنها نمی‌تواند نقطه شاخه باشد.

پرسش‌ها

- ۱- آیا می‌شود تابعی به تعداد نامتناهی تکینه‌های تنها در صفحه داشته باشد؟ در یک ناحیه کراندار چه؟ در یک مجموعه فشرده چه؟
- ۲- اگر $f(z)$ تابع مفروضی باشد، آیا عدد حقیقی M موجود است که هیچ قطب $f(z)$ مرتبه‌یی بزرگتر از M نداشته باشد؟
- ۳- آیا می‌شود تابعی در یک دنباله نقاط از پیش معلوم دارای قطب باشد؟
- ۴- آیا می‌شود تابعی در یک دنباله نقاط از پیش معلوم دارای تکینه‌های اساسی باشد.
- ۵- آیا می‌شود که یک تابع تام مقدار $2i - 7$ را نه پذیرد و هر مقدار دیگری را به دفعات نامتناهی بپذیرد؟
- ۶- چرا دو نقطه 0 و ∞ این چنین با دیگر نقاط، اغلب متفاوتند؟
- ۷- چه تابعی در صفحه گسترش یافته تکینه ندارد؟
- ۸- چگونه، تکینه‌های $f(z)$ را با تکینه‌های $1/f(z)$ مقایسه می‌کنید؟ چگونه با تکینه‌های $f(1/z)$ ؟ و چگونه با تکینه‌های $1/f(1/z)$ ؟
- ۹- آیا می‌شود که قطب یک تکینه غیرتنها باشد؟
- ۱۰- چگونه قضیه بزرگ پیکار را با قضیه پیکار در بخش ۸-۲ مقایسه می‌کنید؟

تمرینها

- ۱- فرض کنید $f(z)$ در $z = z_0$ تکینه تنها دارد و $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^a f(z) = M \neq 0$ ثابت کنید α می‌بایست عدد صحیح باشد.
- ۲- اگر $f(z)$ در همسایگی سوده مبداء تحلیلی و $\lim_{z \rightarrow 0} |zf(z)| = 0$ نشان دهید که مبداء تکینه برداشتنی $f(z)$ است.

۳- نشان دهید که $\tan z$ مقادیر $\pm i$ را نمی پذیرد. آیا این با قضیه پیکار متناقض

است؟

۴- همه تکنیتهای توابع زیر را بیابید و ماهیت آنها را توصیف کنید.

(الف) $\tan z$ (ب) $\frac{1}{e^{1/z} + 1}$

(پ) $\frac{1}{\sin z - \cos z}$ (ت) $e^{z+1/z}$

(ث) $\frac{(z-1)^{1/2}}{z+1}$

۵- در توابع زیر، تکنیه را در $z = \infty$ توصیف نمائید.

(الف) $\frac{2z^2 + 1}{3z^2 - 10}$ (ب) $\frac{z^2}{z+1}$

(پ) $\frac{z^2 + 10}{e^z}$ (ت) $\frac{e^z}{z^2 + 10}$

(ث) $\tan z - z$ (ج) $\frac{1}{z} + \sin z$

۶- اعداد مختلط و متمایز z_0 ، z_1 و z_2 مفروض اند. تابع $f(z)$ را طوری بسازید

که در $z = z_0$ تکنیه برداشتنی، در $z = z_1$ یک قطب مرتبه k و در $z = z_2$ تکنیه اساسی داشته باشد.

۷- نشان دهید که $f(z)$ تکنیتهایی به غیر از قطب در صفحه گسترش یافته ندارد

اگر و فقط اگر $f(z)$ تابع کسری (خارج قسمت دو چند جمله‌یی) باشد.

۸- اگر $f(z)$ در دنباله نقاط $\{z_n\}$ قطب داشته باشد و $z_n \rightarrow z_0$ ، نشان دهید

که $f(z)$ در $z = z_0$ قطب ندارد.

۹- فرض کنید $f(z)$ در $z = z_0$ قطبی از مرتبه m دارد و $P(z)$ یک چند جمله‌یی از

درجه n است، نشان دهید، $P(f(z))$ در $z = z_0$ دارای مرتبه mn است.

۲-۹. رشته لران

می‌دانیم تابع $f(z)$ ی که در z_0 تحلیلی است. در یک همسایگی z_0 دارای نمایش

رشته توانی $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ می‌باشد. به موجب فرع قضیه ۲-۹، اگر $f(z)$ در

$z = z_0$ قطب مرتبه k داشته باشد، آنگاه یک نمایش رشته‌یی $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ،

$a_{-k} \neq 0$ موجود است که در یک همسایگی سوده z_0 برقرار می‌باشد.

در این بخش سرشت عبارتی به شکل زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

در این مرحله ملاحظه می شود که رشته $\sum_{n=1}^{\infty} b_n/(z-z_0)^n$ را می توان به عنوان یک رشته توانی از متغیر $1/(z-z_0)$ در نظر گرفت. اگر R شعاع همگرایی آن باشد، آنگاه این رشته برای $R < 1/|z-z_0|$ یعنی که برای $R_1 = 1/R$ $|z-z_0| > R_1$ همگرایی مطلق است. پس رشته $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n}$ در خارج دایره $|z| = R_1$ نمایش یک تابع تحلیلی، $f_1(z)$ می باشد. هم چنین فرض کنیم که رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ به شعاع همگرایی R_2 باشد. در این صورت $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ برای $R_2 < |z-z_0|$ تحلیلی است. اگر $R_2 > R_1$ ، آنگاه $f_1(z)$ و $f_2(z)$ هر دو در طوق $R_2 < |z-z_0| < R_1$ تحلیلی هستند پس تابع

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

برای همه z ها در طوق $R_2 < |z-z_0| < R_1$ تحلیلی است. با قرارداد $a_{-n} = b_n$ داریم:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n. \quad (۸)$$

عبـارتی به شکل (۸) رشته لران^۱ نام دارد. نشان خواهیم داد که هر تابع تحلیلی درون یک طوق یک نمایش رشته لران دارد.

قضیه ۹-۴ (قضیه لران). فرض کنیم $f(z)$ در طوق $R_2 < |z-z_0| < R_1$ تحلیلی است. تساوی $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ در سراسر طوق برقرار است و بعلاوه ضرایب بصورت زیراند:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

که C هر خم بسته بی درون طوق، که در جهت خلاف حرکت عقربه های ساعت در یک دور کامل حول z_0 چرخیده باشد، می باشد.

اثبات - z را نقطه بی در طوق می گیریم و R'_1 و R'_2 را طوری انتخاب می کنیم که:

$$R_1 < R'_1 < |z-z_0| < R'_2 < R_2$$

در این صورت $f(z)$ در طوق بسته بی تحلیلی است که مرزش عبارت است از:

$$C_2: |z-z_0| = R'_2 \quad \text{و} \quad C_1: |z-z_0| = R'_1$$

(ر. ک. شکل ۲) به موجب فرمول انتگرال کوشی

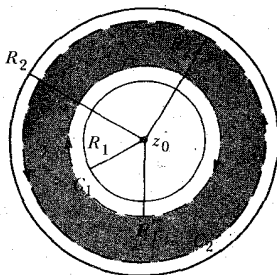
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz \quad (9)$$

اولین انتگرال را در (۹) در نظر می گیریم. برای ζ بر C_2 و z در طوق داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\zeta - z_0)[1 - (z - z_0)/(\zeta - z_0)]} \\ &= \frac{1}{(\zeta - z_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

و همگرایی بر C_2 یکنواخت است. پس بنا به فرع قضیه ۸-۴، می توان در $f(\zeta)/2\pi i$ ضرب کرد و جمله به جمله انتگرال گرفت.

شکل ۲



با این کار می رسم به

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\zeta \right) \quad (10) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

که

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

ملاحظه کنید که در حالت عمومی a_n برابر $f^{(n)}(z_0)/n!$ نیست زیرا که $f(z)$ ممکن است در تمام نقاط درون C_2 تحلیلی نباشد.

سپس دومین انتگرال در (۹) را در نظر می‌گیریم. برای ζ بر C_1

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - z_0)[1 - (\zeta - z_0)/(z - z_0)]} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}} d\zeta \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta)(\zeta - z_0)^m d\zeta \right) \frac{1}{(z - z_0)^{m+1}}. \quad (11)$$

اگر قرار دهیم $n = m + 1$ ، (۱۱) تبدیل می‌گردد

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}, \quad (12)$$

که

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \quad (n = 1, 2, \dots).$$

جایگزین نمودن (۱۰) و (۱۲) در (۹) بدست می‌دهد که

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (13)$$

که

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = -1, -2, \dots).$$

این یک مرز ساده بسته‌ی درون طوق در نظر می‌گیریم که یک دور کامل حول نقطه z_0 در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت گردیده است. چونکه $f(\zeta)/(\zeta - z_0)$ در ناحیه محدود به مرزهای بسته C_1 و C_2 تحلیلی است، فرمول انتگرال کوشی موجب می‌گردد که بتوان ضرایب را با جایگزینی C_1 و C_2 با C محاسبه نمود. بنابراین

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots). \quad (14)$$

در پایان، چونکه R'_1 و R'_2 را می‌توان به دلخواه به ترتیب نزدیک به R_1 و R_2 انتخاب نمود، عبارت (۱۳) (که a_n ، به صورت (۱۴) تعریف شود) برای همه z های درون طوق $R_1 < |z - z_0| < R_2$ برقرار است.

تذکر ۱- ملاحظه می‌گردد که رشته^۱ با توانهای مثبت $z - z_0$ درون دایره $|z - z_0| = R_2$ همگراست، در حالی که رشته^۲ با توانهای منفی $z - z_0$ همه جا در خارج دایره $|z - z_0| = R_1$ همگراست رشته^۳ با توانهای منفی $z - z_0$ به قسمت اصلی بسط لران موسوم است. در حالیکه رشته^۴ با توانهای مثبت به قسمت تحلیلی موسوم است.

تذکر ۲- در حالت خاصی که $R_1 = 0$ ، نقطه z_0 تکیه تنهای $f(z)$ است. قسمت اصلی در بسط لران صفر می‌گردد اگر و تنها اگر تکیه در z_0 برداشتنی باشد. قسمت اصلی دارای تعداد جملات متناهی است اگر و تنها اگر تکیه در z_0 قطب باشد. پس با یک فرایند حذفی ثابت می‌شود که قسمت اصلی دارای تعداد جملات نامتناهی است اگر و تنها اگر تکیه در z_0 یک تکیه اساسی باشد.

تذکر ۳- بسط لران، مانند بسط رشته توانی برای توابع تحلیلی، منحصر فرد است. فرض کنیم

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad (R_1 < |z - z_0| < R_2). \end{aligned}$$

در اینجا صورت هر رشته بر دایره C درون طوق و حول z_0 همگرای یکنواخت است. با ضرب کردن در $(z - z_0)^k$ ، برای هر عدد صحیح k ، و سپس انتگرال‌یابی در امتداد C حاصل می‌شود.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_C (z - z_0)^{n+k} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \int_C (z - z_0)^{n+k} dz. \quad (15)$$

چون که

$$\int_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i, & m = -1, \\ 0, & m \neq -1, \end{cases}$$

از (۱۵) نتیجه می‌شود

$$2\pi i a_{-k-1} = 2\pi i b_{-k-1}$$

بنابراین برای هر عدد صحیح k ، $a_k = b_k$

تذکر ۴- ضرایب یک رشته لران را معمولاً "از شکل انتگرالی (۱۴) نمی‌یابند. در واقع با مشخص نمودن ضرایب a_n از روشهای دیگر، آنگاه قادر خواهیم بود که بدینوسیله انتگرال

(۱۴) را محاسبه کنیم. ضریب a_{-1} نقش خاصی دارد، زیرا ما را قادر می‌کند، مقدار $\int_C f(\xi) d\xi$ را محاسبه کنیم.

اینک مثالهایی ارائه می‌دهیم که روشهای متفاوت محاسبه ضریب یک رشته توانی را نشان می‌دهند.

مثال ۱- برای یافتن بسط لران تابع

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} \quad (|z| > 0),$$

$\sin z$ را در یک رشته ماک لورن بسط می‌دهیم. با اینکار می‌رسیم به

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \dots.$$

پس $f(z)$ در میداء قطب ساده دارد

مثال ۲- تابع $f(z) = e^{1/z}$ برای $|z| > 0$ تحلیلی است و در $z=0$ تکیه اساسی دارد. از همانندی $e^u = 1 + u + u^2/2! + u^3/3! + \dots$ بدست می‌آید

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \quad (|z| > 0).$$

مثال ۳- تابع

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

در $z = \pm i$ قطب ساده دارد. ابتداء این تابع را به رشته لرانی که برای همسایگی $z=i$ بوده برقرار باشد بسط می‌دهیم. با قرار دادن

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i + (z-i)},$$

همانندی

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i[1 + (z-i)/2i]} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n$$

برای $0 < |(z-i)/2i| = |z-i|/2 < 1$ برقرار است. پس

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i(z-i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2i}\right)^n (z-i)^n \\
 &= - \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2i}\right)^{n+2} (z-i)^n \\
 &= - \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^{n+2} (z-i)^n
 \end{aligned}$$

$$(0 < |z-i| < 2).$$

بطریق مشابه، تابع را به رشته لرانی که برای همسایگی سوده $z = -i$ مقبول باشد بسط می‌دهیم، با قرار دادن

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i + (z+i)}$$

و با به کار بردن همانندی

$$\frac{1}{z-i} = - \frac{1}{2i[1 - (z+i)/2i]} = - \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2i}\right)^n,$$

که برای $0 < |z+i| < 2$ مقبول است. پس

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{(z+i)(z-i)} = - \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i}\right)^{n+2} (z+i)^n \\
 &= - \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{-i}{2}\right)^{n+2} (z+i)^n
 \end{aligned}$$

$$(0 < |z+i| < 2).$$

مثال ۴) تابع $f(z) = 1/(z-1)(z-2)$ در $z=1$ و $z=2$ قطب‌های ساده دارد. همانند مثال قبل این تابع را به رشته لرانی که برای همسایگی‌های سوده $z=1$ و $z=2$ برقرار باشد بسط می‌دهیم. این کار می‌رسد به

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = - \frac{1}{(z-1)[1 - (z-1)]} \\
 &= - \sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n \quad (0 < |z-1| < 1)
 \end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{(z-2)[1 + (z-2)]}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-2)^n$$

$$(0 < |z-2| < 1).$$

ولی می‌توانیم $f(z)$ را به رشته لرانی بسط دهیم که در ناحیه‌های دیگری مقبول باشند.

الف) فرض کنیم $1 < |z| < 2$ در این صورت

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2(1-z/2)} - \frac{1}{z(1-1/z)}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

در اینجا از این نکته استفاده کردیم که $|z/2| < 1$ و $|1/z| < 1$ پس

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n.$$

ب) فرض کنیم $|z| < 1$ در این صورت

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2(1-z/2)} + \frac{1}{1-z}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n,$$

که بسط رشته ماکلورن برای $f(z)$ است.

پ) فرض کنیم $|z| > 2$ در این صورت

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z(1-2/z)} - \frac{1}{z(1-1/z)}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n.$$

هنگام بسط به رشته لران حول یک تکیه تنها، گاهی اوقات تنها قسمت اصلی آن مورد توجه ماست. اگر $f(z)$ در $z = z_0$ قطب ساده باشد، آنگاه مشخص نمودن قسمت اصلی، از سادگی خاصی برخوردار است. زیرا در این حالت $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$ می‌بایست موجود باشد. می‌توان قرار داد که

$$(z - z_0)f(z) = A + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (A \neq 0).$$

که در این صورت ملاحظه می شود، قسمت اصلی برابر است با $A/(z - z_0)$.

مثال ۵ برای تابع $f(z) = z/(z^2 + 4)$ ، قسمت اصلی بسط لران را که در همسایگی سوده $z = 2i$ مقبول باشد محاسبه می کنیم.

چون که

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z - 2i)z}{(z + 2i)(z - 2i)} = \frac{1}{2},$$

پس $f(z)$ در $z = 2i$ قطب ساده دارد و قسمت اصلی آن برابر است با $\frac{1}{2}[1/(z - 2i)]$.
 $f(z) = \frac{1}{2}[1/(z - 2i)] + g(z)$ که در $z = 2i$ تحلیلی است.

مثال ۶ برای تابع $f(z) = 1/(z^4 + 1)$ ، قسمت اصلی بسط لرانی را که در همسایگی سوده $z = e^{\pi i/4}$ متعبر است بیابید.

همانند مثال قبل، حد مقدار زیر را با تجزیه مخرج کسر می توان یافت.

$$\lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{z^4 + 1}$$

ولسی برای اجتناب از عملیات سنگین تجزیه می توان به قضیه ۵-۷ ارجاع کرده و این کار منجر به محاسبه زیر شود

$$\lim_{z \rightarrow e^{\pi i/4}} \frac{z - e^{\pi i/4}}{z^4 + 1} = \frac{1}{4(e^{\pi i/4})^3} = \frac{-(1+i)\sqrt{2}}{8}.$$

پس

$$f(z) = \frac{-(1+i)\sqrt{2}}{8(z - e^{\pi i/4})} + g(z),$$

که $g(z)$ در $z = e^{\pi i/4}$ تحلیلی است.

مثال ۷ همه تکیه های تابع $f(z) = \cot \pi z$ را می یابیم و قسمت های اصلی بسط لران را حول هر تکیه مشخص می کنیم.

چون که $\sin \pi z$ در $z = n$ (n عدد صحیح) صفرهای ساده دارد، تابع $f(z) = \cos \pi z / \sin \pi z$ در $z = n$ قطب های ساده خواهد داشت، در $z = n$ همسایگی سوده $z = n$ داریم $f(z) = A/(z - n) + g(z)$ که $g(z)$ در $z = n$ تحلیلی است.

تنها باقی است که A مشخص گردد. از همانندی

$$\sin \pi z = (-1)^n \sin \pi(z - n),$$

نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z \rightarrow n} (z - n) f(z) = \lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{\sin \pi(z - n)} \frac{\cos \pi z}{(-1)^n} \\ &= \lim_{z \rightarrow n} \frac{z - n}{\sin \pi(z - n)}. \end{aligned}$$

چونکه با $t \rightarrow 0$ داریم

$$\frac{t}{\sin \alpha t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha t}{\sin \alpha t} \rightarrow \frac{1}{\alpha}$$

نتیجه می شود $A = 1/\pi$ و قسمت اصلی $f(z)$ در $z = n\pi$ برابر است با $1/\pi(z - n)$.
تقسیم به رشته های توانی، روش دیگری است برای مشخص نمودن قسمت اصلی. فرض کنیم:

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots}{b_0 + b_1 z + \dots} \quad (b_0 \neq 0).$$

در این صورت $f(z)$ در $z = 0$ تحلیلی است و می توان آن را به صورت رشته یی به شکل زیر بسط داد.

$$\frac{a_0 + a_1 z + \dots}{b_0 + b_1 z + \dots} = c_0 + c_1 z + \dots.$$

با بکار بردن ضرب رشته ها، که قبلاً بحث شد، داریم:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 z + \dots &= (b_0 + b_1 z + \dots)(c_0 + c_1 z + \dots) \\ &= b_0 c_0 + (b_0 c_1 + b_1 c_0)z + \dots. \end{aligned}$$

و اینک می توان c_k را به روش بازگشتی از معادلات زیر یافت:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ &\vdots \\ a_n &= b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \dots + b_n c_0. \end{aligned}$$

تذکر - این روش را می توان به صورت "تقسیم دراز" تصور کرد. بدین معنی که

$$\frac{\frac{a_0}{b_0} + \dots}{b_0 + b_1 z + \dots} \frac{a_0 + a_1 z + \dots}{a_0 + \frac{a_0 b_1}{b_0} z + \dots}$$

ما از این روش در مثال ۸ استفاده خواهیم کرد.

مثال ۸- قسمت اصلی $f(z) = (\pi \cot \pi z)/z^4$ که در یک همسایگی مبدأ مقبول باشد می یابیم. داریم

$$\begin{aligned} \frac{\pi \cot \pi z}{z^4} &= \frac{\pi \cos \pi z}{z^4 \sin \pi z} = \frac{\pi}{\pi z^5} \frac{1 - (\pi z)^2/2! + (\pi z)^4/4! - \dots}{1 - (\pi z)^2/3! + (\pi z)^4/5! - \dots} \\ &= \frac{1}{z^5} \left(1 + \frac{\pi^2}{3} z^2 - \frac{\pi^4}{45} z^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

پس قسمت اصلی $f(z)$ عبارتست از:

$$\frac{1}{z^5} + \frac{\pi^2}{3z^3} - \frac{\pi^4}{45z}.$$

پرسش‌ها

- ۱- چه شباهاتی میان رشته‌های توانی و رشته‌های لران موجود است؟
- ۲- اگر رشته لران برای $f(z)$ بر مرز یک طوق همگرا باشد، آیا $f(z)$ بر مرز تحلیلی است؟
- ۳- یک رشته لران در کجا همگرای یکنواخت است؟
- ۴- آیا می‌شود که یک تابع تنها بر یک نوار مستطیلی تحلیلی باشد؟
- ۵- آیا می‌شود که $f(z)$ و $f(1/z)$ همزمان بر یک مجموعه از نقاط تحلیلی باشند.
- ۶- اگر $f(z)$ در z_0 قطب مرتبه k داشته باشد، قسمت اصلی بسط لران حداکثرو حداقل چند جمله می‌تواند داشته باشد؟

۷- در مورد حاصلجمع دو رشته لران چه می‌توان گفت؟ در مورد حاصلضرب چه؟

۸- اگر $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ، در تحت چه شرایطی

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

تمرینها

۱- تابع $1/(z+1)(z^2+2)$ را در رشته‌های لران مقبول در هر یک از نواحی زیر

بسط دهید .

$$\text{الف) } 1 < |z| < \sqrt{2} \quad \text{ب) } |z| > \sqrt{2} \quad \text{پ) } |z| < 1$$

(راهنمایی : از کسرهای جزئی استفاده کنید) .

$$۲- \text{تابع } e^{z^2} + e^{1/z^2} \text{ را برای } |z| > 0 \text{ در رشته لران بسط دهید .}$$

$$۳- \text{برای } 0 < |a| < |b| \text{ تابع } 1/(z-a)(z-b) \text{ را در رشته لران مقبول در ناحیه های}$$

زیر بسط دهید .

$$\text{الف) } |z| < |a| \quad \text{ب) } |a| < |z| < |b|$$

$$\text{پ) } |z| > |b| \quad \text{ت) } 0 < |z-a| < |a-b|$$

$$\text{ث) } 0 < |z-b| < |a-b|$$

۴- قسمت اصلی را در رشته های لران زیر بیابید .

$$\text{الف) } \frac{z^2}{z^4-1} \quad (0 < |z-i| < \sqrt{2})$$

$$\text{ب) } \frac{z^2}{z^4-1} \quad (0 < |z+i| < \sqrt{2})$$

$$\text{پ) } \frac{e^z}{z^4} \quad (|z| > 0)$$

$$\text{ت) } \frac{\sin z}{z^4} \quad (|z| > 0)$$

$$\text{ث) } \frac{z^3}{(z-1)^2(z-2)} \quad (0 < |z-1| < 1)$$

۵- توابع زیر را به رشته لران ، که در ناحیه داده شده معتبر باشد بسط دهید .

$$\text{الف) } z^n e^{1/z} \quad (|z| > 0) \quad \text{ب) } e^{1/(z-1)} \quad (|z| > 1)$$

$$۶- \text{تابع } \sin z \sin (1/z) \text{ را برای } |z| > 0 \text{ به رشته لران بسط دهید .}$$

$$۷- \text{با بکار بردن تقسیم رشته ها برای تابع } e^z/(1-\cos z)^2 \text{ ، قسمت اصلی را در یک}$$

همسایگی مبدا بیابید .

۸- فرض کنید $f(z)$ در فرض $|z| < R$ ($R > 1$) تحلیلی است مگر در نقطه z_0 که

$$\text{قطب ساده است و } |z_0| = 1 \text{ . با در نظر گرفتن بسط } f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

$$\text{نشان دهید که } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/a_{n+1}) = z_0$$

(راهنمایی : قرار دهید $f(z) = A/(1-z/z_0) + F(z)$ که A عدد ثابت و $F(z)$

در $|z| < R$ تحلیلی است) .

۹- در یک همسایگی مبدا ، مشخصه های گوناگون $(1+z)^{1/2}$ را در نظر بگیرید .

الف) نشان دهید که یکی از آنها در $|z| < 1$ تحلیلی است و آنرا با $f_0(z)$ نمایش

دهید (راهنمایی: قرار دهید $e^{(1/z)\log(1+z)} = e^{(1/z)[\text{Log}(1+z) + 2k\pi i]}$).

ب) در بسط $f_0(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ مقادیر a_0 و a_1 و a_2 را مشخص کنید.

پ) فرض کنید $f(z)$ یکی از مشخصه‌های $(1+z)^{1/z}$ به غیر از $f_0(z)$ باشد. ماهیت $g(z) = f(z)/f_0(z)$ را بیابید و بسط لران آنرا برای $|z| > 0$ پیدا کنید.

۳-۹. محاسبه انتگرالهای حقیقی

اگر $f(z)$ در یک همسایگی سوده z_0 تحلیلی باشد، آنگاه بموجب قضیه لران می‌توان نوشت $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ بعلاوه

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz, \quad (16)$$

که C بر مرز ساده بسته‌یی است که z_0 را احاطه کرده و در این همسایگی باشد. ضریب a_{-1} به مانده $f(z)$ در z_0 موسوم است. معادله (۱۶) مبین آن است که محاسبه یک انتگرال مشخص، معادل است با معلوم نمودن یک ضریب مشخص در رشته لران. در سه مثالی که به دنبال خواهد آمد، C مرز ساده بسته‌یی است که مبدأ را احاطه کرده است.

مثال ۱- مقدار $\int_C e^{1/z} dz$ را محاسبه می‌کنیم.

چونکه مانده تابع $e^{1/z} = 1/z + 1/2! z^2 + \dots$ در $z = 0$ برابر است با ۱، داریم:

$$\int_C e^{1/z} dz = 2\pi i.$$

مثال ۲- مقدار $\int_C \sin(1/z^2) dz$ را محاسبه می‌کنیم.

در یک همسایگی سوده مبدأ

$$\sin \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{z^2}\right)^5 + \dots$$

پس

$$\int_C \sin \frac{1}{z^2} dz = 0.$$

مثال ۳- مقدار $\int_C z^2 \sin(1/z) dz$ را محاسبه می‌کنیم

برای $z \neq 0$ داریم.

$$z^2 \sin \frac{1}{z} = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} + \dots \right) = z - \frac{1}{6z} + \frac{1}{120z^3} + \dots$$

پس مانده در $z=0$ برابر است با $-\frac{1}{6}$ و

$$\int_C z^2 \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

بدون استفاده از (۱۶) نمی‌توانستیم این سه انتگرال را محاسبه کنیم و اینک تعمیم زیر از (۱۶) را در نظر می‌گیریم.

قضیه ۹-۵ (قضیه مانده). فرض کنیم $f(z)$ در درون و بر روی مرز ساده بسته C مگر در تکیه‌های تنهای z_1 و \dots و z_n در درون C ، تحلیلی است. گیریم مانده‌ها در نقاط z_1 و \dots و z_n به ترتیب برابر α_1 و \dots و α_n باشد، در این صورت

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

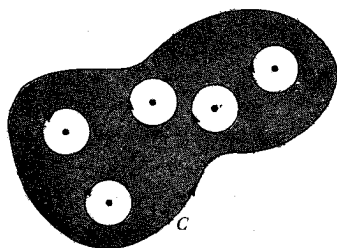
اثبات - حول هر تکیه z_i ، دایره C_i را درون C رسم می‌کنیم بطوری که هر وقت $C_i \cap C_j = 0$ ، $i \neq j$ (ر. ک. شکل ۳). بنابه فرمول انتگرال کوشی

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz,$$

کجه انتگرال‌گیری بر مرزهای درونی در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌باشد. با قرار دادن $G = C_i$ در (۱۶)، می‌بینیم که برای هر i ،

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} f(z) dz = \alpha_i$$

و قضیه ثابت است.



مثال - مقدار

$$\int_C \frac{dz}{z(z-3)}$$

را بر مرزهای ساده بسته C گوناگون محاسبه می‌کنیم.

تابع $f(z) = 1/z(z-3)$ در $z=0$ و $z=3$ قطب ساده دارد. مانده $f(z)$ در $z=0$ برابرست با

$$\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3},$$

و مانده در $z=3$ عبارتست از

$$\lim_{z \rightarrow 3} (z-3)f(z) = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{1}{z} = \frac{1}{3}.$$

پس اگر $z=0$ درون C و $z=3$ بیرون C باشد آنگاه

$$\int_C \frac{1}{z(z-3)} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2\pi i}{3}.$$

اگر $z=0$ بیرون C و $z=3$ درون C باشد آنگاه

$$\int_C \frac{1}{z(z-3)} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2\pi i}{3}.$$

اگر $z=0$ درون C و $z=3$ هم درون C باشد آنگاه

$$\int_C \frac{1}{z(z-3)} dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = 0.$$

تذکره مثال قبل را می توانستیم با استفاده از فرمول انتگرال کوشی به عوض قضیه مانده محاسبه کنیم. چون که

$$\frac{1}{z(z-3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z} \right),$$

داریم

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z(z-3)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{3(z-3)} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{3z} dz,$$

که از آن نتیجه مطلوب عاید می گردد. در واقع فرمول انتگرال کوشی حالت خاص قضیه مانده است. فرض کنیم $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بستیهی که شامل z_0 است، تحلیلی باشد. در این صورت $g(z) = f(z)/(z-z_0)$ ، شرطی که $f(z_0) \neq 0$ ، در z_0 قطب ساده دارد. مانده $g(z)$ در z_0 برابرست با $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)g(z) = f(z_0)$. پس

$$\int_C g(z) dz = \int_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

فرض کنیم $f(z)$ در $z=z_0$ قطب مرتبه k داشته باشد. برای یافتن مانده a_{-1} بر حسب

$f(z)$ می‌نویسیم

$$(z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \dots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + g(z)(z - z_0)^k, \quad (17)$$

که در آن $g(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی است. با $k-1$ بار مشتق‌یابی از (۱۷) در نقطه $z = z_0$ ، بدست می‌آید که

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} (z - z_0)^k f(z) \quad (18)$$

برای این که کاربرد (۱۸) را مشاهده کنیم ، مقدار

$$\int_C \frac{z^4 - z^3 - 17z + 2}{(z-1)^3} dz$$

را بر خم ساده بسته‌ای که $z=1$ درون آن باشد، محاسبه می‌کنیم.

روش ۱- در (۱۸) قرار می‌دهیم $f(z) = (z^4 - z^3 - 17z + 2)/(z-1)^3$ ، $k=3$ ، $z_0=1$ در این صورت

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} (z-1)^3 f(z) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d^2}{dz^2} (z^4 - z^3 - 17z + 2) = 3. \end{aligned}$$

پس

$$\int_C \frac{z^4 - z^3 - 17z + 2}{(z-1)^3} dz = 2\pi i a_{-1} = 6\pi i.$$

روش ۲- با قرار دادن $g(z) = z^4 - z^3 - 17z + 2$ ، از فرمول انتگرال کوشی بدست می‌آید:

$$g''(1) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{(z-1)^3} dz = 6,$$

و نتیجه مطلوب حاصل است.

اینک که چندین روش برای مشخص نمودن مانده‌ها آموخته‌ایم به یک کاربرد عمده آن می‌پردازیم و این کاربرد عبارت از محاسبه انتگرالهای حقیقی با استفاده از انتگرال‌گیری یک تابع مختلط در طول یک مرز بسته است. روش معمول متضمن تابع تحلیلی است که مقدارش بر محور حقیقی، حقیقی باشد. در این صورت یک فاصله حقیقی از جمله خم‌هایی

است که مابه عنوان مرز بر روی آن انتگرال یابی می کنیم . یادآور می شویم که انتگرال ناسره $\int_a^\infty f(x) dx$ بنا به تعریف برابر است با $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$ ، در صورتی که این حد موجود باشد .

مثال ۱) با انتگرال گیری ، نشان می دهیم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \pi.$$

تابع مختلط $f(z) = 1/(z^2 + 1)$ در $z = \pm i$ تکیه دارد . گیریم مرز C عبارت باشد از محور حقیقی از $-R$ تا R ($R > 1$) و به دنبال آن نیم دایره یی در صفحه زیرین (ر.ک. شکل ۴) . در این صورت تنها تکیه $f(z)$ درون C نقطه $z = i$ می باشد و مانده آن برابر است با :

$$\lim_{z \rightarrow i} (z - i)f(z) = \frac{1}{2i}.$$

پس

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi. \quad (۱۹)$$

هم چنین

$$\int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_{-R}^R \frac{dx}{x^2 + 1} + \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} + 1} d\theta. \quad (۲۰)$$

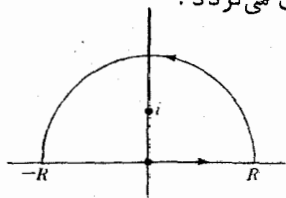
ملاحظه می شود که

$$\left| \int_0^\pi \frac{iRe^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta} + 1} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} d\theta = \frac{\pi R}{R^2 - 1}. \quad (۲۱)$$

با توجه به (۲۱) ، انتگرال طرف راست (۲۰) با $R \rightarrow \infty$ به ۰ میل می کند ، پس

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \frac{dz}{z^2 + 1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1},$$

و نتیجه مطلوب از (۱۹) حاصل می گردد .



شکل ۴

تذکر - به هنگام محاسبه انتگرال حقیقی با استفاده از انتگرال یابی بر مرز، تابع مختلط مناسب و مرز مناسب می‌بایست انتخاب شود. در مثال ۱ انتخاب تابع مختلط آسان بود. ولی به زودی خواهیم دید، که این انتخاب همیشه آسان نیست. خواننده می‌تواند تحقیق کند که نتیجه مطلوب نیز با به کار بردن مرزی که عبارت باشد از محور حقیقی از $R - R$ تا R و به دنبال آن نیمه دایره در صفحه زیرین، قابل حصول است.

لم - اگر $0 < \theta \leq \pi/2$ ، آنگاه $(\sin \theta)/\theta \geq 2/\pi$

اثبات - چون که $f(\pi/2) = 2/\pi$ ، پس کافی است، نشان دهیم که $f(\theta) = (\sin \theta)/\theta$ در فاصله $[0, \pi/2]$ تابعی است نزولی، که $f(0) = \lim_{\theta \rightarrow 0} f(\theta) = 1$. با کار بردن قضیه میانگین

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \frac{\theta \cos \theta - \sin \theta}{\theta^2} = \frac{\cos \theta - (\sin \theta)/\theta}{\theta} \\ &= \frac{\cos \theta - \cos \xi}{\theta} \quad (0 < \xi < \theta). \end{aligned}$$

چون که کسینوس در فاصله $[0, \pi/2]$ تابعی است نزولی، $f'(\theta) < 0$ ، نتیجه مطلوب حاصل است.

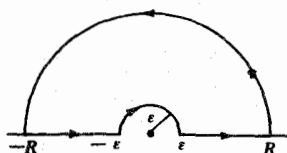
مثال ۲ - نشان می‌دهیم که:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

اولین چیزی که در ذهن ما خطور می‌کند این است که از $(\sin z)/z$ بر همان مرز مثال قبل انتگرال بگیریم. ولی این کار به دو دلیل مفید نیست. اولاً " $(\sin z)/z$ " در $z = 0$ تکیه دارد و ما معمولاً نمی‌توانیم بر مرزی که از یک نقطه تکیه می‌گذرد انتگرال بگیریم. ولی این تکیه برداشتنی و این اشکال قابل مرتفع شدن است. دلیل دوم و دلیل عمده این که انتگرال $(\sin z)/z$ با میل کردن شعاع به بی‌نهایت، به یک حد متناهی میل نمی‌کند.

تابع e^{iz}/z را در نظر می‌گیریم که قسمت انگاری آن بر محور حقیقی برابر است با $(\sin x)/x$. مرز C عبارت است از محور حقیقی از ε تا R ، نیم دایره در نیم صفحه زیرین از R تا $-R$ ، محور حقیقی $-R - \varepsilon$ و نیم دایره در صفحه زیرین از $-\varepsilon$ تا $-\varepsilon$ (ر. ک. شکل

شکل ۵



تابع e^{iz}/z درون و بر روی C تحلیلی است، بنابراین

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

هم چنین

$$\begin{aligned} \int_C \frac{e^{iz}}{z} dz &= \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_0^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\ &\quad + \int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\pi}^0 \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

با قرار دادن $-x$ بعوض x در انتگرال سوم و ترکیب آن با انتگرال اولی، داریم:

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta - i \int_0^{\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta = 0.$$

با استفاده از همانندی

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x,$$

حاصل می شود

$$2i \int_{\epsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx + i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{\pi} e^{i\epsilon e^{i\theta}} d\theta. \quad (22)$$

اینک رفتار انتگرال دوم را بر طرف چپ (۲۲) بررسی می کنیم. از همانندی

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

و لم فوق نتیجه می شود که:

$$\begin{aligned} \left| i \int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \right| &\leq \int_0^{\pi} |e^{iRe^{i\theta}}| d\theta = \int_0^{\pi} e^{-R \sin \theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-(2R/\pi)\theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R}), \end{aligned}$$

که با میل R به 0 می گراید. پس با $R \rightarrow \infty$ در (۲۲) منجر می شود به:

$$2 \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta. \quad (۲۳)$$

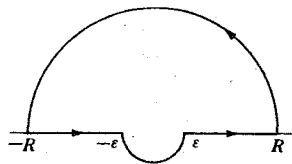
به ازاء $\frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon < 0$ ، $-e^{i\varepsilon e^{i\theta}}$ را در یک رشته توانی بسط می دهیم تا نشان دهیم:

$$|e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1| < 2\varepsilon$$

برای هر θ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ برقرار است. با $\varepsilon \rightarrow 0$ در (۲۳) ملاحظه می شود که:

$$\int_0^{\pi} e^{i\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{\pi} (e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - 1) d\theta + \int_0^{\pi} d\theta$$

به π میل می کند و نتیجه مطلوب حاصل است. بر خواننده است، تحقیق کند که ممکن بود مرز شکل ε را نیز بکار برده و نتیجه مطلوب را ثابت کرد.



شکل ۶

انتگرال بعدی را با روشهایی در حساب دیفرانسیل و انتگرال محاسبه می کنیم. این انتگرال به هنگام محاسبه انتگرالهای حقیقی گوناگونی به روش انتگرالیابی مرزی مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2. \quad \text{لم -}$$

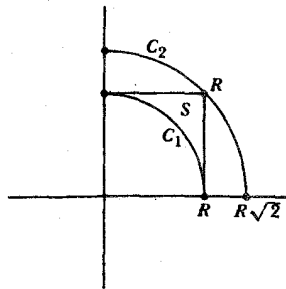
اثبات - قرار می دهیم $I = \int_0^R e^{-x^2} dx$ در این صورت

$$I^2 = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^R e^{-y^2} dy \right) = \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

در اینجا انتگرالیابی بر مربع S است که در ربع اول قرار دارد و درازای اضلاع برابر R می باشد. فرض کنیم C_1 و C_2 ربع دوایری در ربع اول بمرکز مبدا و به ترتیب با شعاعهای R و $R\sqrt{2}$ باشند (ر. ک. شکل ۷). با محاسبه بر این دوایر در مختصات قطبی، داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r dr d\theta &< \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &< \int_0^{\pi/2} \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr d\theta, \end{aligned}$$

شکل ۷



و یا

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) < \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

با $R \rightarrow \infty$ ، ملاحظه می‌کنیم

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

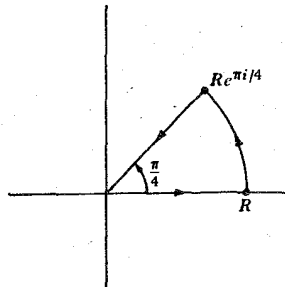
و نتیجه حاصل است.

مثال ۳- نشان دهید: $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$.

قابل توجه است که بهیچوجه همگرایی انتگرالهای فوق روشن نیست.

فرض کنیم C مرزی باشد مرکب از پاره خط از 0 تا R و به دنبال آن کمان از R تا $Re^{i\pi/4}$ و پاره خط از $Re^{i\pi/4}$ تا 0 (ر. ک. شکل ۸). به موجب قضیه کوشی

شکل ۸



$$\int_C e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{iz^2} dx + \int_0^\pi e^{iR^2 e^{2i\theta}} iR e^{i\theta} d\theta + \int_R^0 e^{i(te^{i\pi/4})^2} e^{i\pi/4} dt = 0,$$

انتگرال آخری با رابطه $z = te^{i\pi/4}$ پارامتری شده است. پس

$$\int_0^{\infty} e^{tx^2} dx + \int_0^{\pi} e^{tR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta = e^{\pi i/4} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (24)$$

این نشان می‌دهیم که انتگرال دومی در طرف چپ (۲۴) هنگامیکه R به ∞ میل کند به ۰ نزدیک می‌شود. باید توجه داشت که

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} e^{tR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| &\leq \int_0^{\pi} |e^{tR^2 e^{2i\theta}} iRe^{i\theta}| d\theta \\ &= \int_0^{\pi} e^{-R^2 \sin 2\theta} R d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \sin \theta} R d\theta \leq \frac{1}{2} R \int_0^{\pi/2} e^{-(2R^2/\pi)\theta} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}). \end{aligned} \quad (25)$$

با توجه به (۲۵) چنانچه در (۲۴)، $R \rightarrow \infty$ ، حاصل می‌شود

$$\int_0^{\infty} e^{tx^2} dx = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = e^{\pi i/4} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

و با بکار بردن لم حاصل می‌شود

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = e^{\pi i/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

و این یک نتیجه مطلوب با برابر گرفتن قسمتهای حقیقی و انگاری در دو طرف آن عاید می‌گردد.

مثال بعدی متضمن توابع مثلثاتی است. اگر z دایره واحد را به پیماید. آنگاه z

را می‌توان با $z = e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) پارامتری نمود. همانندیهایی

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i},$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + 1/z}{2}$$

ما را قادر می‌سازند که انتگرالهای به شکل $\int_0^{2\pi} g(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$ را برحسب انتگرالهای مرزی محاسبه کنیم.

مثال ۴- برای a و b حقیقی، $a > |b|$ ، نشان می‌دهیم که

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

با قرار دادن $z = e^{i\theta}$. ملاحظه می شود که $dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta$ پس

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} &= \int_C \frac{dz/iz}{a + (b/2)(z + 1/z)} \\ &= \frac{2}{bi} \int_C \frac{dz}{z^2 + (2a/b)z + 1}, \end{aligned} \quad (26)$$

که C دایره واحد است . تابع

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + (2a/b)z + 1}$$

در نقاط

$$z_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

قطب های ساده دارد و z_1 درون دایره و z_2 بیرون دایره است . مانده $f(z)$ در z_1 عبارتست از

$$\lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) = \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

پس بکار بردن قضیه مانده در (۲۶) ، بدست می دهد که

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = 2\pi i \frac{2}{bi} \frac{b}{2\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

آخرین مثال ما متضمن یک تابع چند مقداری است .

مثال ۵- برای $0 < \lambda < 1$ ، نشان می دهیم که

$$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}.$$

انتگرال $f(z) = z^{\lambda-1}/(1+z)$ را که $0 < \arg z < 2\pi$ بریک مرز مناسب محاسبه می کنیم . این تابع در $z = -1 = e^{i\pi}$ قطب ساده دارد و مانده اش برابر است با :

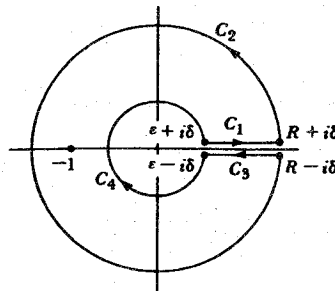
$$\lim_{z \rightarrow -1} (1+z) f(z) = e^{i\pi(\lambda-1)}.$$

هم چنین این تابع در مبدأ نقطه شاخه دارد . چون که قضیه مانده در مورد توابع تک - مقداری درست است . مرز ساده بسته C که بر آن انتگرال می گیریم ، مبدأ نمی تواند

درون آن باشد.

گیریم C عبارت باشد از پاره خط C_1 از $\varepsilon + i\delta$ تا $R + i\delta$ ، دایره C_2 به مرکز مبدا از $R + i\delta$ تا $R - i\delta$ پیموده شده در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، پاره خط C_3 از $R - i\delta$ تا $\varepsilon - i\delta$ و دایره C_4 به مرکز مبدا از $\varepsilon - i\delta$ تا $\varepsilon + i\delta$ پیموده شده در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (ر. ک. شکل ۹).

شکل ۹



باید توجه داشت که محور حقیقی مثبت به عنوان بریدگی شاخه برای $f(z)$ انتخاب شده است. تنها تکیه $f(z)$ درون C ، $z = -1$ می‌باشد. پس به موجب قضیه مانده:

$$\int_C \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = 2\pi i e^{\pi i(\lambda-1)} = -2\pi i e^{\pi i \lambda}. \quad (27)$$

می‌نویسیم

$$\int_C \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = \int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz + \int_{C_2} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz + \int_{C_3} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz + \int_{C_4} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz. \quad (28)$$

مقدار انتگرال در (۲۷) وابسته به δ و R و ε نیست و تنها به این که $z = -1$ درون C است، وابسته است. با این ترتیب روش ما برای حل مسئله این است که در (۲۸)، $\delta \rightarrow 0$ ، $R \rightarrow \infty$ و $\varepsilon \rightarrow 0$ میل دهیم تا بتوانیم عبارتی برای یکانتگرال حقیقی بیابیم که بتوان آنرا با (۲۷) معادل گرفت.

داریم

$$\int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = \int_{\varepsilon}^R \frac{(x+i\delta)^{\lambda-1}}{1+(x+i\delta)} dx.$$

با $\eta > 0$ مفروض، δ را بس کوچک انتخاب می‌کنیم تا

$$\left| \int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz - \int_{\epsilon}^R \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx \right| < \eta.$$

پس

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx. \quad (29)$$

هنگامیکه z یک دور کامل حول مبداء بگردد، شناسه آن به مقدار 2π افزایش می یابد. پس انتگرال بر C_3 را می توان بصورت زیر پارامتری نمود:

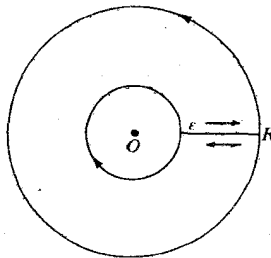
$$\int_{C_3} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = \int_R^{\epsilon} \frac{(xe^{2\pi i} - \delta)^{\lambda-1}}{1 + (xe^{2\pi i} - \delta)} dx.$$

با $\eta > 0$ مفروض، δ را بس کوچک انتخاب می کنیم تا

$$\left| \int_{C_3} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz - \int_R^{\epsilon} \frac{(xe^{2\pi i})^{\lambda-1}}{1+x} dx \right| < \eta.$$

پس

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C_3} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz &= e^{2\pi i(\lambda-1)} \int_R^{\epsilon} \frac{z^{\lambda-1}}{1+x} dx \\ &= -e^{2\pi i\lambda} \int_{\epsilon}^R \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx. \end{aligned} \quad (30)$$



شکل ۱۰

با توجه به مقداری که پس از محاسبه حد در (۲۹) به دست آمد، می توانیم تصور کنیم که C_1 و C_2 بر محور حقیقی می افتند و C_1 بر نیمه برین بریدگی و C_3 بر نیمه زیرین است (ر. ک. شکل ۱۰).

از جمع (۲۹) و (۳۰) به

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz + \int_{C_3} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz \right) = (1 - e^{2\pi i\lambda}) \int_{\epsilon}^R \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx. \quad (31)$$

می‌رسیم. برای دو انتگرال دیگر داریم :

$$\left| \int_{C_2} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{(Re^{i\theta})^{\lambda-1} i Re^{i\theta}}{1 + Re^{i\theta}} \right| d\theta \\ \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^{\lambda}}{R-1} d\theta = \frac{2\pi R^{\lambda}}{R-1}$$

۹

$$\left| \int_{C_4} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{(\varepsilon e^{i\theta})^{\lambda-1} i \varepsilon e^{i\theta}}{1 + \varepsilon e^{i\theta}} \right| d\theta \leq \frac{2\pi \varepsilon^{\lambda}}{1-\varepsilon}.$$

چونکه $0 < \lambda < 1$ ، نتیجه می‌شود :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_4} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz = 0. \quad (32)$$

با $R \rightarrow \infty$ و $\varepsilon \rightarrow 0$ در (۳۱) ملاحظه می‌شود .

$$\lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left(\int_{C_1} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz + \int_{C_3} \frac{z^{\lambda-1}}{1+z} dz \right) = (1 - e^{2\pi i \lambda}) \int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx. \quad (33)$$

با توجه به (۳۲) و (۳۳) می‌توانیم در (۲۷) و (۲۸) حد بگیریم و بدست آوریم .

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{\pi \lambda i}}{e^{2\pi \lambda i} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{\pi \lambda i} - e^{-\pi \lambda i}} = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}.$$

تذکر - در همانندی (۳۱) لازم است که ε و R ثابت باشند . برای آنکه دقیق‌تر عمل کرده باشیم ، می‌بایست ابتدا R را بس بزرگ و ε را بس کوچک انتخاب کنیم تا قدر مطلق هر انتگرال در (۳۲) بس کوچک شود ، برای این انتخاب ε و R ، آنگاه می‌توان (۳۱) را استنتاج نمود .

پرسش‌ها

۱- با اینکه $\int_C \sin(1/z^2) dz = 0$ بر مرز ساده بسته که مبدأ درون آن باشد ، ولی چرا $\sin(1/z^2)$ - تحلیلی نیست ؟

۲- آیا قضیه مانده برای تکنیک‌های غیرتنها درست است ؟

۳- برای چه نوع توابعی می‌توان انتگرالهای مختلط را با استفاده از قضیه مانده و نه با استفاده از فرمول انتگرال کوشی محاسبه نمود ؟

۴- در محاسبه انتگرالهای حقیقی با استفاده از انتگرال یابی مرزی ، چه محک عمومی

برای انتخاب تابع مناسب و مرز مناسب در دست داریم؟

۵- چرا قضیه مانده برای توابع چند مقداری برقرار نیست؟

۶- چرا محاسبه انتگرالی به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx$$

از محاسبه انتگرالی به شکل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n+1}} dx$$

ساده تر است؟

۷- آیا همانندی موجود در مثال ۵ را می توان تعمیم داد تا برای مقادیر مختلط λ

هم برقرار باشد؟

تمرینها

۱- در هر از تکینه های توابع زیر مانده را مشخص کنید .

(الف) $\frac{1}{\cos z}$ (ب) $\tan z$ (پ) $\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$

(ت) $z^n \sin \frac{1}{z}$ (ث) $z^n \cos \frac{1}{z}$

۲- نشان دهید با $R \rightarrow \infty$ ، $\int_{|z|=R} (\sin z)/z |dz| \rightarrow \infty$ ،

۳- انتگرالهای زیر را محاسبه کنید .

(الف) $\int_{|z|=1/2} (\sin z/1+z+z^2+\dots+z^n) dz$ که n نزدیکترین عدد

صحیح به سن خودتان باشد .

(ب) $\int_{|z|=5/2} e^{z^2} \pi \cot \pi z dz$

۴- برای هر عدد صحیح n ، مقدارهای زیر را محاسبه کنید .

(الف) $\int_{|z|=n} \tan \pi z dz$ (ب) $\int_{|z|=n+1/2} \cot \pi z dz$

۵- با استفاده از انتگرال یابی مرزی ، نشان دهید :

(الف) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}$ (ب) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

(پ) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (ت) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+2x+2)^2} = -\frac{\pi}{2}$

۶- نشان دهید :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2e}. \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + 1} dx = \begin{cases} \pi e^{-a}, & a > 0, \\ -\pi e^a, & a < 0. \end{cases} \quad (\text{ب})$$

۷- گیریم C مستطیلی به رئوس 0 ، R ، $R + iy$ ، iy است. با در نظر گرفتن مقدار $\int_C e^{-z^2} dz$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xy \, dx.$$

را محاسبه کنید. (راهنمایی: y را ثابت نگهداشته و $R \rightarrow \infty$)

۸- (الف) با انتگرال یابی $(e^{iz} - 1)/z$ بر مرز شکل ۴ نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(ب) با انتگرال یابی $(1 - e^{2iz})/z^2$ بر مرز شکل ۵ نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(پ) با انتگرال یابی $(1 + 2iz - e^{2iz})/z^2$ بر مرز شکل ۴ نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

۹- اگر $t \neq \pm 1$ حقیقی باشد، نشان دهید:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2t \cos \theta + t^2} = \frac{2\pi}{|t^2 - 1|}.$$

۱۰- نشان دهید:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad (\text{ب}) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta = -\frac{\pi}{3}. \quad (\text{الف})$$

$$(a, b > 0) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab}. \quad (\text{پ})$$

۱۱- برای $1 < \lambda < \infty$ نشان دهید:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{(1+x)^2} dx = \frac{\pi \lambda}{\sin \pi \lambda}. \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi \lambda}{2}}. \quad (ب)$$

۱۲- با انتگرال یابی از $-e^{\lambda z}/(1+e^z)$ ، $0 < \lambda < 1$ ، بر مرز مستطیلی به رئوس R ، $-R$ ، $R+2\pi i$ و $-R+2\pi i$ ، نشان دهید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}.$$

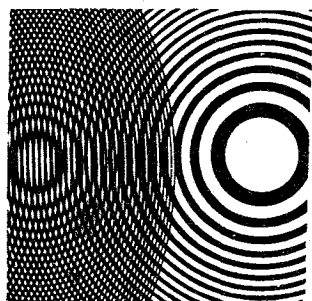
با استفاده از این نتیجه ثابت کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\lambda-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} \quad (0 < \lambda < 1).$$

۱۳- نشان دهید:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{1-iR}^{1+iR} \frac{a^z}{z} dz = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1, \\ 2\pi i, & a > 1. \end{cases}$$

(راهنمایی: قرار دهید $a^z = e^{z \log a}$. اگر $0 < a < 1$ ، مرز را پاره خط از $1-iR$ تا $1+iR$ و به دنبال آن نیمدایره راست را در نظر بگیرید. اگر $a > 1$ ، نیمدایره چپ را در نظر بگیرید).



۱۰. توابع همساز

در فصل ۵، دیدیم که اگر یک تابع تحلیلی دارای مشتق مرتبه دوم پیوسته باشد، آنگاه قسمت حقیقی (انگاری) این تابع همساز است. در فصل ۸ نشان دادیم که همه توابع تحلیلی مشتق مرتبه دوم پیوسته دارند. پس قسمت حقیقی هر تابع تحلیلی همیشه همساز است.

در این فصل بررسی می‌کنیم که معکوس این مطلب به چه میزانی صحت دارد. نشان می‌دهیم که در میدانهای همبند ساده، هر تابع همساز قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است. این نتیجه، اثبات چندین قضیه را در مورد توابع همساز مقدور می‌سازد، که با قضایای مربوط به توابع تحلیلی مشابهت دارند. بالاخص مشابه فرمول انتگرال کوشی، معروف به فرمول انتگرال پواسن^۱ اما را قادر می‌سازد که با دانستن رفتار تابع همساز بر مرز یک قرص، مقدار تابع را در درون قرص مشخص سازیم.

۱۰-۱. مقایسه با توابع تحلیلی

یادآوری می‌کنیم، تابع با مقادیر حقیقی $u(x, y)$ را، که در میدان \mathcal{D} معین و تک مقداری است، در \mathcal{D} همساز گویند، اگر چنانچه دارای مشتقات نسبی مرتبه اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در معادله لاپلاس^۲ صدق کنند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

در بخش ۵-۳ تشریح کردیم که چگونه با بکار بردن معادلات کوشی - ریمان می‌توان

تابع $-v(x, y)$ را که مزدوج یک تابع همساز مفروض $u(x, y)$ است، ساخت؛ بدین معنی که تابع $-v(x, y)$ را یافتیم که برای آن $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ تحلیلی باشد. روش این بود که همه توابع $v(z)$ را که در دو شرط زیر صادق باشند بیابیم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

ایمن روش در حالتی که انتگرال یابی جزئی $\int (\partial v / \partial y) dy$ صریحا "قابل حمل باشد، موفقیت آمیز بود. اینک شرایط عمومی برای یک تابع تحلیلی را بیان می کنیم که قسمت حقیقی آن برابر یک تابع همساز از پیش معلوم باشد. ابتداء توجه می کنیم که، بموجب معادلات کوشی-ریمان، مشتق هر تابع تحلیلی $f(z) = u(z) + iv(z)$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$f'(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} - i \frac{\partial u(z)}{\partial y}.$$

قضیه ۱۰-۱. اگر $u(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} تابع همساز مفروض باشد، تابع تحلیلی $f(z)$ در \mathcal{D} موجود است که $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$.

اثبات- قرار می دهیم $g(z) = \partial u(z) / \partial x - i [\partial u(z) / \partial y]$. آنگاه به موجب معادله لاپلاس

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} g) - \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} g) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1)$$

چون که همه مشتقات نسبی $u(z)$ پیوسته اند.

$$\frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} g) + \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} g) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (2)$$

ولی (۱) و (۲) معادلات کوشی برای $g(z)$ هستند. و با توجه به این که

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} g), \quad \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} g), \quad \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} g), \quad \frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} g)$$

همگی پیوسته اند، می توان قضیه ۵-۵ را بکار برد و تحلیلی بودن $g(z)$ را در \mathcal{D} اثبات نمود.

سیس نقطه z_0 را در \mathcal{D} انتخاب می کنیم و قرار می دهیم $F(z) = \int_{z_0}^z g(\xi) d\xi$. در این صورت به موجب فرع قضیه مرزا، $F(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی است و

$$F'(z) = g(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} - i \frac{\partial u(z)}{\partial y}.$$

ملاحظه می‌شود، مشتق $F(z)$ را نیز می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$F'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} F(z) - i \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} F(z).$$

پس $u(z)$ و $\operatorname{Re} F(z)$ در \mathcal{D} دارای مشتقات نسبی مساوی هستند، بنابراین

$$\operatorname{Re} F(z) = u(z) + C \quad (C \text{ حقیقی})$$

پس تابع

$$f(z) = F(z) - C = \int_{z_0}^z \left\{ \frac{\partial}{\partial x} u(\xi) - i \frac{\partial}{\partial y} u(\xi) \right\} d\xi - C$$

در \mathcal{D} تحلیلی است و $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$.

فرع. اگر $u(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} همساز مفروض باشد، تابع تحلیلی $f(z)$

موجود است بطوری که

$$\operatorname{Im} f(z) = u(z) \quad \text{در } \mathcal{D} \quad \text{داریم}$$

اثبات - به موجب قضیه ۱-۱، تابع تحلیلی $h(z)$ موجود است که $\operatorname{Re} h(z) = u(z)$.

ولی در این صورت $f(z) = ih(z)$ تحلیلی است $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Re} h(z) = u(z)$.

شرط همبند سادگی در قضیه ۱-۱، اساسی است، به عنوان مثال تابع

$$u(z) = u(x, y) = \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + y^2}$$

در صفحه سفته $x^2 + y^2 \neq 0$ همساز است. بعلاوه $u(z)$ "تقریباً" در این میدان برابر

قسمت حقیقی $\operatorname{Log} z$ است. منظور ما از "تقریباً"، اینست که $\operatorname{Log} z$ بر محور حقیقی منفی

پیوسته نیست. اکنون اگر تابعی مانند

$$f(z) = \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + y^2} + w(x, y)$$

در تمام صفحه سفته تحلیلی می‌بود. در این صورت $g(z) = f(z) - \operatorname{Log} z$ نیز بر

میدان \mathcal{D} مشتمل بر صفحه که در امتداد محور حقیقی بریده شده باشد، نیز تحلیلی می‌بود.

چون که $g(z)$ در \mathcal{D} انگاری محض است، یا به کار بردن معادلات کوشی - ریمن می‌بینیم

که $g(z)$ می‌بایست در \mathcal{D} ثابت باشد. پس هر تابع تحلیلی در \mathcal{D} که قسمت حقیقی‌اش

$\operatorname{Log} \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد باید به شکل $\operatorname{Log} z + iC$ ، حقیقی، باشد. چون که $\operatorname{Log} z + iC$

حتی بر محور حقیقی منفی نمی‌تواند پیوسته تعریف شود (به بخش ۵-۳ مراجعه کنید)،

هیچگونه امیدی که بتوان یک تابع تحلیلی در صفحه سفته تعریف کرد، که قسمت حقیقی

آن $u(z)$ باشد، موجود نیست.

با اینحال، قابل توجه است که

$$u(x, y) = \text{Log} \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

قسمت حقیقی تک مقداری برای تابع چند مقداری $\log z$ است. بعلاوه $u(x, y)$ بطور موضعی قسمت حقیقی یک تابع تحلیلی است. بدین معنی که اگر $z_0 \neq 0$ مفروض باشد. شاخه‌یی از $\arg z$ را می‌توان تعریف کرد که

$$\log z = \text{Log} \sqrt{x^2 + y^2} + i\phi(z)$$

در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد. واضح است که یک همسایگی، میدان همبند ساده است و بنابراین وجود یک تابع تحلیلی که قسمت حقیقی آن $\text{Log} \sqrt{x^2 + y^2}$ باشد بوسیله قضیه ۱-۱۰ تضمین می‌گردد.

به موجب قضیه ۱-۱۰، اینک می‌توان بعضی از قضایای فصل ۸ را ترمیم نمود و همتایی برایشان در توابع همساز یافت. قضیه بعدی ما همتای همساز قضیه لیوویل است.

قضیه ۱-۲۰. یک تابع همساز و کراندار در صفحه می‌بایست ثابت باشد.

اثبات - فرض کنیم $u(z)$ در صفحه همساز و کراندار است. قضیه ۱-۱۰ وجود یک تابع تام $f(z)$ را که قسمت حقیقی اش $u(z)$ باشد تضمین می‌کند. ولی در این صورت $g(z) = e^{f(z)}$ هم تابع تام است. چون که $|g(z)| = e^{u(z)}$ ، هم در صفحه کراندار است. به موجب قضیه لیوویل $g(z)$ و در نتیجه $u(z) = \log |g(z)|$ ، نیز بایست ثابت باشد.

تذکر - قضیه ۱-۱۰ را می‌توان به بیانی دیگر مطرح کرد: اگر قسمت حقیقی وانگاری یک تابع تام کراندار باشد، آنگاه تابع ثابت است.

اینک مشابه قضیه میانه گاوس برای توابع تحلیلی را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱-۳۰. فرض کنیم $u(z)$ در میدانی شامل قرص $|z - z_0| \leq r$ تحلیلی باشد،

آنگاه:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

اثبات - فرض کنیم $f(z)$ در $|z - z_0| \leq r$ یک تابع تحلیلی باشد که قسمت حقیقی

آن $u(z)$ است. بموجب قضیه میانه گاوس

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

با محاسبه قسمت حقیقی از دو طرف قضیه ثابت می شود. یعنی که

$$\begin{aligned} u(z_0) = \operatorname{Re} f(z_0) &= \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

مشابه قضایای ماکزیم و می نیمیم کالبد برای توابع تحلیلی، اصول ماکزیم و می نیمیم برای توابع همساز است:

قضیه ۱۰-۴. تابع همساز غیر ثابت در یک میدان ماکزیم و یامی نیم ندارد.

قابل توجه است، تابع همساز $u(z)$ در z_0 ماکزیم می شود اگر و تنها اگر تابع همساز $-u(z)$ در z_0 می نیمیم شود، پس اصل می نیمیم مستقیماً نتیجه اصل ماکزیم است.

اثبات ۱- قضیه ماکزیم کالبد برای توابع تحلیلی از قضیه میانگین گاوس و از اینکه تابع تحلیلی پیوسته می باشد، نتیجه می گردد. بطور مشابه می توانیم، اصل ماکزیم برای توابع همساز را از اصل میانگین برای توابع همساز (قضیه ۱۰-۳) استنتاج کنیم.

اثبات ۲- فرض کنیم $u(z)$ در میدان \mathcal{D} همساز و غیر ثابت باشد. اگر z_0 در \mathcal{D} مفروض باشد، تابع $f(z) = u(z) + iv(z)$ را که در یک همسایگی z_0 تحلیلی باشد می سازیم. قرار می دهیم که $g(z) = e^{f(z)}$ و توجه داریم به اینکه $|g(z)| = e^{u(z)}$. اگر $u(z)$ در z_0 ماکزیم می بود، آنگاه $|g(z)|$ نیز در z_0 ماکزیم می گردید که با قضیه ماکزیم کالبد برای توابع تحلیلی متناقض است.

اثبات ۳- فرض کنیم $u(z)$ در میدان \mathcal{D} همساز و غیر ثابت باشد. اگر z_0 در \mathcal{D} مفروض باشد، تابع $f(z) = u(z) + iv(z)$ را که در $N(z_0; \delta)$ تحلیلی است می سازیم. به موجب قضیه نگاشت باز (قضیه ۸-۲۱) عدد $\varepsilon > 0$ موجود است که $N(f(z_0); \varepsilon)$ زیر مجموعه نگاره $N(z_0; \delta)$ در تابع $f(z)$ خواهد بود. به ویژه بازه نقطه $z_1 \in N(z_0; \delta)$ داریم $\operatorname{Re} f(z_1) = u(z_0) + \varepsilon/2$. پس $u(z)$ در \mathcal{D} ماکزیم در z_0 ندارد.

تذکر - اصل می نیمیم برای توابع همساز عملاً "قوی تر از قضیه ماکزیم کالبد برای توابع تحلیلی است. فرض مخالف صفر بودن در میدان برای توابع همساز غیر ضروری است.

واضح است که در یک میدان، تابع همساز می‌تواند منفی باشد، در حالی که کالید تابع تحلیلی نمی‌تواند چنین باشد.

فرع ۱- فرض کنیم $u(z)$ در میدان کراندار \mathcal{D} همساز است و مرز (توپولوژیکی) \mathcal{D} یک مرز بسته است. اگر $u(z)$ در $C \cup \mathcal{D}$ پیوسته باشد و در C ، $u(z) \equiv K$ (K ثابت).
آنگاه در تمام \mathcal{D} ، $u(z) \equiv K$.

اثبات - چون که $C \cup \mathcal{D}$ یک مجموعه فشرده است، $u(z)$ می‌بایست یک ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد. بموجب قضیه ۱۰-۱۴، ماکزیمم و می‌نیمم در \mathcal{D} نیست. پس می‌بایست بر C باشد. ولی این بدان معنی است که $\max u(z) = \min u(z) = K$. پس در تمامی \mathcal{D} ، $u(z) \equiv K$.

تذکر - کراندار بودن اساسی است. مرز میدان $\text{Re } z > 0$ عبارت است از $\text{Re } z = 0$. تابع $u(z) = x$ برای $\text{Re } z \geq 0$ پیوسته است و بر مرز $u(z) \equiv 0$ ولی برای $\text{Re } z > 0$ ، $u(z) \neq 0$.

فرع ۲- فرض کنیم $u_1(z)$ و $u_2(z)$ در یک میدان کراندار همساز باشد و مرز این میدان، مرز بسته C باشد. اگر $u_1(z)$ و $u_2(z)$ بر $C \cup \mathcal{D}$ پیوسته باشند با-
بر C ، در این صورت در تمام \mathcal{D} ، $u_1(z) \equiv u_2(z)$.

اثبات - قرار می‌دهیم $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ و فرع ۱ را به کار می‌بریم.

نشان دادیم که رفتار تابع همساز بر مرز یک ناحیه کراندار و بسته، مشخص رفتار تابع در تمامی میدان است. بر خلاف مورد توابع تحلیلی. این نتیجه برای یک دنباله از نقاط دلخواه در ناحیه ترمیم پذیر نیست. به عنوان مثال تابع غیر ثابت $u(z) = x$ در تمام صفحه همساز است و بر محور انگاری $u(z) \equiv 0$. پس در قضیه ۸-۱۴، کلمه "تحلیلی" را نمی‌توان با "همساز" تعویض نمود. بدین معنی که، اگر حتی $u(z)$ در میدان \mathcal{D} همساز باشد و $z_n \rightarrow z_0$ در \mathcal{D} و $u(z_n) \equiv 0$ باشد، معذالک اینها تضمین نمی‌کنند که $u(z) \equiv 0$. با اینحال نتیجه زیر را می‌توان بیرون کشید.

قضیه ۱۰-۵. اگر $u(z)$ در میدان \mathcal{D} همساز باشد و در همسایگی یک نقطه از \mathcal{D} ثابت باشد، آنگاه $u(z)$ در تمامی \mathcal{D} ثابت است.

اثبات - فرض کنیم A مجموعه همه نقاط z_0 در \mathcal{D} باشد که برای آنها $u(z)$ در یک همسایگی z_0 ثابت است. واضح است که A مجموعه‌یی است غیرتهی. برای آنکه ثابت کنیم $A = \mathcal{D}$ ، کافیت نشان دهیم $B = \mathcal{D} - A$ باز است، زیرا در این صورت، چون که \mathcal{D} همبند است، B می‌بایست تهی باشد.

فرض کنیم B باز نیست، پس برای نقطه z_0 در B و $\varepsilon > 0$ ، نقطه z_1 در A موجود است که $z_1 \in N(z_0; \varepsilon) \subset \mathcal{D}$ چون که A باز است، می‌توان $\delta > 0$ به قدر کافی کوچک یافت که $N(z_1; \delta) \subset N(z_0; \varepsilon) \cap A$. اکنون تابعی تحلیلی می‌سازیم که برای هر z در $N(z_0; \varepsilon)$ ، $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ چونکه $u(z)$ در $N(z_1; \delta)$ ثابت است، برای تمام نقاط در این همسایگی داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

پس برای z در $N(z_1; \delta)$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

با به کار بردن قضیه ۸-۱۴ برای $f'(z)$ ، نشان می‌دهیم در تمامی $N(z_0; \varepsilon)$ ، $f'(z) \equiv 0$. در این صورت بنابه قضیه ۵-۳، $f(z)$ در $N(z_0; \varepsilon)$ ثابت است. بنابراین $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ هم در $N(z_0; \varepsilon)$ ثابت است و این با فرض $z_0 \in B$ متناقض است. و اثبات تمام است.

یک ارتباط جالب توجه میان ماکزیمم کالبد یک تابع تحلیلی با ماکزیمم قسمت حقیقی آن تابع موجود است.

قضیه ۱۰-۶ (پورل - کاراتهودری)^۱. فرض کنیم $f(z)$ در قرص $|z| \leq R$ تحلیلی است. گیریم $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ و $A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$. در این صورت برای $0 < r < R$

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|.$$

اثبات - اگر $f(z)$ ثابت باشد (مثلاً $f(z) = K$)، در این صورت طرف راست از پائین دارای کران

$$\frac{-2r}{R-r} |K| + \frac{R+r}{R-r} |K| = |K| = M(r),$$

است و قضیه ثابت است. پس می توان فرض کرد که $f(z)$ غیر ثابت است.

اگر $f(0) = 0$ ، بموجب قضیه ۱-۴، $A(R) > A(0) = 0$ ، چون که برای $|z| \leq R$ ،

$$\operatorname{Re} \{2A(R) - f(z)\} \geq A(R) > 0$$

تابع

$$g(z) = \frac{f(z)}{2A(R) - f(z)}$$

برای $|z| \leq R$ تحلیلی است. بعلاوه با قرار دادن $f(z) = u + iv$ ، داریم:

$$|g(z)| = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{(2A(R) - u)^2 + v^2}} \leq \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{u^2 + v^2}} = 1 \quad (|z| \leq R).$$

بموجب لم شوارتس

$$\max_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{r}{R}.$$

ولی

$$|f(z)| = \left| \frac{2A(R)g(z)}{1 + g(z)} \right| \leq \frac{2A(R)r/R}{1 - r/R} = \frac{2rA(R)}{R - r}, \quad (۳)$$

و قضیه در حالت $f(0) = 0$ ثابت می گردد.

بالاخره اگر $f(0) \neq 0$ ، (۳) را برای $f(z) - f(0)$ بکار می بریم. و این کار منجر

می شود به

$$\begin{aligned} |f(z) - f(0)| &\leq \frac{2r}{R-r} \max_{|z|=r} \operatorname{Re} \{f(z) - f(0)\} \\ &\leq \frac{2r}{R-r} (A(R) + |f(0)|). \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{2r}{R-r} (A(R) + |f(0)|) + |f(0)| \\ &= \frac{2r}{R-r} A(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|, \end{aligned}$$

و قضیه ثابت است.

از قضیه ۱۰-۶ می توان استفاده کرد و قضیه ۸-۱۰ و قضیه ۱۰-۲ را بصورت زیر تعمیم

داد.

قضیه ۱۰-۷. فرض کنیم $f(z)$ تابعی است نام Mr^1 و $\operatorname{Re} f(z) \leq Mr^1$ ($|z| = r \geq r_0$)

برای یک عدد حقیقی غیر منفی λ ، در این صورت $f(z)$ یک چند جمله ای با درجه حداکثر λ است.

اثبات - در قضیه ۱۰-۶، $R = 2r$ قرار می دهیم. در این صورت برای M_1 بس بزرگ

$$|f(z)| \leq \frac{2r}{2r-r} A(2r) + \frac{2r+r}{2r-r} |f(0)|$$

$$\leq 2(2r)^1 M + 3|f(0)| \leq M_1 r^1,$$

و اینک قضیه، از قضیه ۸-۱۰ اثبات می گردد.

پرسش ها

- ۱- در اثبات قضیه ۱۰-۱، از همینند ساده بودن میدان کجا استفاده شد؟
- ۲- چه قضایایی برای قرص ها مقبول است ولی برای میدانهای همینند ساده نیست؟
- ۳- نقش عمده پیوستگی مشتقات نسبی مرتبه دوم در توابع همساز چیست؟
- ۴- آیا یک تابع همساز غیر ثابت در صفحه می تواند بیش از یک مقدار حقیقی حذف کند؟
- ۵- آیا می توان قضیه ماکزیم کالبد برای توابع تحلیلی را با استفاده از اصل ماکزیم برای توابع همساز اثبات نمود؟
- ۶- فرض کنید تابعی بر میدان همساز است و بر مرز C پیوسته است، آیا می بایست که تابع بر $C \cup C^\circ$ پیوسته باشد؟
- ۷- آیا ارتباطی میان ضرایب یک تابع و ماکزیم قسمت حقیقی آن موجود است؟
- ۸- چرا قضیه ۱۰-۷، تعمیم قضیه ۸-۱۰ و قضیه ۱۰-۴ می باشد؟

تمرین ها

- ۱- نشان دهید که تابع همساز در یک میدان، دارای مشتقات نسبی از تمام مراتب است.
- ۲- اگر $u(z)$ در صفحه غیر ثابت و همساز باشد، نشان دهید، $u(z)$ به هر عدد

حقیقی هر چقدر بخواهیم نزدیک می شود.

۳- اصل می نیم را مستقیماً با هر یک از سه روشی که اصل ماکریم ثابت شد، ثابت کنید.

۴- با بکار بردن اصل میانگین برای تابع $\log |1+z|$ ، $\log |1+z|$ و $|z| \leq r < 1$ ، با $r \rightarrow 1$ نشان دهید $\int_0^\pi \log \sin \theta \, d\theta = -\pi \log 2$.

۵- فرض کنید $f(z)$ و $g(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی است با $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z)$ بر C . نشان دهید که درون C ، $f(z) = g(z) + i\beta$ ، که β ثابت حقیقی است.

۶- تمرین قبلی را به این ترتیب تعمیم دهید که: نشان دهید اگر تنها فرض کنیم $f(z)$ و $g(z)$ درون C تحلیلی و بر ناحیه شامل C و درون آن پیوسته باشند باز هم نتیجه برقرار است.

۷- اگر $u(z)$ بر قرص سفته $0 < |z - z_0| < R$ همساز و کراندار باشد، نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow z_0} u(z)$ موجود است.

۸- فرض کنید $u_1(z)$ و $u_2(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} همسازند و در \mathcal{D} ، $u_1(z)u_2(z) \equiv 0$ ثابت کنید، یا $u_1(z) \equiv 0$ یا $u_2(z) \equiv 0$ در \mathcal{D} .

۹- اگر $u(z) = u(x, y)$ در صفحه همساز باشد و برای هر z ، $u(z) \leq |z|^n$ ، نشان دهید، $u(z)$ نسبت به دو متغیر x و y چند جمله‌ای است.

۱۰- فرض کنید $f(z)$ در قرص $|z| \leq R$ تحلیلی است و $A(r) = \max_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z)$ ثابت کنید برای $r < R$ ،

$$\max_{|z|=r} \frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \leq \frac{2^{n+2}R}{(R-r)^{n+1}} \{A(R) + |f(0)|\}.$$

(راهنمایی: فرمول انتگرال کوشی را در ارتباط با قضیه ۱۰-۶ بکار ببرید).

۱۰-۲. فرمول انتگرال پواسن

در این بخش همتای همسازی برای فرمول انتگرال کوشی خواهیم یافت. اگر f درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد آنگاه در تمام نقاط z درون C ،

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (4)$$

می خواهیم در نقاط درون C ، عبارتی برای $\operatorname{Re} f(z)$ بر حسب مقادیر $\operatorname{Re} f$ بر C بیابیم. ولی عبارت

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right\}$$

— گونه‌ی ساده می‌شود که هم متضمن $\operatorname{Re} f$ و هم متضمن $\operatorname{Im} f$ بر C می‌باشد. ولی اگر با این حال، انتگرال (۴) به انتگرالی به شکل $\int_a^b \phi(t) dt$ تبدیل شود که در آن $\phi(t)$ تابع مختلط از متغیر حقیقی t باشد، آنگاه:

$$\operatorname{Re} \int_a^b \phi(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} \phi(t) dt.$$

یادآور میشویم که به هنگام اثبات اصل میانگین برای توابع همساز به تشکیل چنین تبدیلی مبادرت کردیم. و بدین ترتیب قادر شدیم که مقدار یک تابع همساز را در مرکز یک دایره بر اساس مقادیر بر محیط آن مشخص کنیم. ولی همتای فرمول انتگرال کوشی برای دایره، عبارتی است برای تابع همساز در تمام نقاط درون دایره برحسب مقادیر آن بر دایره. همانندی زیر در یافتن چنین ارتباطی مفید است، قرار می‌دهیم

$$\zeta = Re^{i\phi}, \quad z = re^{i\theta} \quad (r < R).$$

آنگاه

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{R^2 - r^2}{|\zeta - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2}. \quad (5)$$

جهت اثبات (۵) ملاحظه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} &= \frac{(\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \frac{(\zeta + z)(\bar{\zeta} - \bar{z})}{|\zeta - z|^2} \\ &= \frac{R^2 - r^2 + 2irR \sin(\theta - \phi)}{|\zeta - z|^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

— محاسبه مقدار حقیقی در (۶)، تساوی اول (۵) ثابت می‌شود. تساوی دوم از همانندی زیر ناشی می‌شود:

$$\begin{aligned} |\zeta - z|^2 &= (Re^{i\phi} - re^{i\theta})(Re^{-i\phi} - re^{-i\theta}) \\ &= R^2 - rR(e^{i(\theta - \phi)} + e^{-i(\theta - \phi)}) + r^2 \\ &= R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2. \end{aligned}$$

قضیه ۱۰-۸ (فرمول انگرال پواسن). فرض کنیم $u(z)$ در میدانی شامل قرص

$|z| \leq R$ تحلیلی است، آنگاه برای $r < R$ ، $z = re^{i\theta}$ داریم:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi.$$

اثبات - به موجب قضیه ۱۰-۱، تابع تحلیلی $f(z)$ موجود است که در قرص $|z| \leq R$ ، قسمت حقیقی آن $u(z)$ باشد. به موجب فرمول انتگرال کوشی

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (|z| < R). \quad (7)$$

اگر $z=0$ قضیه، با استفاده از قضیه میانگین گاوس، ثابت می شود. پس می توان فرض کرد $z = re^{i\theta} \neq 0$ و قرار داد

$$z_1 = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}.$$

نقطه z_1 ، که برپرتو مار بر مبداء تا z واقع است، خارج دایره $|\zeta|=R$ واقع است. پس

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\bar{z} f(\zeta)}{\zeta \bar{z} - R^2} d\zeta. \quad (8)$$

با تفریق (۸) از (۷) بدست می آید

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \left[\frac{1}{\zeta - z} + \frac{\bar{z}}{R^2 - \zeta \bar{z}} \right] f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{R^2 - r^2}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta \bar{z})} f(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (9)$$

برای $\zeta = Re^{i\phi}$ و $z = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)(R^2 - \zeta \bar{z})} &= \frac{iRe^{i\phi} d\phi}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(R^2 - rRe^{i(\phi - \theta)})} \\ &= \frac{i d\phi}{(Re^{i\phi} - re^{i\theta})(Re^{-i\phi} - re^{-i\theta})} \\ &= \frac{i}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi. \end{aligned} \quad (10)$$

با جایگزینی (۱۰) در (۹)، حاصل می شود ..

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} f(Re^{i\phi}) d\phi. \quad (11)$$

با محاسبه قسمت حقیقی در طرفین (۱۱)، قضیه ثابت است.

فرع ۱- برای $r < R$ و θ دلخواه

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi = 1.$$

اثبات - در قضیه $1 \equiv u(z)$ قرار می‌دهیم.

فرع ۲- فرض کنیم $f(z) = u(z) + iv(z)$ در قرص $|z| \leq R$ تحلیلی است. آنگاه

برای $z = re^{i\theta}$ ، $r < R$ داریم

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi,$$

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} v(Re^{i\phi}) d\phi.$$

اثبات - با محاسبه قسمت‌های حقیقی و انکاری در (۱۱) قضیه ثابت می‌شود.

فرع ۳- با مفروضات فرع ۲، $v(z)$ را بصورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2rR \sin(\theta - \phi)}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi + v(0).$$

اثبات - قرار می‌دهیم $\zeta = Re^{i\phi}$ ، $z = re^{i\theta}$ ، $r < R$ و گیریم:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) d\phi.$$

نشان می‌دهیم که $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z)$. خارج قسمت تفاضلی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - (z+h))} u(\zeta) d\phi.$$

همانند اثبات قضیه ۸-۱، می‌توانیم نشان دهیم $g(z)$ تحلیلی است و

$$g'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2\zeta}{(\zeta - z)^2} u(\zeta) d\phi.$$

چون که

$$\operatorname{Re} g(z) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) d\phi \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\zeta) d\phi,$$

با جایگزینی (۵)، در اولین همانندی فرع ۲، حاصل می‌شود.

$$\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi.$$

پس با بکار بردن معادلات کوشی - ریمنان نتیجه می‌دهد.

$$v(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} g(z) + C.$$

پس به موجب (۶)

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2rR \sin(\theta - \phi)}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi + C. \quad (12)$$

با قرار دادن $r=0$ در (۱۲) ملاحظه می‌شود که $C = v(0)$ و قضیه ثابت است.

تذکر ۱- در حالت عمومی می‌دانیم که (تمرین ۵، بخش ۱۰-۱) یک تابع تحلیلی با قسمت حقیقی‌اش با اختلاف یک ثابت انگاری مشخص می‌گردد. در موردی که $f(z) = u(z) + iv(z)$ در قرص $|z| \leq R$ تحلیلی باشد، فرع ۲ و فرع ۳، این ارتباط را صراحتاً بیان می‌کنند، بدین معنی که:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2 + 2irR \sin(\theta - \phi)}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi + iv(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\phi} + re^{i\theta}}{Re^{i\phi} - re^{i\theta}} u(Re^{i\phi}) d\phi + iv(0). \end{aligned} \quad (13)$$

تذکر ۲- عبارت

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2}$$

همه هسته پواسن معروف است. قابل توجه است که هسته پواسن دارای یک کران بالائی بصورت زیر

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR + r^2} = \frac{R+r}{R-r}$$

و دارای یک کران پائین بصورت زیر می‌باشد:

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 + 2rR + r^2} = \frac{R-r}{R+r}.$$

همانطور که خواهیم دید، نتیجه قضیه ۸-۱۰ در شرایط ضعیف‌تر هم برقرار است.

لازم نیست که فرض کنیم $u(z)$ بر دایره $|z| = R$ همساز است.

قضیه ۹-۱. فرض کنیم $u(z)$ در قرص باز $|z| < R$ تحلیلی و بر قرص بسته $|z| \leq R$ پیوسته است. در این صورت برای $z = re^{i\theta}$ ، $r < R$ داریم:

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi.$$

اثبات - گیریم $\{t_n\}$ دنباله‌یی از اعداد حقیقی صعودی باشد که به ۱ میل می‌کند. در این صورت برای هر n ، تابع $u(t_n z)$ در قرص بسته $|z| \leq R$ همساز است. با قرار دادن $u_n(z) = u(t_n z)$ ، از قضیه ۱۰-۸ نتیجه می‌شود که

$$u_n(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u_n(Re^{i\phi}) d\phi.$$

چونکه $u_n(z)$ در $z = re^{i\theta}$ پیوسته است.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(re^{i\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(t_n re^{i\theta}) = u(re^{i\theta}).$$

با تحقیق کردن تساوی زیر، اثبات کامل می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u_n(Re^{i\phi}) d\phi \\ & \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi. \end{aligned} \quad (14)$$

کافی است ثابت کنیم که اختلاف

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} (u_n(Re^{i\phi}) - u(Re^{i\phi})) d\phi \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R+r}{R-r} |u_n(Re^{i\phi}) - u(Re^{i\phi})| d\phi \end{aligned}$$

را می‌توان به دلخواه کوچک کرد. اکنون $u(z)$ بر مجموعه فشرده $|z| \leq R$ پیوسته است و پس پیوسته یکنواخت است. با $\varepsilon > 0$ مفروض عدد صحیح N می‌توان یافت بطوری‌که برای $n > N$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R+r}{R-r} |u_n(Re^{i\phi}) - u(Re^{i\phi})| d\phi \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R+r}{R-r} |u(t_n Re^{i\phi}) - u(Re^{i\phi})| d\phi \leq \varepsilon \frac{R+r}{R-r}. \end{aligned}$$

چونکه ε اختیاری است، اثبات قضیه تمام است.

تذکر - با استفاده از پیوستگی یکنواخت $u(z)$ ($|z| \leq R$) قادر شدیم که نشان دهیم دنباله $u_n(z) = u(t_n z)$ به $u(z)$ ($|z| \leq R$) همگرایی یکنواخت است. پس اعتبار (۱۴) نتیجه مستقیم قضیه ۸-۴ است.

نشان داده‌ایم تابعی که برای $|z| < R$ همساز و برای $|z| \leq R$ پیوسته است دارای این خاصیت می‌باشد که مقادیر آن در درون قرص برحسب مقادیر مرزی مشخص است. فرض کنیم، در عوض، از تابع حقیقی $F(\theta)$ که بر دایره $|z| = R$ پیوسته است، شروع کنیم. آیا تابعی موجود است که بر قرص $|z| < R$ همساز باشد و دارای این خاصیت باشد که برای هر θ

$$\lim_{r \rightarrow R} u(re^{i\theta}) = F(\theta) \quad (r < R)$$

در حالت عمومی، مسئله دیریکله^۱ چنین عنوان شده است. اگر \mathcal{D} میدان مفروض باشد، آیا تابع همسازی در \mathcal{D} موجود است که مقادیر مفروضی را بر مرز \mathcal{D} به پذیرد؟ قضیه بعدی ما مربوط به مسئله دیریکله برای قرص است.

قضیه ۱۰-۱۰. گیریم $F(\phi)$ تابعی است پیوسته از متغیر حقیقی ϕ ، $0 \leq \phi \leq 2\pi$ با

$$F(0) = F(2\pi) \quad \text{در این صورت تابع } u(z) \text{ که بصورت زیر تعریف شود:}$$

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} F(\phi) d\phi \quad (r < R)$$

در شرایط زیر صادق است:

(i) $u(z)$ در قرص $|z| < R$ همساز است.

(ii) برای هر θ ثابت $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\lim_{r \rightarrow R} u(re^{i\theta}) = F(\theta) \quad (r < R).$$

اثبات - جهت اثبات (i)، قرار می‌دهیم $\zeta = Re^{i\phi}$ ، $z = re^{i\theta}$ ($r < R$) و گیریم:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} F(\phi) d\phi.$$

در این صورت، همانند اثبات فرع ۳ از قضیه ۱۰-۸، می‌توان نشان داد که $g(z)$ (در $|z| < R$) تحلیلی است. به موجب (۵) ملاحظه می‌شود که $u(z) = \operatorname{Re} g(z)$ و همساز

بودن $u(z)$ ثابت می‌گردد.

برای اثبات (ii) می‌بایست نشان داد که برای هر θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) و هر $\varepsilon > 0$ ، عدد $\delta > 0$ متناظر می‌شود بطوری که برای تمام r های $0 < R - r < \delta$ داشته باشیم.

$$|u(re^{i\theta}) - F(\theta)| < \varepsilon$$

قرار می‌دهیم:

$$P(\phi) = P(\phi, \theta, r, R) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2}.$$

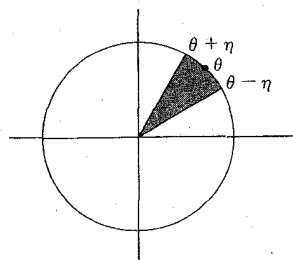
به موجب فرع ۱ قضیه ۱۰-۸

$$u(re^{i\theta}) - F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\phi) (F(\phi) - F(\theta)) d\phi. \quad (15)$$

قابل توجه است که

$$P(\theta) = P(\theta, \theta, r, R) = \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2} = \frac{R + r}{R - r},$$

بنابراین $\lim_{r \rightarrow R} P(\theta) = \infty$. در حالی که $\lim_{r \rightarrow R} P(\phi) = 0$ ، هر وقت $\phi \neq \theta$. برای آنکه نشان دهیم (۱۵) بدخواه کوچک می‌گردد، دو انتگرال متفاوت را در نظر می‌گیریم. یکی پیوستگی $F(\phi)$ را در $\phi = \theta$ مورد استفاده قرار می‌دهد در حالی که دیگری رفتار "دقیق" $P(\phi)$ را در ناحیه‌یی که خارج از یک همسایگی نقطه $Re^{i\theta}$ باشد، مورد استفاده قرار می‌دهد (ر. ک. شکل ۱)



شکل ۱

به موجب پیوستگی $F(\phi)$ در $\phi = \theta$

$$|F(\phi) - F(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad 0 < |\phi - \theta| < \eta. \quad (16)$$

با قرار دادن

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} P(\phi) [F(\phi) - F(\theta)] d\phi$$

۹

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\eta}^{2\pi+\theta-\eta} P(\phi) [F(\phi) - F(\theta)] d\phi,$$

از متناوب بودن عبارت زیر نشان انتگرال در (۱۵) و نامساوی مثلث نتیجه می شود:

$$|u(re^{i\theta}) - F(\theta)| = |I_1 + I_2| \leq |I_1| + |I_2|. \quad (۱۷)$$

چون که $P(\phi) > 0$ ، (۱۶) را در فرع ۱ قضیه ۱۰-۸ بکار می بریم و حاصل می شود:

$$|I_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} P(\phi) |F(\phi) - F(\theta)| d\phi < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} P(\phi) d\phi < \frac{\varepsilon}{2}.$$

برای $\theta + \eta \leq \phi \leq 2\pi + \theta - \eta$

$$P(\phi) \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos \eta + r^2}.$$

مخرج این عبارت اخیر، به عنوان تابعی از r ، در $r = R \cos \eta$ می نیمم دارد، پس

$$P(\phi) \leq \frac{(R+r)(R-r)}{R^2(1 - \cos^2 \eta)} \leq \frac{2}{R \sin^2 \eta} (R-r) = m(R-r),$$

که m ثابت صحیحی مستقل از r است. چونکه $F(\phi)$ در فاصله بسته $[\theta + \eta, 2\pi + \theta - \eta]$ و پیوسته است، پس می توان فرض کرد:

$$|F(\phi)| \leq M.$$

پس

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\eta}^{2\pi+\theta-\eta} P(\phi) |F(\phi) - F(\theta)| d\phi \leq 2mM(R-r) \\ &= K(R-r), \end{aligned}$$

که در آن K ثابت صحیح مستقل از r است. پس برای r که در رابطه زیر صادق باشد.

$$R-r < \frac{\varepsilon}{2K} = \delta,$$

نتیجه می شود

$$|I_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (۱۹)$$

با جایگزین (۱۸) و (۱۹) در (۱۷)، بدست می آید.

برای $0 < R-r < \delta$. $|u(re^{i\theta}) - F(\theta)| < \varepsilon$ و بدین ترتیب اثبات تمام است.

تذکر ۱- ترمیم جزئی در اثبات فوق نشان می‌دهد که هر تابعی در شرایط قضیه صادق باشد، می‌بایست بر قرص بسته $|z| \leq R$ پیوسته باشد. به موجب فرع ۲ قضیه ۱-۴، تابع $u(z)$ در قضیه ۱-۸ تنها تابعی است که در شرایط قضیه صدق می‌کند.

تذکر ۲- در قضیه ۱-۱۰، اگر تنها فرض بر این باشد که $F(\phi)$ پیوسته بخشی است، نتیجه (i) باز هم برقرار است. و (ii) هم برقرار است منتها با این شرط که تساوی $\lim_{r \rightarrow R} u(re^{i\theta}) = F(\theta)$ تنها در نقاط پیوستگی F برقرار است، اثبات مطلب کاملاً "مشابه" است.

مثال - تابع $u(z)$ ی می‌یابیم که برای $|z| < R$ همساز باشد و بطوری که

$$\lim_{r \rightarrow R} u(re^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi, \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

برای $z = re^{i\theta}$ ، $\zeta = Re^{i\phi}$ ، تابع

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Re \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\phi$$

در $|z| < R$ همساز است. یک انتگرال یابی نشان می‌دهد:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{R+r}{R-r} \tan \frac{\phi - \theta}{2} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\tan^{-1} \left(\frac{R+r}{R-r} \tan \frac{\pi - \theta}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{R+r}{R-r} \tan \frac{-\theta}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

از همانندی‌های مثلثاتی زیر

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta},$$

$$\tan\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \cot \frac{\theta}{2},$$

$$\tan \frac{\theta}{2} + \cot \frac{\theta}{2} = \frac{2}{\sin \theta},$$

نتیجه می‌شود

$$\tan \pi u(z) = \frac{\frac{R+r}{R-r} \left[\tan \frac{\pi - \theta}{2} - \tan \frac{-\theta}{2} \right]}{1 + \left(\frac{R+r}{R-r} \right)^2 \tan \frac{\pi - \theta}{2} \tan \frac{-\theta}{2}}$$

$$= \frac{\frac{R+r}{R-r} \left(\cot \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \right)}{1 - \left(\frac{R+r}{R-r} \right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{-2rR \sin \theta}.$$

اگر مشخصه‌ی برای تناژات معکوس به کار ببریم که در فاصله $[0, \pi]$ باشد، داریم

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{R^2 - r^2}{-2rR \sin \theta}.$$

و با این مشخصه

$$\lim_{r \rightarrow R} \tan^{-1} \frac{R^2 - r^2}{-2rR \sin \theta} = \begin{cases} \pi, & 0 < \theta < \pi, \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

پس شرایط مرزی

$$\lim_{r \rightarrow R} u(re^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi, \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi, \end{cases}$$

صادق است.

تذکر - قضایای این بخش برای توابعی که بر قرص $|z| \leq R$ به مرکز مبداء تعریف شده بودند، اثبات گردید. با یک انتقال ساده می‌توانستیم این قضایا را برای توابعی که بر قرص $|z - z_0| \leq R$ به مرکز z_0 تعریف شوند، ثابت کنیم. جهت تشریح مطلب، فرض کنیم $u(z)$ در میدانی شامل قرص $|z - z_0| \leq R$ همساز است. با قرارداد $z - z_0 = re^{i\theta}$ قضیه ۱-۸ برای هر نقطه از درون دایره $|z - z_0| = R$ برقرار می‌گردد.

پرسش‌ها

۱- کدام خواص نقطه z_1 ، که در اثبات قضیه ۱-۸ انتخاب شد، در اثبات موثر

افتاد؟

۲- آیا می‌توان قضیه ۱-۷ را با استفاده از فرمول پواسن اثبات کرد؟

۳- اگر $F(\phi)$ ، که بر دایره $|z| = R$ معین است، همه جا مگر در یک تعداد متناهی نقاط پیوسته باشد. آیا تابع همساز منحصر بفردی در $|z| < R$ موجود است که با نزدیک شدن z به مرز به $F(\phi)$ میل کند؟

۴- آیا می‌توان با استفاده از حل مسئله دیریکله در قرص، مسئله دیریکله را برای ناحیه‌های متفاوت حل نمود؟

۵- چه رابطه‌ی میان قضیه ۱-۳ و قضیه ۱-۸ موجود است؟

تمرینها

۱- (الف) برای $\rho = Re^{i\phi}$ ، $z = re^{i\theta}$ ، $(r < R)$ ، نشان دهید .

$$\frac{\rho + z}{\rho - z} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\theta - \phi)}.$$

(ب) نتیجه بگیرید که

$$\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos \alpha + r^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n\alpha \quad (\alpha \text{ حقیقی})$$

۲- با استفاده از تمرین قبل ، عبارت متفاوتی برای نتیجه قضیه ۱۰-۸ بیابید .

۳- نشان دهید .

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta - \phi)}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi = 0.$$

۴- اگر $u(z)$ برای $|z| > R$ همساز و برای $|z| \geq R$ پیوسته باشد ، نشان دهید که

$$\text{برای } (r > R) \quad z = re^{i\theta} \quad \rho = Re^{i\phi}$$

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re \frac{\rho + z}{\rho - z} u(Re^{i\phi}) d\phi.$$

۵- تابع همساز $u(z)$ بر $|z| < R$ بیابید که

$$\lim_{r \rightarrow R} u(re^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta < \pi, \\ 1, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

۶- نشان دهید که تابع

$$u(re^{i\theta}) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{2r \sin \theta}{1 - r^2} \quad (r < 1)$$

بر $|z| < 1$ همساز است و در شرط مرزی زیر صادق است .

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi, \\ -1, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

۷- قرار دهید $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $F(\theta) = \theta/2$ ، نشان دهید که تابع

$$u(re^{i\theta}) = \tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta}$$

در $|z| < 1$ همساز است و برای هر θ ، $\lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta}) = F(\theta)$. آیا می توان

این را از فرمول انتگرال پواسن استنتاج نمود؟ (راهنمایی: نشان دهید:

$$\left(\tan^{-1} \frac{r \sin \theta}{1 + r \cos \theta} = \operatorname{Im} \log (1 + z) \right) \quad (z = re^{i\theta})$$

۸- فرض کنید $f = u + iv$ بر خط حقیقی و بر نیم صفحه زیرین تحلیلی و کراندار است. نشان دهید که برای $z = x + iy$ ، $y > 0$ داریم

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt,$$

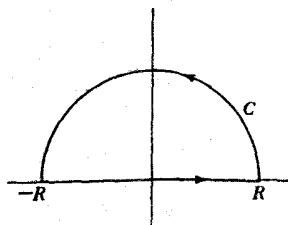
$$v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yv(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt.$$

(راهنمایی: بنویسید

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \bar{z}} \right) d\zeta,$$

که در آن C مرز شکل ۲ است).

شکل ۲



۹- با استفاده از تمرین قبل، مسئله دیریکله را برای یک نیم صفحه طرح و حل کنید.

۱۰-۳. توابع همساز مثبت

به عنوان کاربردی از فرمول انتگرال پواسن، ثابت می کنیم که:

نامساوی هارنک^۱ - فرض کنیم $u(z)$ در قرص $|z - z_0| < R$ همساز است و برای هر z ، $u(z) \geq 0$ ، با قرار دادن $z - z_0 = re^{i\theta}$ داریم:

$$u(z_0) \frac{R-r}{R+r} \leq u(re^{i\theta}) \leq u(z_0) \frac{R+r}{R-r} \quad (r < R).$$

اثبات - کافی است این نامساویها را برای قرص کوچکتر

$$|z - z_0| \leq R' < R,$$

ثابت کرده و سپس R' به R میل کند. به همین دلیل می توان فرض کرد $u(z)$ در قرص بسته $|z - z_0| \leq R$ همساز است. در این صورت به موجب قضیه ۱۰-۹

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\phi}) d\phi. \quad (20)$$

با استفاده از مثبت بودن $u(z)$ و با استفاده از نامساوی

$$\frac{R-r}{R+r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} \leq \frac{R+r}{R-r},$$

از (۲۰) نتیجه می گیریم که:

$$\frac{R-r}{R+r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) d\phi \leq u(re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) d\phi.$$

به موجب خاصیت میانگین

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) d\phi = u(z_0),$$

و اثبات تمام است.

نشان دادیم (قضیه ۱۰-۳) که هر تابع همساز در خاصیت میانگین صادق است. در مورد توابع پیوسته، معکوس مطلب هم درست است:

قضیه ۱۰-۱۱. فرض کنیم $u(z)$ تابع حقیقی پیوسته باشد که برای z_0 در میدان \mathcal{D}

و برای هر قرص $|z - z_0| \leq r$ درون \mathcal{D} داشته باشیم.

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

آنگاه $u(z)$ در \mathcal{D} همساز است.

اثبات - نقطه $z_0 \in \mathcal{D}$ را با $r > 0$ انتخاب می کنیم که $|z - z_0| \leq r$ درون \mathcal{D} بیافتد. به عنوان نتیجه قضیه ۱۰-۱، تابع $u_1(z)$ موجود است که بر $|z - z_0| < r$ همساز و بر $|z - z_0| = r$ پیوسته بوده و بردار $|z - z_0| \leq r$ با $u(z)$ برابر باشد، چون که $u_1(z) - u(z)$ تابعی است پیوسته که در خاصیت میانگین صدق می کند، اثبات اول قضیه ۱۰-۴ نشان می دهد که $u_1(z) - u(z)$ ماکزیمم و مینیمم بر مرز دارد. چون که

$$u_1(z) - u(z) \equiv 0 \quad \text{بر } |z - z_0| = r, \text{ داریم}$$

پس نتیجه می شود که برای $|z - z_0| < r$ ، $u_1(z) \equiv u(z)$. پس $u(z)$ در یک همسایگی z_0 همساز است . چون که z_0 اختیاری بود ، $u(z)$ در سراسر \mathcal{D} همساز خواهد بود .

پس یک شرط لازم و کافی برای آنکه تابع پیوسته در یک میدان همساز باشد آن است که در هر نقطه میدان در خاصیت میانگین صدق کند ، به عنوان کاربردی از این نکته ، قضیه زیر را که مشابه قضیه ۸-۶ است اثبات می کنیم :

قضیه ۱۰-۱۲ . فرض کنیم $\{u_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع همساز باشد که بر زیرمجموعه های فشرده \mathcal{D} به تابع $u(z)$ همگرای یکنواخت باشد . در این صورت $u(z)$ در تمامی \mathcal{D} همساز است .
اثبات - چون که به ازاء هر n ، $u_n(z)$ پیوسته است ، پیوستگی $u(z)$ ناشی از قضیه ۶-۶ است . با $z_0 \in \mathcal{D}$ مفروض و قرص $|z - z_0| \leq r$ درون \mathcal{D} ، برای هر n داریم :

$$u_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

بموجب قضیه ۸-۴

$$\begin{aligned} u(z_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + re^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

و اینک قضیه، از قضیه ۱۰-۱۱ نتیجه می گردد .

نامسای هارنک به قضیه‌یی در مورد دنباله‌های توابع همساز می انجامد .

قضیه ۱۰-۱۳ (اصل هارنک) . فرض کنیم $\{u_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع معین و همساز بر میدان \mathcal{D} است و برای هر $z \in \mathcal{D}$ و هر n ، $u_{n+1}(z) \geq u_n(z)$ اگر $\{u_n(z)\}$ حداقل در یک نقطه \mathcal{D} همگرا باشد ، آنگاه $\{u_n(z)\}$ در تمامی نقاط \mathcal{D} همگراست . بعلاوه همگرایی بر زیر مجموعه‌های فشرده \mathcal{D} یکنواخت و تابع حدی در تمام \mathcal{D} همساز است .

اثبات - می توانیم فرض کنیم $u_n(z) \geq 0$ ، زیرا اگر چنین نباشد ، قضیه را برای دنباله غیر منفی $\{u_n(z) - u_1(z)\}$ اثبات می کنیم . به موجب خاصیت یکنوایی ، برای هر

z در \mathcal{D} یا $\{u_n(z)\}$ همگراست و یا به ∞ می‌گراید. گیریم

$$A = \{z \in \mathcal{D} : u_n(z) \rightarrow \infty\},$$

$$B = \{z \in \mathcal{D} : u_n(z) \text{ همگراست}\}.$$

— $z_0 \in \mathcal{D}$ مفروض، قرص $|z - z_0| \leq R$ را درون \mathcal{D} انتخاب می‌کنیم در این صورت برای هر z با $|z - z_0| \leq R/2$ به موجب نامساوی هارنگ داریم:

$$\frac{1}{3} u_n(z_0) = \frac{R - R/2}{R + R/2} u_n(z_0) \leq u_n(z) \leq \frac{R + R/2}{R - R/2} u_n(z_0) = 3u_n(z_0). \quad (21)$$

اگر $u_n(z_0) \rightarrow \infty$ ، نامساوی چپ ۲۱ نشان می‌دهد که برای $|z - z_0| \leq R/2$ ، $u_n(z) \rightarrow \infty$ همگرا باشد نامساوی راست نشان می‌دهد که برای $\{u_n(z)\}$ همگراست. پس A و B هر دو بازند و $A \cup B = \mathcal{D}$. چون که میدان \mathcal{D} همبند است یا $A = \emptyset$ و یا $B = \emptyset$. بنابه فرض حداقل یک نقطه در B موجود است. پس $B = \mathcal{D}$ و $\{u_n(z)\}$ برای هر z در \mathcal{D} همگراست.

سپس باید نشان دهیم $\{u_n(z)\}$ زیر مجموعه‌های فشرده \mathcal{D} همگرای یکنواخت است. با به کار بردن نامساوی هارنگ برای $u_{n+p}(z) - u_n(z)$ ، همانند (۲۱) برای $|z - z_0| \leq R/2$ و $p = 1, 2, \dots$ بدست می‌آید:

$$u_{n+p}(z) - u_n(z) \leq 3[u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)] \quad (22)$$

به موجب محک کوشی

$$u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0) < \varepsilon \quad (n > N(\varepsilon)).$$

پس (۲۲) نشان می‌دهد که $\{u_n(z)\}$ در یک همسایگی z_0 همگرای یکنواخت است. چون که z_0 دلخواه بود، به هر نقطه در \mathcal{D} یک همسایگی از آن نقطه متناظر می‌گردد که بر آن $\{u_n(z)\}$ همگرای یکنواخت است.

اینک اگر K زیر مجموعه فشرده \mathcal{D} باشد، برای هر نقطه K یک همسایگی می‌سازیم که بر آن $\{u_n(z)\}$ همگرای یکنواخت باشد. بنابه قضیه هاین - بورل، یک تعداد متناهی از این همسایگی‌ها K را می‌پوشاند. ولی اگر دنباله‌ی بر یک تعداد متناهی مجموعه‌های گوناگون همگرای یکنواخت باشد، بر اجتماع آنها نیز همگرای یکنواخت است. پس $\{u_n(z)\}$ بر K همگرای یکنواخت است.

در پایان، از قضیه ۱۰-۱۲ نتیجه می‌گیریم که تابع حدی در تمام \mathcal{D} همساز است.

تذکر-عکس نقیض قضیه مبین است که اگر دنباله در یک نقطه از میدان به ∞ بگراید، در تمامی

نقاط به ∞ می‌گراید. برای آنکه بدانیم در عمل هم ممکن است چنین حالتی رخ دهد دنباله $u_n(z) = x + n$

را در نظر می‌گیریم که در هر میدانی که واجد شرایط قضیه باشد، همساز است.

اینک به رده توابع تحلیلی در قرص $|z| < 1$ با قسمت حقیقی مثبت می‌پردازیم. و دانستنیهای خود را در مورد توابع همساز برای آنها به کار می‌بندیم. بنابه نامساوی هارنک، اگر $u(z)$ برای $|z| < 1$ همساز و مثبت باشد و $u(0) = 1$ آنگاه:

$$u(z) \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \quad (|z| < 1).$$

تعمیم زیرین را در مورد توابع تحلیلی در نظر بگیرید:

قضیه ۱۰-۱۴. فرض کنیم $f(z)$ برای $|z| < 1$ تحلیلی است و $f(0) = 1$. اگر برای $|z| < 1$ ، $\operatorname{Re} f(z) > 0$ آنگاه

$$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \quad (|z| < 1).$$

اثبات ۱- اگر $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$ ، به موجب (۱۳) می‌توان نوشت:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} u(Re^{i\phi}) d\phi \quad (|z| < R < 1).$$

پس

$$|f(z)| \leq \frac{R + |z|}{R - |z|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) d\phi = \frac{R + |z|}{R - |z|} u(0) = \frac{R + |z|}{R - |z|}.$$

و با $R \rightarrow 1$ نتیجه حاصل است.

اثبات ۲- این اثبات مبتنی بر نامساوی شوراتس (لم شوراتس) است، برخلاف قبلی که بر نامساوی هارنک مبتنی بود، اگر $\operatorname{Re} f(z) > 0$ آنگاه تابع

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} \quad (23)$$

برای $|z| < 1$ در $|g(z)| < 1$ صادق است، چون که $g(0) = 0$ ، از نامساوی شوراتس نتیجه می‌شود که

برای $|z| < 1$ داریم $|g(z)| \leq |z|$ و با حل $f(z)$ در (۲۳)، حاصل می‌شود:

$$f(z) = \frac{1 + g(z)}{1 - g(z)}.$$

ولی

$$|f(z)| \leq \frac{1 + |g(z)|}{1 - |g(z)|} \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

و اثبات تمام است.

تذکر ۱- این قضیه یک تعمیم نامساوی هارنگ است زیرا که $\operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)|$.تذکر ۲- فرض $f(0) = 1$ عمومیت نامساوی را تحدید نمی کند. زیرا اگر $\operatorname{Re} f(z) > 0$ ، آنگاه قضیه را می توان برای تابع

$$h(z) = \frac{f(z) - i \operatorname{Im} f(0)}{\operatorname{Re} f(0)},$$

که در شرایط $\operatorname{Re} h(z) > 0$ و $h(0) = 1$ صدق می کند، بکار برد.تذکر ۳- اگر تنها فرض می کردیم که برای $|z| < 1$ ، $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ ، آنگاه از قضیه نگاشت باز می توانستیم استنتاج کنیم که برای $|z| < 1$ ، $\operatorname{Re} f(z) > 0$.

قضیه بعدی ما نیز می تواند با روشی مبتنی بر توابع همساز و یا با روشی مبتنی بر لم شوارتس اثبات شود:

قضیه ۱۵-۱۰. فرض کنیم برای $|z| < 1$ ، $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ، $f(z)$ تحلیلی است:اگر برای $|z| < 1$ ، $\operatorname{Re} f(z) > 0$ ، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq 2$.اثبات ۱- اگر $f(z) = u(re^{i\theta}) + iv(re^{i\theta})$ با $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ ، آنگاه

$$u(re^{i\theta}) = 1 + \operatorname{Re} \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos m\theta - \beta_m \sin m\theta) r^m.$$

این رشته بر دایره $|z| = r < 1$ همگرای یکنواخت است. به موجب قضیه ۸-۴، می توانیم در $\cos n\theta$ و یا $\sin n\theta$ ضرب کنیم و سپس جمله به جمله انتگرال بگیریم. چونکه برای $m \neq n$ داریم

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta d\theta = 0$$

و برای هر n و m داریم

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \sin m\theta d\theta = 0$$

پس همانندیهای زیر را خواهیم داشت

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \alpha_n r^n \cos^2 n\theta d\theta = \alpha_n r^n, \quad (24)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) \sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} -\beta_n r^n \sin^2 n\theta d\theta = -\beta_n r^n. \quad (25)$$

(25) را در $-i$ ضرب می‌کنیم و با (24) جمع می‌کنیم تا حاصل شود.

$$a_n r^n = (\alpha_n + i\beta_n) r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

پس

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) |e^{-in\theta}| d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta.$$

به موجب خاصیت میانگین

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = 2u(0) = 2.$$

پس، $|a_n| r^n \leq 2$ و با $r \rightarrow 1^-$ ، قضیه ثابت می‌شود.

اثبات ۲- تابع

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}$$

در قـصـرـص $|z| < 1$ تحلیلی است با $g(0) = 0$ و $|g(z)| < 1$. به موجب تمرین

۸ بخش ۸-۳، $|g'(0)| \leq 1$ ولی $g'(0) = a_1/2$ و بنابراین $|a_1| \leq 2$

اکنون نشان می‌دهیم که برای n دلخواه، $|a_n| \leq 2$ و این کار را با ساختن

تابع جدیدی به شکل

$$1 + a_n z + \dots,$$

انجام می‌دهیم. این تابع جدید در شرایط قضیه صدق می‌کند. با توجه به همانندی

$$\sum_{k=1}^n e^{(2k\pi i)m/n} = \begin{cases} n, & \text{اگر } m \text{ مضرب } n \text{ باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

می‌توان تحقیق کرد (تحقیق کنید!) که تابع

$$h(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(e^{2k\pi i/n} z^{1/n}) = 1 + a_n z + \dots$$

برای $|z| < 1$ تحلیلی است و دارای قسمت حقیقی مثبت می باشد. پس $|a_n| \leq 2$ و اثبات تمام است.

تابع $f(z) = (1+z)/(1-z)$ دایره $|z|=1$ را بر محور انگاری می نگارد و قرص $|z| < 1$ را بر نیم صفحه راست می نگارد. این تابع نشان می دهد که در دو قضیه قبل امکان تساوی هم موجود است. بدین معنی که $\operatorname{Re} f(z) = (1+|z|)/(1-|z|)$ هنگامی که z عدد حقیقی مثبت باشد، و

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} = (1+z) \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n.$$

پرسش‌ها

- ۱- آیا می شود خاصیت میانگین برای توابع ناپیوسته برقرار باشد؟
- ۲- اگر دو تابع پیوسته در خاصیت میانگین صدق کنند، آیا حاصل جمع آنها هم صدق میکند؟ حاصل ضرب چگونه؟
- ۳- فرض کنید $\{u_n(z)\}$ دنباله‌ی از توابع همساز است و $\{v_n(z)\}$ مزدوج همساز آن می باشند. اگر $\{u_n(z)\}$ در ناحیه‌ی همگرای یکنواخت باشد، آیا $\{v_n(z)\}$ نیز همگرای یکنواخت است؟
- ۴- اگر در قضیه ۱۰-۱۳، فرض $u_{n+1}(z) \geq u_n(z)$ با فرض $u_{n+1}(z) \leq u_n(z)$ جایگزین شود، باز قضیه درست است؟
- ۵- چه نوع تعمیمی برای قضیه ۱۰-۱۴ می توانید اثبات کنید.
- ۶- چرا بعضی قضایا برای زیر مجموعه‌های فشرده یک میدان برقرارند و در همه میدان برقرار نیستند؟
- ۷- در اثبات اول قضیه ۱۰-۱۵، مثبت بودن $\operatorname{Re} f(z)$ در چه جایی بکار رفت؟
- ۸- ارتباط میان نامساوی شوراتس و نامساوی هارنک در کجاست؟

تمرینها

- ۱- فرض کنید $\{u_n(z)\}$ دنباله‌ی از توابع همساز در میدان \mathcal{D} است و برای هر $z \in \mathcal{D}$ و هر n ، $u_{n+1}(z) \geq u_n(z)$. اگر به ازاء z_0 ی در \mathcal{D} ، $u_n(z_0) \rightarrow \infty$ ، نشان دهید، بر زیر مجموعه‌های فشرده $u_n(z) \rightarrow \infty$ بطور یکنواخت. بدین معنی که اگر C مجموعه فشرده مفروضی M یک عدد حقیقی باشد، نشان دهید، برای $n > N$ و همه $z \in C$ ، $u_n(z) \geq M$.

۲- گیریم K زیر مجموعه فشرده میدان \mathcal{D} است. و $z_0 \in \mathcal{D}$ مفروض است. نشان دهید ثابتهای حقیقی A و B (وابسته به z_0 ، K و \mathcal{D}) موجودند بطوری که برای هر z در K و همه توابع همساز $u(z)$ در \mathcal{D} داشته باشیم

$$A \cdot u(z_0) \leq u(z) \leq B \cdot u(z_0)$$

۳- تابع حقیقی و پیوسته $u(z)$ را در میدان \mathcal{D} زیر همساز نامند اگر چنانچه برای هر قرص $|z - z_0| \leq r$ در \mathcal{D} داشته باشیم

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

نشان دهید که یک تابع زیر همساز غیر ثابت در یک میدان ماکزیم ندارد. آیا می شود که می نیم داشته باشد؟

۴- فرض کنید برای $|z| < 1$ ، $f(z)$ تحلیلی باشد و $\operatorname{Re} f(z) > 0$. اگر $f(0) = 1$ ، با بکار بردن قضیه ۱۰-۱۴ برای $1/f(z)$ ، نشان دهید.

$$|f(z)| \geq \frac{1 - |z|}{1 + |z|}.$$

آیا این را می توان از نامساوی هارنگ نتیجه گرفت؟

۵- فرض کنید $g(z)$ برای $|z| < 1$ تحلیلی است و $g(0) = 1$. اگر $\operatorname{Re} g(z) > \alpha$ نشان دهید که

$$|g(z)| \leq \frac{1 + (1 - 2\alpha)|z|}{1 - |z|} \quad (|z| < 1).$$

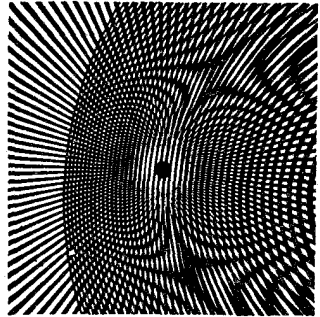
(راهنمایی: قرار دهید $g(z) = (1 - \alpha)f(z) + \alpha$ ، که $\operatorname{Re} f(z) > 0$ سپس قضیه ۱۰-۱۴ را بکار ببرید. چرا α نمیتواند از ۱ متجاوز باشد).
۶- در شرایط تمرین قبل نشان دهید که

$$|g(z)| \geq \frac{1 - (1 - 2\alpha)|z|}{1 + |z|} \quad (|z| < 1).$$

۷- فرض کنید که برای $|z| < 1$ ، $g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ تحلیلی است با $\operatorname{Re} g(z) > \alpha$. نشان دهید که برای هر n ، $|a_n| \leq 2(1 - \alpha)$. (راهنمایی: قرار دهید $f(z) = (g(z) - \alpha)/(1 - \alpha)$ و قضیه ۱۰-۱۵ را بکار ببرید).

۸- نشان دهید که در قضیه ۱۰-۱۴ و ۱۵-۱۰ تساوی برقرار می گردد، اگر و تنها اگر $f(z)$ به شکل زیر باشد:

$$f(z) = \frac{1 + e^{i\theta_0} z}{1 - e^{i\theta_0} z} \quad (\theta_0 \text{ حقیقی})$$



۱۱- نگاشت های همدیس و قضیه نگاشت ربمان

بررسی ما از خواص نگاشتی در فصل ۳ و ۴ محدود بود، زیرا که در آنوقت هنوز مشتق معرفی نگشته بود. به دلیل این نقیصه مجدداً "به توابع قدیمی باز می گردیم". خواهیم دید که مشتق ارتباطی میان زاویه بین دو خم با زاویه بین نگاره آنها ایجاد می کند. بعلاوه خواهیم دید مشتق میزان "پیچیدگی" نگاره خم ها را اندازه می گیرد.

آندسته از توابع تحلیلی که قرص ها و نیم صفحات را بر قرص ها و نیم صفحات، قرص ها را بر درون بیضی و غیره می نگارند، را قبلاً "ساختیم". نتیجه مهاد این فصل، معروف به قضیه نگاشت ربمان، حاکی است که تقریباً "همیشه یک تابع تحلیلی موجود است که یک میدان همبند ساده مفروض را بر یک میدان همبند ساده دیگر بنگارد. روش ما مبتنی بر خانواده های نرمال است، مفهومی که به واسطه آن قادریم توابع حدی را از خانواده های توابع استخراج کنیم. خاطرنشان می گردیم که چگونه قبلاً "نقاط حدی از دنباله های نقاط استخراج شد (قضیه بولتسانو - وایرشراس)".

۱-۱۱. نگاشت های همدیس

هر خط مستقیم را در صفحه که از مبدأ بگذرد، می توان با $\sigma(s) = se^{i\alpha}$ ، که s مجموعه اعداد حقیقی را می پیماید، پارامتری نمود، که α زاویه - برحسب رادیان - میان خط و محور حقیقی مثبت است. عموماً، "خط مستقیمی که از نقطه z_0 می گذرد و با محور حقیقی زاویه α می سازد، را می توان به صورت $\sigma(s) = z_0 + se^{i\alpha}$ ، s حقیقی، نمایش داد.

اکنون فرض کنیم که تابع f بر خم هموار $z(t)$ تحلیلی است. در این صورت نگاره

$z(t)$ تحت f نیز یک خم هموار است که مشتق آن $f'(z(t))z'(t)$ می‌باشد. یک خم هموار با در دست بودن مماس در هر نقطه‌اش مشخص می‌گردد. هدف ما مقایسه شیب مماس بر خم در یک نقطه با شیب مماس بر خم نگاره، در نگاره همان نقطه می‌باشد. گیریم $z_0 = z(t_0)$ نقطه‌یی بر خم $z = z(t)$ و فرض کنیم $w = w(t) = f(z(t))$ با $w_0 = f(z_0)$. برای هر نقطه z بر خم به غیر از z_0 ، همانندی زیر را داریم:

$$w - w_0 = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0)$$

پس

$$\arg(w - w_0) = \arg \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \arg(z - z_0) \pmod{2\pi}, \quad (1)$$

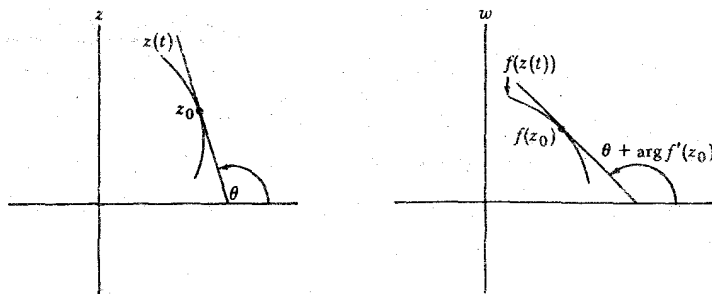
که فرض بر آن است $f(z) \neq f(z_0)$ ، تا که (۱) با معنی باشد. قابل توجه است که $\arg(z - z_0)$ ، در صفحه z ، زاویه میان محور x و خط مستقیم گذرا بر z و z_0 است. در حالی که $\arg(w - w_0)$ ، در صفحه w ، زاویه میان محور u و خط مستقیم گذرا بر w و w_0 است. پس با میل z به z_0 بر خم $z(t)$ ، $\arg(z - z_0)$ به مقدار θ میل می‌کند که زاویه میان مماس بر خم $z(t)$ در z_0 با محور x ها است. بطریقی مشابه، $\arg(w - w_0)$ به مقدار ϕ میل می‌کند، که ϕ زاویه مماس بر خم $f(z(t))$ در نقطه w_0 با محور u ها است.

فرض کنیم $f'(z_0) \neq 0$ تا $\arg f'(z_0)$ با معنی باشد. با محاسبه حد در (۱) در می‌یابیم که

$$\phi = \arg f'(z_0) + \theta \pmod{2\pi} \quad (2)$$

بدین معنی که تفاوت میان مماس بر یک خم در یک نقطه با مماس بر نگاره خم در نگاره آن نقطه تنها به مشتق تابع در آن نقطه وابسته است (ر. ک. شکل ۱).

شکل ۱



اگر دو خم هموار در نقطه‌ی برخورد کنند، زاویه میان این دو خم به عنوان زاویه میان مماس‌های بر این دو خم در نقطه برخورد تعریف می‌گردد. اکنون می‌توان گفت:

قضیه ۱۱-۱. فرض کنیم $f(z)$ در z_0 تحلیلی است با $f'(z_0) \neq 0$. گیریم C_1 و C_2 خم‌های هموار در صفحه z هستند که در نقطه z_0 برخورد کرده‌اند و نگاره‌های آنها به ترتیب C'_1 و C'_2 می‌باشد. در این صورت زاویه میان C_1 و C_2 از C_1 تا C_2 برابر است با زاویه میان C'_1 و C'_2 از C'_1 تا C'_2 .

اثبات - گیریم مماس‌های بر C_1 و C_2 به ترتیب با محور x زاویای θ_1 و θ_2 داشته باشند (ر. ک. شکل ۲). در این صورت زاویه میان C_1 و C_2 برابر است با $\theta_2 - \theta_1$. به موجب (۲)، زاویه میان C'_1 و C'_2 برابر است با

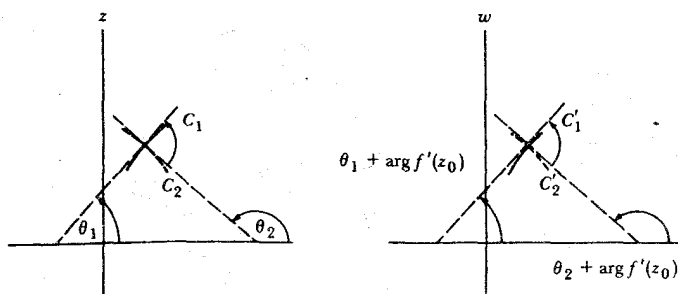
$$\theta_2 + \arg f'(z_0) - (\theta_1 + \arg f'(z_0)) = \theta_2 - \theta_1,$$

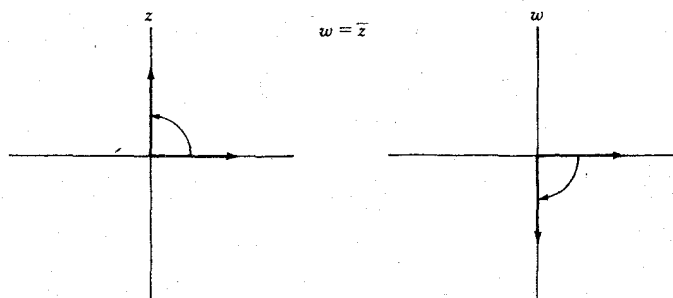
و قضیه ثابت می‌شود.

تابعی که اندازه زاویه و هم جهت را محفوظ بدارد همدیس نامیده می‌شود. قضیه ۱۱-۱ مبین آن است که توابع تحلیلی در تمام نقاطی که مشتق مخالف صفر دارد همدیس است. تابعی که تنها اندازه زاویه را و نه جهت را محفوظ بدارد همگوشه نام دارد. مثالی از چنین تابعی $f(z) = \bar{z}$ است. برای تشریح، \bar{z} محور حقیقی مثبت و محور انگاری مثبت را به ترتیب بر محور حقیقی مثبت و محور انگاری منفی می‌نگارد. (ر. ک. شکل ۳). گو-اینکه دو خم در هر کدام از صفحات در زاویه قائمه تلاقی می‌کنند، ولی یک زاویه "باجهت مثبت" بر یک زاویه "باجهت منفی" نگاشته می‌شود.

فرض کنیم $f(z)$ در z_0 تحلیلی با مشتق مخالف صفر است. اگر z نزدیک z_0 باشد. در مورد دوری z تا z_0 با دوری نگاره‌های آنها یک ارتباط جالب موجود است.

شکل ۲





شکل ۳

قابل توجه است که

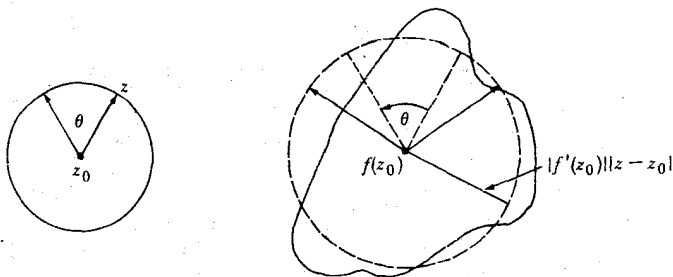
$$|f'(z_0)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

پس برای z های نزدیک z_0

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| |z - z_0|. \quad (۳)$$

با بیانی نه چندان دقیق: وقتی z نزدیک z_0 است، $f(z)$ را می‌توان با تابع خطی $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ تقریب زد. و این کار بدین دلیل منطقی است که توانهای بالای $z - z_0$ قابل صرف نظر کردن است. با توجه به (۳) همسایگی‌های "کوچک" z_0 ، برنگاره‌های کم و بیش مشابه با ضریب بزرگساز $|f'(z_0)|$ نگاشته می‌شوند. (ر. ک. شکل ۴). پس $f'(z_0)$ در سرشت هندسی نگاره، دو نقش دارد. به موجب (۲)، $\arg f'(z_0)$ میزان دوران را اندازه می‌گیرد، به موجب (۳) $|f'(z_0)|$ (برای نقاط مجاور) میزان بزرگساز و یا انقباض نگاره را اندازه می‌گیرد.

مقایسه جالبی می‌توان میان مشتقات توابع حقیقی و مختلط انجام داد. برای توابع مشتق پذیر حقیقی، مخالف صفر نبودن مشتق در یک فاصله، یک به یک بودن تابع را تضمین می‌کند. ولی در مورد توابع مختلط بر یک میدان چنین نیست. در حالی که



شکل ۴

نشان خواهیم داد که $g(z)$ در $|z - z_0| \leq r$ ، حداقل دو صفر متمایز دارد. ملاحظه می‌گردد که $g(z_0) = -a \neq 0$ و برای $0 < |z - z_0| \leq r$ ، $g'(z) = f'(z) \neq 0$. پس همه صفرهای $g(z)$ در $|z - z_0| \leq r$ ساده هستند. چون که بر $|z - z_0| = r$

$$|f(z) - f(z_0)| \geq m > |a|$$

به موجب قضیه روزه، نتیجه می‌گیریم که $g(z)$ و $f(z) - f(z_0)$ دارای تعداد صفرهای مساوی k ($k \geq 2$) هستند. ولی این بدان معنی است که می‌بایست k نقطه متمایز در $|z - z_0| = r$ موجود باشد که $f(z) = f(z_0) + a$ ، که با فرض ما متناقض است و بدین ترتیب اثبات تمام است.

در موارد توابع مشتق‌پذیر نتایج حاصله را جمع‌بندی می‌کنیم. در حالت حقیقی شرط کافی ولی نه لازم برای آنکه تابع در یک فاصله یک به یک باشد آن است که مشتق مخالف صفر باشد، در حالی که در مورد مختلط، شرط لازم و نه کافی برای آن که تابع در یک میدان یک به یک باشد آن است که مشتق مخالف صفر باشد.

یک شرط کافی برای آنکه تابع تحلیلی در میدان همبند ساده‌یی یک به یک باشد، آن است که بر مرز میدان یک به یک باشد. رسمی‌تر اینکه:

قضیه ۱۱-۴. فرض کنیم $f(z)$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} و بر مرز ساده بسته C است، تحلیلی باشد. اگر $f(z)$ بر C یک به یک باشد، آنگاه $f(z)$ در \mathcal{D} یک به یک است.

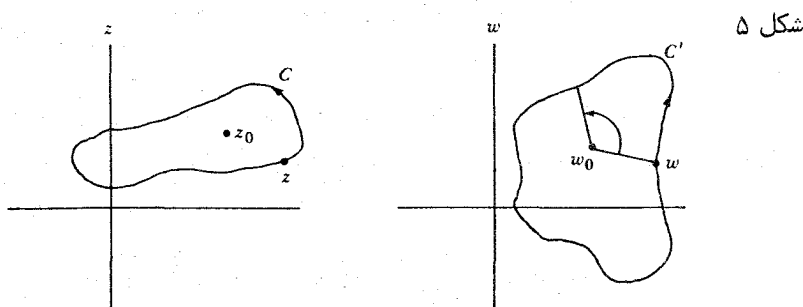
اثبات - نقطه z_0 را در \mathcal{D} انتخاب می‌کنیم که برای z بر C ، $w_0 = f(z_0) \neq f(z)$. به موجب اصل شناسه، تعداد صفرهای $f(z) - f(z_0)$ در \mathcal{D} عبارت است از $\Delta_C \{f(z) - f(z_0)\} / (2\pi)$. بنابه فرض نگاره C می‌بایست یک مرز ساده بسته باشد که آنرا با C' نمایش می‌دهیم (ر. ک. شکل ۵). پس اگر $w = f(z)$ مرز C' را به پیماید، تغییرات خالص در شناسه $w - w_0 = f(z) - f(z_0)$ ، بسته به اینکه پیمایش در جهت خلاف یا موافق عقربه‌های ساعت باشد، $+2\pi$ یا -2π است. چون که $f(z)$ در \mathcal{D} حداقل یک بار w_0 می‌شود، می‌بایست داشت که

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \{f(z) - f(z_0)\} = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \{w - w_0\} = 1.$$

یعنی، $f(z)$ در \mathcal{D} دقیقاً "یک بار با $f(z_0)$ برابر می‌گردد.

باین ترتیب قضیه برای تمام نقاط z_0 در \mathcal{D} ، که $f(z) \neq f(z_0)$ وقتی که z بر

C ، ثابت می‌گردد. اگر $f(z) = f(z_0)$ در نقطه‌ی C باشد، در این صورت عبارت $\Delta_C \{f(z) - f(z_0)\}$ معین نیست. به خواننده واگذار می‌کنیم که اثبات را در این حالت خاص تکمیل کند.



در اثبات قضیه ۱۱-۱، ما به صفر نشدن مشتق استناد کردیم. اینک رفتار تابع را در یک همسایگی نقطه بحرانی بررسی می‌کنیم، که منظور از نقطه بحرانی، نقطه‌ی است که مشتق در آن صفر می‌شود. اگر مشتق تابع تحلیلی $f(z)$ در $z = z_0$ صفر مرتبه k داشته باشد، در این صورت می‌توان نوشت

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z - z_0)^{k+1} + \dots$$

پس

$$\arg [f(z) - f(z_0)] = k \arg (z - z_0) + \arg \left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z - z_0) + \dots \right]. \quad (4)$$

فرض کنیم θ زاویه‌ی است که مماس بر یک خم هموار در z_0 با محور x ها می‌سازد، و ϕ زاویه‌ی است که مماس بر نگاره این خم در $f(z_0)$ با محور u ها می‌سازد. اگر z بر خم به z_0 میل کند (۴) نتیجه می‌دهد:

$$\phi = k\theta + \arg \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad (5)$$

ملاحظه می‌شود که در حالت خاص $k=1$ ، (۵) به (۱) تحویل می‌گردد. در حالت عمومی، مماس بر نگاره خم به مماس بر خم اصلی و هم‌چنین به مرتبه و شناسه اولین مشتق مخالف در نقطه مورد نظر، بستگی دارد. همان‌طور که (۲) به قضیه ۱۱-۱ منجر شد،

(۵) هم به قضیه زیر منجر می‌گردد:

قضیه ۵-۱۱. فرض کنیم $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f'(z)$ در z_0 صفر مرتبه $k-1$ دارد. اگر دو خم هموار در صفحه z با زاویه θ برخورد کنند، نگاره‌های آنها در صفحه w با زاویه $k\theta$ برخورد می‌کنند.

اثبات - فرض کنیم که مماسهای هر دو خم با محور حقیقی زوایای θ_1 و θ_2 داشته باشند. در این صورت $\theta = \theta_2 - \theta_1$ زاویه میان دو خم است. به موجب (۵)، زاویه ϕ میان نگاره‌های آنها برابر است با:

$$\phi = k\theta_2 + \arg \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} - \left(k\theta_1 + \arg \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \right) = k\theta.$$

با ترکیب قضیه ۵-۱۱ و ۱-۱۱ می‌بینیم که تابع تحلیلی در یک نقطه همدیس است اگر و تنها اگر در آن نقطه مشتق مخالف صفر داشته باشد.

اکنون مناسب است تبدیل دو خطی را که در فصل ۳ مطالعه کردیم، از دیدگاه نگاشت همدیس، بار دیگر مورد بررسی قرار دهیم. یادآور می‌شویم که تبدیل

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0) \quad (۶)$$

نمایش یک نگاشت پیوسته و یک به یک از صفحه گسترش یافته بر خودش می‌باشد و $f(\infty) = a/c$ و $f(-d/c) = \infty$ چونکه $f'(z) = (ad - bc)/(cz + d)^2 \neq 0$ ، نگاشت برای تمام نقاط متناهی z ، $z \neq -d/c$ ، همدیس است.

چنانچه دیدیم، دایره یا خط مستقیم، بسته به اینکه چه نقطه‌یی بر ∞ نگاشته شود، بر دایره یا خط مستقیم نگاشته می‌شود. به عنوان مثال، تبدیل انعکاسی $w = 1/z$ خطوط مستقیمی را که از مبدا می‌گذرند بر دوائر می‌نگارد. به ویژه خطوط $y = x + 1$ و $y = -x + 1$ را به ترتیب بر دوائر زیر می‌نگارد:

$$\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

۹

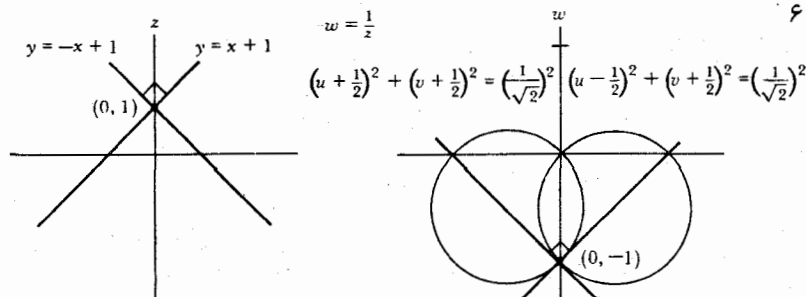
$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

در دو امر، شکل ۶ قدری گمراه‌کننده است. یک جفت خط مستقیم که در یک نقطه برخورد کرده‌اند، بر یک جفت دایره نگاشته می‌شوند که در دو نقطه برخورد دارند. ولی

نباید فراموش کرد که این خطوط در ∞ نیز برخورد دارند. در مورد هر دو خط $(0, 1)$ بر $(0, -1)$ نگاشته می‌شود. در حالی که نقطه ∞ بر مبدأ نگاشته می‌شود. دو خط در $(0, 1)$ با زاویه قائمه برخورد می‌کنند و دو دایره هم در $(0, -1)$ چنین می‌کنند. و این مطلب با قضیه ۱۱-۱ هماهنگ است.

ولی این دو خط در ∞ در چه زاویه‌یی برخورد دارند؟ به تعریف زیر نیاز داریم: گوئیم دو خم هموار در صفحه گسترش یافته در نقطه ∞ با زاویه α برخورد می‌کنند اگر چنانچه نگاره‌های آنها در تبدیل $w = 1/z$ در مبدأ با زاویه α برخورد کنند. چونکه دو دایره شکل ϵ در مبدأ در زاویه قائمه برخورد دارند، خطوط $y = x + 1$ و $y = -x + 1$ در ∞ در زاویه قائمه برخورد می‌کنند.

شکل ۶



با این تعریف می‌توان نشان داد که همه تبدیلات به شکل (۶) در ∞ همدیس‌اند. دو حالت برای بررسی موجود است.

حالت ۱- $c \neq 0$. در (۶) $z = 1/\zeta$ و $f(z) = g(1/z)$. در این صورت

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{a/\zeta + b}{c/\zeta + d} = \frac{b\zeta + a}{d\zeta + c}.$$

چون که $g'(\zeta) = (bc - ad)/\zeta^2 \neq 0$ ، نتیجه می‌شود که $g(\zeta)$ در $\zeta = 0$ همدیس است. ولی این بدان معنی است که $f(z)$ در ∞ همدیس است.

حالت ۲- $c = 0$. در این صورت (۶) خطی است و $z = \infty$ را بر $w = \infty$ می‌نگارد. قرار می‌دهیم $h(z) = 1/f(1/z)$ ، $w = 1/\omega$ ، $z = 1/\zeta$ در این صورت

$$\frac{1}{\omega} = \frac{a/\zeta + b}{d} = \frac{b\zeta + a}{d\zeta} \quad \omega = h(\zeta) = \frac{d\zeta}{b\zeta + a}.$$

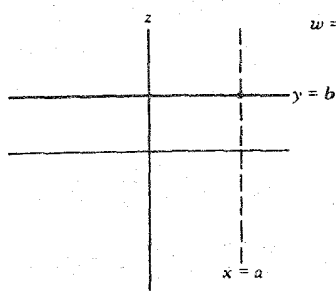
چون که $h'(\zeta) = d/a \neq 0$ ، $h(\zeta)$ در $\zeta = 0$ همدیس است. یعنی که $f(z)$ در $z = \infty$

همدیس است.

پس یک تبدیل دو خطی، یک نگاشت همدیس و یک به یک از صفحه گسترش یافته بر

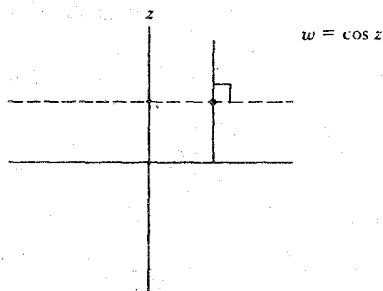
خودش می باشد.

از فصل ۴، یادآور می شویم که تابع نمایی e^z خطوط موازی محور y ها را بردوایی به مرکز مبدأ و خطوط موازی محور x ها را بر پرتوهای منشعب از مبدأ می نگارد. در هندسه مقدماتی دیده ایم که این دو خم نگاره در زاویه قائمه برخورد می کنند (ر. ک. شکل ۷).



شکل ۷

در پایان، تابع $w = \cos z$ را که خطوط موازی محور y ها را بر بیضی ها و خطوط موازی محور x ها را بر هذلولی ها می نگارد، در نظر می گیریم. به موجب قضیه ۱-۱۱، مقاطع مخروطی می بایست در زاویه قائمه برخورد کنند (ر. ک. شکل ۸).



شکل ۸

پرسش‌ها

- ۱- منظور از مماس در یک نقطه با خط مستقیم چیست؟
- ۲- آیا لازم بود، در قضیه ۱-۱۱، فرض کنیم که آن خمها هموارند؟
- ۳- آیا می شود توابع غیرتحلیلی همدیس باشند؟

- ۴- چگونه توابعی همگوشه‌اند ؟
- ۵- چرا مشتق، چنین نقش اصلی را ایفا می‌کند ؟
- ۶- اگر تابعی در یک همسایگی هر نقطه یک میدان یک به یک باشد، چرا بدین معنی نیست که در تمام میدان یک به یک است ؟
- ۷- چه ارتباطی میان همدیس و یک به یک موجود است ؟
- ۸- دو خط موازی، در ∞ در چه زاویه‌یی برخورد می‌کنند ؟
- ۹- چگونه می‌توان تحلیلی بودن تابع در ∞ را تعریف کرد ؟
- ۱۰- آیا حاصلجمع نگاشت‌های همدیس، همدیس است، حاصلضرب چطور ؟ ترکیب چطور ؟

تمرینها

- ۱- عدد مختلط z_0 و $\varepsilon > 0$ مفروضند. نشان دهید، تابع $f(z)$ موجود است که در z_0 تحلیلی است و با $f'(z_0) \neq 0$ و بطوری که برای $|z - z_0| < \varepsilon$ ، $f(z)$ یک به یک نباشد. آیا این با قضیه ۱۱-۲ متناقض است ؟
- ۲- نشان دهید، z^2 در میدان \mathbb{D} یک به یک است اگر و تنها اگر \mathbb{D} در نیم صفحه‌یی باشد که مرزش از مبدأ بگذرد.
- ۳- نشان دهید دو خم هموار در ∞ در زاویه α برخورد می‌کنند اگر و تنها اگر نگاره‌های آنها در افکنش گنجگاری (بخش ۲-۴ ملاحظه شود) در قطب شمال در زاویه α برخورد کنند.
- ۴- نشان دهید، $f(z)$ و $\overline{f(z)}$ هر دو در نقطه‌یی که $f(z)$ تحلیلی و با مشتق مخالف صفر است، همگوشه‌اند.
- ۵- اگر دو خط مستقیم در یک تبدیل دو خطی بر دوائر مماس بر یکدیگر نگاشته شوند، نشان دهید، این دو خط می‌بایست موازی باشند. آیا معکوس مطلب هم درست است ؟
- ۶- شعاع بزرگترین قرص به مرکز مبدأ را بیابید که بر آن قرص $w = e^z$ یک به یک باشد. اگر قرص به مرکز نقطه دلخواه z_0 باشد، آیا شعاع متفاوت خواهد بود ؟
- ۷- $\arg f'(z)$ را در تابع $f(z) = e^z$ بیابید. با استفاده از این، تحقیق کنید، خطوط موازی محور x ها و y ها به ترتیب بر دوائر و پرتوها نگاشته می‌شوند.
- ۸- فرض کنیم $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f'(z_0) \neq 0$. ثابت کنید، یک مستطیل "کوچک" که z_0 درون آن باشد و مساحت آن A باشد بر شکلی که مساحت آن تقریباً $|f'(z_0)|^2 A$ می‌باشد نگاشته می‌شود.
- ۹- مستقیماً و یا با استفاده از قضیه ۱۱-۴، نشان دهید، تابع $w = z^n$ ، پرتو

$\arg z = \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi/n$) را بر پرتو $\arg z = n\theta$ می‌نگارد.

- ۱۰- اگر $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی و غیر ثابت باشد، نشان دهید، تنها برای یک تعداد شماره پذیر نقاط \mathcal{D} ، $f'(z) = 0$ ، سپس نتیجه بگیرید که $f(z)$ ، در تمام نقاط \mathcal{D} مگر در یک تعداد شماره پذیر، یک به یک، موضعی و همدیس است.
- ۱۱- نشان دهید $f(z) = z + 1/z$ همه جا مگر در $z = \pm 1$ همدیس است و با در نظر داشتن این مطلب نظری مجدد به خواص نگاشتی این تابع که در فصل ۳ مطالعه گردید، بیاندازید.

۲-۱۱. خانواده‌های نرمال

قبلاً "اختلافات آشکار میان پیوستگی نقطه‌ای با یکنواخت و هم چنین همگرایی نقطه‌ای با یکنواخت را دیده‌ایم. بار دیگر با اختلاف میان خواص موضعی و همه‌جایی مواجه می‌شویم. این بار خواست ما این است که یکنواختی بر یک مجموعه مرکب از یک خانواده توابع، برقرار باشد.

خانواده F از توابع را بر مجموعه A ، کراندار یکنواخت گوئیم اگر چنانچه عدد حقیقی M موجود باشد که برای هر $f \in F$ و هر $z \in A$ ، $|f(z)| \leq M$ ، بی‌شک کراندار بودن یکنواخت یک خانواده موجب می‌گردد که هر عضو این خانواده کراندار باشد. از سوی دیگر، هر عضو دنباله توابع $f_n(z) = nz$ در قرص $|z| \leq R$ کراندار است ولی هیچ عددی وجود ندارد که برای همه اعضاء این خانواده کران باشد.

خانواده F از توابع را بر مجموعه A کراندار یکنواخت موضعی گوئیم اگر چنانچه به هر $z \in A$ ، یک همسایگی متناظر گردد که در آن F کراندار یکنواخت باشد. دنباله $f_n(z) = 1/(1 - z^n)$ در قرص $|z| < 1$ ، کراندار یکنواخت موضعی است ولی کراندار یکنواخت نیست. قضیه زیر در این رابطه است:

قضیه ۱۱-۶. خانواده F از توابع در میدان \mathcal{D} کراندار یکنواخت موضعی است اگر و

تنها اگر F بر هر زیر مجموعه فشرده \mathcal{D} ، کراندار یکنواخت باشد.

اثبات - گیریم F کراندار یکنواخت موضعی است و فرض کنیم K زیر مجموعه فشرده \mathcal{D} باشد. برای هر نقطه در K ، یک همسایگی اختیار می‌کنیم که در آن F کراندار یکنواخت باشد. بدین ترتیب یک پوشش باز برای K بدست می‌آید. به موجب قضیه هاین - بول، یک زیر پوشش متناهی برای K موجود است. بدین معنی که به تعداد متناهی $z_i \in K$ و $\varepsilon_i > 0$ موجودند که $K \subset \bigcup_{i=1}^n N(z_i; \varepsilon_i)$ و برای هر $f \in F$ و برای هر $z \in N(z_i; \varepsilon_i)$ و برای هر $f \in F$ ، $|f(z)| \leq M_i$ در این صورت F بر K کراندار یکنواخت است و

$M = \max\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ یک کران آن است.

معکوس مطلب بلافاصله از این نکته که بستر همسایگی یک نقطه مجموعه‌ی است فشرده، ناشی می‌گردد.

چنانچه در چهارچوب خانواده‌های کراندار یکنواخت از توابع تحلیلی باشیم آگاهی دیگری قابل حصول است:

قضیه ۱-۷. فرض کنیم F در میدان \mathcal{D} خانواده‌ی از توابع تحلیلی و کراندار یکنواخت موضعی است. در این صورت خانواده $F^{(n)}$ ، مشتمل بر مشتقات n ام همه توابع در F ، نیز در \mathcal{D} کراندار یکنواخت موضعی است.

اثبات - کافی است، این را برای $n=1$ ثابت کنیم، زیرا در این صورت نتیجه را پیایی می‌توان در مورد رده جدید به کار بست. فرض کنیم برای z_0 ی در \mathcal{D} و برای هر f در F و هر z درون دایره $C: |z - z_0| = r$ ، که درون \mathcal{D} است، داشته باشیم $|f(z)| \leq M$. در این صورت برای هر z ، درون قرص کوچکتر $|z - z_0| \leq r/2$ ، به موجب فرمول انتگرال کوشی حاصل می‌شود:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi(r/2)^2} \int_C |f(\zeta)| |d\zeta| \leq \frac{4M}{r}.$$

و این نشان می‌دهد، F' در z_0 کراندار یکنواخت موضعی است. چون z_0 دلخواه است، اثبات تمام است.

اینک مفهوم پیوستگی یکنواخت را گسترش می‌دهیم. خانواده F از توابع را بر ناحیه R همپیوسته گوئیم اگر چنانچه برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ موجود باشد که برای هر $f \in F$ و همه $z_0, z_1 \in R$ با $|z_1 - z_0| < \delta$ داشته باشیم $|f(z_1) - f(z_0)| < \varepsilon$. ملاحظه می‌شود، هر عضو یک خانواده همپیوسته، پیوسته یکنواخت است. بدین معنی که برای یک خانواده همپیوسته، میتوان یک $\delta = \delta(\varepsilon)$ یافت که برای همه نقاط مجموعه و هم چنین همه توابع در خانواده کارساز باشد.

ممکن است هر عضو یک خانواده پیوسته یکنواخت باشد ولی خانواده همپیوسته نباشد. برای مشاهده این مطلب کافی است $f_n(z) = nz$ قرار دهیم. هر f_n بر $|z| \leq R$ پیوسته یکنواخت است زیرا، هر وقت $|z_1 - z_0| < \varepsilon/n = \delta$ داریم:

$$|f_n(z_1) - f_n(z_0)| = n|z_1 - z_0| < \varepsilon$$

ولسی یک δ نمی‌توان یافت که برای هر n کارساز باشد. پس دنباله $\{f_n\}$ بر $|z| \leq R$ همپیوسته نیست.

یک ارتباط عمده بین خانواده‌های کراندار یکنواخت موضعی و همپیوسته از توابع تحلیلی موجود است:

قضیه ۱۱-۸. اگر F خانواده کراندار یکنواخت موضعی از توابع تحلیلی در میدان \mathcal{D} باشد، آنگاه F بر زیر مجموعه‌های فشرده \mathcal{D} همپیوسته است.

اثبات - قضیه را در حالت خاصی که K یک قرص بسته درون \mathcal{D} باشد اثبات می‌کنیم. اثبات برای زیر مجموعه‌های فشرده عمومی \mathcal{D} مشابه اثبات قضیه ۱۱-۶ است و به خواننده واگذار می‌شود. به موجب قضیه ۱۱-۷، خانواده F' ، مرکب از مشتقات توابع F ، نیز کراندار یکنواخت موضعی است. با توجه به قضیه ۱۱-۶، می‌توانیم فرض کنیم برای هر $f \in F$ و هر $z \in K$ ، $|f'(z)| \leq M$. پس برای $z_1 \in K$ و z_0 داریم:

$$|f(z_1) - f(z_0)| = \left| \int_{z_0}^{z_1} f'(z) dz \right| \leq M|z_1 - z_0|,$$

که مسیرانتگرال از z_0 تا z_1 یک خط مستقیم است. با انتخاب $\delta = \varepsilon/M$ (اختیاری) می‌بینیم که خانواده F بر قرص K همپیوسته است.

تذکر - معکوس قضیه ۱۱-۸ درست نیست. دنباله $f_n(z) = z + n$ بر زیر مجموعه‌های فشرده صفحه همپیوسته است. در واقع برای هر n ، $f_n(z_1) - f_n(z_0) = z_1 - z_0$ ، پس $\delta = \varepsilon$ می‌توان انتخاب کرد. با اینحال $\{f_n(z)\}$ در هیچ همسایگی در صفحه کراندار یکنواخت نیست.

در فصل ۲ نشان دادیم که هر دنباله کراندار از اعداد مختلط شامل یک زیردنباله همگراست. هدف ما در این بخش این است که نتایج مشابهی برای دنباله‌های توابع کسب کنیم. در این مرحله روشن نیست که چه شکلی از همگرایی، مستدل‌تر و پرکاربردتر است. جهت روشن شدن مطلب به تعریف زیر نیازمندیم: خانواده F از توابع را در میدان \mathcal{D} نرمال گوئیم اگر هر دنباله $\{f_n\}$ از F شامل یک زیر دنباله $\{f_{n_k}\}$ باشد که بر هر زیر مجموعه فشرده \mathcal{D} ، همگرای یکنواخت باشد.

به عنوان مثال خانواده مرکب از دنباله $\{z^n\}$ در میدان $|z| < 1$ نرمال است. در واقع خود دنباله بر هر زیر مجموعه فشرده $|z| < 1$ به صفر همگرای یکنواخت است. با

اینحال باید توجه داشت، نه دنباله و نه هیچ زیر دنباله آن، در تمامی میدان همگرای یکنواخت نیست.

همان طور که دنباله کراندار ممکن است شامل زیر دنباله‌های متفاوت باشد که به حدهای مختلف همگرا باشند، عیناً "ممکن است یک خانواده قائم شامل دنباله‌های متفاوتی باشد که بر زیر مجموعه‌های فشرده به توابع مختلف همگرای یکنواخت باشند. جهت تشریح مطلب، قرار می‌دهیم:

$$f_n(z) = \begin{cases} z^n, & \text{فرد } n \\ 1 - z^n, & \text{زوج } n \end{cases}$$

در این صورت $\{f_{2n+1}\}$ به 0 و $\{f_{2n}\}$ به 1، در همه زیر مجموعه‌های فشرده $|z| < 1$ ، همگرای یکنواخت است.

مجموعه نقاط E را در مجموعه A متراکم گوئیم اگر هر همسایگی هر نقطه A شامل نقاط E باشد. هر میدان در صفحه شامل یک دنباله متراکم از نقاط است (به عنوان مثال، مجموعه نقاطی از میدان که هر دو مختص آنها گویا باشد، مجموعه‌ی است شماره‌پذیر و بنابراین می‌توان آنرا بصورت یک دنباله بیان کرد). قبل از اثبات نتیجه مه‌اد این بخش به لم زیر نیاز مندیم:

لم - فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌ی از توابع تحلیلی باشد که در میدان \mathcal{D} کراندار یکنواخت موضعی است. اگر $\{f_n(z)\}$ در همه نقاط یک زیر مجموعه متراکم در \mathcal{D} همگرا باشد، آنگاه بر هر زیر مجموعه فشرده \mathcal{D} همگرای یکنواخت است.

اثبات - اگر K زیر مجموعه فشرده مفروض در \mathcal{D} باشد. می‌خواهیم نشان دهیم دنباله $\{f_n(z)\}$ بر K همگرای یکنواخت است. بموجب قضیه ۱۱ - ۸، $\{f_n(z)\}$ بر K همپیوسته است. پس برای هر $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ متناظر است که هر وقت z و z' هر دو نقطه در K و برای n دلخواه

$$|z - z'| < \delta, \quad \text{آنگاه} \quad |f_n(z) - f_n(z')| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (۷)$$

چون که K کراندار است، تعدادی متناهی، مثلاً p ، همسایگی به شعاع $\delta/2$ ، K را می‌پوشاند. در هر یک از این p همسایگی‌ها، یک نقطه z_k ، $(k = 1, 2, \dots, p)$ از زیر مجموعه متراکم K انتخاب می‌کنیم که در آن $\{f_n\}$ همگرا باشد. سپس n و m را بس‌بزرگ انتخاب می‌کنیم تا

$$|f_n(z_k) - f_m(z_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{داشته باشیم} \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (۸)$$

به موجب (۷) و (۸) می‌بینیم، به هر z در K ، یک z_k از K متناظر می‌گردد که:

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq |f_n(z) - f_n(z_k)| + |f_n(z_k) - f_m(z_k)| + |f_m(z_k) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

پس دنباله $\{f_n(z)\}$ بر K کوشی یکنواخت است و بنابراین می‌بایست بر K همگرای یکنواخت باشد.

قابل توجه است که لم بدین نتیجه می‌انجامد که $\{f_n(z)\}$ در \mathcal{D} یک خانواده نرمال است. اینک، بایک فرایند قطری نمودن، نشان می‌دهیم، این نتیجه، بدون فرض همگرایی دنباله بر یک زیر مجموعه متراکم، هم درست است:

قضیه ۱۱-۹ (قضیه مانتل)^۱. اگر F یک خانواده کراندار یکنواخت موضعی از توابع تحلیلی در میدان \mathcal{D} باشد، آنگاه F در \mathcal{D} خانواده نرمال است.

اثبات - اگر $\{f_n\}$ دنباله مفروضی در F باشد، می‌بایست نشان داد که زیر دنباله‌یی از $\{f_n\}$ بر زیر مجموعه‌های فشرده همگرای یکنواخت است. دنباله‌یی از نقاط $\{z_k\}$ را که در \mathcal{D} متراکم باشد انتخاب می‌کنیم. به موجب لم، کافی است زیر دنباله‌یی از $\{f_n\}$ بسازیم که در هر نقطه دنباله $\{z_k\}$ همگرا باشد. بنابه فرض $\{f_n(z_1)\}$ کراندار است. پس بنابه قضیه ۲-۷ زیر دنباله‌یی از $\{f_n\}$ موجود است که در z_1 همگراست و آنرا با $\{f_{n,1}\}$ می‌نمایانیم. ولی دنباله نقاط $\{f_{n,1}(z_2)\}$ نیز کراندار است. پس زیر دنباله $\{f_{n,2}\}$ از $\{f_{n,1}\}$ موجود است که در z_2 همگراست. چونکه $\{f_{n,2}\}$ زیر دنباله $\{f_{n,1}\}$ می‌باشد، پس $\{f_{n,2}\}$ در z_1 نیز همگراست.

با ادامه این فرآیند زیر دنباله $\{f_{n,m}\}$ ، m امین، را می‌سازیم که در z_1, z_2, \dots, z_m همگرا باشد. همان طور که در جدول زیر مشاهده می‌شود، m امین دنباله توابع مختلط در z_m و در همه نقاط قبلی‌اش $\{z_k\}$ همگرا می‌باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} f_{11}(z), & f_{21}(z), & f_{31}(z), & \dots & & & \\ f_{12}(z), & f_{22}(z), & f_{32}(z), & \dots & & & \\ f_{13}(z), & f_{23}(z), & f_{33}(z), & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ f_{1m}(z), & f_{2m}(z), & f_{3m}(z), & \dots, & f_{mm}(z), & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{array}$$

ایسک دنباله $\{f_{nn}(z)\}$ را در نظر می‌گیریم، که قطر جدول فوق است. برای هر m ثابت، دنباله $\{f_{nn}(z_m)\}$ ، $n \geq m$ زیردنباله‌یی از دنباله همگرای $\{f_{nm}(z_m)\}$ می‌باشد و بنابراین همگراست. پس $\{f_{nn}(z)\}$ زیردنباله‌یی از $\{f_n\}$ است که در همه نقاط دنباله $\{z_k\}$ همگراست. و اثبات کامل است.

قضیه بولتسانو — وایرشراس وجود یک نقطه حدی را برای هر مجموعه نامتناهی و کراندار از نقاط تضمین می‌کند و نهایتاً "ضامن وجود زیر دنباله‌های همگرای هر دنباله کراندار است. قضیه مانتل را می‌توان همتای "تابع تحلیلی" برای قضیه بولتسانو تصور کرد. به مفهومی، در هر خانواده کراندار یکخواخت موضعی از توابع تحلیلی، وجود یک دنباله همگرا از توابع را تضمین می‌کند.

چنانچه در شباهات آنها کنجکاوتر شویم، می‌بینیم که هر دو قضیه دارای یک نقیصه مشترک هستند: نقطه حدی در قضیه بولتسانو، لزوماً "عضو مجموعه نیست و تابع همگرای قضیه مانتل هم لزوماً "عضو خانواده نرمال نمی‌باشد.

به عنوان مثال، دنباله $\{z^n\}$ در $|z| < 1$ یک خانواده قائم است، زیرا، بر زیر مجموعه‌های فشرده $|z| < 1$ به 0 همگرای یکخواخت است. در حالی که 0، عضو خانواده $\{z^n\}$ نمی‌باشد.

یادآور می‌شویم مجموعه کرانداری که شامل تمام نقاط حدی خود باشد، فشرده است. این مطلب ما را به تعریف زیر ارشاد می‌کند. خانواده نرمال F از توابع رافشرده‌گوئیم اگر چنانچه حدود یکخواخت همه دنباله‌های همگرا در F ، عضو F باشند.

مثال — خانواده F از توابعی به شکل

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

که در قرص $|z| < 1$ تحلیلی و با قسمت حقیقی مثبت‌اند، یک خانواده نرمال فشرده است.

بنابه قضیه ۱۰-۱۴، همه توابع $f \in F$ در نامساوی زیر صادقند:

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (|z| = r < 1).$$

پس F کراندار یکخواخت موضعی است و بنابه قضیه مانتل، نرمال است. برای نشان دادن فشردگی، فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله‌یی از توابع در F باشد که به تابع g همگرای یکخواخت است. باید نشان دهیم که $g \in F$. بنابه قضیه ۸-۶، g در $|z| < 1$ تحلیلی

است. چون که برای هر n ، $f_n(0) = 1$ پس $g(0) = 1$. چون که برای هر n ، $\operatorname{Re} f_n(z) > 0$ ، پس برای $|z| < 1$ ، $g(z) \geq 0$. ولی در این صورت به موجب قضیه نگاشت باز، برای $|z| < 1$ می‌بایست داشته باشیم $\operatorname{Re} g(z) > 0$. پس $g \in F$ و F فشرده است.

پرسش‌ها

- ۱- چه دسته‌یی از خانواده‌های توابع، کراندار یکنواخت موضعی‌اند ولی کراندار یکنواخت نیستند؟
- ۲- آیا خانواده چند جمله‌یی‌ها بر یک مجموعه، کراندار یکنواخت موضعی است؟
- ۳- اگر F خانواده کراندار یکنواخت از توابع تحلیلی باشد، آیا $F^{(n)}$ کراندار یکنواخت است؟
- ۴- اگر خانواده‌یی از توابع در هر نقطه یک میدان کراندار یکنواخت باشد، آیا این خانواده کراندار یکنواخت موضعی است؟
- ۵- در اثبات قضیه (۱-۷)، از این که K قرص است کجا استفاده شد؟
- ۶- تفاوت عمده میان دنباله متراکم و مجموعه متراکم در چیست؟
- ۷- چه دسته‌یی از خانواده‌های نرمال بیش از یک تابع حدی زیر دنباله‌یی دارند؟
- ۸- آیا می‌شود یک خانواده نرمال دارای نامتناهی توابع حدی زیر دنباله‌یی باشد؟

تمرین‌ها

- ۱- فرض کنید برای هر نقطه در میدان \mathcal{D} یک همسایگی متناظر شود که در آن خانواده F همپیوسته باشد. نشان دهید، F بر زیر مجموعه‌های فشرده \mathcal{D} همپیوسته است. آیا F در \mathcal{D} همپیوسته است؟
- ۲- نشان دهید، دنباله $\{nz\}$ در هیچ ناحیه‌یی همپیوسته نیست.
- ۳- اگر F خانواده کراندار یکنواخت موضعی از توابع تحلیلی در \mathcal{D} باشد، نشان دهید F' ، خانواده مشتمل بر مشتقات توابع F بر زیر مجموعه‌های فشرده \mathcal{D} همپیوسته است.
- ۴- فرض کنید F خانواده نرمال از توابع تحلیلی بر قرص $|z| < 1$ می‌باشد. گیریم G خانواده‌توابعی به شکل $g(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi$ که $f \in F$. نشان دهید G در $|z| < 1$ نرمال است.
- ۵- نشان دهید، دنباله $\{f_n(z)\}$:

$$f_n(z) = \begin{cases} z^n, & \text{فرد } n \\ 1 - z^n, & \text{زوج } n \end{cases}$$

در قرص $|z| < 1$ تشکیل یک خانواده نرمال می‌دهد.

- ۶- نشان دهید، خانواده توابعی به شکل $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ، $|a_n| \leq n$ ،
 یک خانواده نرمال فشرده از توابع تحلیلی در قرص $|z| < 1$ می باشد.
 ۷- گیریم F خانواده‌یی مشتمل بر همه توابع $f(z)$ که در میدان \mathcal{D} تحلیلی اند با
 $|f(z)| \leq M$ در \mathcal{D} . نشان دهید F ، خانواده نرمال و فشرده در \mathcal{D} است.

۱۱-۳. قضیه نگاشت ریمان

فرض کنیم \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_2 میدانهای همبند ساده اند. در این صورت تقریباً "یک تابع تحلیلی موجود است که \mathcal{D}_1 را بر \mathcal{D}_2 بنگارد. ابتداءً از یک استثناء "نوعی" بحث می کنیم. فرض کنیم \mathcal{D}_1 تمام صفحه و \mathcal{D}_2 قرص $|z| < 1$ باشد. هیچ تابع تحلیلی در صفحه (تام) موجود نیست که بر قرص (کراندار) $|z| < 1$ نگاشته شود، زیرا به موجب قضیه لیوویل توابع ثابت تنها توابع نام هستند که نگاره آنها درون یک قرص بیفتند. قضیه مهارد ما در این بخش مبین آن است که یک نگاشت تحلیلی یک به یک میان دو میدان همبند ساده، که هیچ کدام تمام صفحه نباشند، موجود است. قبل از اثبات این نتیجه درخشان، به مقدماتی در مورد توابع تک ارز (یک کلمه زیبا برای یک به یک) نیازمندیم.

قضیه ۱۱-۱۰. فرض کنیم $\{f_n(z)\}$ دنباله‌یی از توابع معین و تحلیلی و تک ارز در میدان \mathcal{D} باشد و بر هر زیر مجموعه فشرده \mathcal{D} به تابع غیر ثابت $f(z)$ همگرای یکنواخت باشد. در این صورت $f(z)$ تحلیلی و تک ارز است.

اثبات - تحلیلی بودن از قضیه ۸-۶ نتیجه می شود. برای اثبات تک ارزی، فرض کنیم نقاط متمایز z_0 و z_1 در \mathcal{D} موجودند که $f(z_0) = f(z_1) = a$. دوائر متمایز C_0 و C_1 را به ترتیب با مراکز z_0 و z_1 رسم می کنیم. که هر دو درون \mathcal{D} باشند. علاوه فرض می کنیم، بر هر دو دایره، $f(z) \neq a$. گیریم m برابر می نیم $|f(z) - a|$ بر $C_0 \cup C_1$ باشد. اینک n را بس بزرگ انتخاب می کنیم تا بر $C_0 \cup C_1$ داشته باشیم $|f_n(z) - f(z)| < m$ به موجب قضیه روزه، تابع

$$f_n(z) - a = (f_n(z) - f(z)) + (f(z) - a)$$

حداقل یک ریشه درون C_0 و حداقل یک ریشه درون C_1 دارد. و این با تک ارز بودن $f_n(z)$ در \mathcal{D} متناقض است.

باید توجه داشت، ممکن است که حد یکنواخت دنباله‌یی از توابع تک - ارز، تابع ثابت گردد. به عنوان مثال $f_n(z) = z/n$ بر تمام زیر مجموعه‌های فشرده صفحه به 0 همگرای یکنواخت است.

قضیه ۱۱-۱۱. فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی و تک-ارز است و $g(z)$ بر نگاره \mathcal{D} با $f(z)$ تحلیلی و تک-ارز است. در این صورت تابع ترکیبی $g(f(z))$ در \mathcal{D} تحلیلی و تک-ارز خواهد بود.

اثبات - تحلیلی بودن $g(f(z))$ از قضیه ۵-۲ نتیجه می‌شود. برای نشان دادن تک-ارزی، فرض کنیم برای $z_0, z_1 \in \mathcal{D}$ ، $g(f(z_0)) = g(f(z_1))$. بنا به تک‌ارزی g ، داریم $f(z_0) = f(z_1)$ و بنا به تک‌ارزی f ، $z_0 = z_1$ و قضیه ثابت است.

قضیه ۱۱-۱۲. فرض کنیم f ، که \mathcal{D}_1 را بر \mathcal{D}_2 می‌نگارد، در \mathcal{D}_1 تحلیلی و تک-ارز باشد. در این صورت تابع وارون g ، که با $g(f(z)) = z$ برای هر z تعریف می‌شود، یک نگاشت تحلیلی و تک-ارز از \mathcal{D}_2 بر \mathcal{D}_1 است.

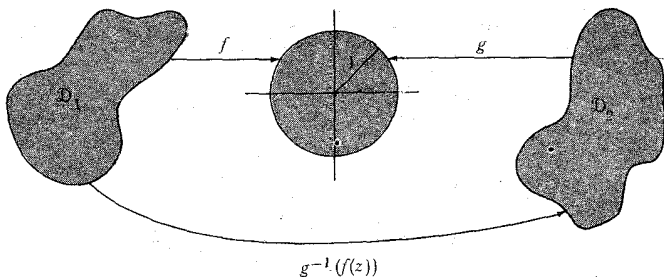
اثبات - تک-ارز بودن g نتیجه مستقیم تک-ارزی f است. برای نشان دادن تحلیلی، $w_0 \in \mathcal{D}_2$ را ثابت می‌گیریم. در این صورت برای $z_0 \in \mathcal{D}_1$ منحصر بفردی، $w_0 = f(z_0)$ با قرار دادن $w = f(z)$ داریم:

$$(9) \quad \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)}.$$

چونکه f مجموعه‌های باز را بر مجموعه‌های باز می‌نگارد (قضیه ۸-۲۱)، g در \mathcal{D}_2 پیوسته است. پس با $w \rightarrow w_0$ داریم $z \rightarrow z_0$. بنا به قضیه ۱۱-۳، $f'(z_0) \neq 0$ و می‌توان از (۹) حدگرفت تا $1/(f'(z_0)) = g'(f(z_0)) = g'(w_0)$ حاصل گردد. پس g در \mathcal{D}_2 تحلیلی است و قضیه ثابت است.

اگر f و g به ترتیب در میدانهای \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_2 تحلیلی باشند و هر دو بر قرص $|z| < 1$ نگاشته شوند، در این صورت $g^{-1}(f(z))$ تحلیلی و تک-ارز است که \mathcal{D}_1 را بر \mathcal{D}_2 می‌نگارد (ر. ک. شکل ۹).

شکل ۹



پس مجموعه میدانهای که ممکن است تحلیلی وار و تک - ارز بر درون قرص واحد نگاشته شوند، امکان دارند که تحلیلی وار و تک - ارز بر یکدیگر نگاشته شوند.

فرض کنیم f در \mathcal{D} تحلیلی و تک - ارز است و \mathcal{D} را بر $|z| < 1$ بنگارد. آیا توابع دیگری با همین خاصیت موجود است؟ در حالت عمومی به تعداد نامتناهی موجود است. برای دیدن مطلب، از بخش ۳-۲ یادآور می شویم، همه توابعی به شکل

$$g(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (|z_0| < 1, \alpha \text{ حقیقی})$$

درون دایره واحد را بر خودش می نگارند. پس توابع $g(f(z))$ و $f(z)$ هم زمان \mathcal{D} را بر $|z| < 1$ می نگارند.

لم زیر شرایط پیشنهادی را برای یک تابع نگاشتی منحصر بفرد مطرح می سازد.

لم - فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی و تک - ارز است و قرص را بر خودش می نگارد. اگر $f(0) = 0$ و $f'(0) > 0$ آنگاه $f(z) = z$.

اثبات - به موجب لم شوارتس $|f(z)| \leq |z|$ با به کار بردن لم شوارتس برای تابع وارون، هم چنین داریم $|z| \leq |f(z)|$. پس برای $|z| \leq 1$ ، $|f(z)/z| = 1$. بنابه قضیه ۵-۸، $f(z) = e^{i\alpha} z$ ، α حقیقی. چون که $f'(0) > 0$ ، نتیجه حاصل است.

تذکر - خاطر نشان می شویم که یک شرط لازم و کافی برای این که تبدیل دو خطی، قرص واحد را بر خودش بنگارد آن است که به شکل (۱۰) باشد. پس اگر خانواده توابع به تبدیلات دو خطی محدود باشد، این لم مستقیماً از (۱۰) نتیجه می شود و احتیاجی به لم شوارتس نمی داشتیم.

اکنون آماده ایم که رسماً "قضیه زیر را بیان و اثبات کنیم:

قضیه ۱۱-۱۳ (قضیه نگاشت ریمان) فرض کنیم که \mathcal{D} میدان همبند ساده‌یی به غیر

از تمام صفحه و z_0 نقطه‌یی در این میدان باشد. در این صورت تابع منحصر بفرد و تک - ارز $f(z)$ موجود است که \mathcal{D} را بر قرص $|z| < 1$ می نگارد و $f(z_0) = 0$ و $f'(z_0) > 0$.

اثبات - ابتداءً منحصر بفرد بودن این تابع را اثبات می کنیم. اگر f و g دو تابع با خواص مذکور در قضیه باشند، در این صورت تابع $h = g(f^{-1})$ تحلیلی و تک - ارز است که درون قرص دایره واحد را بر خودش می نگارد و

$$h(0) = g(f^{-1}(0)) = g(z_0) = 0$$

9

$$h'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} > 0.$$

و با توجه به لم قبلی h تابع همانی است. یعنی $g(z) = f(z)$ و منحصر به فرد بودن f ثابت می‌شود.

برای اثبات وجود، بدواً نشان می‌دهیم، تابع تحلیلی و تک ارزی موجود است که \mathcal{D} را در قرص $|z| < 1$ می‌نگارد. چون که \mathcal{D} همه صفحه نیست، نقطه $a \notin \mathcal{D}$ موجود است. اگر عملاً "قرص" $|z - a| < \varepsilon$ خارج \mathcal{D} موجود باشد، آنگاه برای هر $z \in \mathcal{D}$ ، $|z - a| > \varepsilon$ در این حالت $w = \varepsilon/(z - a)$ تابعی تحلیلی و تک ارز است که همه نقاط \mathcal{D} را درون قرص واحد می‌نگارد. ولی ممکن است متمم \mathcal{D} شامل هیچ قرصی نباشد. مثلاً " \mathcal{D} تمام صفحه منهای پرتوی از نقطه‌یی مانند z_0 تا ∞ باشد. چنین اشکالی با در نظر گرفتن شاخه‌یی از تابع ریشه دوم، که یک میدان را بر "نصف" اندازه خودش می‌نگارد، مرتفع می‌گردد.

به موجب فرع قضیه ۷-۱، اگر $a \notin \mathcal{D}$ آنگاه می‌توان یک شاخه تحلیلی برای $\phi(z) = \sqrt{z - a}$ در میدان همبند ساده \mathcal{D} تعریف کرد، که $\phi(z)$ در \mathcal{D} تک - ارز باشد. زیرا اگر $\phi(z_1) = \phi(z_2)$ ، $(z_1, z_2 \in \mathcal{D})$ ، $(\phi(z_1))^2 = (\phi(z_2))^2 = z_1 - a = z_2 - a$ ، $(\phi(z_1))^2 = (\phi(z_2))^2 = z_1 - a = z_2 - a$ ، اکنون فرض کنیم \mathcal{D}' نگاره \mathcal{D} در تحت تابع $\phi(z)$ باشد. در این صورت متمم \mathcal{D}' شامل یک قرص (درواقع شامل نیم صفحه) است. برای دیدن این مطلب، نشان می‌دهیم، نقاط b و $-b$ هم زمان به \mathcal{D}' نمی‌توانند متعلق گردند. زیرا اگر باشند، آنگاه نقاط متمم z' و z'' در \mathcal{D} موجودند که $\phi(z') = b$ و $\phi(z'') = -b$ ولی در این صورت

$$[\phi(z')]^2 = -z'a = [\phi(z'')]^2 = z'' - a,$$

که با فرض z' و z'' متممیز، متناقض است.

سپس نقطه c و $\varepsilon > 0$ را طوری انتخاب می‌کنیم که قرص $|z - c| < \varepsilon$ درون \mathcal{D}' باشد. در این صورت قرص $|z + c| < \varepsilon$ در متمم \mathcal{D}' واقع است. پس تابع $\psi(z) = \varepsilon/(z + c)$ ، \mathcal{D}' را درون قرص واحد می‌نگارد. بنابراین ترکیب $\psi(\phi(z))$ در \mathcal{D} تحلیلی و تک - ارز است و \mathcal{D} را بر قرص واحد می‌نگارد. با یک تبدیل دو خطی مناسب (توضیحات لازم را بیان کنید!)، می‌توان این تابع را به تابع $f_0(z)$ تبدیل نمود که در شرایط اضافی $f_0(z_0) = 0$ و $f_0'(z_0) > 0$ صادق باشد.

گوئیم $g(z)$ متعلق به خانواده F است، اگر چنانچه $g(z)$ در \mathcal{D} تحلیلی و تک - ارز باشد و با روابط $g(z_0) = 0$ و $g'(z_0) > 0$ نرمالیزه شده باشد و برای هر $z \in \mathcal{D}$ ،

$|g(z)| < 1$. خانواده F غیر تهی است زیرا ، $f_0(z) \in F$. بدون شک تابعی را که می خواهیم وجودش را اثبات نمائیم می بایست متعلق به F باشد . نشان خواهیم داد ، مقدار مشتق تابع مطلوب در z_0 با مقایسه با دیگر تابع عضو F ، بزرگترین است . برای این که نشان دهیم تابعی در F موجود است که مشتق آن در z_0 ماکزیمم است ، به نظریه خانواده های نرمال متوسل می گردیم .

چون F در \mathcal{D} کراندار یکنواخت موضعی است (درواقع ، کراندار یکنواخت است) ، از قضیه ۱-۹ نتیجه می شود ، F یک خانواده نرمال است . قرار می دهیم

$$A = \text{lub } \{g'(z_0) : g(z) \in F\},$$

که A ممکن است نامتناهی باشد . بنابه تعریف A ، دنباله $f_n \in F$ موجود است که $f'_n(z_0) \rightarrow A$. چون که F نرمال است ، زیر دنباله $\{f_n\}$ موجود است که بر زیر مجموعه های فشرده \mathcal{D} به یک تابع تحلیلی $f(z)$ همگرای یکنواخت است . به کار بستن فرع قضیه ۸-۶ ، نشان می دهد که $f'(z_0) = A$. پس A متناهی است . چون که $f'(z_0) \geq f'_0(z_0) > 0$ ، تابع $f(z)$ در \mathcal{D} ثابت نیست . پس از قضیه ۱۱-۱۰ نتیجه می شود ، $f(z)$ - تک - ارز و در نتیجه متعلق به F است .

اینک نشان می دهیم که $f(z)$ تابع مطلوب است . فرض کنیم به ازاء α بی درون قرص واحد ، $f(z) \neq \alpha$ ، در این صورت یک شاخه تحلیلی برای

$$F(z) = \sqrt{\frac{f(z) - \alpha}{1 - \bar{\alpha}f(z)}}$$

در \mathcal{D} قابل تعریف است . تک - ارزی $F(z)$ ناشی از تک ارزی $f(z)$ است و نامساوی $|F(z)| < 1$ ، ناشی از نامساوی $|f(z)| < 1$ است . ولی با این حال $F(z)$ کاملاً نرمالیزه نیست و از اینرو تابع

$$G(z) = \frac{|F'(z_0)|}{F'(z_0)} \frac{F(z) - F(z_0)}{1 - \bar{F}(z_0)F(z)},$$

را در نظر می گیریم که $G(z_0) = 0$ و $G'(z_0) > 0$ ، بنابراین $G(z) \in F$ به علاوه

$$G'(z_0) = \frac{|F'(z_0)|}{1 - |F(z_0)|^2} = \frac{1 + |\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}} A > A = f'(z_0),$$

که با ماکزیمم بودن $f'(z_0)$ متناقض است . پس $f(z)$ هیچ مقداری درون قرص واحد را از قلم نمی اندازد و اثبات کامل است .

تذکر ۱- دو میدان \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_2 را همدیسوار هم‌ارز گویند اگر چنانچه یک تابع تحلیلی \mathcal{D}_1 را بر \mathcal{D}_2 بگونه‌یی یک‌به‌یک و همدیسوار بنگارد. چون که در میدان، تک - ارزی تابع مخالف صفرشدن مشتق می‌گردد، قضیه نگاشت ریمان نشان می‌دهد که هر دو میدان همبند ساده (که هیچکدام تمام صفحه نیستند)، همدیسوار هم‌ارزند.

تذکر ۲- در اثبات این قضیه، فرض بر این بود که هر تابع تحلیلی و تک - ارز، میدانهای ساده را بر میدانهای همبند ساده می‌نگارد. در توپولوژی مقدماتی ثابت شده است، نگاره یک‌به‌یک و پیوسته یک میدان همبند ساده، نمی‌تواند همبند چندگانه باشد. پس هیچ میدان همبند ساده نمی‌تواند همدیسوار هم‌ارز میدان همبند چندگانه باشد.

تذکر ۳- یاد آور می‌شویم که یک تبدیل دو خطی دوایر و خطوط راست را بر دوایر و خطوط راست می‌نگارد. پس اگر نگاشتی همدیس، از یک میدان، به غیر از یک قرص و یا نیم صفحه، بر درون دایره واحد داشته باشیم، این نگاشت چیزی به غیر از یک تبدیل دو خطی است. به علاوه به موجب خاصیت منحصربفرد بودن در قضیه نگاشت ریمان، هیچ تابع تک - ارز به غیر از تبدیل دو خطی، نمی‌تواند قرص و یا نیم صفحه را بر درون دایره واحد بنگارد.

تذکر ۴- در اینجا می‌بایست به یک نکته هشیار باشانه اشاره کنیم. قضیه نگاشت ریمان، همانند اکثر قضایای وجودی، دارای این نقیصه است که در مورد ساختمان عملی، آگاهی زیادی به ما نمی‌دهد. پس اگر دو میدان همبند ساده "نامأنوس" مفروض باشند، می‌بایست همانند گذشته برای مشخص کردن یک تابع نگاشتی مناسب، به دنبال این باشیم که روشهای دیگری را بررسی کنیم.

تذکر ۵- از قضیه‌چنین برمی‌آید که درون یک چند ضلعی دلخواه را می‌توان بر درون دایره واحد نگاشت، و چنین نگاشتی را بطور صریح می‌توان به دست آورد. انجام این کار در مراحل متعدد انجام می‌گیرد. فرمول شوارتس - کریستفل^۱ یک تابع تحلیلی و تک - ارز بدست می‌دهد که نیم صفحه زیرین را بر درون یک چندضلعی دلخواه می‌نگارد. جهت بحث کامل در مورد تبدیل شوارتس - کریستفل خواننده را به کتاب نِهری^۲ (۱۲) ارجاع می‌دهیم. با ترکیب وارون چنین نگاشتی با یک تبدیل دو خطی از نیم صفحه زیرین بر

قرص واحد باز (بخش ۳-۲ ملاحظه شود) به نگاشت مطلوب می‌رسیم.

پرسش‌ها

- ۱- آیا برای برقراری قضیه ۱۱-۱۰، می‌بایست همگرایی یکنواخت باشد؟
- ۲- آیا نگاشتهای همدیسی موجودند که میدانهای همبند چندگانه را بر میدانهای همبند چندگانه بنگارند؟
- ۳- اگر $f(z)$ در میدان \mathcal{D}_1 تحلیلی و همدیس باشد و \mathcal{D}_1 را بر \mathcal{D}_2 بنگارد، آیا \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_2 همدیسوار هم‌ارزند؟
- ۴- برای تضمین منحصر بفرد بودن در قضیه نگاشت ریمان، کدام شرائط اولیه دیگری را می‌توانستیم از پیش تعیین کنیم؟
- ۵- آیا یک نگاشت یک‌به‌یک و همدیس از قرص دایره واحد بر قرص منهای مبداء موجود است؟
- ۶- اگر دو میدان همدیسوار هم‌ارزند باشند، در مورد مرزهای آن‌ها چه می‌توان گفت؟
- ۷- در اثبات قضیه نگاشت ریمان، از همبند ساده بودن میدان کجا استفاده شد؟
- ۸- چرا لازم بود، در ابتداء نشان دهیم، تابعی میدان را در قرص واحد می‌نگارد؟
- ۹- چرا تابع $G(z)$ که در اثبات قضیه ریمان ساختیم کارساز شد؟

تمرینها

- ۱- فرض کنید $f(z)$ در z_0 تحلیلی است و $f'(z_0) \neq 0$ ، نشان دهید همسایگی‌های U و V به ترتیب برای z_0 و $f(z_0)$ موجودند که $f(z)$ نگاشتی تک‌ارز از U به روی V باشد.
- ۲- فرض کنید $f(z)$ تحلیلی است و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. نشان دهید، $f(z)$ تک‌ارز است اگر و تنها اگر بتوان بصورت زیر نوشت:

$$f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \quad (|z_0| < 1, \quad \alpha \text{ حقیقی})$$

- ۳- نشان دهید، صفحه با نیم صفحه زبرین همدیسوار هم‌ارز نیست. عمومی‌تر اینکه نشان دهید صفحه تنها با خودش همدیسوار هم‌ارز است.
- ۴- در حالی که درون هر مربع را همدیسوار می‌توان بر درون یک دایره نگاشت، نشان دهید، هیچ مربعی را نمی‌توان همدیسوار بر یک دایره نگاشت.

۵- فرض کنید \mathcal{D}_1 طوق $0 < r_1 < |z| < R_1$ و \mathcal{D}_2 طوق $0 < r_2 < |z| < R_2$

باشد. اگر

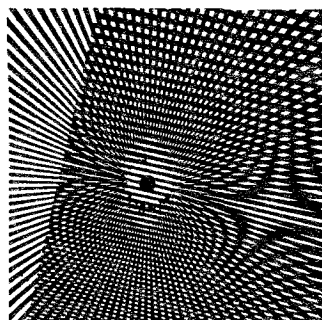
$$\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$$

تابع تحلیلی و تک‌ارزی بسازید که \mathcal{D}_1 را بر روی \mathcal{D}_2 بنگارد.

۶- فرض کنید \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_2 همدیسوار هم‌ارزند و \mathcal{D}_2 و \mathcal{D}_3 همدیس هم‌ارز باشند. نشان

دهید، \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_3 همدیسوار هم‌ارزند.

۷- قضیه ۱۱-۱۰ را با استفاده از قضیه هورویتز اثبات کنید.



۱۲- توابع تک ارز

در این فصل به بررسی توابع تک ارز ادامه می دهیم. از نظر تحلیلی، تابع تک - ارز مشتق مخالف صفر دارد (قضیه ۱۱-۳)؛ از نظر هندسی تابع تک ارز، خم های ساده رابر خم های ساده می نگارد. نشان خواهیم داد که چگونه از ترکیب این خواص و خواص دیگر، می توان قضایایی را که سرشت هندسی یا سرشت تحلیلی داشته باشند اثبات نمود. به عنوان مثال، با استفاده از کران ضریبی بر توابع تک - ارز، می توانیم از میدانی که درون یک قرص بر آن نگاشته می شود، آگاهی کسب نمود و برعکس اگر میدان \mathcal{D} واحد شرایط مشخص هندسی باشد، آنگاه قادریم برای ضرایب هر تابع تک - ارز که نگاره آن \mathcal{D} باشد، کرانی به دست آوریم.

۱۲-۱. رده S

توابعی که هم تحلیلی و هم تک - ارزند، واجد خاصیت جالبی هستند که میدانهای همبند ساده رابر میدانهای همبند ساده می نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمن، هر تابع تک ارز، که در یک میدان همبند ساده (به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد، را می توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده است متناظر کرد. بنابراین خود را به توابعی که بر قرص $|z| < 1$ تعریف شده اند محدود می کنیم. و اگر چنانچه فرض کنیم تابع در مبداء صفر است (که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبداء هم مشتق مخالف صفر دارد، در این صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری برخوردار خواهند بود. چون که مشتق تابع تک - ارز هرگز صفر نیست، هر تابع تک ارز $f(z)$ را می توان به $[f'(0)/f(0)]f(z)$ ، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد. رده توابعی که در محدودیتهای مذکور صادقند با یک حرف مشخص می شوند.

رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z| < 1$ تحلیلی و تک - ارز بوده و با شرایط $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 1$ نرمالیزه گردیده اند با S نمایش می دهیم . پس تابع $f(z)$ در S دارای نمایش رشته توانی زیر است :

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad (|z| < 1).$$

رده همه توابعی به شکل

$$g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

کسره در میدان $|z| > 1$ تحلیلی و تک - ارزند با T نمایش می دهیم . ارتباط زیرین ما را قادر می کند که اطلاعات در مورد رده T به رده S منتقل گردد .

قضیه ۱۲-۱. اگر $f(z) \in S$ ، آنگاه $1/f(1/z) \in T$

اثبات - ابتداء فرض کنیم $1/f(1/z_1) = 1/f(1/z_2)$ ($|z_1| > 1$ ، $|z_2| > 1$) . پس $f(1/z_1) = f(1/z_2)$ که $|1/z_1| < 1$ و $|1/z_2| < 1$. اینک تک - ارزی $1/f(1/z)$ ($|z| > 1$) از تک - ارزی $f(z)$ ($|z| < 1$) ناشی می گردد . اگر چنانچه بتوانیم نشان دهیم برای $|z| > 1$ ، $f(1/z) \neq 0$ ، آنگاه تحلیلی بودن $1/f(1/z)$ نتیجه تحلیلی بودن $f(z)$ خواهد بود . اگر برای $0 < |1/z_0| < 1$ ، $f(1/z_0) = 0$ ، آنگاه $f(0) = f(1/z_0) = 0$ که با تک ارزی $f(z)$ در $|z| < 1$ متناقض است . پس $1/f(1/z) \in T$ و اثبات تمام است . قضیه بعدی ، به دلیل اثبات آن و نه به دلیل صورت قضیه ، به قضیه مساحت معروف است .

قضیه ۱۲-۲. اگر $g(z) = z + b_0 + (b_1/z) + (b_2/z^2) + \dots$ در T باشد ، آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1$$

اثبات - تابع تک - ارز $g(z)$ ، دایره $|z| = r > 1$ را بر مرز ساده بسته C می نگارد . قرار می دهیم $g(z) = u(z) + iv(z)$. مساحت ناحیه R محصور به C را با $A(r)$ نمایش می دهیم و برابر است با

$$A(r) = \iint_R du \, dv.$$

قابل توجه است ، برای هر $r > 1$ ، $A(r) > 0$. اگر اکنون قرار دهیم $P(u, v) = -v/2$ و $Q(u, v) = u/2$ با بکار بردن قضیه گرین

$$\begin{aligned}
 A(r) &= \frac{1}{2} \int_C u \, dv - v \, du \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) d\theta > 0.
 \end{aligned} \quad (1)$$

———— موجب تمرین ۸ بخش ۵-۲، داریم $g'(z) = (1/iz)(\partial g/\partial \theta)$ برای محاسبه انتگرال خطی (۱)، انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) \, dz &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (u - iv) \left[\frac{1}{iz} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right] iz \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \theta} + v \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) d\theta \\
 &\quad + i \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) d\theta,
 \end{aligned} \quad (2)$$

که قسمت انگاری آن با $A(r)$ متناظر است. برای ساده کردن (۲)، می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) \, dz &= \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \left(\bar{z} + \sum_{m=0}^{\infty} \bar{b}_m \bar{z}^{-m} \right) \\
 &\quad \times \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{-n-1} \right) dz,
 \end{aligned}$$

و توجه می‌کنیم که

$$\int_{|z|=r} \bar{z}^{-m} z^{-n-1} \, dz = \begin{cases} 2\pi i r^{-2m}, & n=m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

و این به همانندی زیر می‌انجامد

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) \, dz &= \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \bar{z} \, dz - \frac{1}{2} \int_{|z|=r} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n}}{z} \, dz \\
 &= \pi i \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} \right).
 \end{aligned}$$

پس (۲) انگاری محض است و

$$A(r) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) d\theta = \pi \left(r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} \right) \quad (3)$$

چونکه $A(r) > 0$ ، داریم

$$r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 r^{-2n} > 0 \quad (r > 1). \quad (4)$$

ولی (۴) برای هر $r > 1$ برقرار است و نتیجه با $r \rightarrow 1^+$ حاصل می‌گردد.

تذکر ۱- به موجب (۳) مساحت محصور به نگاره دایره $|z|=r$ حداکثر πr^2 (مساحت ناحیه محصور به دایره) است، که تساوی تنها برای $g(z)=z+b_0$ برقرار است. به علاوه در نتیجه، تساوی برقرار می‌گردد و اگر و تنها اگر مساحت محصور به نگاره $|z|=r>1$ با $r \rightarrow 1$ به دلخواه کوچک گردد.

تذکر ۲- اگر $b_1=1$ ، آنگاه برای $n>1$ ، $b_n=0$ ، یادآور می‌شویم که خواص $g(z)=z+1/z$ وسیعاً "دربخش ۳-۳ وسیعاً" مورد مطالعه قرار گرفت. بالاخص نشان دادیم که این تابع دایره $|z|=r>1$ را بر یک بیضی می‌نگارد و هم چنین که r به ۱ نزدیک می‌شود، این بیضی به پاره خط $[-2, 2]$ میل می‌کند. کران ضرایب برای توابع T ، به صورتی که در قضیه مساحت آمده است، مار راقادر می‌کند که برای توابع S کران ضرایب محاسبه کنیم. ولی ابتداءً به لم زیر محتاجیم.

لم - اگر $f(z) \in S$ ، آنگاه $z\sqrt{f(z^2)/z^2} \in S$

اثبات - قرار می‌دهیم: $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ و گیریم

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=z\sqrt{1+a_2 z^2+a_3 z^4+\dots} \quad (5)$$

تابع $g(z)$ تحلیلی است و $g(0)=0$ ، $g'(0)=1$. برای اثبات تک - ارزی $g(z)$ ، گیریم $g(z_1)=g(z_2)$. در این صورت $f(z_1^2)=f(z_2^2)$ و تک ارزی $f(z)$ نشان می‌دهد که $z_1^2=z_2^2$ ، یعنی که، $z_1=\pm z_2$. ولی از (۵)، ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است، پس $z_1=-z_2$ موجب $g(z_1)=-g(z_2)$ است. بنابراین $z_1=z_2$ و تک - ارزی $g(z)$ به ثبوت می‌رسد.

تذکر - لازم بوده عوض $\sqrt{f(z^2)}$ ، $z\sqrt{f(z^2)/z^2}$ نوشته شود، زیرا که $f(z^2)$ صفری در مبداء دارد که $\sqrt{f(z^2)}=e^{(1/2)\text{Log } f(z^2)}$ را بی معنی می‌کند.

قضیه ۱۲-۳. اگر $g(z)=z\sqrt{f(z^2)/z^2} \in S$ در S باشد آنگاه $|a_2| \leq 2$

اثبات - به موجب لم، $f(z)=z+a_2 z^2+\dots$ از بسط (۵) نتیجه می‌شود $g'''(0)=3a_2$ پس

$$g(z)=z+\frac{a_2}{2} z^3+\dots$$

با توجه به قضیه ۱۲-۱، بسط لران برای تابع $1/g(1/z)$ نشان می دهد که

$$\frac{1}{g(1/z)} = \frac{1}{(1/z)[1 + (a_2/2)z^2 + \dots]} = z - \frac{a_2}{2} \frac{1}{z} + \dots \in T.$$

ساده کاربردن قضیه ۱۲-۲، درمی یابیم که $|a_2/2|^2 \leq 1$ پس $|a_2| \leq 2$ و قضیه ثابت است.

تذکر - با بررسی مجدد این اثبات، مشخص می شود که تساوی چه وقت برقرار است. زیرا اگر $a_2 = 2e^{i\alpha}$ ، α حقیقی، آنگاه $1/g(1/z) = z - e^{i\alpha}/z$ و یا $g(z) = z/(1 - e^{i\alpha}z^2) = z\sqrt{f(z^2)/z^2}$ پس

$$f(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\alpha}z)^2} = z + 2e^{i\alpha}z^2 + 3e^{2i\alpha}z^3 + \dots \quad (۶)$$

برای قضیه ۱۲-۳، تابعی که در (۶) آمده است فرینال است. بدین معنی که، دومین ضریب، با کران خودش برابر شده است. این که آیا این توابع برای کرانه های تمام ضرایب فرینال هستند یا نه، گمانی بشرح زیر است:

گمان - بایبرباخ^۱ - اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در K باشد، آنگاه برای هر $|a_n| \leq n, n$

قضیه ۱۲-۳، گمان را در مورد $n=2$ ثابت می کند. این گمان در سال ۱۹۱۶ مطرح شده است، ولی تا به امروز تنها در مورد ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ به ثبوت رسیده است.^۲

با قرار دادن $\alpha=0$ در (۶) به تابع زیر می رسم:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4},$$

که به تابع کوئب^۳ معروف است. این تابع قرص $|z| < 1$ را بر صفحه ی کوه در

1. Bieberbach

۲- (توضیح مترجم) این گمان به یقین تبدیل شده است، جهت اثبات به مقاله زیر

مراجعه کنید:

L. de Brange, a Proof of the Bieberbach Conjecture,

ACTA. Math. 154 (1985) 137-152.

3. Koebe

امتداد محور حقیقی منفی از $-\frac{1}{4}$ تا ∞ بریده شده است می نگارد. قضیه بعدی حاکی است که این خاصیت نگاشتی، در یک معنی، فرینال است.

قضیه ۴-۱۲. اگر $f(z) \in S$ و $f(z) \neq c$ برای $|z| < 1$ آنگاه $|c| \geq \frac{1}{4}$

اثبات - قرار می دهیم $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ چون که $f(z) \neq c$ پس

تابع

$$g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + \left(a_2 + \frac{1}{c}\right)z^2 + \dots$$

نیاز متعلق به S است. با بکار بردن قضیه ۳-۱۲ برای $g(z)$ ، نتیجه می گیریم که $|a_2 + (1/c)| \leq 2$. پس $|a_2 + (1/c)| \leq 2$. اینک با بکار بردن قضیه ۳-۱۲ در مورد $f(z)$ داریم:

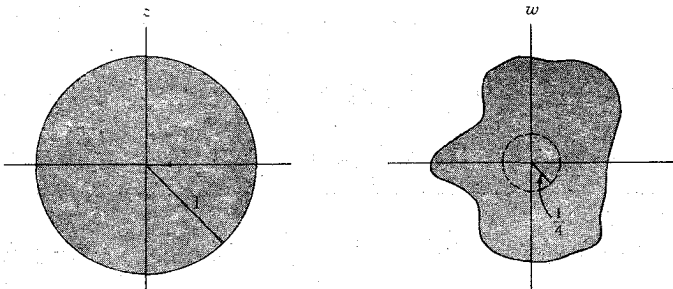
$$\left|\frac{1}{c}\right| \leq 2 + |a_2| \leq 4,$$

و قضیه ثابت است.

تذکر - قضیه ۴-۱۲ به قضیه پوشش موسوم است. قضیه مبین آن است، هر تابعی در

S قرص $|z| < 1$ را بر میدانی در صفحه w می نگارد که این میدان شامل قرص $|w| < \frac{1}{4}$ می باشد (ر. ک. شکل ۱). به خواننده واگذار می کنیم، تحقیق نماید که توابع $k_a(z) = z/(1 - e^{ia}z)^2$ ، قرص $|z| < 1$ را بر صفحه w ، که در امتداد پرتوی با شناسه ثابت از $-\frac{1}{4}e^{-ia}$ تا ∞ بریده شده، می نگارد.

شکل ۱



"شگرد" اثبات قضیه ۴-۱۲، متضمن ساختن یک تابع کمکی در D بود که وقتی با

قضیه ۱۲-۳ ترکیب شد، به نتیجه مطلوب رسید. اثبات قضیه بعدی که در ارتباط با کرانهایی برای مشتقات توابع S است، مستلزم به کار گرفتن روشی مشابه است. ولی ابتداء به لم زیر نیاز داریم:

لم - اگر $f(z) \in S$ ، $z = re^{i\theta}$ آنگاه

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} = r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)|.$$

اثبات - چونکه $f'(z) \neq 0$ ، شاخه تابع $\log f'(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی است. پس

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = e^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}.$$

و با ضرب طرفین رابطه در (۱) و محاسبه قسمت‌های حقیقی، نتیجه می‌شود:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| = \operatorname{Re} \left\{ \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}.$$

و لم ثابت می‌گردد.

قضیه ۱۲-۵. اگر $f(z) \in S$ آنگاه

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3} \quad (|z| = r < 1).$$

اثبات - یادآور می‌شویم، تابع

$$w = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z} \quad (|z_0| < 1)$$

تحلیلی و تک - ارز است و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

نیست بازاء $|z| < 1$ ، تحلیلی و تک - ارز است. با این حال $g(z) \notin S$ ، چون که $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد. در واقع

$$b_0 = g(0) = f(z_0),$$

$$b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2),$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2} [f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)].$$

با توجه به این که

$$\frac{g(z) - b_0}{b_1} = z + \frac{b_2}{b_1} z^2 + \dots$$

در S است و با بکار بردن قضیه ۱۲-۳، داریم $|b_2/b_1| \leq 2$ ، یعنی

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leq 2. \quad (۷)$$

چون که z_0 عدد مختلط اختیاری در قرص واحد است، تغییر نمادی $z = re^{i\theta}$ ، $r < 1$ را انجام می دهیم. سپس طرفین (۷) را در $2|z|/(1 - |z|^2)$ ضرب می کنیم تا حاصل شود.

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1 - r^2} \right| \leq \frac{4r}{1 - r^2}. \quad (۸)$$

از نظر هندسی، (۸) گویای این است که برای هر r ، مقدار $z[f''(z)/f'(z)]$ در قرصی به مرکز $2r^2/(1 - r^2)$ و با شعاع $4r/(1 - r^2)$ واقع است (ر. ک. شکل ۲). به ویژه:

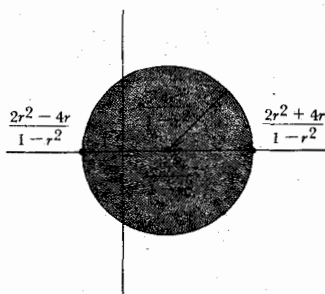
$$\frac{2r^2 - 4r}{1 - r^2} \leq \operatorname{Re} \left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \leq \frac{2r^2 + 4r}{1 - r^2}. \quad (۹)$$

با توجه به لم (۹)، را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{2r - 4}{1 - r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r + 4}{1 - r^2}. \quad (۱۰)$$

انتگرال یابی در (۱۰) نسبت به r از ۰ تا r نتیجه می دهد

شکل ۲



$$\log(1-r) - 3 \log(1+r) \leq \log |f'(re^{i\theta})| \leq \log(1+r) - 3 \log(1-r)$$

و با به نما رسانیدن داریم

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

و قضیه ثابت است.

قابل توجه است، مشتق تابع کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ برابر است با $k'(z) = (1+z)/(1-z)^3$. سپس کران بالای قضیه ۱۲-۵ در مورد این توابع در $z=r$ است و کران پائین در $z=-r$. اینک می‌توانیم کرانهایی برای کالبد توابع S مشخص کنیم. با توجه به سرشت فرینالی تابع $k(z) = z/(1-z)^2$ ، احتمالاً "خواننده می‌تواند قضیه بعدی را حدس بزند.

قضیه ۱۲-۶. اگر $f(z) \in S$ آنگاه:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (|z|=r < 1).$$

اثبات - با انتگرالیابی در امتداد پاره خط مستقیم از 0 تا $z=re^{i\theta}$ ، و با بکار بردن قضیه ۱۲-۵ داریم:

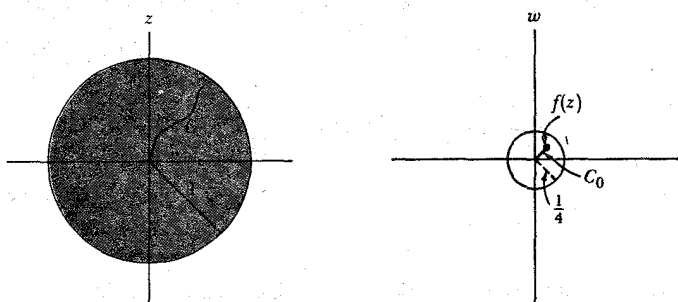
$$|f(re^{i\theta})| \leq \int_0^r |f'(te^{i\theta})| dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = \frac{r}{(1-r)^2}.$$

و بدین ترتیب نامساوی اولی ثابت می‌شود.

برای مقادیر z که با $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$ سازگار باشند، نامساوی دوم نتیجه مستقیم این است که $r/(1+r)^2 < \frac{1}{4}$. بنابراین می‌توانیم نقطه z به دلخواه اختیار کنیم و فرض کنیم $|f(z)| < \frac{1}{4}$. به موجب قضیه ۱۲-۴، پاره خط مستقیم C_0 از 0 تا $f(z)$ در صفحه w نگاره مرز ساده^۶ بسته‌بی مانند C در فرض $|z| < 1$ می‌باشد. (ر. ک. شکل ۳). در این صورت $|f(z)| = \int_{C_0} dw = \int_C |f'(\zeta)| |d\zeta|$ قابل توجه است، $\int_C |d\zeta| \geq \int_C d|\zeta| = r$ و هم درازای پاره خط مستقیم از 0 تا $|z|$ است. پس

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \int_C |f'(\zeta)| \left| \frac{d\zeta}{d|\zeta|} \right| d|\zeta| \geq \int_C |f'(\zeta)| d|\zeta| \\ &\geq \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3} dt = \frac{r}{(1+r)^2}. \end{aligned}$$

شکل ۳



و بدین ترتیب اثبات کامل است.

تذکر - به عنوان نتیجه‌ی از این قضیه، خانواده S کراندار یکنواخت است. پس به موجب قضیه ۹-۱۱، S خانواده نرمال است. بعلاوه حد $f(z)$ برای هردنباله ارتوابع می‌بایست خودش هم با روابط $f(0) = 0$ ، $f'(0) = 1$ نرمالیزه شده باشد. بنابراین بنابه قضیه ۱۱-۱۰، تابع $f(z)$ تک‌ارز است و بنابراین S فشرده است.

قضیه مساحت (قضیه ۱۲-۲) به توابع متعلق به T هم اشاره‌ی دارد. چنانچه اثبات آن ترمیم شود، که این کار را به عهده خواننده می‌نهم، نتایج زیر قابل حصول است.

لم ۱- اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ متعلق به S باشد، آنگاه مساحت نگاره $|z| = r < 1$ در تابع $f(z)$ برابر است، با $A(r) = \pi(r^2 + \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n})$

هم چنین باید توجه داشت

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} f(z) \overline{f(z)} d\theta$$

$$= 2\pi \left(r^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \right) \quad (0 < r < 1), \quad (11)$$

که به نتیجه زیر منتج می‌گردد.

لم ۲- برای $f(z) \in S$ ، گیریم $A(r)$ مساحت نگاره $|z| \leq r \leq R < 1$ در تابع $f(z)$ باشد. در این صورت

$$\int_0^R \frac{A(r)}{r} dr = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

اثبات - با توجه به لم ۱

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{A(r)}{r} dr &= \pi \int_0^R \left(r + \sum_{n=2}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n-1} \right) dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left(R^2 + \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|^2 R^{2n} \right).\end{aligned}$$

و اینک قضیه به موجب (۱۱) ثابت می شود.

بی درنگ از قضیه ۱۲-۶ می توان نتیجه گرفت که برای تمام توابع S داریم:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r}{(1-r)^2} \quad (0 < r < 1) \quad (12)$$

ولسی این که نامساوی (۱۲) چندان ظرافتی ندارد، موضوع عجیبی نیست. هیچ تابع S در بیش از یک نقطه، کالبدش $r/(1-r)^2$ نیست. لم بعدی ترتیب درستی از اندازه تابع بدست، می دهد.

لم ۳- اگر $f(z) \in S$ آنگاه

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r}{1-r} \quad (0 < r < 1).$$

اثبات - به موجب لم ماقبل قضیه ۱۲-۳، تابع $g(z) = z\sqrt{f(z^2)/z^2}$ در S است. اگر

قضیه ۱۲-۶ را برای $f(z)$ بکاربریم درمی یابیم، $|g(z)| \leq r\sqrt{1/(1-r^2)^2} = r/(1-r^2)$ ، پس

$$A(r, g) \leq \pi \left(\frac{r}{1-r^2} \right)^2. \quad (13)$$

با توجه به (۱۳)، همانندی

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |g(Re^{i\theta})|^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} |f(R^2 e^{2i\theta})| d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} |f(R^2 e^{i\alpha})| d\alpha \quad (0 < R < 1)\end{aligned}$$

را برای لم ۲ بکار می بریم که بدست می دهد

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(R^2 e^{i\alpha})| d\alpha \leq 2 \int_0^R \frac{r}{(1-r^2)^2} dr = \frac{R^2}{1-R^2}. \quad (14)$$

چون که $R < 1$ دلخواه است، لم با توجه به (۱۴) ثابت می گردد.

همان طور که تذکر دادیم، گمان بایر باخ تاکنون ثابت نشده است. با اینحال لم ۳ به ما امکان می دهد که یک کران بالای "خوب مقبول" برای کالبد ضرایب بیابیم.

قضیه ۱۲-۷. اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| < en$.

اثبات - به موجب فرمول انتگرال کوشی

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad (n=2, 3, \dots; 0 < r < 1).$$

پس

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

که به موجب لم ۳ نتیجه می شود.

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}. \quad (15)$$

چون که برای هر r ، در فاصله $0 < r < 1$ نامساوی (۱۵) برقرار است، بهترین کرانی که با این روش می توان به دست آورد این است که در (۱۵)، کمینه سازی کنیم. با اینکار نتیجه می شود:

$$|a_n| \leq \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < en$$

تذکر - در حال حاضر، بهترین کران شناخته شده عبارتست از $|a_n| < 1.243$

پرسش ها

- ۱- در این بخش چنانچه توابع نرمالیزه نمی بودند چگونه نتایجی می توانستیم به دست آوریم؟
- ۲- اهمیت رده T در چه بود؟
- ۳- چرا کرانی برای $|a_2|$ این چنین مفید بود؟
- ۴- اگر $f(z)$ تابع کراننداری در S باشد، آیا می شود که $|a_2| = 2$ ؟
- ۵- چرا تابع کمکی که در قضیه ۱۲-۵ ساختیم مفید افتاد؟
- ۶- چرا برای اکثر قضایا، تابع کوئب فرینال بود؟

- ۷- بازاء هر n ، آیا تابعی متعلق به S موجود است که برای آن قدر مطلق ضریب n ام آن حداقل به بزرگی قدر مطلق ضریب n ام در همه دیگر توابع S باشد؟
- ۸- در اثبات نامساوی دوم قضیه ۱۲-۶، چرا لازم بود که دو حالت مختلف بررسی شود؟

تمرینها

- ۱- تابعی مثال بیاورید که در قرص $|z| < 1$ تک ارز باشد و تحلیلی نباشد.
- ۲- (الف) اگر $f(z) \in S$ ، نشان دهید که برای هر عدد مختلط مخالف صفر t ، $|t| \leq 1$ تابع $f(tz)/t \in S$.
- (ب) اگر $f(z) = z/(1-z)^2$ و $|t_0| > 1$ ، نشان دهید، $f(t_0 z)/t_0 \notin S$.
- ۳- اگر $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ در S باشد، نشان دهید، برای هر عدد صحیح n ، تابع $g(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k$ در S موجود است که $b_n = |a_n|$.
- ۴- برای α حقیقی، تحقیق کنید که $z/(1 - e^{i\alpha} z)^2$ در S است.
- ۵- برای α حقیقی، تحقیق کنید که $z/(1 - e^{i\alpha} z)^3$ در $|z| < \frac{1}{2}$ تک ارزست ولی بر هیچ قرص بزرگتری به مرکز مبدا تک ارز نیست.
- ۶- اگر $f(z) \in S$ ، نشان دهید، نگاره $|z| < 1$ در تابع $f(z)$ شامل نگاره $z/(1-z)^2$ نیست مگر اینکه $f(z) = z/(1-z)^2$.
- ۷- اگر $f(z) \in S$ ، نشان دهید، $z(f(z^k)/z^k)^{1/k} \in S$ متعلق به S است، برای هر عدد صحیح و مثبت k .
- ۸- فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی است و گیریم C مرز بسته‌ی \mathcal{D} است. ثابت کنید، $\int_C \overline{f(z)} f'(z) dz$ انگاری محض است.
- ۹- اگر $f(z) \in S$ ، نشان دهید، $|z| < 1$ بر میدانی شامل قرص $|w| < 1$ نگاشته می‌شود، اگر و تنها اگر $f(z) = z$. (راهنمایی: اگر نگاره $|z| < 1$ تحت تابع f شامل قرص $|w| < 1$ باشد، آنگاه f^{-1} می‌بایست در S باشد و $|f^{-1}| < 1$. اینک لم شوارتس را برای f^{-1} بکار ببرید).
- ۱۰- اگر $f(z)$ تابع فردی در S باشد، نشان دهید، $|z| < 1$ بر میدانی شامل قرص $|w| < \frac{1}{2}$ نگاشته می‌شود.
- ۱۱- اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1$ ، نشان دهید، $f(z) \in S$.
- (راهنمایی: اختلاف $f(z_1) - f(z_0) = (z_1 - z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z_1^n - z_0^n)$ را در نظر بگیرید).

۱۲- اگر $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n$ در S باشد، نشان دهید که
 $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| \leq 1$ (راهنمایی: اگر $\sum_{n=2}^{\infty} n |a_n| > 1$ ، نشان دهید که برای r_0 ی
 $f'(r_0) = 0$ $0 < r_0 < 1$).

۱۲-۲. زیر رده‌های S

مشکل بودن اثبات گمان بایرباخ، باعث شده است که ریاضی دانها زیر رده‌هایی از S را مورد بررسی قرار دهند که در آن زیر رده‌ها کران‌های ضریبی ظریفی بتوان بدست آورد.

قضیه ۱۲-۸. اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

اثبات - برای $z = re^{i\theta}$ ، $r < 1$ قرار می‌دهیم.

$$\operatorname{Im} f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta. \quad (16)$$

با ضرب (۱۶) در $\sin n\theta$ و انتگرال‌یابی از ۰ تا π حاصل می‌شود.

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin n\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a_n r^n \sin^2 n\theta \, d\theta = a_n r^n. \quad (17)$$

باتوجه به رابطه

$$|\sin(n+1)\theta| = |\sin n\theta \cos \theta + \cos n\theta \sin \theta| \\ \leq |\sin n\theta| + |\sin \theta|,$$

و به روش استقراء می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n |\sin \theta|$. پس از (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$|a_n r^n| \leq \frac{2n}{\pi} \int_0^{\pi} |v(re^{i\theta})| \sin \theta \, d\theta. \quad (18)$$

سپس نشان می‌دهیم، $v(re^{i\theta}) \neq 0$ ($0 < r < 1$, $0 < \theta < \pi$) . این بدین دلیل است که

$$0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n (e^{in\theta} - e^{-in\theta}) \\ = 2i \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = 2iv(re^{i\theta}).$$

چون که $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، می‌بایست در فاصله $0 < \theta < \pi$

علامت جبری ثابت داشته باشد. پس

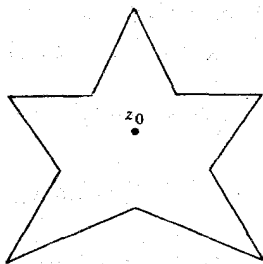
$$r = |a_1 r| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta \, d\theta \right| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |v(re^{i\theta})| \sin \theta \, d\theta. \quad (19)$$

با جایگزینی (۱۹) در (۱۸) به دست می‌آید که $|a_n r^n| \leq nr$ و با $r \rightarrow 1$ قضیه ثابت می‌گردد.

قابل توجه است که در مورد تابع کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ تساوی برقرار می‌گردد.

زیررده‌های S را نیز می‌توان بدین ترتیب توصیف نمود که خواص هندسی میدانهای را که آنها نگاشته‌اند مشخص کرد. میدان \mathcal{D} را نسبت به z_0 ستاره‌گون گوئیم، اگر چنانچه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از \mathcal{D} را به z_0 وصل کند در \mathcal{D} بیافتد. حیرت‌انگیز نیست که یک ستاره (ر. ک. شکل ۴). ستاره‌گون است. تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدأ ستاره‌گون (ویا بطور خلاصه ستاره‌گون) گوئیم اگر چنانچه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w=0$ ستاره‌گون است. این زیر رده S را با S^* نمایش می‌دهیم. لم بعدی نشان می‌دهد که در مورد توابع ستاره‌گون نگاره قرص‌های کوچکتر وارث بعضی خواص نگاره قرص واحدند.

لم - فرض کنیم $f(z) \in S$. در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $r < |z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.



شکل ۴

اثبات - ابتداء فرض کنیم $f(z) \in S^*$. گیریم \mathcal{D} نگاره $|z| < 1$ و \mathcal{D}_r نگاره $r < |z| < 1$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in \mathcal{D}$ ، آنگاه برای $0 < t < 1$ ، $tw \in \mathcal{D}$ (چون که \mathcal{D} ستاره‌گون است). پس تابع $g(z) = f^{-1}(tf(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در آنجا در نامساوی $|g(z)| < 1$ صادق است. چون که $g(0) = f^{-1}(tf(0)) = 0$ ، لم شوارتس را بکار می‌بریم تا حاصل شود $|g(z)| \leq |z|$.

اکنون نقطه $w_1 \in \mathcal{D}_r$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای نقطه z_1 ی با $|z_1| < r$ $w_1 = f(z_1)$ برای t دلخواه، $0 < t < 1$ داریم:

$$|f^{-1}(tw_1)| = |f^{-1}(tf(z_1))| = |g(z_1)| \leq |z_1| < r.$$

ولسی این بدان معنی است که tw_1 در \mathcal{D}_r قرار دارد. چون کهایم مطلب برای همه w_1 ها در \mathcal{D}_r و همه t ها، $0 < t < 1$ درست است، میدان \mathcal{D}_r نسبت به $w = 0$ ستاره‌گون است.

برعکس، اگر $f(z) \notin S^*$ ، آنگاه نقطه $w_0 \in \mathcal{D}$ موجود است بطوری که برای t_0 ی $0 < t_0 < 1$ ، $t_0 w_0 \notin \mathcal{D}$ ، اینک قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که نگاره‌اش \mathcal{D}_r شامل نقطه w_0 باشد. چون که $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}$ ، نقطه $t_0 w_0 \notin \mathcal{D}_r$ پس $f(z)$ ، $|z| < r$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد.

اینک می‌توانیم برای توابع ستاره‌گون نمایش تحلیلی ارائه دهیم.

قضیه ۹-۱۲. فرض کنیم $f(z) \in S$. آنگاه $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر

$$\operatorname{Re} \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \quad (|z| < 1).$$

اثبات - به موجب لم، $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر نگاره \mathcal{D}_r از $|z| < r < 1$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) بردار شعاعی از $w = 0$ تا $w = f(re^{i\theta})$ می‌بایست در \mathcal{D}_r باشد. ولی این بدان معنی است که $\arg f(re^{i\theta})$ تابعی نسبت به θ صعودی اکید است، زیرا در غیر این صورت، بردار شعاعی می‌بایست مرز \mathcal{D}_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در S^* با شرط

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{ \arg f(re^{i\theta}) \} > 0.$$

مشخص می‌گردد، ولی $\arg f(re^{i\theta}) = \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta})$ بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \operatorname{Im} \log f(re^{i\theta}) \} &= \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(re^{i\theta}) \right\} \\ &= \operatorname{Im} \left\{ i \frac{re^{i\theta} f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0. \end{aligned}$$

و اثبات کامل است.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{\arg f(z)\} = \operatorname{Re} \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

حاکمی است که $f(z)$ بر یک میدان ستاره‌گون نگاشته می‌شود ولی تک‌ارز بودن $f(z)$ را تضمین نمی‌کند. بعنوان مثال z^2 ، قرص $|z| < 1$ را بر خودش می‌نگارد و در شرط زیر هم صادق است.

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg z^2) = \frac{\partial}{\partial \theta} 2\theta = 2 > 0.$$

این نکته که مشتق z^2 در مبدا صفر است، بدین معنی است که در هیچ همسایگی مبدا این تابع تک‌ارز نیست. حیرت‌انگیز است که همه توابع تحلیلی غیر تک‌ارز که قرص $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گون می‌نگارند می‌بایست مشتق آنها در مبدا صفر شود.

قضیه ۱۰-۱۲. فرض کنیم $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و $f'(0) = a_1 \neq 0$. اگر در $|z| < 1$ ، $\operatorname{Re} \{z[f'(z)/f(z)]\} > 0$ ، آنگاه $f(z)$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است.

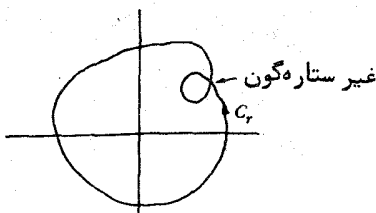
اثبات - باید توجه داشت که $f(z)$ در $|z| < 1$ به غیر از صفر ساده‌یی در مبدا، صفر دیگری ندارد، زیرا اگر در نقطه z_0 ، $0 < |z_0| < 1$ ، $f(z_0) = 0$ ، آنگاه $z[f'(z)/f(z)]$ در z_0 قطب ساده خواهد داشت. این بدان معنی است که $\operatorname{Re} \{z[f'(z)/f(z)]\}$ مقادیر منفی به دلخواه بزرگ را می‌پذیرد که با فرض $\operatorname{Re} \{z[f'(z)/f(z)]\} > 0$ متناقض است.

اینک $0 < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم. به موجب قضیه ۱۱-۴، کافی است که نشان دهیم $f(z)$ بر دایره $|z| = r$ تک‌ارز است. چون که $f(z)$ در $|z| \leq r$ ، یک صفر (و نه قطب) دارد، اصل شناسه نتیجه می‌دهد که $\Delta_{|z|=r} \arg f(z) = 2\pi$. و این بدان معنی است که دایره $|z| = r$ با تابع $f(z)$ بر مرز بسته C_r نگاشته می‌شود و C_r یک بار حول مبدا می‌گردد. چون که $\arg f(z)$ با $\arg z$ افزایش می‌یابد، خم نمی‌تواند مانند شکل ۵، خود بر خورد باشد. پس C_r مرز ساده بسته است. چونکه r دلخواه است، تابع $f(z)$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است.

تذکر - با ترکیب قضیه ۱۲-۹ و ۱۲-۱۰ می‌بینیم، یک شرط لازم و کافی برای این که تابع تحلیلی $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S^* باشد این است که $\operatorname{Re} \{z[f'(z)/f(z)]\} > 0$.

اینک برقراری گمان بایرباخ را در مورد رده S^* ثابت می‌کنیم:

شکل ۵



قضیه ۱۱-۱۲. گیریم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S^* باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

اثبات - چون که برای $0 < |z| < 1$ ، $f(z) \neq 0$ ، تابع

$$P(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}} \quad (20)$$

در $|z| < 1$ تحلیلی است و می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n. \quad (21)$$

چون که $f(z) \in S^*$ ، برای $|z| < 1$ داریم $\operatorname{Re}\{P(z)\} > 0$. پس به موجب

قضیه ۱۵-۱۰

$$|\alpha_n| \leq 2 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{برای} \quad (22)$$

از (۲۰) و (۲۱) بدست می آید .

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}\right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n\right)$$

با برابر گرفتن ضرایب حاصل می شود

$$k a_k = a_k + a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + a_2 \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1},$$

و یا به صورت معادل

$$(k-1) a_k = a_{k-1} \alpha_1 + a_{k-2} \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} \quad (k=2, 3, 4, \dots). \quad (23)$$

با استفاده از کران (۲۲) ، می توان نامساوی مثلث را در (۲۳) بکار زد تا حاصل

نمود .

$$(k-1) |a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \dots + |a_2| + 1). \quad (24)$$

از (۲۴) (قضیه ۱۲-۳) ، در می یابیم که $|a_2| \leq 2$. سپس فرض کنیم که برای

$k = 2, 3, \dots, n-1$ ، $|a_k| \leq k$. در این صورت

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}.$$

و ایمن به $|a_n| \leq n$ تحویل می‌گردد. پس، به استقراء، قضیه برای هر n درست است.

تذکر - تابع کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ در S^* است. برای اثبات، ملاحظه می‌شود که نگاره $|z| < 1$ ، صفحه w است که در امتداد پرتو $\frac{1}{2}$ - تا ∞ بریده شده است. و یا این مطلب با نشان دادن

$$\operatorname{Re} \left\{ z \frac{k'(z)}{k(z)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1+z}{1-z} \right\} > 0.$$

نیاز قابل اثبات است. پس کران ضریبی را برای توابع S^* نمی‌توان ترمیم کرد. به علاوه کرانه‌های حاصله در قضایای ۱۲-۴ و ۱۲-۵ و ۱۲-۶، برای S را هم نمی‌توان برای S^* ظریفتر نمود.

میدان \mathcal{D} را محدب گوئیم اگر چنانچه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از \mathcal{D} را به هم وصل می‌کند در \mathcal{D} بیافتد. تابع $f(z) \in S$ را محدب گوئیم اگر چنانچه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود. این زیر رده S را با K نمایش می‌دهیم. از نظر هندسی واضح است که یک میدان محدب نسبت به هر نقطه از این میدان ستاره‌گون است، پس $K \subset S^*$. بعلاوه این احتوا کامل است. جهت اثبات، ملاحظه می‌شود که تابع ساده‌ی چون تابع کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ قرص $|z| < 1$ را بر میدان ستاره‌گونی می‌نگارد که محدب نیست (نگاره شامل نقاط $-\frac{1}{2} - i$ و $-\frac{1}{2} + i$ هست. ولی شامل نقطه $-\frac{1}{2}$ نیست). با توجه به کامل بودن احتوا، هر قضیه در مورد توابع S^* ، قضیه‌ی در مورد توابع K نیز هست. مثلاً "کالبد ضریب n ام یک تابع محدب دارای کران n می‌باشد. نشان خواهیم داد که این قضیه و دیگر قضایای ثابت شده برای S^* هنگامیکه به رده K محدود گردیم، قابل ترمیم است.

بررسی K به موازات بررسی S^* صورت می‌گیرد. به عوض لم ماقبل قضیه ۱۲-۹، لم زیر را داریم:

لم - فرض کنیم $f(z) \in S$ ، در این صورت $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < 1$ را بر میدان محدب بنگارد.

اثبات - ابتداء فرض کنیم $f(z) \in K$. گیریم \mathcal{D} نگاره $|z| < 1$ و

\mathcal{D}_r نگاره $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط w_1 و w_2 را در \mathcal{D}_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط

$$tw_1 + (1-t)w_2 \quad (0 < t < 1)$$

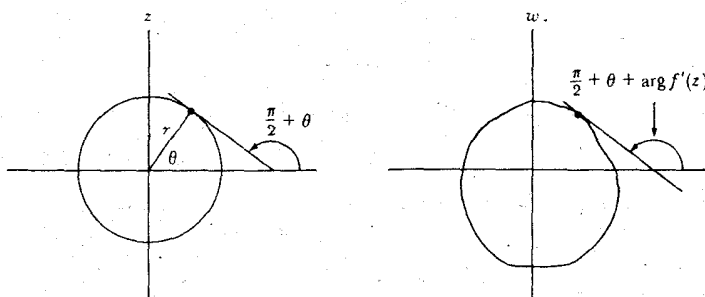
هم در \mathcal{D}_r واقع است. می‌بایست نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z| < r$ موجود باشند که $w_1 = f(z_1)$ و $w_2 = f(z_2)$. بدون از دست دادن عمومیت، فرض می‌کنیم که $|z_1| \leq |z_2|$. آنگاه نگاره $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf((z_1/z_2)z) + (1-t)f(z)$ در \mathcal{D}_r واقع است. پس تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و در شرایط $h(0) = 0$ ، $|h(z)| < 1$ صدق می‌کند. به موجب لم شوارتس، $|h(z)| \leq |z|$ ،

بویژه

$$|h(z_2)| = |f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| \leq |z_2| < r. \quad (25)$$

چونکه $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}$ ، نقطه z_0 ی در قرص $|z| < 1$ موجود است که $tw_1 + (1-t)w_2 = f(z_0)$. ولی بنابه (25) نقطه $f^{-1}(f(z_0)) = z_0$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < r$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_1 + (1-t)w_2$ در \mathcal{D}_r قرار دارد.

برعکس اگر $f(z) \notin K$ ، آنگاه دو نقطه در \mathcal{D} موجود است، که پاره خط مار برای این دو نقطه در \mathcal{D} قرار ندارد. اینک فرضی مانند $|z| < r < 1$ انتخاب می‌کنیم که نگاره اش \mathcal{D}_r شامل این دو نقطه باشد. چون که $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}$ ، پاره خطی که این دو نقطه را بهم وصل می‌کند نمی‌تواند در \mathcal{D}_r قرار داشته باشد. پس $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بریک میدان محذب نمی‌نگارد.



شکل ۶

قضیه ۱۲-۱۲. فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و $f(0) = 0$ و

$$f'(0) = 1. \quad \text{در این صورت } f(z) \in K \text{ و اگر و تنها اگر}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (|z| < 1).$$

اثبات - به موجب لم، $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر نگاره \mathcal{D}_r ، از $|z| < r < 1$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی، این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < 1$ را بر یک مرز ساده بسته می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ ، در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌گردد. با توجه به نتایج بخش ۱۱-۱، زاویه‌ی $\pi/2 + \theta + \arg f'(z)$ با w با محور حقیقی می‌سازد، برابر است با $\pi/2 + \theta + \arg f'(z)$ همان طور که در شکل ۶ تشریح شده است.

پس تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \arg f'(re^{i\theta}) \right) > 0. \quad (26)$$

اکنون (۲۶) به صورت زیر ساده می‌شود.

$$1 + \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{Im} \log f'(re^{i\theta})) = 1 + \operatorname{Im} \left\{ ire^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} \\ = \operatorname{Re} \left\{ 1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} > 0.$$

و بدین ترتیب اثبات تمام است.

با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ ، (۲۶) به صورت مجدد چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\arg izf'(z)) = \frac{\partial}{\partial \theta} (\arg zf'(z)) > 0. \quad (27)$$

ولسی (۲۷) شرطی است برای $zf'(z)$ تا بر میدان ستاره‌گون نگاشته شود. از این رو $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $zf'(z) \in S^*$. این باعث می‌شود، به روشی ساده بتوان کرانه‌های ضریبی برای رده K مشخص نمود.

قضیه ۱۲-۱۳. گیریم $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در K باشد. در این صورت برای هر n ، $|a_n| \leq 1$.

اثبات - تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n$ در S^* است. پس بنابه قضیه ۱۲-۱۱ می‌بایست برای هر n ، $n|a_n| \leq n$ و قضیه ثابت است.

تذکر - تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n = z/(1-z)$ تک - ارز است و $|z| < 1$ را بر میدان محدب $\operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$ می‌نگارد. پس کران موجود در قضیه ۱۲-۱۳، بهترین کران

ممکن است. تابع $f(z)$ در نظریه توابع محدب به همان اندازه مهم است که تاح کوئب در نظریه توابع ستاره‌گون اهمیت داشت. بدین معنی که برای اکثر قضایای مربوط به توابع محدب، وضعیت فرینال دارد. جالب است متذکر شویم، $zf'(z) = z/(1-z)^2$ تابع کوئب است.

همان‌گونه که انتظار می‌رود با توجه به تذکر قبلی، عدد " $\frac{1}{2}$ " در قضیه پوششی (قضیه ۱۲-۴) تبدیل به قضیه پوششی " $\frac{1}{2}$ " برای توابع K می‌گردد.

قضیه ۱۲-۱۴. اگر $f(z) \in K$ و $f(z) \neq c$ برای $|z| < 1$ ، در این صورت $|c| \geq \frac{1}{2}$.

اثبات - ابتداء نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = (c - f(z))^2$ در $|z| < 1$ تک ارز است. دو نقطه متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم. در این صورت:

$$\begin{aligned} g(z_0) - g(z_1) &= (c - f(z_0))^2 - (c - f(z_1))^2 \\ &= (f(z_0) - f(z_1))(f(z_0) + f(z_1) - 2c). \end{aligned}$$

اکنون $f(z_0) \neq f(z_1)$ زیرا که $f(z)$ تک - ارز است. هم چنین، بموجب تحدب $f(z)$ ، نقطه $\frac{1}{2}[f(z_0) + f(z_1)]$ به نگاره $|z| < 1$ متعلق است و بنابراین نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $f(z_0) + f(z_1) - 2c \neq 0$ و تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون که $g(z) = c^2 - 2cz + \dots$ ، تابع نرمالیزه زیر در S است.

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + \dots$$

به علاوه در $|z| < 1$ ، $h(z) \neq c/2$ زیرا که $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست. با بکار بردن قضیه ۱۲-۴، در می‌یابیم $|c/2| \geq \frac{1}{2}$ و یا $|c| \geq \frac{1}{2}$.

در بخش ۱۲-۱، نشان دادیم، چگونه نامساوی $|a_2| \leq 2$ ما را قادر می‌کند که کرانهایی برای $|f(z)|$ و $|f'(z)|$ بیابیم. کران ضریبی ترمیمی توابع محدب، ما را قادر می‌کند که کرانهای بر $|f(z)|$ و $|f'(z)|$ برای توابع K ، نیز ترمیم گردد.

قضیه ۱۲-۱۵. اگر $f(z) \in K$ آنگاه

$$\frac{r}{1+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{1-r},$$

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2} \quad (|z| = r < 1).$$

اثبات - اثبات قضیه ۱۲-۵ را مختصری اصلاح می‌کنیم. به عوض (۷) داریم:

$$\frac{1}{2} \left| \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} (1 - |z_0|^2) - 2\bar{z}_0 \right| \leq 1.$$

پس نامساوی

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{2r}{1-r^2}$$

جایگزین (۸) می‌گردد. این منجر می‌شود به:

$$-\frac{2}{1+r} \leq \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2}{1-r}.$$

با انتگرال‌یابی و با به نما رساندن، بدست می‌آید

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

همان‌طور که قضیه ۱۲-۶، نتیجه قضیه ۱۲-۵ بود، کرانه‌ها هم برای $|f(z)|$ از کرانه‌های $|f'(z)|$ نتیجه می‌شود. توضیحات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

گرچه همه توابع S محدب نیست ولی به یک معنی، می‌توان درجه تحدب را برای هر تابع S "اندازه" گرفت. برای هر $f \in S$ ، عدد حقیقی $R = R(f)$ ، بزرگترین قرص $|z| < R \leq 1$ که بوسیله f بر میدان محدب نگاشته می‌شود، را متناظر می‌کنیم. این عدد R به شعاع تحدب $f(z)$ موسوم است. روشن است که $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $R = 1$. اینک بزرگترین قرصی را که بر آن تمام توابع S محدب باشند، مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱۲-۱۶. اگر $f(z) \in S$ ، آنگاه $f(z)$ قرص $|z| < 2 - \sqrt{3}$ را بر میدان محدب

می‌نگارد.

اثبات - به موجب قضیه ۱۲-۱۲، نگاره $|z| < r$ محدب است اگر و تنها اگر برای $|z| < r$ ، $\operatorname{Re}\{1 + z[f''(z)/f'(z)]\} > 0$. به موجب نامساوی دوم (۹) داریم:

$$\operatorname{Re}\left\{1 + z \frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 1 + \frac{2r^2 - 4r}{1-r^2} = \frac{1 - 4r + r^2}{1-r^2}.$$

چون که $2 - \sqrt{3}$ ، کوچکترین ریشه مثبت $1 - 4r + r^2$ می‌باشد، قضیه ثابت می‌گردد.

طبق معمول، تابع کوئب $k(z) = z/(1-z)^2$ فرنیال است. در واقع

$$1 + z_0 \frac{k''(z_0)}{k'(z_0)} = 0 \quad (z_0 = -(2 - \sqrt{3})).$$

رده بعدی ما در رابطه با K است، بدین معنی که هر تابع در این رده برحسب بعضی توابع محدب کمکی تعریف می شود. تابع

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,$$

که در $|z| < 1$ تحلیلی است، به تقریباً "محدب موسوم است اگر چنانچه تابع $g(z) \in K$ موجود باشد که برای هر z در قرص واحد، $\operatorname{Re}\{f'(z)/g'(z)\} > 0$.
لم زیر برای نشان تک ارزی توابع تقریباً "محدب به کار می رود.

لم. اگر $\phi(z)$ در میدان محدب \mathcal{D} تحلیلی باشد و در \mathcal{D} ، $\operatorname{Re}\phi'(z) > 0$ ، آنگاه $\phi(z)$ در \mathcal{D} تک ارز است.

اثبات - نقاط متمایز z_0 و z_1 را در \mathcal{D} انتخاب می کنیم، در این صورت پاره خط مستقیم $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ ، $0 \leq t \leq 1$ می بایست در \mathcal{D} باشد. با انتگرال گیری در امتداد این مسیر، بدست می آید.

$$\begin{aligned} \phi(z_1) - \phi(z_0) &= \int_{z_0}^{z_1} \phi'(z) dz \\ &= \int_0^1 \phi'(z_0 + t(z_1 - z_0))(z_1 - z_0) dt. \end{aligned}$$

با تقسیم بر $z_1 - z_0$ و با محاسبه قسمت های حقیقی، داریم:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\phi(z_1) - \phi(z_0)}{z_1 - z_0} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^1 \phi'(z_0 + t(z_1 - z_0)) dt \right\} > 0.$$

پس $\phi(z_1) \neq \phi(z_0)$ و $\phi(z)$ در \mathcal{D} تک - ارز است.

قضیه ۱۲-۱۷. اگر $f(z)$ تقریباً "محدب باشد، $f(z)$ تک ارز است.

اثبات - به موجب فرض تابع $g(z) \in K$ موجود است که

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} > 0 \quad |z| < 1.$$

قرار می دهیم $\phi(z) = f(g^{-1}(z))$. در این صورت $f(z) = \phi(g(z))$ و بنابراین $f'(z) = \phi'(g(z))g'(z)$. پس در میدان محدب \mathcal{D} ، نگاره $|z| < 1$ تحت

تابع $g(z)$ داریم: $\operatorname{Re}\{f'(z)/g'(z)\} = \operatorname{Re}\{\phi'(g(z))\} > 0$

به موجب لم ϕ در \mathcal{D} تک ارز است. با بکار بردن قضیه ۱۱-۱۱، در می یابیم که $f(z)$ در قرص $|z| < 1$ می بایست تک ارز باشد.

تذکر - با تخصیص در انتخاب $g(z)$ در می یابیم که توابع تقریباً "محدب شامل چندین زیر رده های عمده می گردد.

(i) هر تابع محدب $f(z)$ تقریباً "محدب است؛ این را با قراردادن $g(z) = f(z)$ می توان دید.

(ii) هر تابعی که مشتق آن دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، تقریباً "محدب است؛ این را با متناظر گرفتن آن با تابع محدب $g(z) = z$ می توان دید.

(iii) تابع ستاره گون $f(z)$ تقریباً "محدب است. این را با متناظر گرفتن آن با تابع $g(z) = \int_0^z (f(\xi)/\xi) d\xi$ می توان دید. زیرا که در این صورت

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{z \frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0.$$

قابل توجه است که $g(z)$ محدب است زیرا همانندی زیر را داریم:

$$1 + z \frac{g''(z)}{g'(z)} = z \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

گمان بایبرایخ نیز در مورد توابع تقریباً "محدب هم درست است. روش اثبات مشابه روش اثبات در مورد توابع ستاره گون است.

قضیه ۱۲-۱۸. اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ تقریباً "محدب باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq n$.

اثبات - فرض کنیم $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ در K باشد و بطوری که

$$\frac{f'(z)}{g'(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n \quad (28)$$

قسمت حقیقی مثبت داشته باشد. با ضرب کردن طرفین (۲۸) در $g'(z)$ و برابر گرفتن ضریب جمله متضمن z^{n-1} ، به دست می آید.

$$na_n = nb_n + (n-1)\alpha_1 b_{n-1} + (n-2)\alpha_2 b_{n-2} + \dots + 2\alpha_{n-2} b_2 + \alpha_{n-1}.$$

— به موجب قضیه ۱۵-۱۵، برای هر k داریم $|\alpha_k| \leq 2$ ؛ و بموجب قضیه ۱۲-۱۳

برای هر k ، $|b_k| \leq 1$. پس

$$\begin{aligned} n|a_n| &\leq n|b_n| + (n-1)|\alpha_1| |b_{n-1}| + \cdots + |\alpha_{n-1}| \\ &\leq n + 2[(n-1) + (n-2) + \cdots + 1] \\ &= n + \frac{2(n-1)n}{2} = n^2. \end{aligned}$$

بنابراین برای هر n ، $|a_n| \leq n$ و قضیه ثابت است .

تذکر - چون که رده توابع تقریباً " محدب شامل نگاشتهای ستاره‌گون می‌باشد ، قضیه ۱۱-۱۲ فرع قضیه ۸-۱۲ می‌گردد .

این بخش را با یک مثال از تابعی که تقریباً " محدب است ولی ستاره‌گون نیست به پایان می‌بریم . تابع $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ واجد این خاصیت است . با $f(z)$ تابع $g(z) = -\text{Log}(1-z)$ را متناظر می‌کنیم ، $f(z)$ در K است زیرا :

$$\text{Re} \left\{ 1 + z \frac{g''(z)}{g'(z)} \right\} = \text{Re} \left\{ 1 + \frac{z}{1-z} \right\} > \frac{1}{2} \quad (|z| < 1).$$

بعلاوه

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{g'(z)} \right\} &= \text{Re} \{ (1+z+z^2)(1-z) \} \\ &= \text{Re} \{ 1 - z^3 \} > 0 \quad (|z| < 1). \end{aligned}$$

پس $f(z)$ تقریباً " محدب است .

برای اثبات اینکه $f(z)$ در S^* نیست می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} &= \text{Re} \left\{ \frac{1+z+z^2}{1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2} \right\} \quad (29) \\ &= \frac{\text{Re} \{ (1+z+z^2)(1+\frac{1}{2}\bar{z}+\frac{1}{3}\bar{z}^2) \}}{|1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2|^2}. \end{aligned}$$

با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ می‌بایست نشان دهیم ، مخرج (۲۹) که آنرا با

$$A(r, \theta) = 1 + (\frac{2}{3} \cos \theta)r + (\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \cos 2\theta)r^2 + (\frac{5}{6} \cos \theta)r^3 + \frac{1}{3}r^4, \quad (30)$$

نمایش می‌دهیم برای نقطه‌یی درون قرص واحد منفی است . چون که $A(r, \theta)$ در

قرص واحد بسته، تابعی است پیوسته، کافی است، نشان دهیم برای مقدار θ_0 ی، $A(1, \theta_0)$ منفی است که در آن صورت نتیجه می شود برای هر r در یک فاصله $1 - \delta < r < 1$ ، $A(r, \theta_0)$ ، منفی است. با قرار دادن $r = 1$ در (۳۰) می توان نشان داد که عبارت

$$A(1, \theta) = \frac{11}{6} + \frac{7}{3} \cos \theta + \frac{4}{3} \cos 2\theta$$

به هنگام $\cos \theta = -7/16$ کمینه میگردد. در یک چنین نقطه θ_0 ی داریم
پس $\cos 2\theta_0 = 2 \cos^2 \theta_0 - 1 = -79/128$

$$A(1, \theta_0) = \frac{11}{6} - \frac{7}{3} \left(\frac{7}{16} \right) - \frac{4}{3} \left(\frac{79}{128} \right) = -\frac{1}{96}.$$

پس $\operatorname{Re} \{z(f'/f)\} < 0$ در نقطه‌یی مانند

$$z = re^{i\theta_0} \quad \left(1 - \delta < r < 1, \cos \theta_0 = -\frac{7}{16} \right),$$

و بنابراین $f(z) \notin S^*$

پرسش‌ها

- ۱- در اثبات قضیه ۱۲-۷، تک ارزی $f(z)$ به چه کار آمد؟
- ۲- چرا بر میدانهای ستاره‌گون نسبت به مبدأ متمرکز شدیم و نه نسبت به نقاط دیگر؟
- ۳- آیا می شود که میدانی نسبت به هیچ یک از نقاط خودش ستاره‌گون نباشد؟
- ۴- آیا می توانید در این بخش خواص هندسی را از خواص تحلیلی متمایز کنید؟
- ۵- چرا در اثبات قضایای مربوط به رده S، لم شوارتس، چنین مفید واقع شد؟
- ۶- تعبیر هندسی توابع تقریباً "محدب چیست؟
- ۷- آیا می شود که بیش از یک تابع با یک تابع تقریباً "محدب مفروض متناظر کرد؟
- ۸- آیا می توان توابع تقریباً "محدب را بدون استفاده از توابع کمکی سرشت‌نمایی کرد؟

۹- بزرگترین عدد حقیقی R را که برای آن همه توابع S در قرص $|z| < R$ ، ستاره‌گون

است کدامست؟

تمرینها

۱- اگر $f(z) \in S$ ، $z = re^{i\theta}$ ، نشان دهید

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(z)| = \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f'(z).$$

۲- با استفاده از تمرین قبلی، اثبات قضیه ۱۲-۵ را اصلاح کنید تا نشان دهید:

$$|\arg f'(z)| \leq 2 \log \frac{1+r}{1-r}.$$

۳- (الف) نشان دهید $f(z) = z + Cz^2$ در S است اگر و تنها اگر $|C| \leq \frac{1}{2}$

(ب) نشان دهید $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $|C| \leq \frac{1}{2}$

(پ) نشان دهید $f(z) \in K$ اگر و تنها اگر $|C| \leq \frac{1}{4}$

۴- نشان دهید $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2 + \dots + (1/n)z^n$ به ازاء هر n در S است

(راهنمایی: نشان دهید $f(z)$ تقریباً "محدب است").

۵- اثبات قضیه ۱۲-۹ را اصلاح کنید تا نشان دهید: اگر $f(z) = z + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n$

تابع فرد ستاره‌گون باشد، آنگاه برای هر n ، $|a_n| \leq 1$

۶- اگر $f(z) = z + \sum_{n=3}^{\infty} a_n z^n$ تابع محدب فرد باشد، نشان دهید، برای

هر n ، $|a_n| \leq 1/n$

۷- نشان دهید، S^* و K خانواده‌های نرمال و فشرده هستند.

۸- اگر $f(z) \in S^*$ و $f(z) \in K$ ، نشان دهید $e^{-i\alpha} f(ze^{i\alpha}) \in S^*$ و $e^{-i\alpha} f(ze^{i\alpha}) \in K$

۹- اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ — $\operatorname{Re} \{z(f'/f)\} > \alpha$ ، نشان

دهید، $|a_2| \leq 2(1-\alpha)$.

(راهنمایی: قرار دهید $P(z) = (zf'/f - \alpha)/(1-\alpha)$)

۱۰- فرض کنید $f(z) \in S$ و $\operatorname{Re} \{1 + z_0 f''(z_0)/f'(z_0)\} = 0$ و $|z_0| < 1$ نشان

دهید، برای $|z_0| < r < 1$ ، نگاره $|z| < r$ محدب نیست.

۱۱- فرض کنید $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ و $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ توابع

تحلیلی هستند و $|z| < 1$ را به ترتیب بر \mathcal{D}_0 و \mathcal{D}_1 می‌نگارند. اگر $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_1$ ، نشان

دهید، $|a_1| \leq |b_1|$ (راهنمایی: لم شوارتس را برای $g^{-1}(f(z))$ بکار ببرید).

۱۲- در شرایط تمرین قبلی، نشان دهید: اگر \mathcal{D}_1 محدب باشد، آنگاه برای هر

n ، $|a_n| \leq |b_1|$. (راهنمایی: تابع زیر را در نظر بگیرید.

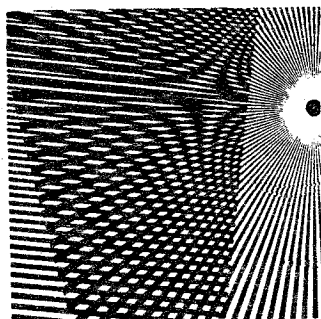
$$F(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(e^{2k\pi i/n} z^{1/n}) = 1 + a_n z + \dots)$$

۱۳- قضیه ۱۲-۱۴ را با استفاده از تمرین قبلی ثابت کنید. (راهنمایی: اگر $f(z) \in K$

مقدار $z = -re^{i\alpha}$ را نپذیرد، نشان دهید، نگاره $|z| < 1$ در تابع $w = e^{-i\alpha} f(ze^{i\alpha})$

زیر مجموعه-نگاره $w = 2rz/(1-z) = 2rz + \dots$ می باشد).

۱۴- نشان دهید $f(z)$ در $|z| < 1$ تک ارزست. بشرطی که تابع $g(z) \in K$ موجود باشد، به طوری که به ازاء یک عدد حقیقی α و همه z ها در قرص واحد $\operatorname{Re} \{e^{i\alpha}(f'(z)/g'(z))\} > 0$. این را گاهی به عنوان تعریف تقریباً "محدب برای $f(z)$ " می گیرند.



۱۳. توابع تام و برخه ریخت

ابتداء حاصلضربهای نامتناهی را تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که خواص همگرایی آنها شبیه به خواص رشته‌های نامتناهی است. همان طور که رشته‌های نامتناهی به عنوان وسیله‌ی برای بررسی بسطهای رشته‌توانی برای توابع تحلیلی مورد استفاده قرار گرفت. همان طور حاصلضربها نیز می‌توانند به عنوان وسیله‌ی برای بررسی بسطهای حاصلضربی برای توابع تحلیلی مورد استفاده قرار گیرند. همان طور که خواهیم دید مقایسه بسطهای حاصلضربی با بسطهای رشته‌ای ما را قادر می‌سازد که همانندیهای جالبی به دست آوریم. اگر $\{a_n\}$ دنباله مفروضی باشد که به ∞ میل کند، نشان می‌دهیم، یک تابع تام موجود است که صفرایش در $\{a_n\}$ هستند. به یک معنی، این قضیه از قضیه (وجودی) نگاشت ریمان در فصل ۱۱ دقیق‌تر است، زیرا که می‌توانیم عملاً "چنین تابع تام را بسازیم. سپس یک دنباله دلخواه $\{b_n\}$ را که به ∞ میل می‌کند در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم، همیشه می‌توان تابعی یافت که قطب‌های آن در $\{b_n\}$ بوده و در جاهای دیگر تحلیلی باشد. به هنگام مطالعه این فصل شایسته است، همیشه شباهات موجود میان صفرا و قطب‌ها را مد نظر داشته باشیم.

۱۳-۱. حاصلضربهای نامتناهی

حاصلضرب نامتناهی، عبارتی است به شکل $u_1 u_2 u_3 \dots$ (که با $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ می‌نمایانیم)، که u_n ها اعداد مختلط هستند. قیاس با رشته‌های نامتناهی ما را وامیدارد که بگوئیم یک حاصلضرب نامتناهی همگراست اگر چنانچه $\lim_{n \rightarrow \infty} (\prod_{k=1}^n u_k) \neq 0$ باشد. ولی چنین تعریفی کامل نیست، زیرا که اگر یک جمله صفر باشد، حاصلضرب همگرا باشد.

نامتناهی همگرا خواهد بود و رفتار مضارب دیگر هیچ نقشی نخواهند داشت. و به تحقیق، این در جوهر تعاریف "حد" وجود ندارد. از اینرو فرض می‌کنیم که در یک حاصلضرب نامتناهی، هیچ مضربی، صفر نیست. با وجود این ممکن است یک حاصلضرب نامتناهی صفر شود بدون اینکه هیچ یک از مضارب آن صفر باشد (برخلاف حاصلضربهای متناهی). به عنوان مثال $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n (1/k) = 0$. ما از چنین پدیده‌یی هم (به دلائلی که بعداً روشن خواهد گشت) می‌خواهیم طفره برویم. گوئیم که یک حاصلضرب نامتناهی همگراست اگر چنانچه $\lim_{n \rightarrow \infty} (\prod_{k=1}^n u_k)$ موجود و مخالف صفر باشد. حاصلضرب نامتناهی که همگرا نباشد، واگرا خوانده می‌شود.

قرار می‌دهیم $P_n = \prod_{k=1}^n u_k$. اگر $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا باشد. آنگاه دنباله $\{P_n\}$ به یک مقدار مخالف صفر P می‌گراید. پس:

$$u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1 \quad \text{اگر } n \rightarrow \infty \text{ آنگاه}$$

از این رو مناسب خواهد بود که حاصلضرب نامتناهی را به صورت $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ نمایش دهیم که اگر حاصلضرب همگرا باشد $a_n \rightarrow 0$. همانند حالت مربوط به رشته‌های نامتناهی، همگرایی دنباله $\{a_n\}$ به 0، برای همگرایی حاصلضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ کافی نیست، مثلاً:

$$P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2} \rightarrow \infty,$$

پس $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)$ واگراست. به طریق مشابه

$$P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

پس $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - 1/n)$ نیز واگراست.

بدون شک کاملاً "طبیعی" بنظر می‌رسد که مقایسه میان رشته نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و حاصلضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ بیش از این دنبال گردد. در حالت خاص که برای هر n ، $a_n \geq 0$ ، ارتباط این دو از ویژه‌گی ظریفی برخوردار است.

قضیه ۱-۳). اگر $a_n \geq 0$ ، حاصلضرب $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ همگراست اگر و فقط اگر

رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

اثبات - ابتداءً چون همه جملات غیرمنفی اند توجه می‌کنیم که:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n),$$

هم چنین برای x های غیر منفی داریم $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n/n!) \geq 1 + x$ پس نامساوی دوگانه زیر را داریم:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \\ \leq e^{a_1} e^{a_2} \dots e^{a_n}.$$

یعنی

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \leq \exp \sum_{k=1}^n a_k. \quad (1)$$

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به عدد حقیقی A میل کند، آنگاه $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ یک دنباله صعودی است که از بالا (به e^A) کراندار است و بنابراین می بایست همگرا باشد. برعکس اگر $\prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ به P بگراید، آنگاه طرف چپ نامساوی (۱) نشان می دهد که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به مقداری که از P بزرگتر نیست می گراید.

همان طور که در قضیه بعدی مشاهده می گردد، نتایج مشابهی در حالی که جملات منفی باشند استنتاج می گردد.

قضیه ۱۳-۲. اگر $u_n \neq 1$ ، $a_n \geq 0$ آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد.

اثبات - ابتدا فرض می کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد. به موجب محک کوشی برای N بس بزرگ، $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \frac{1}{2}$ داریم:

$$(1 - a_N)(1 - a_{N+1}) = 1 - a_N - a_{N+1} + a_N a_{N+1} \\ \geq 1 - a_N - a_{N+1} > \frac{1}{2}.$$

با استقراء می توان نشان داد که برای $n > N$

$$\prod_{k=N}^n (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=N}^n a_k > \frac{1}{2}. \quad (2)$$

با نوشتن $P_n = \prod_{k=1}^n (1 - a_k) = P_{N-1} \prod_{k=N}^n (1 - a_k)$ از (۲) به دست می آید که P_n/P_{N-1} به مقدار P میل می کند و $\frac{1}{2} \leq P \leq 1$. پس $P_n \rightarrow P_{N-1}P \neq 0$ و $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k)$ همگراست.

اینک فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست. اگر $a_n \rightarrow 0$ ، آنگاه $1 - a_n \rightarrow 1$ و حاصل ضرب واگراست. پس بدون از دست رفتن عمومیت قضیه، می توان فرض کرد $a_n \rightarrow 0$. پس برای $n \geq N$ ، $0 \leq a_n < 1$ از همانندی

$$e^{-x} = 1 - x + \left(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}\right) + \left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right) + \dots,$$

نتیجه می شود که برای $1 - x \leq e^{-x}$, $0 \leq x < 1$, چون که تمام جملات داخل پرانتز غیر منفی است. پس

$$0 \leq \prod_{k=N}^n (1 - a_k) \leq \prod_{k=N}^n \exp(-a_k) = \exp\left(-\sum_{k=N}^n a_k\right) \quad (n > N).$$

با $n \rightarrow \infty$, واگرایی $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ نشان می دهد که $\prod_{k=N}^{\infty} (1 - a_k) = 0$ بنا براین $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k)$ واگراست و اثبات کامل است.

تذکر - اگر حاصلضرب مجاز می بود که به 0 بگراید، قضیه ۱۳-۲ دروغ می بود و این مطلب با قرار دادن $a_n = 1/(n+1)$ ملاحظه می گردد.

اگر محدودیت های موجود بر $\{a_n\}$ از بین بروند، مقایسه مابین $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ چنین سراسرست نخواهد بود. در تمرینات مثالی خواهد آمد که در آن $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ واگراست. در حالی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست و مثال دیگری که $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ همگراست در حالی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

در حالت عمومی برای مرتبط ساختن حاصلضربهای نامتناهی با رشته های نامتناهی از لگاریتم مختلط استفاده می کنیم. اگر $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = P \neq 0$ آنگاه $\log \left[\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \right] = \log P$ با این حال این بدان معنی نیست که $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n) = \log P$ می گراید. گیریم $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k) = |P_n| e^{i \arg P_n}$ در این صورت $|P_n| \rightarrow |P|$ ؛ ولی تنها چیزی که در مورد $\arg P_n$ می توان گفت این است که $\arg P_n \rightarrow \arg P \pmod{2\pi}$. برای این که همگرایی $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ با همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ مقایسه شود، لازم است که در خواص چند مقداری لگاریتم بحث شود. مرحله حلال در اثبات قضیه بعدی عبارت است از اینکه نشان دهیم، برای یک حاصلضرب همگرا، شناسه حاصلضربهای جزئی، مالا حول یک نقطه ثابت مجتمع می کنند، وقتی که برای هر k ، همان شاخه برای $\arg(1 + a_k)$ انتخاب شود.

قضیه ۱۳-۳. برای a_n مختلط، $a_n \neq -1$ ، حاصلضرب $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ همگراست

اگر و تنها اگر رشته $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1 + a_n)$ همگرا باشد.

اثبات - قرار می دهیم $P_n = \prod_{k=1}^n (1 + a_k)$ و می نویسیم:

$$\log P_n = \text{Log } |P_n| + i \arg P_n = \sum_{k=1}^n \text{Log } (1 + a_k), \quad (۳)$$

که برای هر k ، شاخه‌یی از لگاریتم انتخاب شده است که در $-\pi < \text{Im Log } (1 + a_k) = \text{Arg } (1 + a_k) \leq \pi$ صدق کند. بدین ترتیب شاخه‌یی برای $\log P_n$ مشخص می‌شود.

فرض کنید که $P_n \rightarrow P \neq 0$. در این صورت $\text{Log } |P_n| \rightarrow \text{Log } |P|$ و $\arg P_n \rightarrow \arg P \pmod{2\pi}$. پس دنباله‌یی از اعداد حقیقی $\{\varepsilon_n\}$ ، $\varepsilon_n \rightarrow 0$ و دنباله‌یی از اعداد صحیح $\{m_n\}$ موجودند به صورتی که برای هر n

$$\arg P_n = \arg P + 2\pi m_n + \varepsilon_n. \quad (۴)$$

نشان می‌دهیم که برای n بس بزرگ، m_n ثابت (مثلاً m) است. بدین منظور می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \arg P_{n+1} - \arg P_n &= \text{Arg } (1 + a_n) \\ &= 2\pi(m_{n+1} - m_n) + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n. \end{aligned}$$

چون که $a_n \rightarrow 0$ داریم $\text{Arg } (1 + a_n) \rightarrow 0$ ، پس برای $n > N$

$$2\pi|m_{n+1} - m_n| \leq |\text{Arg } (1 + a_n)| + |\varepsilon_{n+1}| + |\varepsilon_n| < 2\pi.$$

پس برای $n > N$ ، $m_{n+1} = m_n = m$ و از (۴) دیده می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log } (1 + a_n)$ به $\arg P + 2\pi m$ با توجه به (۳) اینک نتیجه می‌شود که همگراست.

برعکس، فرض کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log } (1 + a_n)$ به عدد مختلط A بگراید. در این صورت:

$$P_n = \exp \log P_n = \exp \sum_{k=1}^n \text{Log } (1 + a_k). \quad (۵)$$

با $n \rightarrow \infty$ در (۵)، نتیجه می‌شود $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) = e^A \neq 0$ و اثبات تمام است.

حاصلضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ را همگرای مطلق گویند اگر چنانچه $a_n \neq -1$ ، $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ همگرا باشد. همانند مورد رشته‌ها، حاصلضرب همگرای مطلق همگراست. قبل از اثبات به لم زیرین نیازمندیم:

لم - برای a_n مختلط، $a_n \neq -1$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log } (1 + a_n)$ همگرای مطلق باشد.

اثبات - اگر یکی از این دو رشته همگرا باشد، آنگاه برای n بس بزرگ $|a_n| \leq \frac{1}{2}$

بسط ماکلورن

$$\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots = z \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots \right) \quad (۶)$$

برای $|z| < 1$ مقبول است. با قرار دادن $z = a_n$ در (۶)، برای $n > N$ داریم:

$$\frac{\text{Log}(1+a_n)}{a_n} = 1 - \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} \mp \dots = 1 + b_n,$$

که در آن:

$$|b_n| = \left| -\frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{3} - \dots \right| \leq \frac{1}{2} (|a_n| + |a_n|^2 + \dots) \\ = \frac{|a_n|}{2(1-|a_n|)} \leq \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{2}|a_n| \leq |\text{Log}(1+a_n)| \leq \frac{3}{2}|a_n| \quad (n > N).$$

پس یا هر دو سری همگرای مطلق اند و یا هیچ کدام همگرای مطلق نیستند.

تذکر - باتوجه به این لم، ملاحظه می شود که قضایای ۱-۱۳ و ۲-۱۳ حالات خاص

قضیه ۳-۱۳ هستند.

قضیه ۴-۱۳. اگر $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ همگرای مطلق باشد، آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$

همگراست.

اثبات - فرض کنیم $\prod_{n=1}^{\infty} (1+|a_n|)$ همگراست، به موجب قضیه ۱-۱۳، $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگراست. سپس به موجب لم، $\sum_{n=1}^{\infty} |\text{Log}(1+a_n)|$ همگراست. چونکه یک رشته همگرای مطلق، همگرا نیز می باشد، نتیجه می شود که $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1+a_n)$ همگراست. اینک قضیه، به عنوان نتیجه یی از قضیه ۳-۱۳ ثابت می گردد.

تذکر - ترتیب جملات را در یک حاصلضرب همگرای مطلق می توان عوض کرد، بدون این که به همگرایی آن و یا به مقدار آن تأثیر نماید. اثبات آن، مشابه اثبات همین مطلب در رشته های نامتناهی است و به عنوان تمرین به خواننده واگذار می شود.

همان طور که از رشته های اعداد ثابت به رشته های توابع رفتیم، اینک هم می توانیم

از حاصلزرب اعداد ثابت به حاصلزرب توابع بهردازیم . حاصلزرب نامتناهی

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)] \quad (7)$$

را در ناحیه R همگرا گوئیم ، اگر برای هر $z_0 \in R$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n [1 + f_k(z_0)]$$

موجود و مخالف صفر باشد ، همگرایی در (۷) را در R یکنواخت گوئیم اگر چنانچه دنباله $P_n(z) = \prod_{k=1}^n [1 + f_k(z)]$ در R به یک تابع بدون صفر همگرایی یکنواخت باشد . مفیدترین آزمون برای همگرایی یکنواخت حاصلزرب ، چیزی مشابه آزمون M ، قضیه ۹-۶ است که بطور وسیع برای اثبات همگرایی یکنواخت (و مطلق) رشته مورد استفاده قرار گرفته است .

قضیه ۱۳-۵ . فرض کنیم برای هر z در ناحیه R ، $|f_n(z)| \leq M_n$ و $f_n(z) \neq -1$ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ همگرا باشد ، آنگاه $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$ در R همگرایی یکنواخت است .

اثبات - به موجب قضیه ۱۳-۱ ، $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$ برای هر نقطه در R ، همگرایی مطلق و در نتیجه همگرا می باشد ، کافی است نشان دهیم که دنباله $P_n(z) = \prod_{k=1}^n [1 + f_k(z)]$ در R کوشی یکنواخت است . قابل توجه است که برای هر اعداد صحیح و مثبت m و n ($m < n$) ، داریم :

$$P_n(z) - P_m(z) = \sum_{k=m}^{n-1} [P_{k+1}(z) - P_k(z)] = \sum_{k=m}^{n-1} P_k(z) f_{k+1}(z). \quad (8)$$

ولی برای تمام k ها

$$\begin{aligned} |P_k(z)| &\leq \prod_{n=1}^{\infty} (1 + |f_n(z)|) \leq \exp \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)| \\ &\leq \exp \sum_{n=1}^{\infty} M_n = e^M. \end{aligned}$$

به موجب قضیه ۹-۶ ، رشته $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ در R همگرایی یکنواخت است . پس با انتخاب m بس بزرگ در (۸) تا این که برای هر $z \in R$ و هر n ، $\sum_{k=m}^n |f_k(z)| < \varepsilon$ ، داریم :

$$|P_n(z) - P_m(z)| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |P_k(z)| |f_{k+1}(z)| \leq e^M \sum_{k=m}^{n-1} |f_{k+1}(z)| < \varepsilon e^M.$$

چون که ε اختیاری است، اثبات تمام است.

تذکر - نشان دادن این که $\{P_n(z)\}$ کوشی یکنواخت است، امکان این که برای z ، $P_n(z) \rightarrow 0$ را مرتفع نمی کند. به همین دلیل لازم است که نشان دهیم $\{P_n(z)\}$ همگرای نقطه‌یی (به یک تابع بدون صفر) است.

پرسشها

- ۱- چه شباهاتی میان رشته‌های نامتناهی و حاصلضربهای نامتناهی موجود است؟
- ۲- اگر دنباله حاصلضربهای جزئی $\{P_n\}$ همگرا باشد، آیا $\{\log P_n\}$ همگراست؟ در مورد معکوس مطلب چه؟
- ۳- با توجه به قضیه ۱۳-۱ و قضیه ۱۳-۲ آیا این درست است که برای دنباله حقیقی $\{a_n\}$ ، $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد؟
- ۴- به چند طریق یک حاصلضرب نامتناهی می‌تواند واگرا گردد؟
- ۵- اگر $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ همگرا و $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)$ واگرا باشد، در مورد دنباله $\{a_n\}$ چه می‌توان گفت؟
- ۶- آیا می‌شود $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ همگرای یکنواخت باشد و همگرای مطلق نباشد؟ مطلق باشد ولی یکنواخت نباشد؟
- ۷- از اینکه یک حاصلضرب نامتناهی در محک کوشی صدق می‌کند منظور چیست؟ چه ارتباطی با همگرایی آن دارد؟
- ۸- اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد، در مورد $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n z)$ چه می‌توان گفت؟
- ۹- چگونه می‌توان بدون فرض برای هر k ، $-\pi < \arg(1 + a_k) \leq \pi$ ، قضیه ۱۳-۳ را اثبات نمود؟

تمرینها

- ۱- هر یک از مقادیر زیر را بیابید.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right) \quad (\text{ب}) \qquad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (\text{الف})$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \quad (\text{ت}) \qquad \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) \quad (\text{پ})$$

- ۲- نشان دهید، حاصلضرب زیر همگراست ولی مطلق نیست.

$$(1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \dots$$

- ۳- فرض کنید $\{a_n\}$ حقیقی با $|a_n| < 1$. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد . نشان دهید ، $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد . (راهنمایی : قرار دهید ، $-\text{Log}(1 - a_n) = a_n + a_n^2/2 + a_n^3/3 + \dots$) و قضیه ۳-۱ را بکار ببرید) .
- ۴- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله نزولی از اعداد حقیقی است با $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. نشان دهید ، $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + (-1)^n a_n]$ همگراست اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد . (راهنمایی : تمرین قبلی را به کار ببرید) .

- ۵- قرار دهید $a_n = (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$. نشان دهید با این که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست ولی $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ واگراست .
- ۶- قرار دهید :

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}, & n \text{ فرد} \\ -\frac{1}{\sqrt{n}}, & n \text{ زوج} \end{cases}$$

- نشان دهید ، $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ همگراست در حالی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست .
- ۷- نشان دهید ، عبارت های زیر یا همگی همگرایند و یا همگی واگرایند .

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n)|, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + |a_n|).$$

- ۸- ناحیه همگرایی حاصلزبرهای زیر را بیابید .

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^z}\right). \quad (\text{پ}) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2^n}). \quad (\text{ب}) \quad \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^n). \quad (\text{الف})$$

- ۹- برای $|z| < 1$ ، نشان دهید :

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1 - z}.$$

- ۱۰- فرض کنید برای هر n ، $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست . قرار دهید $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. نشان دهید :

$$a_1 \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{a_n}{s_{n-1}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

۱۱- گیریم p_n ، n امین عدد اول باشد ($p_1=2$ ، $p_2=3$ و) اگر $\operatorname{Re} z > 1$

نشان دهید :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_n^{-z}}.$$

(راهنمایی: هر ضرب $1/(1-p_n^{-z})$ را به رشته هندسی بسط دهید).

۱۳-۲. قضیه حاصلضرب وایرشتراس

اگر یک مجموعه متناهی از اعداد مختلط مخالف صفر $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ مفروض باشد، همیشه می توان تابعی تام (در واقع یک چند جمله ای) یافت که در این نقاط و تنها در این نقاط صفر شود. این چنین تابع تابعی نامی عبارتست از $\prod_{n=1}^k (1 - z/a_n)$. سئوالی که مطرح است این که آیا همیشه می توان تابعی تام یافت که تنها صفرایش در یک دنباله نقاط از پیش معلوم و دلخواه باشد. متأسفانه جواب منفی است. مثلاً "اگر تابع تابعی در دنباله $\{1/n\}$ صفر باشد، آنگاه به موجب قضیه ۸-۱۴، این تابع تام می بایست متحداً صفر باشد. با این حال نشان می دهیم که اگر دنباله، نقطه حدی متناهی نداشته باشد، آنگاه جواب سئوال مثبت خواهد بود.

فرض کنیم، دنباله $\{a_n\}$ که به ∞ میل می کند به گونه ای مرتب شده که:

$$0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$$

یک حدس خام برای تابع تام مناسب عبارتست از $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n)$. بدون شک اگر $f(z)$ تام باشد آنگاه این تابع تنها در نقاط دنباله $\{a_n\}$ صفر می گردد. اینک شرایطی را مشخص می کنیم که باید $\{a_n\}$ واجد باشد تا $f(z)$ تام گردد. یادآور می شویم که حاصلضرب نامتناهی $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n)$ را همگرا گویند اگر دنباله $P_n(z) = \prod_{k=1}^n (1 - z/a_k)$ به یک تابع بدون صفر میل کند. و ما اینک این شرط را مختصری تخفیف می دهیم و تابع حدی را مجاز می کنیم در نقاطی که یکی از مضارب، صفر است، صفر شود.

فرض کنیم، $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|$ همگرا باشد چون که در $|z| \leq R$ (دلخواه) $|z/a_n| \leq R/|a_n|$ — کار بردن قضیه ۱۳-۵ نشان می دهد که $P_n(z)$ بر هر زیر مجموعه فشرده صفحه به تابع $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n)$ همگرای یکنواخت است. به موجب قضیه ۸-۶، $f(z)$ می بایست در این صورت تابع تام باشد. اینک به آسانی می توانیم یک تابع تام بسازیم که صفرایش در ۱، ۴، ۱۶، ... باشد. حاصلضرب $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n^2)$ یک چنین تابعی است.

ولی ساختن یک تابع تام که صفرهایش در اعداد صحیح مثبت باشد به مراتب دشوارتر است. عبارت $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n)$ معرف یک تابع تام نیست. در واقع با قرار دادن $z = -1$ ملاحظه می شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2} = \infty.$$

آنچه را که مورد نیاز ماست یک مضرب "همگراساز" می باشد. اینک نشان می دهیم، $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n)e^{z/n}$ تابع تام است. به موجب قضیه ۱۳-۳، در تمام نقاطی که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{Log} \left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n} \right]$$

همگرا باشد، $f(z)$ نیز همگراست، بنابه ۱۳-۵، کافی است نشان دهیم که بر هر مجموعه فشرده $|z| \leq R$ یک رشته همگرا $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ می توان یافت به طوری که:

$$\left| \text{Log} \left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n} \right| \leq M_n \quad (|z| \leq R). \quad (9)$$

همانندی زیر برای $|z| \leq R < n$ برقرار است:

$$\text{Log} \left(1 - \frac{z}{n}\right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k = -\frac{z}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{n}\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{n}\right)^3 - \dots \quad (10)$$

با انتخاب $n \geq 2R$ بدست می آید:

$$\begin{aligned} \left| \text{Log} \left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n} \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{R}{n}\right)^k \\ &= \frac{1}{2} \frac{R^2/n^2}{1 - R/n} \leq \frac{R^2}{n^2}. \end{aligned}$$

با انتخاب $M_n = R^2/n^2$ در (۹) داریم:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \text{Log} \left(1 - \frac{z}{n}\right) + \frac{z}{n} \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{R^2}{n^2} < \infty \quad (N > 2R).$$

پس $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n)e^{z/n} = \prod_{n=1}^{N-1} (1 - z/n)e^{z/n} \prod_{n=N}^{\infty} (1 - z/n)e^{z/n}$ تابع تام است.

روش عمومی برای ساختن یک تابع تام با صفرهای از پیش معلوم در همانندی (۱۰) آمده است. به عنوان مثال فرض کنیم می خواهیم یک تابع تام بسازیم که در $z = \sqrt{n}$ صفر داشته باشد. چون که:

$$\text{Log} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}} \right) = -\frac{z}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right)^3 - \dots,$$

روش بالا نشان می دهد که :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}} \right) e^{(z/\sqrt{n}) + (1/2)(z^2/n)}$$

یک چنین تابعی است. عمومی ترین که اگر به ازاء یک عدد p ، $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^{p+1}$ همگرا باشد، آنگاه :

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{z/a_n + (1/2)(z/a_n)^2 + \dots + (1/p)(z/a_n)^p} \quad (11)$$

تابعی تام است که تنها صفرهایش در $z = a_n$ می باشد.

با اینکه ظاهراً (۱۱) جنبه عمومیت دارد ولی در مورد تمام دنباله ها کاربرد ندارد. به عنوان مثال، اگر بخواهیم یک تابع تام بسازیم که صفرهایش در نقاط $\log n$ ($n=2, 3, 4, \dots$) باشد، مانمی توانیم از (۱۱) استفاده کنیم زیرا که برای هر p ، $\sum_{n=2}^{\infty} [1/(\log n)^p]$ واگراست. ملاحظه می شود که ضریب های همگرا ساز در (۱۱) متضمن دنباله ای از چند جمله ای ها است، که همگی از درجه p هستند. در حالت عمومی، یک کران یکنواخت بر درجه چند جمله ای ها قرار نمی دهیم. و این به نوبه خود مارا قادر می کند که بدون توجه به همگرایی سری متضمن صفرها، تابع تام مناسب را بسازیم.

قضیه ۱۳-۶. (قضیه حاصل ضرب و ایرشتراس) به ازاء هر دنباله مختلط که نقطه حدی

متناهی ندارد. یک تابع تام موجود است که تنها صفرهایش در نقاط این دنباله باشد.

اثبات - فرض می کنیم که تابع تام $f(z)$ منظور ما، صفرهایش در $\{a_n\}$ بوده و بطوری مرتب باشند که $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \dots$ ما بدون از دست دادن عمومیت قضیه، فرض کرده ایم که هیچ یک از a_n ها صفر نیست، زیرا که اگر k تا از این نقاط صفر باشند، آنگاه $z^k f(z)$ واجد خاصیت مطلوب است.

به ازاء هر n قرار می دهیم

$$P_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^n.$$

می خواهیم نشان دهیم که تابع $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n) e^{P_n(z)}$ در شرایط قضیه صدق می کند. کافی است نشان دهیم که :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log} \left[\left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{P_n(z)} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\text{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + P_n(z) \right]$$

بر هر زیر مجموعه دلخواه و فشرده $|z| \leq R$ در صفحه همگرای یکنواخت است. برای $|a_n| \leq R < 2R \leq |a_n|$ داریم:

$$\begin{aligned} & \left| \text{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + P_n(z) \right| \\ &= \left| -\frac{1}{n+1} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+1} - \frac{1}{n+2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+2} - \frac{1}{n+3} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{n+3} \dots \right| \\ &\leq \left| \frac{z}{a_n} \right|^{n+1} \left(1 + \left| \frac{z}{a_n} \right| + \left| \frac{z}{a_n} \right|^2 + \dots \right) \\ &\leq 2 \left| \frac{z}{a_n} \right|^{n+1} \leq \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

پس اگر N بس بزرگ باشد تا $|a_N| \geq 2R$ ، نتیجه می شود که:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| \text{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) + P_n(z) \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty \quad (|z| \leq R),$$

و با توجه به قضیه ۱۳-۵ اثبات کامل است.

تذکر ۱- قضیه، مواردی را که صفرهای چندباره داشته باشیم نیز شامل می گردد. بدون شک ممکن است برای بعضی k ها، $a_k = a_{k+1}$ باشد.

تذکر ۲- تابع $f(z)$ با صفرهایش به هیچ ترتیب به گونه‌ی منحصر بفرد مشخص نمی گردد، مثلاً "دیدیم، $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n) e^{z/n}$ تابع تام است که در اعداد صحیح مثبت صفر می شود. و در اثبات قضیه نشان دادیم که:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{(z/n) + (1/2)(z/n)^2 + \dots + (1/n)(z/n)^n}$$

نیز یک چنین تابعی است. ما هم چنین می توانیم نشان دهیم که:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{(z/n) + (1/2)(z/n)^2}, \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n} \right) e^{z/n + (1/2)(z/n)^2 + (1/3)(z/n)^3},$$

و تعداد بی شماری توابع دیگر همگی دارای این خاصیت هستند که در اعداد صحیح مثبت صفر می گردند.

فرض کنیم دو تابع تام دارای صفرهای مشترک و با چند بارگیهای مشترک باشند.

چگونه این دو تابع را مقایسه می‌کنیم؟ چون که صفحه مختلط همبند ساده است جواب مسئله نتیجه قضیه ۷-۱۰ است و داریم:

قضیه ۱۳-۷. اگر $f_0(z)$ و $f_1(z)$ توابعی باشند که صفرهای آنها از نظر جایگاه و چندبارگی یکی باشد، در این صورت تابع تام $g(z)$ موجود است به طوری که

$$f_0(z) = e^{g(z)} f_1(z).$$

اثبات - پس از حذف ضرایب مشترک، دیده می‌شود که $f_0(z)/f_1(z)$ تابع تام بدون صفر است. و قضیه از قضیه ۷-۱۰ ثابت می‌گردد.

قضیه وایرستراس نشان می‌دهد که برای یک دنباله نقاط از پیش معلوم، می‌توان یک حاصلضرب نامتناهی ساخت که نمایشگر یک تابع تام باشد و صفرهایش در دنباله از پیش معلوم قرار داشته باشد. در مورد معکوس این مطلب چه می‌توان گفت؟ یک تابع تام که صفرهایش معلومند مفروض است، آیا می‌توان یک حاصلضرب نامتناهی ساخت که نمایشگر این تابع باشد؟ با توجه به قضیه ۱۳-۷، این کار، تا مرحله یک مضرب تابع نمایی، همیشه ممکن است. مشخص نمودن صریح این تابع نمایی معمولاً "کار دشواری است. مسئله را برای تابع $\sin \pi z$ حل می‌کنیم.

باید توجه داشت که $\sin \pi z$ در همه اعداد صحیح، صفر می‌شود. نشان دادیم که $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n) e^{z/n}$ یک تابع تام است و در اعداد صحیح مثبت صفر می‌شود. می‌توان به طریق مشابه نشان داد که $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/n) e^{-z/n}$ تابعی است تام، که در اعداد صحیح منفی صفر می‌گردد. پس تابع

$$\begin{aligned} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{z/n} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \\ = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{z/n - z/n} \\ = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

تابعی است تام که در تمام اعداد صحیح صفر ساده دارد. چون که حاصلضرب نامتناهی همگرای مطلق است، پس تجدید ترتیب در (۱۲) موجه است. پس $\sin \pi z$ را می‌توان به صورت:

$$\sin \pi z = e^{g(z)} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad (13)$$

نوشت که $g(z)$ تابعی است تام. فرض کنید، موقتاً، می‌توانستیم نشان دهیم

$g(z)$ ثابت است، در این صورت (۱۳) را می‌شد به صورت زیر نوشت:

$$\sin \pi z = cz \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

چون که $\lim_{z \rightarrow 0} (\sin \pi z)/z = \pi = \lim_{z \rightarrow 0} c \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/n^2) = c$ ، پس در این صورت می‌داشتیم:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \quad (14)$$

مابقی اثبات عبارت است از این که نشان دهیم فی الواقع $g(z)$ ثابت است، که در این صورت (۱۴) موجه می‌گردد. بدین منظور فرض کنیم z عدد صحیح نباشد، در این صورت با تشکیل دادن مشتق لگاریتمی در (۱۳) حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} \pi \cot \pi z &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{n^2(1 - z^2/n^2)} \\ &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \end{aligned} \quad (15)$$

که مشتق یابی جمله به جمله مجاز است زیرا که رشته $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(1 - z^2/n^2)$ بر مجموعه‌های فشرده‌یی که اعداد صحیح در آن نباشند، همگرای یکنواخت است. کافی است نشان دهیم $g(z) \equiv 0$. با در نظر گرفتن این مطلب، با روشی دیگر، عبارتی برای $\pi \cot \pi z$ محاسبه می‌کنیم که برای همه مقادیر غیر صحیح z مقبول باشد. همان‌طور که در بخش ۹-۲ دیدیم، تابع $\pi \cot \pi z$ در هر k صحیح قطب ساده دارد و مانده‌اش برابر است با:

$$\lim_{z \rightarrow k} \frac{(z-k)\pi \cos \pi z}{(-1)^k \sin \pi(z-k)} = 1.$$

پس برای $|z| > R_k = k + \frac{1}{2}$ ، z غیر صحیح، از قضیه مانده استفاده می‌شود که:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_k} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} d\zeta = \pi \cot \pi z + \sum_{n=-k}^k \frac{1}{n - z}. \quad (16)$$

ولی

$$\sum_{n=-k}^k \frac{1}{n - z} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n - z} - \frac{1}{n + z} \right) = -\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^k \frac{2z}{n^2 - z^2}. \quad (17)$$

با جایگزینی (۱۷) در (۱۶) حاصل می‌گردد.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_k} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} d\zeta = \pi \cot \pi z - \left(\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^k \frac{2z}{z^2 - n^2} \right). \quad (18)$$

اینک رفتار انتگرال در (۱۸) را به هنگامی که $k \rightarrow \infty$ بررسی می‌کنیم. قرار می‌دهیم که:

$$\int_{|z|=R_k} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_1} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} d\zeta + \int_{C_2} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} d\zeta,$$

C_1 و C_2 به ترتیب نیم دایره زیرین و زیرین $|z|=R_k$ می‌باشند. چون زمانی که ζ ، C_2 را در جهت مثبت می‌پیماید، $-\zeta$ ، C_1 را در جهت مثبت می‌پیماید، پس داریم:

$$\int_{C_2} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} d\zeta = \int_{C_1} \frac{\pi \cot \pi(-\zeta)}{-\zeta - z} d(-\zeta) = - \int_{C_1} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta + z} d\zeta. \quad (20)$$

با جایگزینی (۲۰) در (۱۹)، در می‌یابیم که:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=R_k} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{C_1} \pi \cot \pi \zeta \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta + z} \right) d\zeta \\ &= 2z \int_{C_1} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta^2 - z^2} d\zeta. \end{aligned}$$

ما سپس نشان می‌دهیم که $\cot \pi z$ بر هر زیر مجموعه صفحه که قرصهایی به شکل $|z-k| < \frac{1}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، صحیح، در آن نباشد، کراندار است. چون که $\cot \pi z$ دارای دوره تناوب ۱ است، کافی است که ناحیه $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{1}{2}$ منهای قرص $|z| < \frac{1}{2}$ را در نظر بگیریم. ملاحظه می‌شود که $\cot \pi z = i(e^{2\pi iz} + 1)/(e^{2\pi iz} - 1)$ هنگامی که $\operatorname{Im} z$ در نیم صفحه زیرین به ∞ میل کند، به $-i$ یکنواخت میل می‌کند و چنانچه $\operatorname{Im} z$ در نیم صفحه زیرین به ∞ میل کند، به i یکنواخت میل می‌کند. پس به موجب قضیه ماکزیم کالبد، عدد حقیقی M موجود است که:

$$|\cot \pi z| \leq M \quad (21)$$

همه جا در این ناحیه و نتیجتاً در تمام صفحه منهای تمام قرصهای به شکل $|z-k| < \frac{1}{2}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، صحیح. پس برای هر k ،

$$\begin{aligned} \left| \int_{|z|=R_k} \frac{\pi \cot \pi \zeta}{\zeta - z} d\zeta \right| &\leq 2\pi |z| M \int_{C_1} \frac{1}{|\zeta^2 - z^2|} |d\zeta| \\ &\leq \frac{2\pi^2 |z| M R_k}{R_k^2 - |z|^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

با $k \rightarrow \infty$ در (۲۲) می‌بینیم که انتگرال به صفر میل می‌کند. با توجه به (۱۰) نتیجه می‌گیریم که همانندی:

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (23)$$

برای تمام مقادیر غیر صحیح z برقرار است. مقایسه (۲۳) با (۱۵) نشان می‌دهد که

$g'(z) \equiv 0$. ولی این بدان معنی است که $g(z)$ ثابت است و (۱۴) اثبات شده است.

هر وقت یک بسط حاصلضرب نامتناهی برای یک تابع تام یافت می شود ، مقایسه آن با یک بسط رشته توانی مورد توجه خواهد بود . و این کار به کشف وابستگی های جالبی می انجامد . برای تشریح مطلب ، داریم :

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right) = \pi z - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \frac{(\pi z)^5}{5!} - \dots$$

جمله z^3 در حاصلضرب نامتناهی عبارت است از :

$$\pi z (-z^2) \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = -\pi z^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

با توجه به منحصربه فرد بودن بسط ماکلورن ، می بایست داشته باشیم :

$$-\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^3}{3!}.$$

و از این همانندی $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2) = \pi^2/6$ بدست می آید .

همان طور که دیده ایم ، تابع

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right) e^{-z/n} \quad (24)$$

تابعی است که در اعداد صحیح منفی صفر می شود . تابع $f(z-1)$ دارای همان صفرها است به علاوه این که در مبدا نیز صفر است ، پس :

$$f(z-1) = e^{g(z)} z f(z), \quad (25)$$

که $g(z)$ یک تابع تام است . با تشکیل مشتق لگاریتمی در (۲۵) بدست می آید .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n} \right) = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right). \quad (26)$$

حاصلجمع در طرف چپ (۲۶) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{z} - 1 \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right) + 1 \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+z} - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

با مقایسه این با طرف راست (۲۶)، بدست می آید $g'(z) \equiv 0$. پس $g(z) = \gamma$ ، ثابت. برای مشخص نمودن γ ، در (۲۵) $z=1$ قرار می دهیم که نتیجه می شود:

$$1 = f(0) = e^{\gamma} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/n}.$$

بنابراین با بکار بردن لگاریتم طبیعی، بدست می آید

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} - \text{Log} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \text{Log}(N+1) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

عدد ثابت γ در (۲۷) به ثابت اولر^۱ معروف است؛ مقدار تقریبی آن ۰/۵۷۷/۵ است. این نکته که این حد موجود است، یک روشی "داهیهانه" به دست می دهد که ثابت کنیم $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ واگراست.

تابع

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{\gamma z} z f(z)}, \quad (28)$$

که $f(z)$ در (۲۴) تعریف شده است به تابع گاما^۲ معروف است. این تابع در تمام نقاط صفحه مگر در اعداد صحیح منفی و صفر نمایش یک تابع تحلیلی است و در نقاط یادشده قطب ساده دارد. چون که در (۲۵)، $g(z) = \gamma$ ، داریم $f(z+1) = e^{\gamma} f(z)$ و با این قادریم که عمده ترین خاصیت تابع γ را مشخص کنیم؛ یعنی که:

$$\Gamma(z+1) = \frac{1}{e^{\gamma(z+1)}(z+1)f(z+1)} = \frac{1}{e^{\gamma z} f(z)} = z \Gamma(z). \quad (29)$$

اگر $z=n$ ، عدد صحیح، (۲۹) نشان می دهد که:

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1) \Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1) \cdots 2 \Gamma(1).$$

ولی $\Gamma(1) = 1/e^{\gamma} f(1) = 1/e^{\gamma} e^{-\gamma} = 1$ و بنابراین $\Gamma(n+1) = n!$

یک ارتباط جالب میان تابع گاما و تابع سینوس موجود است. با بکار بردن روابط

$$\sin \pi z = \pi z f(z) f(-z) \quad \text{و} \quad f(z) = 1/ze^{\gamma z} \Gamma(z) \quad \text{در (۲۸)، حاصل می شود}$$

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{e^{\gamma z} \Gamma(z) (-z) e^{-\gamma z} \Gamma(-z)} = \frac{\pi}{-z \Gamma(-z) \Gamma(z)}.$$

چون که $-z \Gamma(-z) = \Gamma(1-z)$ ، نتیجه می شود، برای همه مقادیر غیردرست

داریم:

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \Gamma(z) \Gamma(1-z)$$

در حالت خاص در مورد $z = \frac{1}{2}$ ، به دست می‌آید، $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

تذکر ۱- باید توجه داشت، تابع زیر یک تابع نام است:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{\gamma z} z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$$

تذکر ۲- در آنالیز حقیقی، تابع

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$$

وسیعاً "مطالعه شده است. کاملاً" جالب خواهد بود که بدانیم، (۲۸) را می‌توان برای مقادیر حقیقی مثبت z ، در این شکل انتگرالی نیز بیان کرد. در فصل بعد، مجدداً "تابع گاما را به صورت انتگرال مختلط تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این دو تعریف در همه نقاطی که انتگرال همگرا باشد، نمایش یک تابع هستند.

تذکر ۳- ما هم چنین می‌توانیم $\Gamma(\frac{1}{2})$ را با تعریف انتگرالی محاسبه کنیم. داریم:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt \quad \text{با جایگزینی } t = y^2 \text{ می‌رسیم به}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

این انتگرال اخیر در بخش ۹-۳ مجاسه گردید.

پرسش‌ها

۱- آیا می‌توان یک تابع نام ساخت که در یک دنباله از نقاط از پیش معلوم مقدارش

" a " باشد؟

۲- اگر $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ واگرا باشد. آیا $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n)$ می‌تواند جایی تحلیلی

باشد؟

۳- منظور از ضریب "همگراساز" چیست؟

۴- آیا برای قضیه و ایرشتراس مشابهی برای توابع تحلیلی در یک میدان دلخواه

موجود است؟

- ۵- در اثبات قضیه وایر شتراس، کدام دیگر انتخابی برای $\{P_n(z)\}$ مفید می بود؟
- ۶- اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آیا $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n z)$ نام است؟
- ۷- چه ارتباطی میان یک بسط به صورت حاصلضرب نامتناهی و یک بسط به صورت رشته نامتناهی برای یک تابع نام موجود است؟
- ۸- با دانستن بسط $\sin \pi z$ به صورت حاصلضرب نامتناهی، کدام دیگر بسطهای حاصلضرب نامتناهی را می توان مشخص کرد؟

تمرینها

- ۱- یک تابع نام بسازید که تنها صفرهای آن در $z = \log n$ ($n = 2, 3, 4, \dots$) باشد.
- ۲- تابع نام $f(z)$ را که واجد دو خاصیت زیر باشد بسازید.
- (i) $f(z)$ در $z = 1, 2, 3, \dots$ صفر باشد و نه در جای دیگر
- (ii) صفر $f(z)$ در $z = n$ ، دارای چندبارگی n باشد.
- ۳- (الف) مقدار $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n^2)$ را بیابید (راهنمایی: بسط حاصلضربی $\sin \pi z$ را بکار ببرید).
- (ب) نشان دهید: $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - 1/n^4) = (e^{\pi} - e^{-\pi})/8\pi$
- ۴- (الف) نشان دهید. صفرهای ساده $\sin iz$ و $e^{2z} - 1$ در نقاط مشترک است.
- (ب) قرار دهید، $(e^{2z} - 1)/\sin iz = e^{g(z)}$ و $g(z)$ را محاسبه کنید.
- ۵- با مقایسه جمله متضمن z^5 در بسطهای رشته ای و حاصلضربی $\sin \pi z$ ، نشان دهید $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^4) = \pi^4/90$.
- ۶- نشان دهید که همگرایی (۲۳) بر همه زیرمجموعه های فشرده ای که شامل اعداد صحیح نیست، یکنواخت است.
- ۷- نشان دهید $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n) e^{z/n + (5z^2/n^2)}$ نمایش یک تابع نام است.
- ۸- فرض کنید $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \rightarrow \infty$ نشان دهید،

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_n(z)}$$

نمایش یک تابع نام است که:

$$Q_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{[\log n]} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{[\log n]}$$

۹- ثابت کنید:

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2} \right].$$

(راهنمایی: از همانند $\cos z = (\sin 2z)/(2 \sin z)$ استفاده کنید).

۱۰- اگر a عدد صحیح نباشد، نشان دهید:

$$f(z) = \prod_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{a+n} \right) e^{-z/n}$$

تابع تام است و

$$f(z) = \frac{a \sin(z+a)}{(z+a) \sin \pi a}.$$

۱۱- مقدار $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n^2 + 1/n^4)$ را محاسبه کنید.

۱۲- با استفاده از بسط حاصلضرب $\sin \pi z$ نشان دهید

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \quad (\text{الف})$$

$$\sqrt{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots \quad (\text{ب})$$

(راهنمایی: ابتدا $z = \frac{1}{2}$ و سپس $z = \frac{1}{4}$ قرار دهید و سپس عبارت دومی را به

اولی تقسیم کنید).

$$\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} \cdots \quad (\text{پ})$$

(راهنمایی: همانند بالا ابتدا $z = \frac{1}{3}$ و سپس $z = \frac{1}{6}$ قرار دهید).

۱۳- نشان دهید که ثابت اویلر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \text{Log } n \right).$$

۱۴- نشان دهید:

$$\frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2},$$

که $\Gamma(z)$ با (۲۸) تعریف می شود

۱۵- نشان دهید: $\Gamma(z) \sin \pi z$ تابعی است تام

۱۶- تابع $e^z - 1$ را به صورت حاصلضرب نامتناهی بسط دهید. (راهنمایی: از

همانندی $e^z - 1 = 2ie^{z/2} \sin(z/2i)$ استفاده کنید.

۳-۱۳- قضیه میتاگ - لفلر^۱

تابعی که در میدان \mathcal{D} هیچگونه تکیه مگر قطب نداشته باشد برخه ریخت نام دارد. اگر بر میدان مشخصی صراحت نشده باشد، فرض بر این است که، تابع در تمام صفحه برخه ریخت است. از تعریف نتیجه می شود که اگر تابع $f(z)$ در صفحه برخه ریخت باشد، آنگاه در هر ناحیه کراندار نمی تواند به تعداد نامتناهی قطب داشته باشد. زیرا اگر چنین باشد، دنباله قطب ها نقطه حدی p خواهند داشت. چون که $f(z)$ نمی تواند در هیچ همسایگی p تحلیلی باشد، نقطه p تکیه می خواهد بود که قطب نیست. معکوس یک تابع نام. برخه ریخت است و قطب های آن همان صفرهای تابع نام هستند. بطور عمومی تر، توابع برخه ریخت دارای سرشتی به شرح زیر است:

قضیه ۳-۸. تابعی برخه ریخت است اگر و تنها اگر آن را بتوان به صورت خارج قسمت دو تابع نام نوشت.

اثبات - ابتداء فرض می کنیم، $f(z) = g(z)/h(z)$ که $g(z)$ و $h(z)$ دو تابع نام بدون صفر مشترک باشند (صفرهای مشترک از صورت و مخرج حذف می شوند). در این صورت تنها تکیه های $f(z)$ قطب ها هستند و این قطب ها همان صفرهای $h(z)$ است. پس $f(z)$ برخه ریخت است.

برعکس فرض کنیم $f(z)$ برخه ریخت است. به موجب قضیه وایرشراس تابع $h(z)$ موجود است که صفرهایش از نظر جایگاه و از نظر چندبارگی بر قطب های $f(z)$ منطبق باشد پس $g(z) = f(z)h(z)$ تابعی است نام زیرا که قطب های $f(z)$ با صفرهای $h(z)$ حذف می گردند. پس $f(z) = g(z)/h(z)$ خارج قسمت دو تابع نام است و اثبات تمام است.

در این بخش می خواهیم قضیه یی برای توابع برخه ریخت ثابت کنیم که مشابه قضیه وایرشراس برای توابع نام است. اگر $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ یک مجموعه متناهی مفروض باشد، تابع (برخه ریخت) کسری

$$\frac{1}{z_1 - b} + \frac{1}{z - b_2} + \dots + \frac{1}{z - b_n}$$

در هر یک از نقاط این مجموعه قطب ساده دارد. اگر مجموعه مفروض نامتناهی باشد، مسئله ساختن یک تابع برخه‌ریخت، که دارای قطب در هر یک از نقاط این مجموعه باشد، کاملاً دشوار است. زیرا که در این حالت مسئله همگرایی مطرح است.

تابع $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(z-n^2)$ را که همه جا مگر در مجذور اعداد صحیح، معین و همگراست در نظر می‌گیریم. اگر یک همسایگی نقطه مفروضی را در نظر بگیریم که این همسایگی شامل مجذور هیچ عدد صحیح نباشد، آنگاه برای هر z در این همسایگی و برای n بس بزرگ داریم:

$$\frac{1}{|z-n^2|} \leq \frac{2}{n^2}$$

پس به موجب قضیه ۶-۹ همگرایی رشته به $f(z)$ در یک همسایگی بر چنین نقطه‌یی یکنواخت است. این نشان می‌دهد که $f(z)$ در تمام نقاط مگر در $z=n^2$ ($n=1, 2, \dots$) تحلیلی است و بنابراین $f(z)$ تابع برخه‌ریختی است که در $z=n^2$ قطب ساده دارد. از سوی دیگر فرض کنیم می‌خواهیم یک تابع برخه‌ریخت بسازیم که در اعداد صحیح مثبت قطب ساده داشته باشد، همانند مورد قضیه وایرشتراس یک ضریب همگراساز مورد نیاز است. تابع

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(z-n)}$$

واجد خواص مطلوب است. باید توجه داشت:

$$\left| \frac{z}{n(z-n)} \right| \leq \frac{2|z|}{n^2}, \quad \text{برای } n > \frac{|z|}{2}$$

و بنابراین برای همه z ها مگر اعداد صحیح مثبت، رشته همگرای مطلق است. به یک مفهوم، قضیه‌یی که در مورد توابع برخه‌ریخت ثابت شود، از قضیه متناظرش در مورد توابع تام، کاملاً عمومی‌تر است. زیرا، تابع برخه‌ریختی ساخته‌ایم که نه تنها قطب‌هایش از پیش معلوم بود، بلکه با قسمت‌های اصلی از پیش معلوم، ساخته شده‌است. گیریم $\{b_n\}$ دنباله‌یی باشد که به ∞ میل می‌کند. به ازاء هر n ، یک تابع کسری به شکل زیر متناظر می‌کنیم:

$$P_n \left(\frac{1}{z-b_n} \right) = \frac{a_1^{(n)}}{z-b_n} + \frac{a_2^{(n)}}{(z-b_n)^2} + \dots + \frac{a_{k_n}^{(n)}}{(z-b_n)^{k_n}}, \quad (30)$$

که $a_1^{(n)}$ ثابت‌های مختلط، $a_{k_n}^{(n)} \neq 0$ ، باید توجه داشت، k_n مرتبه قطب است و ممکن است با n تغییر کند. هدف ما ساختن یک تابع برخه‌ریخت است که قسمت اصلی آن

به ازاء هر n برابر با $P_n(1/(z-b_n))$ باشد. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(1/(z-b_n))$ همگرا نباشد، نشان خواهیم داد، به ازاء هر n ضریب همگراساز عبارت است از یک چند جمله‌یی که این چند جمله‌یی حاصل جمع جزیی در بسط ماکلورن برای $P_n(1/(z-b_n))$ می‌باشد.

قبل از شروع و اثبات قضیه، آخرین تذکر را در اینجا مطرح می‌کنیم: فرض کنیم دو تابع برخه ریخت $f_0(z)$ و $f_1(z)$ یک قطبهای مشترک و با قسمت‌های اصلی برابر باشند. در این صورت $f_0(z) - f_1(z)$ قطب ندارد و در نتیجه می‌بایست تابع تام باشد. پس دو تابع برخه ریخت با قسمت‌های اصلی برابر، حداکثر در یک تابع تام (از نظر جمع جزیی) باهم اختلاف دارند. این تابع تام در مبحث توابع برخه ریخت، همتای تابع نمایی (ضربی) است که در فرع قضیه ۱۳-۷ مذکور افتاد.

قضیه ۱۳-۹. (قضیه میتاگ-لفله) اگر $\{b_n\}$ دنباله‌یی باشد که به ∞ میل کند و به هر نقطه این دنباله قسمت اصلی $P_n(1/(z-b_n))$ به شکل (۳۰) متناظر شده باشد، آنگاه تابع برخه ریختی موجود است که قطب‌های آن در $\{b_n\}$ با قسمت اصلی $P_n(1/(z-b_n))$ است و در جاهای دیگر تحلیلی است.

اثبات - بدون از دست دادن عمومیت قضیه، فرض می‌کنیم که هیچ یک از b_n ها صفر نیست، زیرا با اضافه کردن یک تابع کسری در مبداء قطب ایجاد می‌شود. هم چنین می‌توان فرض کرد که دنباله به گونه‌یی مرتب شده است که:

$$0 < |b_1| \leq |b_2| \leq |b_3| \leq \dots$$

به ازاء هر n ، تابع کسری $P_n(1/(z-b_n))$ در قرص $|z| < |b_n|$ تحلیلی است و بسط ماکلورن آن در $|z| < |b_n|$ همگرای مطلق و در $|z| \leq |b_n|/2$ همگرای یکنواخت است. پس چند جمله‌یی $Q_n(z)$ را می‌توان یافت که حاصل جمع جزیی رشته ماکلورن $P_n(1/(z-b_n))$ باشد و درجه‌اش آنقدر بزرگ باشد که:

$$(۳۱) \quad \left| P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - Q_n(z) \right| < \frac{1}{2^n} \quad \text{برای} \quad |z| \leq \frac{|b_n|}{2}$$

نشان می‌دهیم که تابع:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - Q_n(z) \right]$$

در خواسته‌های قضیه صدق می‌کند. کافی است نشان دهیم که رشته منسوب به $f(z)$ بر زیر مجموعه‌های فشرده و دلخواه $|z| \leq R$ از صفحه که شامل نقاط $|b_n| \leq R$ نیستند، همگرای یکنواخت است. با انتخاب N به طوری که $|b_N| \geq 2R$ ، از (۳۱) مشاهده

می شود که:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| P_n \left(\frac{1}{z - b_n} \right) - Q_n(z) \right| < \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

و اینک همگرایی از قضیه ۶-۹ نتیجه می گردد. قابل توجه است که:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left[P_n \left(\frac{1}{z - b_n} \right) - Q_n(z) \right]$$

در $|z| \leq R$ تحلیلی است زیرا که قطب های $P_n(1/(z - b_n))$ بیرون $|z| = R$ قرار دارند. چون که R دلخواه است، $f(z)$ در صفحه برخه ریخت است و اثبات تمام است.

تذکر ۱- به عوض انتخاب چند جمله ای های همگراساز $\{Q_n(z)\}$ ، می توانستیم هر دنباله دیگری از چند جمله ای های $\{R_n(z)\}$ ، که برای آنها $\sum_{n=1}^{\infty} [P_n(z) - R_n(z)]$ بر زیر مجموعه های فشرده که شامل قطب نباشد همگرای یکنواخت باشند را، انتخاب کنیم.

تذکر ۲- در حالت عمومی، درجه چند جمله ای های همگراساز $\{R_n(z)\}$ با n تغییر می کند. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(1/(z - b_n))$ همگرا باشد، می توانیم $R_n(z) \equiv 0$ انتخاب کنیم. اگر $P_n(1/(z - b_n)) = 1/(z - n)$ ، نشان دادیم که می توان $R_n(z) = 1/n$ یعنی دنباله ای از چند جمله ای های ثابت، انتخاب کرد. خواننده می تواند تحقیق کند که اگر $P_n(1/(z - b_n)) = 1/(z - \sqrt{n})$ ، می توان $R_n(z) = 1/\sqrt{n} + z/n$ انتخاب کرد. ملاحظه می شود که تابع

$$\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{z + n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

یک تابع برخه ریخت است، که در اعداد صحیح قطب ساده با باقیمانده ۱ می باشد. پس:

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} + g(z),$$

عمومی ترین چنین تابع برخه ریخت است، که در آن $g(z)$ یک تابع تام است. در حالت خاص که $g(z) \equiv 0$ مقایسه (۳۲) و (۲۳) نشان می دهد که $f(z) = \pi \cot \pi z$

در سراسر این بخش شباهاتی میان قضیه وایرستراس و قضیه میتاگ - لفل دیده ایم. به عنوان کاربردی از قضیه میتاگ - لفل، تعمیمی برای قضیه وایرستراس به اثبات می رسانیم.

قضیه ۱۳-۱۰. گیریم $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مختلط متمایز باشد که به ∞ میل کند. در این صورت برای هر دنباله $\{c_n\}$ از اعداد مختلط، تابع تام $f(z)$ موجود است که برای هر n ، $f(a_n) = c_n$.

اثبات - به موجب قضیه وایرشراس، تابع تام $g(z)$ را می‌توان ساخت که در $z = a_n$ صفرهای ساده دارد. در این صورت $g(a_n) = 0$ و برای هر n ، $g'(a_n) \neq 0$ به موجب قضیه میتاگ - لفله، می‌توان یک تابع برخه ریخت $h(z)$ ساخت که در $z = a_n$ قطب ساده با باقیمانده $c_n/g'(a_n)(z - a_n)$ داشته باشد (اگر $c_n = 0$ ، $h(z)$ را طوری می‌سازیم که در $z = a_n$ تحلیلی باشد).

چون که قطب‌های ساده $h(z)$ ، صفرهای ساده $g(z)$ نیز می‌باشند، پس تکنیک‌های $f(z) = g(z)h(z)$ — برداشتنی است. یعنی که $f(z)$ تابع تام است. برای هر n ، می‌توان $g(z)$ را حول $z = a_n$ به رشته تیلر بسط داد. در این صورت

$$g(z) = g'(a_n)(z - a_n) + \frac{g''(a_n)}{2}(z - a_n)^2 \dots \quad (33)$$

هم چنین می‌توان نوشت:

$$h(z) = \frac{c_n}{g'(a_n)(z - a_n)} + h_1(z), \quad (34)$$

که $h_1(z)$ در یک همسایگی $z = a_n$ تحلیلی است. با ترکیب (۳۳) و (۳۴) در می‌یابیم که:

$$f(a_n) = \lim_{z \rightarrow a_n} f(z) = \lim_{z \rightarrow a_n} g(z)h(z) = c_n.$$

و اثبات تمام است.

تذکر - اگر $c_n \equiv 0$ ، قضیه ۱۳-۱۰ به قضیه وایرشراس تحویل می‌گردد.

پرسش‌ها

- ۱- چه ارتباطی میان قضیه وایرشراس و قضیه میتاگ - لفله موجود است؟ آیا می‌توان یکی را از دیگری استنتاج نمود؟
- ۲- در مورد حاصلجمع دو تابع برخه ریخت چه می‌توان گفت؟ در مورد حاصلضرب چی؟
- ۳- چگونه ضرایب همگرا ساز قضیه وایرشراس و قضیه میتاگ - لفله قابل قیاس‌اند؟

۴- چرا در این فصل مشتق لگاریتمی چنین اهمیت دارد؟

۵- در اثبات قضیه میتاگ - لفل، چه لزومی داشت که فرض شود هیچ یک از b_n ها

صفر نیست.

۶- آیا یک تابع تام منحصر بفرد موجود است که در شرایط قضیه ۱۳-۱۰ صدق کند؟

۷- اگر قسمت اصلی مجاز باشد که تکینه‌های اساسی داشته باشد، آیا باز هم قضیه

میتاگ - لفل برقرار است؟

تمرینها

۱- تابع برخه ریخت $f(z)$ را که واجد دو خاصیت زیر باشد بسازید:

(i) $f(z)$ در $z = 1, 2, 3, \dots$ و نه در جای دیگری قطب داشته

باشد.

(ii) قطب در $z = n$ مرتبه n باشد.

۲- نشان دهید که $(\sin z)/(e^{2iz} + 1)$ و $1/(2i \cos z)$ در یک تابع تام اختلاف

دارند و آن را مشخص کنید.

۳- نشان دهید که $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/a_n)$ تام است اگر و تنها اگر $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(z - a_n)$

برخه ریخت باشد.

۴- گیریم $p (\geq 1)$ عدد صحیح باشد. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} 1/|a_n|^{p+1}$ همگرا باشد،

نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \frac{z^2}{a_n^3} + \dots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p} \right)$$

برخه ریخت است.

۵- الف) فرض کنید $0 < |b_2| \leq |b_3| \leq \dots$ و $|b_n| \rightarrow \infty$. نشان دهید که

دنباله مثبت $\{a_n\}$ موجود است بطوری که $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/(z - b_n)$ در $z = b_n$

تحلیلی باشد.

ب) بسط $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m \dots$ را در نظر بگیرید و c_m را

برحسب کمیت‌های a_n و b_n محاسبه کنید.

۶- فرض کنید $g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/b_n)$ تام است. با نمادهای تمرین قبل،

نشان دهید $h(z) = f(z)g(z)$ تام است و $h(z_n)$ را برحسب α_n و $g'(z_n)$ محاسبه

کنید.

۷- فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n|/n^2)$ همگراست. نشان دهید:

(الف) $f(z) = 2z \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n / (z^2 - n^2)$ برخه ریخت است.

(ب) $g(z) = (\sin \pi z / \pi) f(z)$ تام است و $g(n) = \alpha_n$.

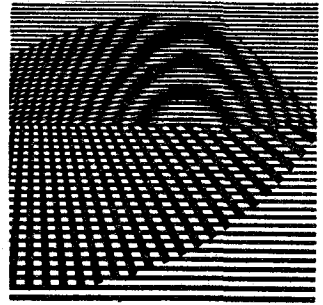
۸- قضیه وایرشتراس را از قضیه متیاگ - لفلر استنتاج نمائید.

۹- همانندی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 + 4\pi^2 n^2}.$$

(راهنمایی: از طرفین همانندی ثابت شده در تمرین ۱۶ از بخش قبل مشتق لگاریتمی

استخراج کنید).



۱۴. ادامهٔ تحلیلی

قبلاً دیدیم که یک تابع تحلیلی توسط رفتارش در یک دنباله نقاط، که نقطه حدی داشته باشد مشخص می‌گردد. ولی هنوز سؤال زیر بررسی نشده است: اگر $f(z)$ در میدان \mathcal{D}_1 تحلیلی باشد، آیا یک تابع تحلیلی در یک میدان دیگر \mathcal{D}_2 موجود است که در $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ با $f(z)$ برابر باشد؟ این مسئله را که چگونه می‌توان یک تابع تحلیلی را به طور کامل، مجدداً تعریف کرد تا حوزه تحلیلی بودن آن گسترش یابد، در ادامه تحلیلی بررسی می‌گردد. در این فرآیند با توابعی مواجه می‌شویم که برای آنها چنین گسترش موجود نیست. در پایان دانستیهای خود را در مورد ادامه تحلیلی در دو مسئله، از عمده‌ترین مسائل آنالیز، تابع گاما و تابع ریمن - زتا بکار می‌بندیم.

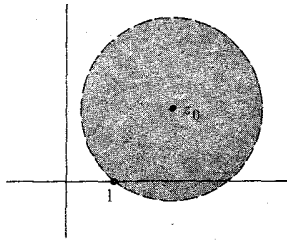
۱۴-۱- مفاهیم بنیادی

تابع $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ در قرص $|z| < 1$ ، تحلیلی است و در آنجا نمایشگر تابع $f(z) = 1/(1-z)$ می‌باشد. ولی $f(z)$ در تمام نقاط صفحه مگر در $z=1$ تحلیلی است. برای هر نقطه $z = z_0 \neq 1$ ، نمایش رشته تیلر

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad (1)$$

برای وقتی که $|z - z_0| < |1 - z_0|$ ، برقرار است. (ر.ک. شکل ۱) قرصی که در آن (۱) همگراست، ممکن است با قرص $|z| < 1$ نقاط مشترک داشته و یا نداشته باشد. به عنوان مثال:

شکل ۱



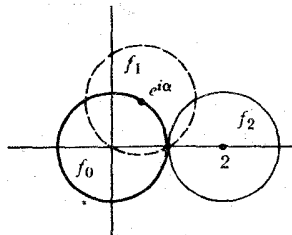
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(e^{i\alpha})}{n!} (z - e^{i\alpha})^n \quad (0 < \alpha < 2\pi)$$

در قرصی همگراست که با قرص $|z| < 1$ ناحیه مشترک دارد؛ ولی در مورد قرصی که در آن:

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!} (z - 2)^n$$

همگراست، چنین نیست. در شکل ۲، میدانهای که در آن $f_0(z)$ ، $f_1(z)$ و $f_2(z)$ همگراند نشان داده شده است. در میدانهای همگرایی مربوطه، همگی نمایشگر تابع $f(z) = 1/(1-z)$ هستند. به علاوه برای $\operatorname{Re} z < 1$ ، انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-t(1-z)} dt$ همگراست و در این نیم صفحه نمایشگر $f(z) = 1/(1-z)$ می باشد. بنابراین می بینیم، توابعی که ظاهراً "وابستگی به یکدیگر ندارند، در عمل ممکن است در میدانهای متفاوت نمایشگر یک تابع باشند.

شکل ۲



فرض کنیم بدانیم $f_0(z)$ در میدان \mathcal{D}_0 تحلیلی است می خواهیم بزرگترین میدان $\mathcal{D} \supset \mathcal{D}_0$ را بیابیم که، $f(z)$ ی بر \mathcal{D} تحلیلی بوده و به علاوه در \mathcal{D}_0 ، $f(z) \equiv f_0(z)$ باشد. همان طور که هم اینک دیدیم صفحه منهای $z=1$ ، بزرگترین میدان شامل $|z| < 1$ است که بر آن یک تابع تحلیلی می توان تعریف کرد که با $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ در $|z| < 1$ برابر باشد.

تابع $f(z)$ ، به همراه \mathcal{D} که در آن تابع تحلیلی است، به عنصر تابع موسوم است و با (f, \mathcal{D}) نمایانده می‌شود. دو عنصر تابع (f_1, \mathcal{D}_1) و (f_2, \mathcal{D}_2) را ادامه‌های تحلیلی مستقیم یکدیگر گوئیم اگر چنانچه $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$ و در میدان $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ ، $f_1 = f_2$ ، هر وقت یک ادامه تحلیلی مستقیم از (f_1, \mathcal{D}_1) در میدان \mathcal{D}_2 موجود باشد، آن ادامه تحلیلی به طور منحصر بفرد می‌بایست مشخص باشد، زیرا هر دو ادامه تحلیلی می‌بایست بر $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ مساوی گردند و به موجب قضیه همانی (قضیه ۸-۱۵) نتیجتاً در تمام میدان \mathcal{D}_2 مساوی خواهند بود.

خاصیت ادامه تحلیلی مستقیم بودن، سرایتی نیست. بدین معنی که اگر (f_1, \mathcal{D}_1) و (f_2, \mathcal{D}_2) ادامه‌های تحلیلی مستقیم یکدیگر (f_2, \mathcal{D}_2) و (f_3, \mathcal{D}_3) هم ادامه‌های تحلیلی مستقیم یکدیگر باشند، نمی‌توان نتیجه گرفت، (f_1, \mathcal{D}_1) و (f_3, \mathcal{D}_3) ادامه‌های تحلیلی مستقیم یکدیگر هستند. مثال ساده‌ی در این مورد، این که \mathcal{D}_1 و \mathcal{D}_3 نقطه مشترک نداشته باشند. با این حال میان $f_1(z)$ و $f_3(z)$ ارتباطی موجود است که شایستگی بررسی دارد.

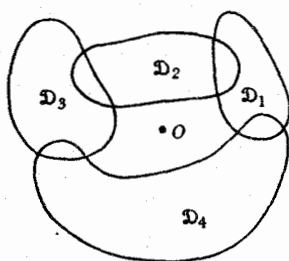
فرض کنیم $\{(f_1, \mathcal{D}_1), (f_2, \mathcal{D}_2), \dots, (f_n, \mathcal{D}_n)\}$ یک مجموعه متناهی از عنصرهای تابع باشد با این خاصیت که (f_k, \mathcal{D}_k) و $(f_{k+1}, \mathcal{D}_{k+1})$ ، برای $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ، ادامه تحلیلی مستقیم یکدیگرند. در این صورت این مجموعه عنصرهای تابع را ادامه تحلیلی یکدیگر نامند. در این صورت مجموعه عنصرهای تابع را یک زنجیر نامند. باید توجه داشت که (f_i, \mathcal{D}_i) و (f_j, \mathcal{D}_j) ادامه تحلیلی یکدیگرند اگر و تنها اگر آنها را بتوان با تعداد متناهی ادامه‌های تحلیلی مستقیم، مربوط کرد. گوئیم عنصر تابع (f, \mathcal{D}) را می‌توان تحلیلی وار بر یک خم ادامه داد، چنانچه زنجیری شامل (f, \mathcal{D}) موجود باشد بطوری که هر نقطه این خم در میدان یک عنصر تابع از این زنجیر باشد.

اگر زنجیر $\{(f_1, \mathcal{D}_1), (f_2, \mathcal{D}_2), \dots, (f_n, \mathcal{D}_n)\}$ مفروض باشد، آیا می‌توان تابع $f(z)$ تعریف کرد که در میدان $\{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n\}$ تحلیلی باشد؟ بدون شک وقتی $n=2$ باشد، این کار عملی است. تابع

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in \mathcal{D}_1, \\ f_2(z), & z \in \mathcal{D}_2, \end{cases}$$

در $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ تحلیلی است. اگر $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \dots \cap \mathcal{D}_n \neq \emptyset$ ، با استقراء می‌توان نشان داد که f ، که با $f(z) = f_i(z)$ برای $z \in \mathcal{D}_i$ تعریف می‌شود، تحلیلی است. با این حال در حالت کلی این اثبات مقبول نیست. چهار میدان شکل ۳

شکل ۳



را در نظر می‌گیریم. برای یک شاخه ثابت $\log z$ ، قرار می‌دهیم $f_1(z) = \log z$ در \mathcal{D}_1 . عنصر تابع (f_1, \mathcal{D}_1) مشخص‌کننده یک ادامه تحلیلی مستقیم و منحصر بفرد (f_2, \mathcal{D}_2) است، و این هم مشخص‌کننده (f_3, \mathcal{D}_3) و این هم مشخص‌کننده (f_4, \mathcal{D}_4) است. پس ما زنجیره $\{(f_1, \mathcal{D}_1), (f_2, \mathcal{D}_2), (f_3, \mathcal{D}_3), (f_4, \mathcal{D}_4)\}$ را خواهیم داشت. ولی در میدان $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_4$ تساوی $f_1(z) = f_4(z)$ درست نیست. اختلاف این دو تابع در این نکته نهفته است که شناسه تابع چندمقداری لگاریتم بعد از یک دوران کامل حول مبدا به مقدار 2π افزایش یافته است. هم چنین باید توجه داشت که می‌توان (f_1, \mathcal{D}_1) را در میدان \mathcal{D}_3 با زنجیره‌های دیگری ادامه داد و به توابع دیگری رسید. در مورد زنجیره‌های $\{(f_1, \mathcal{D}_1), (f_2, \mathcal{D}_2), (f_3, \mathcal{D}_3)\}$ و $\{(f_1, \mathcal{D}_1), (g_1, \mathcal{D}_4), (g_2, \mathcal{D}_3)\}$ ، مقادیر f_3 و g_2 به مقدار $2\pi i$ با هم اختلاف دارند.

اختلاف میان توابع تک - مقداری و چند مقداری را از دیدگاه دیگری می‌توان بررسی کرد. فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی است. نقطه z_1 را نقطه منظم تابع $f(z)$ گوئیم اگر چنانچه عنصر تابع (f, \mathcal{D}) را بتوان در امتداد خمی از نقطه‌یی در \mathcal{D} تا نقطه z_1 ، ادامه تحلیلی داد. مجموعه همه نقاط منظم $f(z)$ ، به میدان نظام $f(z)$ موسوم است.

همان‌طور که دیدیم میدان نظام $f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ عبارتست از $\{z: z \neq 1\}$. قابل توجه است که $f(z) = 1/(1-z)$ در میدان نظام $f_0(z)$ تحلیلی است و در همه نقاطی که هر دو تحلیلی‌اند، با $f_0(z)$ مساوی است. اینک تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F_0(z) = \int_0^z f_0(\zeta) d\zeta = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \right) d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \quad (|z| < 1)$$

که در آن مسیر انتگرال‌یابی در قرص واحد قرار دارد. تابع

$F(z) = \int_0^z 1/(1-\zeta) d\zeta = -\text{Log}(1-z)$ با $F_0(z)$ در قرص $|z| < 1$ برابر است و همه جای صفحه مگر در $z=1$ و پرتو $\text{Arg}(1-z) = \pi$ (یعنی پرتو محور حقیقی مثبت شروع از $z=1$) تحلیلی است. تابع

$$F_1(z) = -\log(1-z) \quad (0 < \arg(1-z) < 2\pi)$$

یک ادامه $F(z)$ از نیم صفحه $0 < \text{Arg}(1-z) < \pi$ به تمام صفحه منهای $z=1$ و پرتو $\arg(1-z) = 0$ می باشد.

پس میدان نظام برای تابع

$$F_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

عبارت است از $\{z: z \neq 1\}$. با این حال باید توجه داشت تابعی که هم در میدان نظام $F_0(z)$ تحلیلی باشد و هم در قرص $|z| < 1$ با $F_0(z)$ مساوی باشد موجود نیست. همان طور که قضیه بعد نشان می دهد، رخداد این پدیده صرفاً "بدین دلیل است که $\{z: z \neq 1\}$ ، یک میدان همبند چندگانه است.

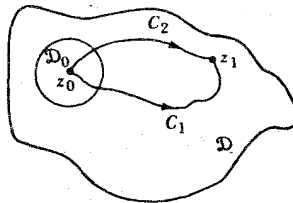
تذکر - تابع چند مقداری $\log(1-z)$ را در میدان $\{z: z \neq 1\}$ منظم گوئیم چون که هر یک از نقاط این میدان، یک نقطه منظم است. بعضی مؤلفین به شمار آوردن توابع چند مقداری را به عنوان تابع تحلیلی، مجاز می دانند، در این صورت تعریف آنها از تحلیلی با تعریف ما از منظم مطابقت دارد، قضیه بعدی نشان می دهد که، یک تابع منظم در یک میدان همبند ساده همیشه تک مقداری (و در نتیجه تحلیلی) است.

قضیه ۱۴-۱. (قضیه تک - میدانی) گیریم \mathcal{D} میدان همبند ساده است و فرض کنیم $f_0(z)$ در میدان $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ تحلیلی است. اگر عنصر تابع (f_0, \mathcal{D}_0) را بتوان بر امتداد هر خم در \mathcal{D} ادامه تحلیلی داد، در این صورت تابع تک - مقداری $f(z)$ موجود است که در \mathcal{D} تحلیلی باشد و در \mathcal{D}_0 ، $f(z) \equiv f_0(z)$.

اثبات - در این اثبات به ذکر نکات عمده اکتفا می کنیم و جزئیات اثبات را به خواننده علاقمند واگذار می کنیم. فرض کنیم نتیجه مذکور دروغ باشد. در این صورت نقاط $z_0 \in \mathcal{D}_0$ و $z_1 \in \mathcal{D}$ و خم های C_1 و C_2 هر دو با نقطه آغازی z_0 و نقطه پایانی z_1 موجودند بطوری که اگر (f_0, \mathcal{D}_0) را بر امتداد C_1 ادامه تحلیلی دهیم و بر امتداد C_2 ادامه تحلیلی دهیم، در همسایگی z_1 به عنصرهای تابع متفاوت خواهیم رسید (ر. ک. شکل ۴) و این بدان معنی است که اگر (f_0, \mathcal{D}_0) بر امتداد $C_1 - C_2$ ادامه تحلیلی داده شود، به مقدار

اولیاش باز نمی‌گردد.

از این رو جهت اثبات قضیه کافی است نشان دهیم، عنصر تابع (f_0, \mathcal{D}_0) ، $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ را می‌توان بر هر خم بسته در \mathcal{D} ادامه داد و به مقدار اولیه بازگشت. در حالت خاصی که خم بسته C یک مستطیل باشد، اثبات آن شبیه اثبات قضیه ۷-۶ است.



شکل ۴

مستطیل C را به چهار مستطیل مساوی تقسیم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل ۱۰ بخش ۷-۴ مشاهده می‌شود. ادامه بر C به همان چیزی می‌انجامد که ادامه بر این چهار مستطیل با هم. اگر نتیجه برای C دروغ می‌بود، آنگاه می‌بایست برای یکی از این چهار مستطیل دروغ باشد و ما این مستطیل اخیر را با C_1 می‌نمایانیم. در این صورت C_1 را نیز به چهار مستطیل مساوی دیگر تقسیم می‌کنیم و برای یکی از این چهار مستطیل قضیه دروغ است. با ادامه این فرآیند، دنباله‌ی از مستطیل‌های تودرتو به دست می‌آید، که برای آنها قضیه دروغ است. به موجب لم ماقبل قضیه ۲-۱۱، دقیقاً "یک نقطه، که آن را z^* می‌نامیم، به همه این مستطیل‌ها واقع است.

چون که $z^* \in \mathcal{D}$ ، عنصر تابع (f^*, \mathcal{D}^*) با $z^* \in \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$ موجود است. برای n بس بزرگ، مستطیل C_n از این مستطیل‌های تودرتو در \mathcal{D}^* واقع است. ولی این بدان معنی است که $f^*(z)$ درمیدانی شامل C_n تحلیلی است، که با نحوه تعریف C_n متناقض است، این تناقض به اثبات قضیه در حالت خاصی که خم مستطیل باشد، می‌انجامد. برای اثبات در حالت عمومی به کتاب هیل (۱۳) مراجعه کنید.

فرض کنیم $f(z)$ در میدان \mathcal{D} تحلیلی است و z_0 نقطه مرزی \mathcal{D} است. نقطه z_0 ، نقطه منظم برای $f(z)$ خواهد بود، اگر چنانچه برای قرص \mathcal{D}_0 به مرکز z_0 ، عنصر تابع (f_0, \mathcal{D}_0) موجود باشد به طوری که در میدان $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}$ داشته باشیم $f_0(z) \equiv f(z)$. هر نقطه مرزی \mathcal{D} که نقطه منظم برای $f(z)$ نباشد، نقطه منفرد برای $f(z)$ نامیده می‌شود. در مورد تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ، دیدیم که هر نقطه بر دایره $|z|=1$ نقطه منظم است مگر $z=1$. این مطلب که تمامی نقاط دایره نمی‌تواند نقطه منظم باشد، نتیجه قضیه زیر است:

قضیه ۱۴-۲. اگر شعاع همگرایی رشته $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر R باشد، آنگاه $f(z)$ بر دایره $|z| = R$ حداقل یک نقطه منفرد دارد.

اثبات - قرص $|z| < R$ را با \mathcal{D} می‌نمایانیم و فرض می‌کنیم که همه نقاط بر $|z| = R$ نقطه منظم باشند. در این صورت برای هر z_α بر دایره، تابع f_α را می‌توان بر قرص \mathcal{D}_α به مرکز z_α تعریف کرد، بطوری که عنصر تابع $(f_\alpha, \mathcal{D}_\alpha)$ ادامه تحلیلی مستقیم (f, \mathcal{D}) باشد. چون که $\bigcup \mathcal{D}_\alpha$ ، مجموعه فشرده $|z| = R$ را می‌پوشاند، زیر پوشش متناهی $(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n)$ می‌توان یافت. تابع g که به صورت

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \mathcal{D}, \\ f_i(z), & z \in \mathcal{D}_i, \end{cases}$$

تعریف شده در میدان $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \dots \cup \mathcal{D}_n$ تحلیلی است. چون که \mathcal{D}' شامل قرص $|z| \leq R$ می‌باشد. پس برای یک ε مثبت، میدان می‌بایست شامل قرص $|z| \leq R + \varepsilon$ باشد. پس نمایش رشته توانی $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در قرص $|z| < R + \varepsilon$ برقرار است و این مطلب با این نکته که شعاع همگرایی رشته ماکلورن $f(z)$ ، برابر با R است متناقض می‌باشد.

فرع - اگر $f(z)$ در قرص $|z - z_0| < R$ تحلیلی باشد و بسط رشته تیلر حول $z = z_0$ به شعاع همگرایی R باشد، آنگاه $f(z)$ بر دایره $|z - z_0| = R$ حداقل یک نقطه منفرد دارد.

اثبات - قرار می‌دهیم $\zeta = z - z_0$ و قضیه را در مورد $f(\zeta)$ بکار می‌بریم

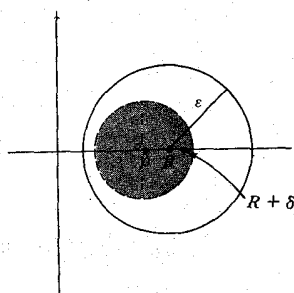
گرچه، این مطلب روشن است که، یک رشته توانی می‌بایست نقاط منفرد بر دایره همگرایی داشته باشد، ولی مشخص کردن جایگاه آنها در حالت عمومی کاری مشکل است. با گذاشتن محدودیتی بر ضرایب، می‌توانیم موضع یک نقطه منفرد خاص را مشخص کنیم.

قضیه ۱۴-۳. فرض کنیم شعاع همگرایی $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر R باشد، اگر برای هر n ، $a_n \geq 0$ ، آنگاه $z = R$ یک نقطه منفرد است.

اثبات - اگر $z = R$ نقطه تکیه نباشد، $f(z)$ در قرصی $\mathcal{D}_0: |z - R| < \varepsilon$ ، تحلیلی است. برای یک عدد مثبت ρ ، $\rho < R$ ، پس نزدیک به R ، قرص باز \mathcal{D}_1 به مرکز $z = \rho$ موجود است که شامل نقطه $z = R$ و زیر مجموعه \mathcal{D}_0 باشد. پس رشته تیلر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\rho)}{n!} (z - \rho)^n \quad (2)$$

در نقطه $z = R + \delta$ ($\delta > 0$) همگراست (ر. ک. شکل ۵)



شکل ۵

به موجب قضیه ۱۴-۲، رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ جایی بر دایره $|z| = R$ یک نقطه منفرد دارد، مثلاً $Re^{i\theta_0}$. پس شعاع همگرایی رشته تیلر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\rho e^{i\theta_0})}{n!} (z - \rho e^{i\theta_0})^n$$

برابر $R - \rho$ است (اگر شعاع همگرایی بزرگتر می بود، آنگاه $Re^{i\theta_0}$ نقطه منفرد نمی بود). باید توجه داشت، برای هر n داریم:

$$f^{(n)}(\rho e^{i\theta_0}) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (\rho e^{i\theta_0})^{k-n}. \quad (3)$$

چون که $a_n \geq 0$ ، از (۳) نامساوی زیر نتیجه می شود:

$$|f^{(n)}(\rho e^{i\theta_0})| \leq \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k \rho^{k-n} = f^{(n)}(\rho).$$

پس

$$\frac{1}{R - \rho} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(\rho e^{i\theta_0})}{n!} \right|^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f^{(n)}(\rho)}{n!} \right|^{1/n},$$

این بدین معنی است که شعاع همگرایی (۲) حداکثر $R - \rho$ است. و این با این نکته که رشته در $z = R + \delta$ همگراست متناقض است. پس $z = R$ یک نقطه منفرد $f(z)$ است.

نشان دادیم که، یک رشته توانی بر دایره همگرایی اش حداقل یک نقطه منفرد دارد. سؤالی مطرح است این که آیا برای تعداد نقاط منفرد بر دایره، حد بالایی موجود است؟ نشان خواهیم داد که ممکن است هر یک از این نقاط منفرد باشند. اگر $f(z)$ درمیدانی

که مرز C است، تحلیلی باشد و هر نقطه بر C ، نقطه منفرد $f(z)$ باشد، آنگاه C به مرز طبیعی $f(z)$ موسوم است. در چنین حالتی میدان نظام همان میدان تحلیلی بودن است.

برای ساختن یک رشته توانی با مرز طبیعی، از لم زیر استفاده می‌کنیم:

لم - فرض کنیم شعاع همگرایی $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ برابر R است. اگر با $f(re^{i\theta}) \rightarrow \infty$ ، $r \rightarrow R$ ، آنگاه نقطه $Re^{i\theta}$ ، نقطه منفرد برای $f(z)$ است.

اثبات - اگر $Re^{i\theta}$ یک نقطه منظم باشد، آنگاه تابع $g(z)$ ی موجود است که بر قرصی به مرکز $Re^{i\theta}$ تحلیلی است و برای $|z| < R$ ، با $f(z)$ برابر است. ولی در این صورت:

$$\lim_{r \rightarrow R^-} f(re^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow R^-} g(re^{i\theta}) = g(Re^{i\theta}),$$

و با این نکته که حد در طرف چپ نامتناهی است متناقض است.

اینک تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$ را در نظر می‌گیریم که در قرص $|z| \leq 1$ تحلیلی است. نشان می‌دهیم، دایره $|z| = 1$ برای این تابع یک مرز طبیعی است. ابتدا ملاحظه می‌کنیم، با $z \rightarrow 1$ در امتداد محور حقیقی، $f(z) \rightarrow \infty$ و بنابراین $z = 1$ نقطه منفرد است (این نتیجه قضیه ۱۴-۳ نیز می‌باشد). قابل توجه است، $f(z)$ در رابطه $f(z) = z + f(z^2)$ صدق می‌کند. پس $f(z)$ و $f(z^2)$ هم‌زمان به ∞ میل می‌کنند. ولی وقتی $z^2 \rightarrow 1$ بر اعداد حقیقی، $f(z^2) \rightarrow \infty$ ، و ۱-رابطه منفرد می‌سازد. این مقدمه موجب روشن شدن روش عمومی می‌گردد. تابع $f(z)$ در رابطه بازگشتی $f(z) = z + z^2 + z^4 + \dots + z^{2^{n-1}} + f(z^{2^n})$ صدق می‌کند. برای هر n ثابت داریم:

$$|f(z)| \geq |f(z^{2^n})| - n \quad (|z| < 1).$$

چون بر هر پرتوی که به یکی از ریشه‌های 2^n ام واحد میل کند، $f(z^{2^n}) \rightarrow \infty$ ، پس نتیجه می‌شود، هر ریشه 2^n ام واحد نقطه منفرد است. یعنی، همه نقاطی به شکل $e^{(2k\pi/2^n)i}$ ، n و k صحیح مثبت، نقاط منفرد هستند. اکنون هر همسایگی از هر نقطه دیگری بر دایره واحد می‌بایست شامل یکی از ریشه‌های 2^n ام واحد باشد. پس هیچ نقطه‌یی از دایره واحد نقطه منظم نیست. یعنی، $|z| = 1$ برای $f(z)$ مرز طبیعی است. استدلالی مشابه در مورد تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{p^n}$ که در قرص $|z| < 1$ تحلیلی است، نیز می‌توان بکار برد. زیرا اگر $z = re^{2\pi i(p/q)}$ ، که p و q اعداد صحیح مثبت و $0 < r < 1$ ، آنگاه

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{q-1} r^n! e^{2\pi(p/q)n!i} + \sum_{n=q}^{\infty} r^n! \right| \geq \sum_{n=q}^{\infty} r^n! - q. \quad (۴)$$

چون که وقتی r به ۱ میل کند، طرف راست (۴) به ∞ میل می‌کند، پس همه نقاطی به شکل $e^{2\pi(p/q)i}$ نقاط منفرد هستند، ولی این نقاط در $|z| = 1$ متراکم‌اند، پس دایره واحد مرز طبیعی برای $f(z)$ است.

چون که یک رشته توانی در یک قرص همگراست، مرزش می‌بایست یک دایره باشد. ولی مرز طبیعی به گونه‌یی تعریف شده است که، توابعی را که میدان تحلیلی بودن آنها لزوماً "قرص نیست"، نیز شامل گردد. تابع $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n!z}$ را در نظر می‌گیریم. چون که رشته برای $\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$ همگرای یکنواخت است، پس تابع $f(z)$ برای $\operatorname{Re} z > 0$ تحلیلی است. اینک نشان می‌دهیم که محور انگاری مرز طبیعی $f(z)$ است.

فرض کنیم $z = x + 2\pi(p/q)i$ ، که p صحیح و q صحیح مثبت و x عدد حقیقی مثبت باشد. پس

$$|f(z)| = \left| \sum_{n=0}^{q-1} e^{-n!(x+2\pi(p/q)i)} + \sum_{n=q}^{\infty} e^{-n!z} \right| \geq \sum_{n=q}^{\infty} e^{-n!x} - q. \quad (۵)$$

چون که وقتی x به ۰ میل کند، طرف راست (۵) به ∞ میل می‌کند، نتیجه می‌شود نقاطی به شکل $2\pi(p/q)i$ ، نقاط منفرد هستند. ولی این نقاط در محور انگاری متراکم‌اند، پس محور انگاری مرز طبیعی $f(z)$ است.

پرسش‌ها

- ۱- اگر در میدان \mathcal{D}_0 ، $f(z) = z$ ، آیا می‌شود، $f(z)$ در \mathcal{D}_1 تحلیلی باشد و در عین حال در \mathcal{D}_1 ، $f(z) \neq z$ باشد؟
- ۲- آیا می‌شود، دو تابع تحلیلی در قرص $|z| < 1$ ، در یک تعداد نامتناهی نقاط برابر باشند ولی در همه جای قرص برابر نباشند؟
- ۳- آیا می‌توان همیشه یک ادامهٔ تحلیلی را به یک ادامهٔ تحلیلی مستقیم تبدیل نمود؟
- ۴- آیا ممکن است، عناصر تابع (f, \mathcal{D}_1) و (g, \mathcal{D}_2) را بتوان با یک زنجیر نامتناهی از عناصر تابع به همدیگر مرتبط کرد، ولی نتوان با هیچ زیرزنجیر متناهی این کار را کرد؟
- ۵- چرا میدان نظام یک میدان است؟
- ۶- چه اختلافی میان نقطه منفرد و تکینه موجود است؟ چه اختلافی میان نقطه منظم و نقطه تحلیلی بودن موجود است؟
- ۷- آیا می‌شود، یک تعداد نامتناهی نقاط بر مرز C یک میدان، منفرد باشند و C

مرز طبیعی نباشد؟

۸- اگر $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$ میدان باشند، آیا اجتماع آنها هم میدان است؟

۹- آیا معکوس آخرین لم مذکور در این بخش درست است؟

۱۰- آیا رابطه‌ی میان وجود شکاف در ضرایب رشته ماکلورن برای $f(z)$ ، با انطباق

دایره همگرایی بر مرز طبیعی موجود است؟

۱۱- آیا ارتباطی میان قضیه کوشی و قضیه تک - میدانی برقرار است؟

تمرینها

۱- مجموعه اعداد حقیقی $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \dots < \theta_n < 2\pi$ مفروض است .

تابع $f(z)$ ی بسازید که:

(i) $f(z)$ در $|z| < 1$ تحلیلی باشد .

(ii) تنها نقاط منفرد $f(z)$ بر دایره واحد عبارت باشند از: $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}$.

۲- نشان دهید، مجموعه نقاط منظم یک تابع، مجموعه‌ی است باز، و مجموعه نقاط

منفرد، مجموعه بسته است .

۳- (الف) نشان دهید، $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [z^{2n+1}/(1-z^{2n+1})]$ در میدان $|z| < 1$

و در میدان $|z| > 1$ تحلیلی است و $|z| = 1$ در هر یک از این میدانها برای $f(z)$ مرز

طبیعی است .

(ب) $f(z)$ را در هر یک از این میدانها به شکل بسته مشخص کنید .

۴- نشان دهید که $|z| = 1$ برای $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ یک مرز طبیعی است .

۵- فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ($a_n > 0$) دارای شعاع همگرایی R است . نشان دهید

$|z| = R$ یک مرز طبیعی است .

۶- فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و هر a_n حقیقی

است، اگر با $k \rightarrow \infty$ ، $\sum_{n=k}^{\infty} a_n \rightarrow \infty$ ، نشان دهید $z=1$ نقطه منفرد برای

$f(z)$ است . (راهنمایی: $g(z) = f(z)/(1-z)$ را در یک رشته بسط دهید و نشان

دهید، یا $z \rightarrow 1$ با مقادیر حقیقی، $(1-z)g(z) \rightarrow \infty$)

۷- فرض کنید $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ به شعاع همگرایی ۱ است و تکنیها تنها

بر دایره $|z| = 1$ واقفند و این تکنیها هم قطب ساده هستند . نشان دهید، دنباله

$\{a_n\}$ کراندار است .

۱۴-۲. توابع خاص

همان طور که در فصل قبل دیدیم، تابع گاما برخه ریخت است و در اعداد صحیح منفی و صفر قطب ساده دارد. معکوس آن تابعی است تام و می توان آن را به صورت:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k}, \quad (۶)$$

نوشت که:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m} - \log n \right).$$

پس می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} ze^{[1 + (1/2) + (1/3) + \dots + (1/n)]z - z \log n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right) e^{-z/k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} ze^{-z \log n} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{z}{k}\right). \end{aligned}$$

با نوشتن مجدد حاصل ضرب اخیر، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(z)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} ze^{-z \log n} \frac{(z+1)}{1} \frac{(z+2)}{2} \frac{(z+3)}{3} \dots \frac{(z+n)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z}{n^z} \frac{(z+1)(z+2) \dots (z+n)}{n!} \end{aligned}$$

و به یک عبارت مجدد برای تابع گاما می رسم، یعنی که:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \dots (z+n)}, \quad (۷)$$

که برای همه مقادیر، مگر صفر و اعداد صحیح منفی، معین است. در آنالیز حقیقی، تابع گاما بر حسب انتگرال ناسره تعریف می شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0). \quad (۸)$$

برای این که بدانیم این انتگرال برای همه مقادیر مثبت x ، همگراست، می نویسیم:

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = I_1 + I_2.$$

چون که برای $t \geq 0$ ، $e^{-t} \leq 1$ ، نتیجه می شود که $I_1 \leq \int_0^1 t^{x-1} dt = 1/x$. چون که $\lim_{t \rightarrow \infty} (t^{x+1}/e^t) = 0$ ، عبارت زیر نشان انتگرال، I_2 هم کراندار است. داریم:

$$\int_N^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \leq \int_N^{\infty} \frac{t^{z-1}}{t^{z+1}} dt = \frac{1}{N} \quad (N \geq N(x)).$$

پس $\Gamma(x)$ برای $x > 0$ معین است. یک انتگرال یابی جزء به جزء نتیجه می دهد که:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt = -\frac{t^x}{e^t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned} \quad (9)$$

قابل توجه است که نشان داده ایم برای مقادیر مختلط z ، (۶) در (۹) صادق است. از (۹) و از این نکته که $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ ، نتیجه می شود، برای همه اعداد صحیح مثبت n ، $\Gamma(n+1) = n!$.

اکنون تابع مختلط زیر را در نظر می گیریم:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt. \quad (10)$$

برای $x > 0$ ، $z = x + iy$ داریم

$$|t^{z-1}| = |e^{(z-1)\log t + iy \log t}| = e^{(x-1)\log t} = t^{x-1}.$$

پس انتگرال (۱۰) برای $x > 0$ همگرای مطلق است و

$$|\Gamma(z)| \leq \int_0^{\infty} |t^{z-1} e^{-t}| dt = \Gamma(x).$$

می خواهیم نشان دهیم که (۱۰) دو خاصیت عمده دارد. اول این که برای $\operatorname{Re} z > 0$ ، تحلیلی است، ثانیاً "برای $\operatorname{Re} z > 0$ با (۷) برابر است. ما در (۷) و (۱۰) از یک نماد استفاده کرده ایم که ظاهراً عمل درستی نیست، خواص اخیر (۱۰)، این عمل ظاهراً "خطا" را توجیه می کند.

برای $0 < x_0 \leq x \leq x_1$ ، $z = x + iy$ داریم

$$\begin{aligned} |\Gamma(z)| \leq \Gamma(x) &\leq \int_0^1 t^{x_0-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x_1-1} e^{-t} dt \\ &< \Gamma(x_0) + \Gamma(x_1). \end{aligned}$$

پس $\Gamma(z)$ در نوار نامتناهی

$$0 < x_0 \leq \operatorname{Re} z \leq x_1. \quad (11)$$

کراندار است. قرار می دهیم $\Gamma_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} dt$ و نشان می دهیم که برای $\operatorname{Re} z > 0$ ، $\Gamma_n(z)$ تحلیلی است و $\Gamma'_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} \log t dt$ در

پایان نشان می‌دهیم که بر هر نواری به شکل (۱۱)، عبارت زیر را با $|h|$ بس، کوچک می‌توان به دلخواه کوچک کرد:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Gamma_n(z+h) - \Gamma_n(z)}{h} - \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} \log t \, dt \right| \\ &= \left| \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} \left(\frac{t^h - 1}{h} - \log t \right) dt \right| \\ &\leq \int_{1/n}^n t^{x-1} e^{-t} \left| \frac{t^h - 1}{h} - \log t \right| dt \quad (12) \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه میانه و از پیوستگی یکنواخت $\log t$ در فاصله $[1/n, n]$ ، می‌توان نشان داد که بر $1/n \leq t \leq n$ ، $(t^h - 1)/h$ به $\log t$ همگرای یکنواخت است. از این رو نتیجه می‌شود، $|h| < \delta(\varepsilon)$ و انتگرال آخری در (۱۲) دارای کران بالایی زیر است.

$$\varepsilon \int_{1/n}^n t^{x-1} e^{-t} dt < \varepsilon \Gamma(x) < \varepsilon (\Gamma(x_0) + \Gamma(x_1)).$$

پس $\Gamma_n(z)$ تحلیلی است $(x_0 < \operatorname{Re} z < x_1)$ و

$$\Gamma'_n(z) = \int_{1/n}^n t^{z-1} e^{-t} \log t \, dt.$$

ولسی برای $x_0 \leq \operatorname{Re} z \leq x_1$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n(z) = \Gamma(z)$ ، چون که $\Gamma_n(z)$ در نیم صفحه راست کراندار یکنواخت موضعی است، با بکار بردن قضیه مانتل می‌توان نشان داد که $\Gamma(z)$ برای $\operatorname{Re} z > 0$ تحلیلی است.

اکنون نشان می‌دهیم که، تعریف انتگرالی (۱۰) برای $x = \operatorname{Re} z > 0$ ، با (۷) مطابقت دارد، قرار می‌دهیم

$$\Gamma_n^*(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad (x > 0).$$

با انتگرالیابی جزء به جزء حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \Gamma_n^*(x) &= \frac{t^x}{x} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \Big|_0^n + \frac{1}{x} \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt. \end{aligned}$$

با $n-1$ بار دیگر انتگرالیابی جزء به جزء، به دست می‌آید

$$\Gamma_n^*(x) = \frac{1}{x} \frac{n-1}{n(x+1)} \frac{n-2}{n(x+2)} \frac{n-3}{n(x+3)} \cdots \frac{1}{n(x+n-1)} \times \int_0^n t^{x+n-1} dt$$

$$= \frac{(n-1)!n^{z+n}}{n^{n-1}x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n!n^z}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

پس برای $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \quad (13)$$

اگر اکنون بتوانیم نشان دهیم که، در فاصله $[1, 2]$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^*(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt$ ، آنگاه از قضیه همانی می‌توان نتیجه گرفت که، در بزرگترین میدان شامل فاصله $[1, 2]$ که در آن هر دو تابع تحلیلی است، داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t} dt$$

یعنی، نشان دادیم، نمایش‌های (۷) و (۱۰) در نیم صفحه راست با هم برابرند. برای $n > N$ داریم

$$\Gamma_n^*(x) > \int_0^N t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt \quad (1 \leq x \leq 2). \quad (14)$$

دنباله چند جمله‌ای‌های $f_n(t) = (1 - (t/n))^n$ بر هر فاصله متناهی $[a, b]$ به e^{-t} همگرای یکنواخت است. بعلاوه برای n بس بزرگ، $f_n(t) \leq f_{n+1}(t) \leq e^{-t}$. پس برای هر x ثابت، عبارت زیر نشان انتگرال (۱۴) (به عنوان تابعی از t) بر فاصله $[0, N]$ به $t^{x-1}e^{-t}$ همگرای یکنواخت است. بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^*(x) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^N t^{x-1} (1 - t/n)^n dt = \int_0^N t^{x-1} e^{-t} dt.$$

چون که N دلخواه است، نتیجه می‌شود که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^*(x) \geq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (15)$$

ولی $\Gamma_n^*(x) \leq \int_0^n t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ بنابراین:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma_n^*(x) \leq \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (16)$$

با ترکیب (۱۵) و (۱۶)، می‌بینیم که، برای $1 \leq x \leq 2$ ، (۷) یا (۱۰) مطابقت دارد و نتیجتاً آنها می‌بایست در نیم صفحه راست مطابقت داشته باشند. پس (۷) یا (۱۶) را می‌توان به عنوان ادامه تحلیلی مستقیم $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ از میدان $\operatorname{Re} z > 0$ به تمامی صفحه منهای صفر و اعداد صحیح منفی تصور نمود.

مثال بعدی در مورد تابع زیر می باشد:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad (17)$$

که به تابع ریمان-زتا^۱ معروف است. چون که $|1/n^{x+iy}| = 1/n^x$ می بینیم که برای $\text{Re } z > 1$ ، رشته (۱۷) همگرای مطلق است و برای $\text{Re } z \geq x_0 > 1$ همگرای مطلق است پس $\zeta(z)$ در نیم صفحه $\text{Re } z > 1$ نمایش یک تابع تحلیلی است. می خواهیم ادامه تحلیلی عنصر تابع $(\zeta(z), \text{Re } z > 1)$ را بیابیم. بدین منظور، ابتداء ارتباطی را میان تابع ریمان-زتا و تابع گاما به ثبوت می رسانیم.

از نمایش انتگرالی شروع می کنیم

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (\text{Re } z > 0),$$

را جایگزین t می کنیم تا حاصل شود

$$\Gamma(z) = n^z \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-nt} dt. \quad (18)$$

و با استفاده از همانندی

$$\sum_{n=1}^k e^{-nt} = e^{-t} \frac{1 - e^{-kt}}{1 - e^{-t}}$$

در (۱۸) به دست می آید:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^z} &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}(1 - e^{-kt})}{1 - e^{-t}} t^{z-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-kt}}{e^t - 1} t^{z-1} dt. \end{aligned}$$

پس برای $\text{Re } z > 1$ و k یک عدد صحیح مثبت، داریم

$$\sum_{n=1}^k \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt - \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-kt}}{e^t - 1} t^{z-1} dt \quad (19)$$

زیرا که هر دو انتگرال همگراست. اینک نشان می دهیم که انتگرال آخری با $k \rightarrow \infty$ به ∞ میل می کند

چون که $|t^{z-1}| = t^{x-1}$ ($x = \text{Re } z$)، نتیجه می شود که

$$\left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-kt}}{e^t - 1} t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^{\infty} \frac{e^{-kt}}{e^t - 1} t^{z-1} dt. \quad (20)$$

با $\varepsilon > 0$ مفروض، δ را بس کوچک انتخاب می‌کنیم تا برای هر k ،

$$\int_0^{\delta} \frac{e^{-kt}}{e^t - 1} t^{z-1} dt \leq \int_0^{\delta} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt < \varepsilon \quad (21)$$

سپس k را بس بزرگ انتخاب می‌کنیم تا

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-kt}}{e^t - 1} t^{z-1} dt \leq e^{-k\delta} \int_{\delta}^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt < \varepsilon. \quad (22)$$

با ترکیب (۲۱)، (۲۲)، می‌بینیم که انتگرال در (۲۰) با k بس بزرگ، به دلخواه کوچک می‌گردد. با میل دادن k به ∞ در (۱۹) می‌رسیم به

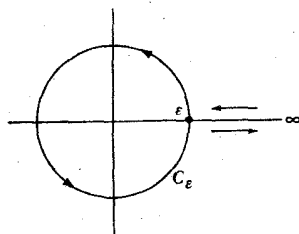
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 1). \quad (23)$$

اشکالی که در مورد گسترش میدان تعریف تابع ریمان - زتا موجود است این است که انتگرال در (۲۳) برای $\operatorname{Re} z \leq 1$ و اگر است. با انتخاب مرزی تابع زیر نشان انتگرال (۲۳) که از مبداء نگذرد، نشان می‌دهیم که، تابع حاصله تام است. در این صورت با نسبت دادن تابع جدید با انتگرال در (۲۳)، ادامه تحلیلی انجام پذیر خواهد شد.

فرض کنیم C_{ε} مشتمل بر قسمتی از محور حقیقی مثبت از ∞ تا ε ($0 < \varepsilon < 2\pi$)، دایره‌یی بمرکز مبداء با شعاع ε در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت و محور حقیقی مثبت از ε تا ∞ (ر. ک. شکل ۶) باشد. این مرز در شکل ۶ را با مرز شکل ۱۰ در بخش ۹-۳ مقایسه کنید.

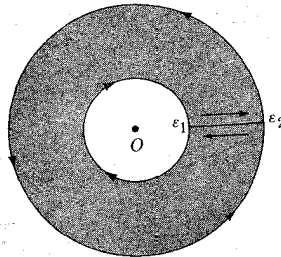
می‌نویسیم $\tau^{z-1} = e^{(z-1)\log \tau}$ و فرض می‌کنیم بر شاخهء زیرین محور حقیقی از ∞ تا ε $\arg \log \tau = 2\pi$ در حالی که بر شاخهء زیرین از ε تا $\arg \log \tau = 0$ ، تابع

$$f(z) = \int_{C_{\varepsilon}} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau \quad (0 < \varepsilon < 2\pi) \quad (24)$$



شکل ۶

- یک تابع تام است. باید توجه داشت که، انتگرال در (۲۴) مستقل از ε است، برای مشاهده این مطلب، فرض می‌کنیم $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 2\pi$. ملاحظه می‌شود که ناحیه $C_{\varepsilon_2} - C_{\varepsilon_1}$ که در شکل ۷ نمایش داده‌ایم، همبند ساده است.



شکل ۷

بنابراین قضیه کوشی را می‌توان بکار برد تا نشان داد

$$\int_{C_{\varepsilon_2} - C_{\varepsilon_1}} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau = \int_{C_{\varepsilon_2}} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau - \int_{C_{\varepsilon_1}} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau = 0.$$

بنابراین:

$$\int_{C_{\varepsilon_1}} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau = \int_{C_{\varepsilon_2}} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau.$$

می‌توانیم $f(z)$ را به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{(te^{2\pi i})^{z-1}}{e^t - 1} dt \\ &= (e^{2\pi iz} - 1) \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt + \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

فرض کنیم که، موقتاً، $x = \operatorname{Re} z > 1$. از همانندی

$$e^{\tau} - 1 = \tau + \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\tau^3}{3!} + \dots$$

ملاحظه می‌شود که برای $|\tau|$ بس کوچک، $|e^{\tau} - 1| \geq |\tau|/2$. پس

$$\left| \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau \right| \leq 2 \int_{|\tau|=\varepsilon} \frac{\varepsilon^{z-1}}{\varepsilon} |d\tau| = 4\pi \varepsilon^{z-1},$$

و با x به 0 میل می‌کند. پس برای $\operatorname{Re} z > 1$ و به هنگامی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، $f(z)$

به حدی میل می‌کند. چون که $f(z)$ مستقل از ε است، اگر در (۲۵) به 0 میل کند، مقدار $f(z)$ محاسبه می‌شود. این بدست می‌دهد که:

$$f(z) = (e^{2\pi iz} - 1) \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt \quad (\operatorname{Re} z > 1). \quad (26)$$

از مقایسه (۲۶) با (۲۳) نتیجه می شود:

$$\zeta(z) = \frac{f(z)}{(e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z)} \quad (\operatorname{Re} z > 1). \quad (27)$$

گرچه (۲۷) تنها برای $\operatorname{Re} z > 1$ ثابت شده است، با استفاده از قضیه همانندی می توان این را به میدان وسیع تری گسترش داد. هر قطب ساده $\Gamma(z)$ بایک صفر ساده $e^{2\pi iz} - 1$ حذف می گردد. پس $(e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z)$ یک تابع تام است. بدین ترتیب $\zeta(z)$ در (۲۷) به صورت خارج قسمت توابع تام بیان شده است، یعنی که، تابعی برخمریخت است. قطب های $\zeta(z)$ در نقاطی است که $(e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z) = 0$ اکنون $\Gamma(z) \neq 0$ و در اعداد درست $e^{2\pi iz} - 1 = 0$ ولی برای صفر و اعداد صحیح منفی، صفرهای $e^{2\pi iz} - 1$ با قطب های $\Gamma(z)$ حذف می شوند. پس تنها صفرهای $(e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z)$ در اعداد صحیح مثبت است. در حالی که قبلا نشان داده ایم، $\zeta(z)$ برای $\operatorname{Re} z > 1$ تحلیلی است (پس برای $z = 2, 3, 4, \dots$ $f(z) = 0$).

بنابراین $\zeta(z)$ می تواند تنها در $z = 1$ قطب داشته باشد. برای این که نشان دهیم $z = 1$ عملا "قطب است"، می بایست نشان داد که، $f(1) \neq 0$. از (۲۴) می بینیم که، $f(1) = \int_{C_\varepsilon} 1/(e^\tau - 1) d\tau$ چون که درون C_ε ($0 < \varepsilon < 2\pi$) تنها تکیه $1/(e^\tau - 1)$ یک قطب ساده در $\tau = 0$ است، با بکار بردن قضیه میانه، نشان می دهیم که:

$$f(1) = 2\pi i \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\tau}{e^\tau - 1} = 2\pi i \neq 0.$$

پس $\zeta(z)$ در $z = 1$ قطب ساده دارد و مانده اش برابر است با:

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)f(z)}{(e^{2\pi iz} - 1)\Gamma(z)} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{e^{2\pi iz} - 1} = 1.$$

پس معادله (۲۷) نمایش ادامه تحلیلی مستقیم $\sum_{n=1}^\infty 1/n^z$ ($\operatorname{Re} z > 1$) به یک تابع تحلیلی در تمام صفحه منهای قطب ساده در $z = 1$ می باشد. نتیجه می شود که، تابع ریمان - زتای کامل را می توان بصورت

$$\zeta(z) = \frac{1}{z-1} + g(z),$$

نوشت، که در آن $g(z)$ تابعی تام است. البته، برای $\operatorname{Re} z > 1$

$$g(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} - \frac{1}{z-1}$$

با توجه به همانندیهای

$$e^{2\pi iz} - 1 = 2ie^{\pi iz} \sin \pi z$$

9

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z \Gamma(1-z)},$$

(۲۷) به صورت زیر در می‌آید:

$$\zeta(z) = \frac{f(z)\Gamma(1-z)}{2\pi i e^{\pi iz}}. \quad (28)$$

گرچه (۲۷) و (۲۸) در صفحه برقرارند، ولی اطلاعاتی در مورد جایگاه صفرهای تابع ریمان - زتا بدست می‌دهد. برای انجام این مهم، اثبات یک رابطه بازگشتی برای تابع ریمان - زتا ما را یاری می‌دهد، لم زیرین در این مقوله مفید است.

لم - گیریم \mathcal{D} میدانی باشد مشتمل بر تمام صفحه منهای قرص‌های به شکل $|z - 2k\pi i| < \frac{1}{2}$ ، صحیح، k است. در این صورت عدد حقیقی $\delta > 0$ موجود است، که برای z در \mathcal{D} ، $|e^z - 1| \geq \delta$.

اثبات - چون که $e^z - 1$ با دوره تناوب $2\pi i$ است، کافی است، نامساوی را در ناحیه مشتمل بر نوار $-\pi \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$ منهای قرص $|z| < \frac{1}{2}$ ، ثابت کنیم. دیده می‌شود که، در نیم صفحه راست R ، $e^z - 1$ با میل z به ∞ به ∞ می‌گراید و در نیم صفحه چپ R با میل z به ∞ به -1 می‌گراید. $0 < \delta < 1$ را طوری انتخاب می‌کنیم که، بر دایره $|z| = \frac{1}{2}$ ، $|e^z - 1| \geq \delta$ ، چون که $e^z - 1$ در R هرگز صفر نیست، با استفاده از قضیه می‌نیم کالبد، می‌توان نشان داد که، برای هر z در R ، $|e^z - 1| \geq \delta$. بدین ترتیب اثبات تمام است.

گیریم C_k با مرز شکل ϵ تنها در این اختلاف داشته باشد که شعاع دایره به عوض ϵ ، $0 < \epsilon < 2\pi$ ، برابر $(2k+1)\pi$ باشد. در این صورت تابع $\tau^{z-1}/(e^\tau - 1)$ در نقاط $\tau = \pm 2n\pi i$ ($n = 1, 2, \dots, k$) درون مرز $C_k - C_\epsilon$ قطب‌های ساده دارد. مانده در $2n\pi i$ برابر با

$$\lim_{\tau \rightarrow 2n\pi i} \frac{(\tau - 2n\pi i)\tau^{z-1}}{e^\tau - 1} = (2n\pi i)^{z-1},$$

و مانده در $-2n\pi i$ برابر با

$$\lim_{\tau \rightarrow -2n\pi i} \frac{(\tau + 2n\pi i)\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} = (-2n\pi i)^{z-1}.$$

می‌باشد. با توجه به همانندیهای:

$$i^{z-1} = e^{(\pi i/2)(z-1)} = -ie^{(\pi i/2)z},$$

$$(-i)^{z-1} = e^{(3\pi i/2)(z-1)} = ie^{(3\pi i/2)z},$$

مانده را در $2n\pi i$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$-i(2\pi)^{(z-1)}e^{(\pi i/2)iz}n^{z-1}$$

و مانده را در $-2n\pi i$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$i(2\pi)^{z-1}e^{(3\pi i/2)iz}n^{z-1}.$$

با استفاده از قضیه مانده داریم:

$$\begin{aligned} \int_{C_k - C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau &= 2\pi i \left[-i(2\pi)^{z-1}e^{(\pi i/2)iz} \sum_{n=1}^k n^{z-1} \right. \\ &\quad \left. + i(2\pi)^{z-1}e^{(3\pi i/2)iz} \sum_{n=1}^k n^{z-1} \right] \\ &= (2\pi)^z (e^{(\pi i/2)iz} - e^{(3\pi i/2)iz}) \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^{1-z}}. \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود:

$$\int_{C_k - C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau = -2i(2\pi)^ze^{\pi iz} \sin \frac{\pi z}{2} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^{1-z}}. \quad (29)$$

به موجب لم داریم:

$$\left| \int_{|z|=(2k+1)\pi} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau \right| \quad (30)$$

$$\leq \frac{1}{\delta} \int_{|z|=(2k+1)\pi} |\tau^{z-1}| |d\tau| \leq \frac{2\pi}{\delta} \{(2k+1)\pi\}^{\operatorname{Re} z}.$$

فرض کنیم $\operatorname{Re} z < 0$. با توجه به (۳۰) و با میل $k \rightarrow \infty$ در (۲۹) حاصل می‌شود.

$$\int_{-C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau = -2i(2\pi)^ze^{\pi iz} \sin \frac{\pi z}{2} \zeta(1-z) \quad (\operatorname{Re} z < 0).$$

چون که

$$\int_{-C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau = - \int_{C_\varepsilon} \frac{\tau^{z-1}}{e^{\tau} - 1} d\tau,$$

پس تابع $f(z)$ در (۲۴) را می توان به صورت زیر بیان داشت:

$$f(z) = 2i(2\pi)^z e^{\pi iz} \sin \frac{\pi z}{2} \zeta(1-z) \quad (\operatorname{Re} z < 0) \quad (31)$$

با جایگزینی (۳۱) در (۲۸) همانندی زیر حاصل می شود:

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin \frac{\pi z}{2} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \quad (\operatorname{Re} z < 0). \quad (32)$$

عبارت (۳۲) به ما امکان می دهد که، جایگاه بعضی از صفرهای $\zeta(z)$ را مشخص کنیم. ابتدا توجه می کنیم که، به عنوان نتیجه یی از تمرین ۱۱ در بخش ۱۳-۱، $\zeta(z)$ در نیم صفحه $\operatorname{Re} z > 1$ صفر ندارد. چون که $\Gamma(1-z)$ و $\sin(\pi z/2)$ ناشی از صفرهای $\zeta(z)$ ، مخالف صفر است، تنها صفرهای $\zeta(z)$ ، یعنی که $z = -2, -4, -6, \dots$ می باشد. این صفرها به صفرهای بدیهی تابع ریمان-زتا موسوم است.

تنها صفرهای به حساب نیامده می بایست در نوار $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ واقع باشند. مسئله رده بندی این صفرها، مسئله یی بس دشوار (و حل نشده) است. تاکنون به تعداد نامتناهی در این نوار صفر یافت شده است. و شایان ذکر است که، همگی بر خط $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ قرار دارند. به منظور تشویق دانشجویان در جهت پژوهشی در این زمینه، این کتاب را نه با یک قضیه بلکه با یک گمان به پایان می بریم و این گمان معروف است به:

فرض ریمان - تمامی صفرهای غیر بدیهی $\zeta(z)$ بر خط $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ واقعند.

اثبات - خدا می داند.

پیش ها

۱- آیا تابع $f(z) \neq \Gamma(z)$ موجود است که در نیم صفحه راست تحلیلی و در رابطه $f(z+1) = zf(z)$ صادق باشد؟

۲- با استفاده از (۷) کدام یک از خواص تابع گاما را می توان به ساده ترین صورت اثبات نمود؟

۳- یا مقایسه (۶) و (۷) و (۱۰) چه همانندی هایی می توان یافت؟

۴- برای اینکه، نشان دهیم (۷) و (۱۰) در نیم صفحه راست هم ارزند، چرا ابتدا

لازم بود تا نشان دهیم آنها در یک فاصله نامتناهی با هم برابرند؟

۵- تابع گاما و تابع ریمان-زتا در چه خواصی مشترکند؟

۶- چگونه خواص $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ را با خواص $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/z^n)$ مقایسه می‌کنید؟

۷- تابع $\zeta(z)/\Gamma(z) (1-z)$ چگونه تابعی است؟

۸- از (۳۳) چه آگاهی‌هایی در مورد تابع ریمان-زتا، به غیر از جایگاه بعضی

صفرها، می‌توان کسب کرد؟

۹- چرا دو مرتبه تمام پرسش‌های این کتاب را نمی‌خوانید تا به بینید که به چندتای

دیگر آنها قادر به پاسخ گفتن هستید؟

تمرینها

۱- اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، با استفاده از (۶) و (۷) نشان دهید که،

مانده در قطب ساده $z=n$ برابر است با $(-1)^n/n!$.

۲- نشان دهید، هرگاه $\operatorname{Re} z \geq 2$ ، آنگاه $\operatorname{Re} \zeta(z) > 0$ (راهنمایی: نشان

دهید، بر خط $\operatorname{Re} z = 2$ ، $\operatorname{Re} \zeta(z) > 1 - \sum_{n=2}^{\infty} 1/n^2$).

۳- نشان دهید، $\zeta(z)(1 - 1/2^{z-1})$ تابعی است. تام و می‌توان آن را برای

$\operatorname{Re} z > 1$ به صورت $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n^z$ نمایش داد. در کجای دیگر این رشته همگراست؟

۴- نشان دهید، برای $0 < \operatorname{Re} z < 1$ ،

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} t^{z-1} \left(\frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) dt.$$

۵- نشان دهید، $\zeta(1-z) = (1/2^{z-1}\pi^z) \cos(\pi z/2) \Gamma(z) \zeta(z)$.

۶- نشان دهید، تابع گاما را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} e^{-tz} t^{z-1} dt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

پاسخ به پرسش‌ها و تمرینهای برگزیده

فصل ۱

بخش ۱-۱ پرسش‌ها

- ۱- مجموعه $\{0, 1, 2, \dots, p\}$ ، عدد اول p ، با عملگرهای جمع و ضرب در پیمانه p ، یک هیات است.
- ۲- میان هر دو عنصر در یک هیات مرتب، عنصر دیگری موجود است.
- ۷- به سادگی ارتباط میان عدد مختلط و نقطه را در صفحه می‌توان دریافت.
- ۹- بستانار. با اینکه $(1, 1) > (0, 0)$ ولی داریم: $(1, 1)(1, 1) = (0, 2)$

بخش ۱-۱ تمرینها

- ۴- (الف) $(-5, 14)$ (ب) $18 - 9i$ (پ) $-2 + 2i$ (ت) -4
- (ث) $2^{(n/2)+1}i \sin n\pi/4$

عشال رجه

بخش ۲-۱ پرسش‌ها

- ۴- $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ اگر و تنها اگر z_1 و z_2 بر یک پرتو منشعب از مبدا جای داشته باشند.
- ۷- چون که حاصلضرب آنها گویاست، پس همه مضرب‌ها هم گویا هستند.

بخش ۱-۲ تمرینها

$$1- (ب) \quad 13 - 6i \quad (ت) \quad \sqrt{2} \quad (ج) \quad \sqrt{2}$$

$$2- (ب) \quad (x+5)^2 + y^2 > 4^2 \quad (پ) \quad -1 \leq x \leq 1, \quad y = 0$$

$$(ت) \quad y^2 = -20(x-5)$$

$$4- \quad |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2$$

بخش ۱-۳ پرسش‌ها

۲- عمده‌ترین چنین تابعی همان تابع $f(x) = \log x$ است.

۵- توجه کنید: $\arg(1/z) = \arg \bar{z}$

۶- یک بحث دقیق در این زمینه را می‌توان در مرجع (۱۴) یافت.

۷- بسط (۱۰) همانندیهای مفیدی به دست می‌دهد.

۹- ریشه‌های واحد با ضرب تشکیل گروه می‌دهند.

۱۱- این در فصل ۴ بحث شده است.

بخش ۱-۳ تمرینها

$$6- (الف) \quad \pm (1+i)/\sqrt{2} \quad (ت) \quad \pm \sqrt[4]{2}(\cos(\pi/8) + i \sin(\pi/8))$$

$$(ج) \quad \pm (1-i)/\sqrt{2}$$

۹- با $n \rightarrow \infty$ ، حاصلجمع به 2π میل می‌کند، که همان محیط دایره واحد است.

فصل ۲بخش ۲-۱ پرسش‌ها

۴- هر مجموعه از اعداد حقیقی که بسته باشد، زیر مجموعه بسته صفحه نیز می‌باشد.

مجموعه تهی تنها مجموعه‌یی است که هم در خط حقیقی و هم در صفحه باز است.

۶- این اعداد صحیح نقطه حدی ندارند.

۷- نقطه مرزی یک مجموعه همبند که بیش از یک نقطه داشته باشد، می‌بایست نقطه

حدی باشد.

۸- $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. برای اینکه بدانیم این احتوا اغلب کامل است. گیریم

$A = \text{اصم‌ها}$ و $B = \text{گوياها}$.

۱۰- این معروف به مجموعه محدب است.

۱۱- این به مجموعه ستاره‌یی معروف است. فصل ۱۲ را به‌بینید. صفحه منهای محور

حقیقی منفی نسبت به مبداء ستاره‌یی است ولی محدب نیست.

بخش ۱-۲ تمرینها

۴- (الف) مجموعه باز کراندار.

(ب) نه باز، نه بسته، نه همبند، نه کراندار.

(ث) باز بر خط حقیقی، همبند، بی‌کران.

بخش ۲-۲ پرسش‌ها

۱- گیریم $x_n = (-1)^n$ ، $y_n = (-1)^{n+1}$

۳- دنباله $x_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ فرد} \\ n, & n \text{ زوج} \end{cases}$ دنباله‌یی است بی‌کران و نقطه حدی دارد.

۴- هر وقت مجموعه بسته است.

۵- $2, 0, 1, 1, 1, \dots$

۶- مجموعه اعداد گویا را می‌توان به صورت دنباله نوشت.

۹- دنباله $\{b_n\}$ صعودی است.

بخش ۲-۲ تمرینها

۲- حول نقاط حدی متمایز، همسایگی‌های متمایز رسم کنید.

۴- (ب)، (پ)، (ت)

۶- (الف) $1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 2, \dots$

(ب) $1, 2, \dots, n, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{2n+1}{2}, \dots, \frac{k+1}{k}, \frac{2k+1}{k}, \dots, \frac{nk+1}{k}, \dots$

(پ) دنباله مرکب از همه اعداد گویا

۸- $1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, 4, 4\frac{1}{4}, 4\frac{2}{4}, 4\frac{3}{4}, 5, 5\frac{1}{5}, \dots$

بخش ۳-۲ پرسش‌ها

۲- اجتماع نامتناهی ممکن است فشرده نباشد. هر عدد صحیح فشرده است، ولی

اجتماع آنها نیست. همچنین $[0, 1 - 1/n]$ برای هر n ، فشرده است ولی $\bigcup_{n=2}^{\infty} [0, 1 - 1/n]$ فشرده نیست.

۳- باز و بی‌کران است.

۵- اگر نقاط حدی موجود نباشد

۶- به تعداد نامتناهی.

بخش ۲-۳ تمرینها

- ۶- برای p و q اعداد صحیح و مثبت و نسبت به هم اول، $f(p, q) = 2^{p3^q}$ یک نگاشت یک به یک از اعداد گویای مثبت در اعداد صحیح مثبت است.
- ۷- برای هر مجموعه باز در این پوشش، نقطه‌یی در مجموعه انتخاب کنید که هر دو مختص آن گویا باشد.

بخش ۲-۴ پرسش‌ها

- ۲- مجموعه‌یی که شامل یک همسایگی ∞ باشد، بی‌کران است ولی معکوس آن برقرار نیست. مثلاً " $\{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ " شامل هیچ همسایگی ∞ نیست.
- ۵- هویت آنها با خودشان مشخص می‌شود.
- ۷- کره $n+1$ بعدی.

بخش ۲-۴ تمرینها

- ۱- اگر z_0 نقطه حدی باشد، آنگاه $N(\infty; |z_0| + 1)$ شامل تعداد نامتناهی نقاط دنباله نیست.

$$-4 \left(\frac{x_1}{1-u_1}, \frac{y_1}{1-u_1} \right)$$

- ۶- تمرینات ۵ و ۶ را پس از مطالعه فصل ۳ باز بخوانید.

بخش ۲-۵ پرسش‌ها

- ۱- ممکن است با تعریف ما از یک میدان به عنوان مجموعه باز همبند اشتباه شود.
- ۴- اگر نقاط در صفحه w همیشه نزدیک‌تر باشند، تابع پیوسته‌یکنواخت است، معکوس آن درست نیست. تابع $f(z) = 2z$ را بر یک مجموعه کراندار در نظر بگیرید.
- ۵- همه دنباله‌ها پیوسته‌یکنواخت‌اند، فقط $\delta = 1$ انتخاب کنید.
- ۷- لازم نیست نقطه حدی باشد؛ مثلاً "تابع ثابت".
- ۹- نه چنین چیزی. تابع — برای $|z| \geq \varepsilon$ برای هر $\varepsilon > 0$ پیوسته‌یکنواخت است.

- ۱۰- نگاشتی از قرص واحد بر دو نقطه.

بخش ۵-۲ تمرینها

$$1- \text{الف) } 6i \quad \text{ب) } -(8+6i)/5 \quad \text{پ) } 0 \quad \text{ت) } 1/2$$

۲- الف) و ب) پیوسته یکنواخت‌اند (پ) پیوسته است. (ت) و (ث) درمبداء ناپیوسته‌اند.

$$3- f(z) = \sin \pi z$$

۱۳- از تمرین ۷ استفاده کنید.

فصل ۳بخش ۱-۳ پرسش‌ها

۳- نیم صفحه.

$$5- \frac{1}{z+b} \neq \frac{1}{z} + b$$

۶- دوران و بزرگساز

بخش ۱-۳ تمرینها

$$1- \text{الف) } v = -3(u-2) \quad \text{ت) } (u-3)^2 + (v-1)^2 = 8$$

$$2- \text{الف) } \operatorname{Im} w > -1 \quad \text{ب) } \operatorname{Im} w > 0$$

۳- نوار میان خطوط $v = u - 3$ و $v = u - 7$

$$6- \text{پ) مثلی به رئوس } -1 + 11i, -13 + 5i, \text{ و } 2 - 10i$$

$$7- \text{ب) } (u - \frac{1}{2})^2 + (v + 1)^2 = \frac{5}{4}$$

$$8- \text{الف) } (u - \frac{2}{3})^2 + v^2 = (\frac{1}{3})^2$$

$$\text{ت) } (u - \frac{1}{2})^2 + v^2 < \frac{1}{4}$$

$$11- 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \quad \text{بر نیم صفحه راست منهای قرص } (u - \frac{1}{4})^2 + v^2 \leq (\frac{1}{4})^2$$

نگاشته می‌شود.

بخش ۲-۳ پرسش‌ها

۳- یک تبدیل خطی.

۵- خیر، آن می‌بایست یک، دو و یا به تعداد نامتناهی نقاط را بر خودش بنگارد.

۸- از این نکته استفاده کنید که خطوط و دایر بر خطوط و دایر نگاشته می‌شوند.

سؤال را پس از مطالعه فصل ۱۱ بازخوانید.

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z = \infty, \\ \infty, & z = 0, \\ z, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad -۱۰$$

اگر پیوستگی در شرط آمده باشد، تابع می‌بایست دو خطی باشد.

بخش ۳-۲ تمرینها

$$w = -\frac{z + 2(1-i)}{z-2} \quad (\text{ت})$$

$$w = \frac{iz-1}{-3z+i} \quad (\text{الف}) -۱$$

$$u^2 + (v - \frac{1}{2})^2 \geq (\frac{1}{2})^2 \quad (\text{ب})$$

$$\text{Im } v \leq \frac{1}{2} \quad (\text{الف}) -۲$$

$$u^2 + (v+1)^2 > 2 \quad (\text{ت}) \quad (u-1)^2 + (v-1)^2 < 1 \quad (\text{پ}) -۳$$

۸- فرض کنید $w = (az+b)/(cz+d)$ اگر $a=d$ ، $b=c=0$ ، آنگاه به

تعداد نامتناهی نقاط ثابت موجود است، اگر $(a-d)^2 = -4bc$ آنگاه یک نقطه ثابت موجود است.

$$|A| = 1, \quad w = A(iz - z_0)/(iz - \bar{z}_0) -۱۴$$

بخش ۳-۳ پرسش‌ها

۱- اختلافی ندارد.

۲- هر نیم صفحه‌ای که مرزها از مبداً بگذرد.

۳- قرص وقتی که پرتو (گسترش یافته) از مبداً بگذرد.

بخش ۳-۳ تمرینها

۶- (الف) نیم صفحه زیرین.

(ب) صفحه منهای محور حقیقی مثبت.

۷- n دفعه قرص واحد.

فصل ۴

بخش ۴-۱ پرسش‌ها

۲- نوارهای نامتناهی به عرض 2π

۴- بر هر پرتو بی‌کران است مگر بر محور حقیقی.

۶- خیر. چنان که در فصل ۸ خواهیم دید.

۹- e^z بر هر پرتوی در نیم صفحه راست بی‌کران است، در حالی که $z + e^z$ بر هر

پرتوی بی‌کران است.

بخش ۱-۴ تمرینها

$$\pm(1+i)\sqrt{k\pi}, \quad k \geq 0 \quad (\text{ب})$$

$$2k\pi/3i \quad (\text{الف}) \quad ۱-$$

$$\text{Log } |2k\pi| + i(\pi/2 + n\pi) \quad (\text{پ})$$

$$|e^{1/2}| \leq e^{1/e} \quad (\text{ب}) \quad e^{z/(x^2+y^2)} \left(\cos \frac{y}{x^2+y^2} - i \sin \frac{y}{x^2+y^2} \right) \quad (\text{الف}) \quad ۶-$$

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq |\sin^2 z + \cos^2 z| = 1 \quad (\text{پ}) \quad ۸-$$

بخش ۲-۴ پرسش‌ها

۱- وارون تابع نمایی

۲- بله.

۴- هر چه بیشتر در نیم صفحه راست باشد، مساحت نگاره‌اش وسیع تر است.

$$e^{f(z)} \quad ۷-$$

۹- در تمام نقاط به استثنای $z = \pi/2 + 2k\pi$ ، اینرا در فصل ۱۱ بهتر خواهید فهمید.

بخش ۲-۴ تمرینها

$$\{(1+i)/\sqrt{2}\}e^5 \quad \text{تا} \quad [(1+i)/\sqrt{2}]e^{-5} \quad (\text{الف}) \quad \text{پاره خط از}$$

$$|w| = 1/e^2 \quad (\text{پ}) \quad \text{قسمتی از طوق واقع در نیم صفحه زیرین محصور به دوایر}$$

$$|w| = e \quad \text{و}$$

$$\text{Im } w \geq 0, \quad |w| \leq 1 \quad (\text{الف}) \quad \text{ناحیه}$$

$$\text{Re } w \leq 0, \quad |w| \leq 1 \quad (\text{ب}) \quad \text{ناحیه}$$

$$\text{Re } w \geq 0, \quad |w| \geq 1 \quad (\text{پ}) \quad \text{ناحیه}$$

بخش ۳-۴ پرسش‌ها

۱- قسمت انگاری لگاریتم، شناسه است.

۲- این کاملاً "سازگار است"، گویا اینکه بعضی اوقات خوش آیند نیست.

$$-\pi < \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2 \leq \pi \quad ۷-$$

بخش ۳-۴ تمرینها

$$\frac{1}{2} \text{Log } (x^2 + y^2) + i \tan^{-1} (y/x) \quad (\text{پ}) \quad ۱-$$

بخش ۴-۴ پرسش‌ها۱- خیر، زیرا $2k\pi \neq 0$ ۳- $(a+bi)^{c+di} = k\pi$ حقیقی است اگر چنانچه $k, d \operatorname{Log}|a+bi| + c \arg(b/a) = k\pi$ صحیح۴- mn مقادیر متمایز می‌پذیرد.

۶- چونکه تابع در هیچ همسایگی مبدأ تک - مقداری نیست. تابع در مبدأ ناپیوسته

است.

۸- یکی تابع n مقداری است و دیگری یک نگاشت n - به - یک است.۹- تنها وقتی m و n نسبت به هم اول باشند. به عنوان مثال $(z^2)^{1/2}$ دومقداردارد در حالی که $(z^{1/2})^2$ تنها یک مقدار دارد.بخش ۴-۴ تمرینها۱- (ب) $\pi e^{i(\pi/2 + 2k\pi)}$ (پ) $\frac{1}{2}$ ۸- (پ) $\frac{1}{2} \tan^{-1}(2/-1) + (i/4) \operatorname{Log} 5$ فصل ۵بخش ۱-۵ پرسش‌ها

۲- زیرا تنها یک مسیر "بد" لازم است که یافت شود.

۶- مشتق تابع $f(z) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ موجود است ولی در مبدأ پیوسته

نیست.

۷- معمولاً وقتی که با عباراتی نظیر $x^2 + y^2$ مواجه باشیم.۱۰- اگر $f'(z)$ موجود باشد، آنگاه $f(z)$ ثابت است.

۱۱- هیچ‌جا.

بخش ۱-۵ تمرینها

۱- (پ) و (ت).

۲- (الف)، (ب)، (پ)، (ث) و (ج) در مبدأ مشتق‌پذیرند، (ت) همه‌جا مشتق‌پذیر

است.

(ب) y/\sqrt{x} ۴- (الف) $\frac{(x^2 + y^2)^{n/2}}{y}$

بخش ۲-۵ پرسش‌ها

- ۱- رفتار موضعی در مقابل رفتار همه‌جایی .
- ۳- تابعی که همه‌جا در صفحه مشتق‌پذیر است .
- ۶- $f'(z)/g'(z)$ در z_0 پیوسته است .
- ۷- خیر ، $1/z$ ، $0 < |z| < 1$
- ۹- چونکه شناسه معین نیست .

بخش ۲-۵ تمرینها

- ۱- (الف) $a = b$ ، $c = -1$ (ب) $a = b = c/2$
- (پ) $a = 1$ ، $b = 2k\pi$ (ت) $a = b = 0$
- ۱۰- (الف) $1/3$ (ب) 0 (پ) 2 (ت) موجود نیست .

بخش ۳-۵ پرسش‌ها

- ۱- اگر خاصیتی برای توابع تحلیلی برقرار باشد هر وقت آن خاصیت برای قسمتهای حقیقی و انگاری برقرار باشد .
- ۵- اگر $f(z)$ تحلیلی باشد ، آنگاه $|f(z)|$ پیوسته است و هنگامی $f(z) \neq 0$ ، $\log |f(z)|$ همساز است .
- ۶- خیر . برای توضیحات به فصل ۱۰ رجوع کنید .

بخش ۳-۵ تمرینها

- ۲- (الف) $v = ay - bx + c$ (ب) $v = \frac{x}{x^2 + y^2} + c$
- (پ) $v = 3x^2y - y^3 + c$ (ت) $v = -\log |z| + c$
- (ث) $v = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy + c$
- ۳- $a = 3$ ، $v = 3xy^2 + \frac{y^2}{2} - x^3 - \frac{x^2}{2} + c$
- ۶- $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y}$
- ۷- (الف) $-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ (ب) $\frac{1}{1+z^2}$ (پ) $\frac{1}{\sqrt{z^2(z^2-1)}}$

فصل ۶بخش ۱-۶ پرسش‌ها

- ۲- اگر $a_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ، آنگاه دنباله مثبت $\{b_n\}$ موجود است

$$a_n/b_n \rightarrow 0 \text{ و همگرا } \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

۵- تمرینات ۱۲ و ۱۳ ملاحظه شود.

۷- همه دنباله‌هایی که حد زیرین دارند، ولی می‌بایست از عبارتی مثل $\infty - \infty$ برحذر بود.

۹- مادام که یک دنباله به ∞ و دیگری به $-\infty$ میل نکند نتیجه برقرار است.

$$10- \text{خیر. برای هر } n, (1/2n)^{1/n} < 1$$

بخش ۱-۶ تمرینها

۸- فرض کنید $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ فرد} \\ 2, & n \text{ زوج} \end{cases}$ و $b_n = \begin{cases} 2, & n \text{ فرد} \\ 1, & n \text{ زوج} \end{cases}$ در این صورت تساوی برقرار نیست.

۱۶- رشته به $3/2$ می‌گراید.

بخش ۲- پرسش‌ها

۲- دنباله $\{z + 1/n\}$ در صفحه بی‌کران است و همگرای یکنواخت می‌باشد.

۵- یک نقطه مجموعه‌یی است فشرده.

۶- $f_n(z) = \begin{cases} 1/n & z \text{ حقیقی} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$ در صفحه به صفر همگرای یکنواخت است.

۸- $f_n(z) = (-1)^n$ همگراست، در حالی که برای تعداد نامتناهی n ، $|f_n(z) - 1| = 0$

۱۰- $f_n(z) = \sum_{k=1}^n (z^k/k^2)$ در $|z| \leq 1$ همگرای یکنواخت است، ولی تابع

حدی در $z = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

بخش ۲-۶ تمرینها

۷- دنباله $\{z/n\}$ بر $|z| \leq 1$ به ۰ همگرای یکنواخت است، ولی $\sum_{n=1}^{\infty} (z/n)$

برای $z \neq 0$ واگراست.

۹- (الف) هر جا که معین است به ۰ همگرای یکنواخت است.

(ب) برای $\varepsilon > 0$ و $\text{Re } z \geq \varepsilon$ همگرای یکنواخت و برای $\text{Re } z > 0$ همگرای نقطه‌ای

است.

(پ) برای $\text{Re } z \leq 0$ همگرای یکنواخت است.

(ت) برای $1 < r \leq |z|$ همگرای یکنواخت به ۱ و برای $|z| < 1$ همگرای نقطه‌ای

است؛ برای $R > 1 \geq |z|$ به صفر همگرای یکنواخت و برای $|z| > 1$ به ۰ همگرای نقطه‌ای

است؛ وقتی که $z = 1$ ، به $\frac{1}{2}$ می‌گراید.

۱۱- (الف) برای $|z| < 1$ مطلق و برای $|z| \leq r < 1$ یکنواخت، همگراست.

(ب) برای $|z^2 + 1| > 1$ همگرای مطلق و برای $|z^2 + 1| \geq R > 1$ همگرای یکنواخت است.

(پ) هر جا معین است ($z \neq n$) همگرای مطلق و بر زیر مجموعه‌های کراندار صفحه منهای قرصهایی به مرکز مبدا، همگرای یکنواخت است.

(ت) برای $|z| > 1$ همگرای مطلق و برای $|z| \geq R > 1$ همگرای یکنواخت است.

(ث) برای $|z| > 1$ همگرای مطلق و برای $|z| \geq R > 1$ همگرای یکنواخت است.

بخش ۳-۶ پرسش‌ها

$$|z_0| \leq |z_1| - 1$$

۲- تابع تام.

۵- اگر $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ همگرا باشد، آنگاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ همگراست. معکوس آن دروغ است.

۶- حداقل ۱ است.

$$f_n(z) = z + n \quad \text{۸- همگرا نیست، با اینکه } f'_n(z) \rightarrow 1$$

۱۰- در فصل ۸ خواهیم دید که توابع تحلیلی نمایش رشته توانی دارند.

بخش ۳-۶ تمرینها

$$|a_n z^n| \leq |a_0| |z|^n, \quad n \text{ برای هر } ۳-$$

۵- یا اینکه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ واگراست و یا اینکه رشته یک چند جمله‌ای است.

$$۱۰- (الف) |a| \quad (ب) |a| \geq 1, |a| \geq 1, |a| > 1 \quad (پ) 1 \quad (ت) 1/e$$

(ث) 1

$$۱۱- (الف) 2 \quad (ب) 1/\sqrt{3} \quad (پ) \infty \quad (ت) 1 \quad (ث) 5/3$$

$$۱۴- (ب) 9 - 2(z+2) - 3(z+2)^2 + (z+2)^3$$

بخش ۴-۶ پرسش‌ها

۲- در تمام نقاطی که مشتق مخالف صفر است. این از این نکته (که در فصل ۸ ثابت می‌شود) نتیجه می‌شود که تابع تحلیلی بسط رشته توانی دارد.

$$۴- 1/(1-z) \text{ برای } z=2 \text{ تحلیلی است، تابع نمی‌تواند همه جا بر } |z|=R$$

تحلیلی باشد، که در فصل ۱۴ ثابت می‌شود.

۸- شعاع همگرایی رشته تیلر حول یک نقطه عبارت است از فاصله میان آن نقطه تا

نزدیکترین صفر مخرج.

بخش ۴-۶ تمرینها

۱- (الف) تساوی وقتی برقرار است که

$$b_n = \begin{cases} 1/2^n & n \text{ فرد} \\ 1 & n \text{ زوج} \end{cases} \quad \text{و} \quad a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ فرد} \\ 1/2^n & n \text{ زوج} \end{cases}$$

۲- (الف) R (ب) R (پ) R^k (ت) ∞ (ث) 0۳- اگر $a_n \equiv 1$ ، آنگاه برای هر دو رشته $R=1$. اگر $a_n = 2^n$ آنگاهبرای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$ ، $R = 2^{-1/k}$ و برای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$ ، $R = 1$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{n^k}{n!} \right|^{1/n} = 0 \quad \text{۴- (ب)}$$

$$\text{۵- (الف)} \quad \frac{5}{2} \quad \text{(ب)} \quad 1\frac{3}{2} \quad \text{(پ)} \quad 5 - 5i$$

فصل ۷بخش ۱-۷ پرسش‌ها

۲- خیر، چونکه نقاط آغازی و پایانی بر هم منطبق‌اند.

۴- متمم یک میدان همبند ساده همبند است.

۶- صفحه منهای اعداد صحیح.

۵- (۱) نگاره یک مجموعه فشردۀ و همبند است.

بخش ۱-۷ تمرینها۱- اگر $a = b$ یک دایره و اگر $a \neq b$ یک بیضی۲- با $R \rightarrow \infty$ ، $z(t)$ دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع 1 می‌گردد.

$$\text{۳- (الف)} \quad z(t) = t + i(1 - 2t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$\text{(ت)} \quad z(t) = 1 + 2 \cos t + i 2 \sin t \quad (-2\pi/3 \leq t \leq 2\pi/3)$$

$$\text{۴-} \quad z(t) = t + i(2t^2 - 3) \quad (-1 \leq t \leq 2)$$

$$\text{۵- (ب)} \quad 4r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 1$$

$$\text{۶- (الف)} \quad 2\pi i \quad \text{(ب)} \quad 4\pi i \quad \text{(ث)} \quad -30 + 25\pi i$$

$$\text{۷- (ب)} \quad 2\pi i \quad \text{(ت)} \quad 2\pi + 4\pi i$$

بخش ۲-۷ پرسش‌ها

۳- تعداد متناهی نقاط ناپیوستگی تأثیری ندارد.

۴- بله؛ چونکه مرز فشرده است.

۵- کار کردن با این پارامتر ساده‌تر است.

بخش ۲-۲ تمرینها

$$4\text{-(الف)} \quad 12\pi \quad (ب) \quad \sqrt{2}(e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$5\text{-(ب)} \quad \int_C \bar{z} dz = 1, \quad \int_C y dz = -\frac{1-i}{2}, \quad \int_C x dz = \frac{1-i}{2}$$

$$(پ) \quad \int_C \bar{z} dz = 2\pi i, \quad \int_C y dz = -\pi, \quad \int_C x dz = \pi$$

۶- در امتداد پاره خط از مبدا تا $1+i$

$$\int_C z dz = i, \quad \int_C |z| dz = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \int_C z |dz| = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

$$\int_C |z| |dz| = 1.$$

در امتداد دایره $|z| = 1$

$$\int_C z dz = 0, \quad \int_C |z| dz = 0, \quad \int_C z |dz| = 0,$$

$$\int_C |z| |dz| = 2\pi.$$

$$7\text{--}2\pi i$$

$$(ب) \quad e^{1-i} - e^{-(1-i)} + 2(1-i)$$

$$8\text{-(الف)} \quad e^{2+2i} - 1$$

$$(پ) \quad \frac{i}{2} (e^{1-i} - e^{-1+i})$$

$$9\text{--}\frac{4}{3}$$

بخش ۳-۷ پرسش‌ها

۲- در کاربرد قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال.

۵- تمرین ۲ را به‌بینید.

۷- لازم نیست تحلیلی باشد؛ $\frac{dz}{z^2} = 0$ ؛ $\int_{|z|=1}$

۹- بخش ۳-۹ را به‌بینید.

بخش ۷-۳ تمرینها

- ۱- الف) $16/3$ (ب) پیمایش در جهت مثبت $-5/3$
 (پ) 0 (ت) $\pi r^2/4$ (ث) $128/5$
 ۶- با هر مرزی که انتخاب شود؛ الف) 0 (ب) $i(1 + 1/e)$

بخش ۷-۴ پرسش‌ها

- ۱- نه لزوماً " زیرا که $|f(z)|$ تحلیلی نیست.
 ۳- $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} \neq 0$
 ۵- به منظور بکار بردن معادلات کوشی - ریمان.
 ۸- هر مضرب صحیح $2\pi i$
 ۹- اگر $g_0(z)$ یک جواب باشد، $g_0(z) + 2k\pi i$ نیز جواب است.

بخش ۷-۴ تمرینها

- ۲- $f(z) = 1/z^2$
 ۳- الف) π (ب) $-\pi$ (پ) 0 (ت) 0
 ۴- الف) $2\pi i$ (ب) 0 (پ) $2\pi i$
 حل این تمرینات پس از مطالعه بخش ۸-۱، ساده است.

فصل ۸بخش ۸-۱ پرسش‌ها

- ۲- اگر آنها در آن نقطه تحلیلی باشند، متحد خواهند بود.
 ۴- $\{z^n\}$ بر $|z| < 1$ همگرای یکنواخت نیست.
 ۶- لزومی ندارد تحلیلی باشند.
 ۷- $\int_{|z|=1} |z|^2 dz = 0$ ، ولی $|z|^2$ تحلیلی نیست. مرا کاربرد ندارد زیرا
 که انتگرال بر هر مرز صفر نیست.

$$(|z| < 1), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad -9$$

$$f'(2) = 1 \neq \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}.$$

در اینجا $1/(1-z)$ در $z=2$ با $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ تعریف نمی‌شود، فصل ۱۴ ملاحظه می‌شود.

بخش ۸-۱ تمرینها

- ۳- (الف) $2\pi e^2$ (ب) $2\pi i e^4$ (پ) $8\pi i e^4$
- (ت) $2\pi i e^2(\sin 2 + \cos 2)$ (ث) $144\pi i$
- ۴- (الف) 0 (ب) 0 (پ) $12\pi i$
- ۵- (الف) $\frac{2\pi}{17}$ (پ) $\frac{\pi}{17} - \frac{4\pi i}{17}$ (ث) $\frac{2\pi}{17} - \frac{8\pi i}{17}$
- ۶- (الف) $z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5$
- (پ) $1 + z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{7}{6}z^3 + \frac{25}{24}z^4 + \frac{27}{40}z^5$
- ۸- (الف) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (پ) 1 (ت) 0
- ۱۳- (الف) مانند $e^{\alpha \log(1-z)}$ بیان کنید که و بسط دهید.

بخش ۸-۲ پرسش‌ها

- ۲- e^z برای $\operatorname{Re} z \leq 0$ کراندار است.
- ۳- خیر، همانطور که در فصل ۱۰ خواهیم دید.
- ۸- خیر، زیرا که $\sin \pi z$ و 0 در اعداد صحیح مساویند.

بخش ۸-۳ پرسش‌ها

- ۱- بر $|z| = r$ ، $f(z) = z^n$
- ۲- تمرین ۴ ملاحظه شود.
- ۵- لزوماً "خیر". اگر $f(z) = e^z$ آنگاه برای یک قرص $|z| < r$ و هر وقت $|e^{re^{i\theta_1}}| < |e^z|$ ، $\theta_1 \neq 2k\pi$
- ۶- در ناحیه $\{z: \operatorname{Re} z < 0 \cup z = 0\}$ ، e^z در $z=0$ ماکزیمم است.

بخش ۸-۳ تمرینها

- ۳- (الف) بیشینه در $z=r$ ، کمینه در $z=-r$
- (ب) بیشینه و کمینه در همه جا
- (پ) بیشینه در $z=r$ ، کمینه در $z=ir$
- (ت) بیشینه در $z=-r$ ، کمینه در $z=r$

بخش ۸-۴ پرسش‌ها

$$1 - e^{1/z}, \quad z \neq 0$$

۶- $|z|$ صفحه را بر پرتو $\operatorname{Re} u \geq 0$ ، $v = 0$ می‌نگارد، که باز نیست.

۷- e^z صفحه را بر صفحه سفته می‌نگارد که بسته نیست.

بخش ۸-۴ تمرینها

۳- حاصلجمع ریشه‌های $P(z)$

فصل ۹بخش ۹-۱ پرسش‌ها

۱- $1/\sin(1/z)$ در مجموعه فشرده $|z| \leq 1$ به تعداد نامتناهی تکینه دارد. همگی

به استثنای $z = 0$ ، تنها هستند.

۲- یک مثال نقض در فصل ۱۳ خواهیم داشت.

$$5 - e^z - (7 - 2i)$$

۷- تنها توابع ثابت

۹- خیر، به موجب تعریف

بخش ۹-۱ تمرینها

۴- (ب) قطب‌های ساده در $z = 1/(2k+1)\pi i$ ، تکینه‌های اساسی غیرتنها در $z = 0$

(ت) تکینه‌های اساسی و تنها در $z = 0$ و $z = \infty$

(ث) نقطه شاخه در $z = 1$ و قطب ساده در $z = -1$

۵- (الف) برداشتی (ب) قطب ساده

(پ)، (ت) و (ج) تکینه‌های اساسی تنها هستند.

(ث) تکینه اساسی غیرتنها.

$$6 - f(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_0)(z - z_1)^k} e^{1/(z - z_2)}$$

بخش ۹-۲ پرسش‌ها

۲- خیر، $\sum_{n=1}^{\infty} (z^n/n^2)$ بر طبق $1/2 \leq |z| \leq 1$ همگرای یکنواخت است ولی

بر $|z| = 1$ تحلیلی نیست.

۴- $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2)$ در نیم صفحه تحلیلی است.

۵- تنها برای توابع ثابت

۶- k و ۱۸- اگر $f(z)$ بر طوقی تحلیلی باشد، آنگاه همانندی در آن طوق برقرار است.بخش ۹-۲ تمرینها

$$2- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2n} n!}$$

$$3- \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n - b^n}{z^{n+1}} \quad (\text{پ})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-a)^{n-1}}{(a-b)^{n+1}} \quad (\text{ت})$$

$$4- \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} \quad (\text{ت}) \quad -\frac{i}{4(z-i)} \quad (\text{الف})$$

$$5- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{k! z^k} \quad (\text{الف}) \quad a_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{k!} \quad \text{که} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad (\text{ب})$$

$$7- \frac{4}{z^4} + \frac{4}{z^3} + \frac{8}{3z^2} + \frac{4}{3z}$$

بخش ۹-۳ پرسش‌ها۱- قضیه مررا کاربرد ندارد زیرا که $\sin(1/z^2)$ در $z=0$ پیوسته نیست.

۳- هیچ کدام. قضیه مانده تنها یک شکل ساده تر قضیه کوشی است.

۶- چونکه $1 + x^{2n+1}$ بر محور حقیقی تکیه دارد.بخش ۹-۳ تمرینها۱- (الف) در $z = \pi/2 + k\pi$ ، مانده برابر است با $(-1)^{k+1}$ (پ) در $z=1$ مانده -۲ است؛ و در $z=2$ مانده ۲ است.

$$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ اگر } n \text{ زوج باشد} \\ -\frac{1}{(n+1)!} \text{ اگر } n=4k+1 \\ \frac{1}{(n+1)!} \text{ اگر } n=4k+3 \end{array} \right\} \text{ (ث) مانده در } z=0 \text{ برابر است با}$$

$$3- 0 \quad (\text{الف}) \quad 2\pi i(1+2e+2e^4) \quad (\text{ب})$$

$$4- (2-4n)i \quad (\text{الف}) \quad (2+4n)i \quad (\text{ب})$$

فصل ۱۰بخش ۱۰-۱ پرسش‌ها

۴- نه به موجب قضیه پیکار .

$$u(z) = \begin{cases} x+y, & |z| < 1 \\ 1, & |z| = 1 \end{cases} \quad -۶$$

۸- قضیه ۱۰-۷ تعمیم قضیه ۸-۱۰ است ، چون که $\operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)|$ در حالت $\lambda = 0$ به قضیه ۱۰-۲ تحویل می شود .

بخش ۱۰-۲ پرسش‌ها

۲- بله ، بابکار بردن (۱۳) ، برای آن تابع تام یک کران بالا می یابیم و سپس قضیه ۸-۱۰ را بکار می بریم .

۴- در فصل ۱۱ ، نگاشت‌ها را از قرص برمیدانهای دیگر بررسی می کنیم . این کارما را قادر می سازد که مسئله دیریکله را برای میدانهای دیگر حل کنیم .

۵- قضیه ۱۰-۳ مقدار تابع همساز را در مرکز دایره به دست می دهد . در حالی که قضیه ۱۰-۸ مقدار تابع را در همه نقاط درونی به دست می دهد .

بخش ۱۰-۲ تمرینها

$$(0 \leq \tan^{-1} t \leq \pi) \quad u(re^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{1-r^2}{2r \sin \theta} \quad -۵$$

بخش ۱۰-۳ پرسش‌ها

۲- باتوجه به قضیه ۱۰-۱۱ ، خاصیت میانگین ، وقتی که حاصلضرب دو تابع همساز ، همساز نباشد ، برقرار نیست .

۴- بله ، کافیت $\{-u_n(z)\}$ را در نظر بگیریم .

۵- $|z| < R$ و $\operatorname{Re} f(z) > \alpha$ را در نظر بگیرید .

۷- از اینکه $\int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta$ استفاده کنید .

فصل ۱۱بخش ۱۱-۱ پرسش‌ها

۱- بنا به قرارداد خود خط ، خط مماس است .

۲- تنها در نقطه برخورد .

۳- نه ، اگر مشتقات نسبی پیوسته باشند . به کتاب نه‌ری (۱۵) مراجعه شود .

۷- یک نگاشت یک به یک اگر تحلیلی باشد همدیس است . یک نگاشت همدیس یک

به یک موضعی است .

۱۰- تنها ترکیب .

بخش ۱-۱ تمرینها

$$f(z) = e^{3\pi i(z-z_0)/\varepsilon} - 1$$

بخش ۲-۱ پرسش‌ها

۲- نه حتی خانواده چند جمله‌بی‌های ثابت هم نیست .

۳- $\{z^n\}$ بر $|z| < 1$ کراندار یکنواخت است ، ولی $\{nz^{n-1}\}$ نیست .

۴- نه ، فرض کنیم F مشتمل بر یک تابع $f(z)$ با تعریف $f(z) = \begin{cases} 1, & z \neq 1/n, \\ n, & z = 1/n. \end{cases}$

این تابع در هر همسایگی مبدأ بی‌کران است .

۵- فرض کرده‌ایم که پاره خط میان هر دو نقطه در میدان قرار دارد . پس اثبات

برای هر میدان محدب هم برقرار است .

۶- دنباله می‌بایست شماره‌پذیر باشد .

بخش ۳-۱ پرسش‌ها

۲- $f(z) = az$ ، $a > 0$ ، طوق $R > |z| > r$ راهمدیسوار بر طوق $aR > |w| > ar$

می‌نگارد .

۵- نه ، زیرا ، قرص سفته همبند ساده نیست .

۷- در ساختمان تابع ریشه دوم تحلیلی .

۸- به منظور اطمینان بر اینکه خانواده نرمال ساخته شده تهی نیست .

بخش ۳-۱ تمرینها

۳- فرض کنیم که صفحه همدیسوار هم‌ارز یک میدان همبند ساده \mathcal{D} به‌غیراز خودش

می‌بود . چون که \mathcal{D} همدیسوار هم‌ارز یک میدان کراندار است . پس می‌بایست تابع تامی

موجود باشد که بر یک میدان کراندار نگاشته شود .

$$f(z) = \frac{r_2}{r_1} z \quad -5$$

فصل ۱۲بخش ۱-۱۲ پرسش‌ها

۲- قضیه ۱-۱۲ ما را قادر می‌سازد که قضایایی در مورد S با استفاده از قضایای در مورد T ، اثبات کنیم.

۴- توابعی به شکل $z/(1 - e^{i\alpha}z)^2$ بی‌کران هستند.

۷- این از این نکته ناشی می‌شود که اگر $J(f)$ یک تابع پیوسته و تعریف شده بر خانواده فشرده باشد، در این صورت، مسئله $|J(F)| = \max$ به ازاء $f \in F$ جواب دارد.

بخش ۱-۱۲ تمرین‌ها

$$1/z - 1$$

۵- مشتق آن در $z = -\frac{1}{2}e^{-i\alpha}$ برابر صفر است.

بخش ۲-۱۲ پرسش‌ها

۱- در آنجا که گفتیم $0 \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta})$

۳- صفحه سفته

۵- چونکه برای $f(z) \in S$ ، $f(0) = 0$ می‌توانیم بر $\max_{|z|=r} |f(z)|$

کرانها بیابیم.

۶- می‌توان نشان داد که مماس بر خم نگاره بر خودش بیش از π رادیان باز نمی‌گردد.

۷- با $f(z) = z$ می‌توان توابع محدب z و یا $-\log(1-z)$ را متناظر کرد.

۹- در کارهای پیشرفته‌تری می‌توان نشان داد که شعاع ستاره‌گونی برای S برابرست

$$\text{با } (\pi/4) \approx 0.65$$

فصل ۱۳بخش ۱-۱۳ پرسش‌ها

۳- تمرینات ۵ و ۶ ملاحظه شود.

۴- می‌تواند به ∞ و ۰ میل کند و یا نوسان کند.

۵- دنباله $\{a_n\} \rightarrow 0$ رشته $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرای مطلق نیست. ممکن است

همگرا باشد یا نباشد.

۸- یک تابع تام است.

بخش ۱-۱۳ تمرینها

$$1 \quad (الف) \frac{1}{2} \quad (ب) 2 \quad (پ) \frac{1}{3} \quad (ت) 1$$

$$8- (الف) |z| < 1 \quad (ب) |z| < 1 \quad (پ) \operatorname{Re} z > 1$$

بخش ۲-۱۳ پرسش‌ها

۱- این در قسمت بعد ثابت می‌گردد.

۶- لازم است که همگرایی مطلق باشد، به عنوان مثال:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1} z}{n} \right) \quad \text{در } z=1 \quad \text{واگراست}$$

۷- بسط رشته‌یی رامی‌توان از بسط حاصلضربی مشخص نمود. ولی معکوس آن درست

نیست.

بخش ۲-۱۳ تمرینها

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\log n} \right) e^{(z/\log n) + (1/2)(z/\log n)^2 + \dots + (1/n)(z/\log n)^n + \dots} \quad -1$$

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n) e^{z^2/2n} \quad -2$$

$$\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \quad (الف) -3$$

$$g(z) z = -\log 2i \quad (ب) -4$$

$$\frac{9}{8} \frac{e^{\pi^2} + e^{-\pi^2} - (e^{\pi^2/3} + e^{-\pi^2/3})}{\pi^4} \quad -11$$

بخش ۳-۱۳ پرسش‌ها

۲- آنها برخمریخت هستند.

۵- برای اینکه بسط ماکلورن بدست آید.

۶- نه، چون که تابع تام $g(z)$ که در اثبات قضیه ۱۳-۸ ساختیم یکتا نیست.

بخش ۳-۱۳ تمرینها

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^n} \quad -1$$

$$-\frac{i}{2} e^{-iz}$$

فصل ۱۴

بخش ۱۴-۱ پرسش‌ها

۱- تنها وقتی که $\mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_1 = \emptyset$

$$\sin \frac{1}{1-z_n} = 1, \quad z_n = 1 - \frac{1}{n\pi}$$

۸- وقتی که اشتراک آنها غیر تهی باشد.

۱۰- می‌توان نشان داد که اگر

$$(\varepsilon > 0), \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k} \quad \text{with} \quad n_{k+1} > (1 + \varepsilon)n_k$$

در این صورت دایره همگرایی رشته، مرز طبیعی تابع است.

بخش ۱۴-۱ تمرینها

$$f(z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (z - e^{i\theta_k})} \quad -۱$$

$$۷- \text{بنهید} \quad f(z) = \frac{\alpha_1}{z - e^{i\theta_1}} + \frac{\alpha_2}{z - e^{i\theta_2}} + \cdots + \frac{\alpha_k}{z - e^{i\theta_k}} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

که $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ برای $|z| \leq 1$ تحلیلی است.

بخش ۱۴-۲ پرسش‌ها

۴- ما به همگرایی یکنواخت دنباله $\{(1 - t/n)^n\}$ نیاز داریم. این دنباله بر آن

خط همگرایی یکنواخت نیست.

۶- رشته $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ در قرص تحلیلی و بر زیر مجموعه‌های فشرده قرص همگرایی

یکنواخت است، می‌توان نشان داد که $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n/n^2)$ در یک نیم صفحه تحلیلی است و بر زیر

مجموعه‌های فشرده این نیم صفحه همگرایی یکنواخت است.

۷- تام.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

معادل انگلیسی

Analytic Continuation

Direct Analytic Continuation

Essential

Mousetrap Principle

Argument Principle

Principal

Irrational

Streographic Projection

Translation

Line Integral

Associative

Inversion

Imaginary

Clousure

Fixed

Parametrization

Distributive

Covering

واژه فارسی

ادامه تحلیلی

ادامه تحلیلی مستقیم

اساسی

اصل تله‌موش

اصل‌شناسه

اصلی

اصم

افکنش گنجنگاری

انتقال

انتگرال خطی

انجمنی

انعکاس

انگاری

بستار

پایرجا

پارامتری کردن

پخش‌ی

پوشش

Sectionally Continuous	پیوسته بخشی
Multiple-Valued Function	تابع چند مقداری
Entire	تام
Transformation	تبدیل
Sub-Harmonic	تحت همساز
Analytic	تحلیلی
Close-to-Convex	تقریباً " محدب
Univalent	تک‌ارز
Singularity	تکینه
Removable Singularity	تکینهء برداشتنی
Nonisolated Singularity	تکینهء غیرتنها
Monodromy	تکمیدانی
Isolated	تنها
Special Function	توابع خاص
Commutative	جابجایی
Polynomial	چند جمله‌یی
Infinite Product	حاصلضرب نامتناهی
Superior Limit	حد زیرین
Inferior Limit	حد زیرین
Range	حوزه مقادیر
Quotient	خارج قسمت
Curve	خم
Simple Curve	خم ساده
Length	دراز
Interior	درونی
Bilinear	دو خطی
Rotation	دوران
Rectifiable	راستی‌پذیر
Power Series	رشته توانی
Root	ریشه
Chain	زنجیر

Starlike	ستاره‌گون
Punctured	سفته
Deleted	سوده
Trichotomy	سه‌گانگی
Branch	شاخه
Radius	شعاع
Winding Number	شماره گشت
Argument	شناسه
Trivial Zero	صفر بدیهی
Function Element	عنصر تابع
Extremal	فرینال
Compact	فشرده
One-Point Compactification	فشرده‌سازی تک‌نقطه‌یی
Parallelogram-Rule	قاعده متوازی‌الاضلاع
Absolute-Value	قدر مطلق
Inverse Function Theorem	قضیه تابع وارون
Maximum Modulus Theorem	قضیه ماکزیمم کالبد
Minimum Modulus Theorem	قضیه می‌نیمم کالبد
Identity Theorem	قضیه همانی
Pole	قطب
Modulus	کالبد
Complete	کامل
Bound	کران
Bounded	کراندار
Fractional	کسری
Arc	کمان
Extended	گسترش‌یافته
Rational	گویا
Analytic Logarithm	لگاریتم تحلیلی
Residue	مانده
Dense	متراکم

Complement	متمم
Convex	محدب
Boundary	مرز
Natural Boundary	مرز طبیعی
Conjugate	مزدوج
Circulas	مستدیر
Determination	مشخصه
Dominated	مغلوب
Regular	منظم
Orientation	وجه کردن
Domain	میدان
Domain of Regularity	میدان نظام
Region	ناحیه
Ineuqality	نامساوی
Normal	نرمال
Cross-Ratio	نسبت توافقی
Initial Point	نقطه آغازی
Terminal Point	نقطه پایانی
Limit Point	نقطه حدی
Boundary Point	نقطه مرزی
Regular Point	نقطه منظم
Singular Point	نقطه منفرد
Image	نگاره
Mapping	نگاشت
Complex Exponent	نماهای مختلط
Exponential	نمایی
Kernel	هسته
Connected	همبند
Multiply Connected	همبند چندگانه
Simply Connected	همبند ساده
Equicontinuous	همپیوسته

Conformal	همدیس
Conformally Equivalent	همدیسوار هم‌ارز
Harmonic	همساز
Absolute Convergence	همگرای مطلق
Pointwise Convergence	همگرای نقطه‌یی
Isogonal	همگوشه
Smooth	هموار
Field	هیأت
Monotone	یکنوا
Uniform	یکنواخت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute Convergence	همگرایی مطلق
Absolute Value	قدر مطلق
Analytic	تحلیلی
Analytic Continuation	ادامه تحلیلی
Arc	قوس
Argument	شناسه
Argument Principle	اصل شناسه
Association	انجمنی
Bilinear Transformation	تبدیل دوخطی
Bound	کران
Boundary Point	نقطه مرزی
Bounded Set	مجموعه کراندار
Branch	شاخه
Chain	زنجیر
Close-to-Convex	تقریباً "محدب"
Commutative	جابجایی
Comapct	فشده
Complete	کامل
Complex	مختلط

Conformal	همدیس
Confromallly Equivalent	همدیسوار هم‌ارز
Conjugate	مزدوج
Connected	همبند
Contour	مرز
Convergence	همگرایی
Convex	محدب
Countable	شماره‌پذیر
Cross-Cut	پرش عبوری
Cross-Ratio	نسبت توافقی
Curve	خم
Deleted Neighborhood	همسایگی سوده
Dense	متراکم
Determination	مشخصه
Differentiation	مشتق‌یابی
Distributive Law	قانون پخشی
Domain	میدان
Dominated Convergence Test	آزمون همگرایی مغلوب
Entire	تام
Equicontinuity	همپیوستگی
Essential Singularity	تکینه اساسی
Expansion	بسط
Extended	گسترش‌یافته
Extremal	فرینال
Field	هیات
Fixed Point	نقطه پایرجا
Function Element	عنصر تابع
Fundamental	اساسی
Harmonic	همساز
Hyperbolic	هذلولی
Identity	همانی

Imaginary	انگاری
Infinite	نامتناهی
Infinity	بی نهایت
Interior	درونی
Inverse	وارون
Inversion	انعکاس
Isogonal	همگوشه
Isolated	تنها
Line Integral	انتگرال خطی
Linear Fractional Transformation	تبدیل خطی کسری
Magnification	برگساز
Meromorphic	برخه ریخت
Modulus	قدر مطلق
Mousetrap Principle	اصل تله موشی
Natural Boundary	مرز طبیعی
Nonisolated	غیر تنها
Normal Family	خانواده نرمال
Orientation of Curve	موجه کردن خم
Power Series	رشته توانی
Preimage	پیش نگار
Principal Branch	شاخه اصلی
Quotient	خارج قسمت
Radius	شعاع
Range	برد
Rectifiable	راستی پذیر
Region	ناحیه
Regular	منظم
Removable Singularity	تکینه برداشتنی
Residue	مانده
Rotation	دوران
Sectionally Continuous	پیوسته بخشی

Sequence	دنباله
Series	رشته
Simple Curve	خم ساده
Simply Connected	همبند ساده
Singular Point	نقطه منفرد
Singularity	تکینه
Smooth Curve	خم هموار
Starlike	ستاره‌گون
Stereographic projection	افکنش گنجگاری
Subharmonic	تحت همساز
Subsequence	زیر دنباله
Transcendental	متعالی
Translation	انتقال
Trichotomy	سه‌گانگی
Trivial Zeros	صفرهای بدیهی
Uniform	یکنواخت
Uniform Bounded	کراندار یکنواخت
Univalent	تک‌ارز
Variation of The Argument	وردنش‌شناسه
Winding Number	شماره گشت

فهرست راهنما

انتهرال خطی (استقلال در مسير) ۲۰۶	آزمون خارج قسمت ۱۴۸
انتهرال گیری (در رشته‌ها) ۲۳۶	آزمون وایرستراس ۱۵۷
انجمنی (قانون) ۱۷	آزمون همگرایی مغلوب ۱۵۷
انعکاس ۶۷	ادامه تحلیلی از تابع ریمان - زتا ۴۳۹
انگاری (قسمت) ۱۸	ادامه تحلیلی از تابع گاما ۴۳۷
انگاری (محور) ۲۰	ادامه تحلیلی مستقیم ۴۲۵
انگاری (واحد) ۱۶	اصل تله‌موشی ۱۴۲
بخشی (پیوسته) ۱۹۲	اصل شناسه ۲۶۱
بدیهی (صفر) ۴۴۴	اصل هارنک ۳۳۲
برد ۵۴	اصول ماکزیمم و می‌نیمم برای توابع
برداشتنی (تکینه) ۲۷۳	همساز ۳۱۳
بردار ۲۰	اعداد مختلط (صورت قطبی) ۲۴
برش عبوری ۲۰۸	افکنش گنجنکاری ۵۰
بزرگساز ۶۶	انتقال ۶۵
بستار (مجموعه) ۳۴	انتهرال (تعریف) ۱۸۸
بسط حاصلضربی (برای توابع تام) ۴۰۷	انتهرال حقیقی (خواص) ۱۸۳
پابرجا ۸۲	انتهرال حقیقی (محاسبه) ۲۹۵
پارامتری کردن ۱۹۲	انتهرال خطی (تعریف) ۲۰۱

پوشش باز ۴۵	- وارون ۵۴
پیش‌نگار ۱۵۴	- هذلولی ۹۴
پیوسته (بخشی) ۱۹۴	- همساز ۱۳۲
پیوسته (تابع) ۵۵	- یک‌به‌یک ۵۴
پیوسته (خم) ۱۸۴	تبدیل خطی کسری ۷۰
تابع	تبدیل شوارتز - کریستوفل ۳۶۴
- برخه ریخت ۴۱۶	تبدیل دو خطی ۷۱
- تام ۳۹۸، ۱۲۴	- (قرص برقرص) ۷۸
- تحلیلی ۱۲۳	- (نیم صفحه برقرص) ۷۶
- تکارز ۳۵۷	- (نیم صفحه برنیم صفحه) ۷۸
- پیوسته ۱۱۵	تبدیل همدیس ۳۴۱
- پیوسته یکنواخت ۱۵۹	تقریباً " محدب
- چند مقداری یا چندارز ۱۰۴	تکارز (تابع) ۵۷
- خطی ۶۶	تکینه (نقطه) ۲۷۱
- دو خطی ۷۱	تکینه اساسی ۲۷۵
- ریمان - زتا ۴۳۸	تکینه تنهای اساسی ۲۷۶
- کوئب ۳۶۹	تکینه تنها ۲۷۱
- گاما (ادامه تحلیلی) ۴۳۷	تکینه در بی نهایت ۲۷۸
- گاما (تعریف انتگرالی) ۴۳۴	تکینه قطب ۲۵۸، ۲۷۳
- گاما (تعریف حاصلضربی) ۴۱۲	تکمیدانی (قضیه) ۴۲۷، ۱۸۷
- لگاریتم ۱۰۳	تنها (تکینه) ۲۷۱
- مثلثاتی ۹۲	تیلر (رشته) ۱۶۸،
- مثلثاتی معکوس ۱۱۱	تیلر (فرمول باقیمانده) ۱۷۲
- محدب ۳۸۳	
- مختلط ۵۴	ثابت اویلر ۴۱۲
- مزدوج همساز ۳۰۹، ۱۳۲	
- مشتق‌پذیر ۱۱۸	چند جمله‌ای (رشد) ۲۴۲
- نمایی ۸۹	چند جمله‌ای (صفرها) ۲۴۳
- نمایی (بسط رشته‌ای) ۱۲۴	
- نمایی (خواص نگاشتی) ۹۶	حاصلضرب رشته‌ها ۱۷۴
- نمایی (وارون) ۱۰۳	حاصلضرب نامتناهی ۳۵۹

حد تابع ۵۷، ۱۱۵	- توابع ۱۵۷
حد دنباله ۳۸	- توانی ۱۳۹
حد زیرین ۱۴۴	- تیلر ۲۲۸
حد زیرین ۱۴۴	- لرا ۲۶۱
حقیقی (محور) ۲۰	- لرا (قسمت اصلی)
حقیقی (قسمت) ۱۸	- ماکلورن ۱۶۸، ۲۳۰
حلزونی لگاریتمی ۹۹	ریشه‌های عدد مختلط ۲۷
حوزه مقادیر ۵۴	
خاصیت ددکیند ۴۰	زاویه بین دو خم ۳۴۱
خارج قسمت توابع نام ۴۱۶	زنجیر ۴۲۵
خانواده نرمال ۳۵۲	زیر دنباله ۴۰
- فشرده ۳۵۵	ژاکوبین ۱۲۳
خم ۱۸۳	ستاره‌گون (تابع) ۳۷۹
- بسته ۱۸۵	سه‌گانگی ۱۸
- پارامتری شده ۱۹۴	سینوس ۹۲
- پیوسته ۱۸۴	خواص نگاشتی - ۱۰۱
- راستی‌پذیر ۱۹۴	بسط رشته‌ای برای - ۲۳۰
- ساده ۱۸۵	بسط حاصلضربی برای - ۴۰۹
- هموار ۱۸۸	
	شاخه ۱۰۴
دستگاه اعداد حقیقی گسترش یافته ۵۰	- اصلی ۱۰۴
دستگاه اعداد مختلط گسترش یافته ۵۲	بریدگی - ۱۱۰، ۱۰۵
دنباله ۳۸	نقطه - ۲۷۹
- توابع ۱۵۱	شعاع همگرایی - ۱۶۳
- فیبوناچی ۱۷۸	شعاع تحدب ۳۸۷
- کوشی ۴۲	شمارش‌پذیر ۴۵
- یکنوا ۴۰	شماره گشت ۲۶۱
دوران ۶۶	شناسه ۲۴ ۶۶
	شوارتس (لم) ۲۵۳
راستی‌پذیر ۱۹۴	نامساوی — برای اعداد مختلط ۲۴
رشته ۱۳۹	نامساوی — برای توابع تحلیلی ۲۵۳

شوارتس - کریستوفل (تبدیل) ۳۶۲

قضیه

- اساسی جبر ۲۴۳

- بول - کاراتئودوری ۳۰۹

- بولتسانو - وایرشراس ۴۲

- بولتسانو - وایرشراس (برای توابع

تحلیلی) ۳۵۵

- بزرگ پیکار ۲۷۸

- پوششی ۳۷۰

- پیکار ۲۴۲

- تکمیدانی ۱۸۷

- خم ژردان ۱۸۵

- دموآور ۲۷

- کازوراتی - وایرشراس ۲۷۶

- کوشی ۲۱۷

- کوشی برای قرص دایره ۲۱۵

- کوشی برای ناحیه همبند چندگانه ۲۱۷

- کوشی برای مستطیل ۲۱۱

- کوشی (صورت ضعیف) ۲۰۴

- کوشی - گورسا ۲۱۱

- گرین ۲۰۲

- لیوویل ۲۴۱

- صورت تعمیم یافته قضیه لیوویل

- ماکریم قدر مطلق ۲۵۰

- ماکریم برای توابع همساز

- مانتل ۴۵۴

- مانده ۲۹۳

- می نیم برای توابع همساز ۳۱۴

- مساحت ۳۶۶

- مررا ۲۳۲

- میانگین گاوس ۲۴۹

- می نیم قدر مطلق ۲۵۲

صفحه مختلط ۱۲۰

- گسترش یافته ۵۲

صفر بدیهی ۴۴۴

صفرهای توابع نام ۴۰۶

صفرهای تابع ریمان - زتا ۴۴۴

صفرهای چند جمله‌ای ۲۴۳

عدد مختلط ۱۶

ریشه - ۲۹

صورت قطبی -

قدر مطلق - ۲۱

مزدوج - ۲۲

نمایش برداری - ۲۱

عنصر تابع ۴۲۵

فرمول انتگرال یواسن ۳۱۸

فرمول انتگرال کوشی ۲۲۳، ۲۲۷

فشرده

مجموعه - ۴۶ ۴۹

خانواده نرمال - ۳۵۵

فشرده سازی تک نقطه‌ای ۵۱

قاعده متوازی الاضلاع ۲۱

قانون

- انجمنی ۱۷

- پخش پذیری ۱۷

- جابجایی ۱۷

قدر مطلق ۲۱

قسمت اصلی ۲۴۸

- می‌نیم برای توابع
همساز ۳۱۳
— میتاگ — لفلہ ۴۱۸
— نگاشت باز ۲۶۶
— نگاشت ریمان ۳۵۹
— وارون تابع ۲۷۰
— هاین — بول ۴۷
— همانی ۲۴۶
— همانی برای توابع همساز ۳۰۸
— هوروتیس ۲۶۵
قطب در بی‌نهایت ۲۷۸
کامل ۴۳
کران بالا (کوچکترین) ۴۰
کران پائین (بزرگترین) ۴۰
کراندار یکنواخت ۳۵۰
— موضعی ۳۵۰
کسینوس ۹۲
خواص نگاشتی — ۱۰۰
بسط حاصلضربی برای —
بسط رشته‌ای برای — ۲۳۰
کوشی
نامساوی — ۲۴۰
فرمول انتگرال — ۲۲۳ ۲۲۶
گشت (شماره) ۲۶۱
گروه تبدیلات خطی کسری ۸۲
گسترش یافته ۵۰
گمان بایبرباخ ۳۶۹
لگاریتم ۲۶۱
شاخه‌های — ۹۴
مشتق — ۱۳۵
بسط رشته‌ای برای — ۱۶۶، ۲۳۳
لگاریتم تحلیلی ۲۲۰
مانده (قضیه) ۲۹۳
متراکم ۳۵۳
متعالی (تابع) ۲۴۲
متمم (مجموعه) ۳۴
مثلت (ناساوی) ۲۱
مثلاثی (توابع) ۹۲
مثلاثی (توابع وارون) ۱۱۱ ۱۳۶
خواص نگاشتی توابع مثلاثی ۹۹
مجموعه
نقطه مرزی — ۳۴
— باز — ۳۳
— بسته — ۳۴
— فشرده ۴۵، ۴۷
— کراندار ۳۲
— همبند ۳۴
محدب ۳۸۳
تقریباً — ۳۸۸
محک‌کوشی
— برای دنباله‌ها ۴۲
— برای رشته‌ها ۱۴۰
— برای همگرایی یکنواخت ۱۵۶، ۱۵۷
مرز ۳۴، ۱۹۳
مجموع چند — ۱۹۲
زاویه بین دو — ۳۴۱
درازای — ۱۹۳
مرز طبیعی ۴۳۱
مزدوج عدد مختلط ۲۲

نرمال ۳۵۲	مزدوج توابع همساز ۱۳۲
نسبت توافقی ۷۴	مزدوج همساز ۱۳۲، ۳۰۹
نقطه	مسئله دیریکله
- آغازی ۱۸۸	- برای قرص ۳۲۴
- پایرجا ۸۲	- برای نیم صفحه ۳۳۰
- پایانی ۱۸۸	- برای توابع همساز ۳۲۴
- حدی ۳۳	مشتق
- در بی نهایت ۵۱	- برای توابع چندمقداری ۱۱۰
- درونی ۳۲	- لگاریتمی ۲۵۷
- شاخه ۲۷۹	- یک رشته ۲۳۳
- مرزی ۳۴	مشخصه برای توابع چندمقداری ۱۱۰
- منظم ۱۸۶	معادلات کوشی - ریمان ۱۲۰
- تنها ۲۷۱	- در شکل قطبی ۱۲۸
نگاره ۶۵	معادله لاپلاس ۱۳۲
نگاشت (تابع یا تبدیل را نگاه کنید)	مغلوب ۱۵۷
نگاشت همدیس از تبدیلات دو خطی ۳۴۸	مقدار اصلی ۲۸۱
نماهای مختلط ۱۰۸	ماس برخم ۳۴۰
نمایی ۱۶۲	موجه کردن یک خم ۱۸۷
	میدان ۳۵
وارون تابع مثلثاتی ۱۱۱	- ستارهگون ۳۷۹
مشتق - ۱۳۶	- محدب ۳۸۳
وردنش ۲۶۱	- نظام ۴۲۶
همپیوسته ۳۵۱	- همبند چندگانه ۱۸۶
همدیس وارهم ارز ۳۶۲	- همبند ساده ۱۸۶
همساز ۳۰۹	
همسایگی سوده ۳۳	ناحیه ۳۵
همسایگی بی نهایت ۵۰	نامساوی
همگرایی	- کوشی ۲۴۰
- برای حاصلضربها ۳۹۶	- هارنک ۳۳۰
- برای دنباله توابع ۱۵۰	- شوارتس ۲۴
- برای رشته توابع ۱۵۶	- مثلث ۲۱

— برای رشته توانی ۱۶۲

— برای رشته لوران ۲۶۱

— دنباله ۳۸

— مطلق ۱۴۱، ۳۹۹

— نقطه‌ای ۱۵۰

— یکنواخت ۱۵۱، ۴۰۱

شعاع — ۱۶۳

همگوشه ۳۴۱

هیات ۱۷

هیات مرتب ۱۸

مراجع

- X 1. W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill, 1964, p. 11.
2. D. Sprecher, *Elements of Real Analysis*. New York: Academic Press, 1970.
3. A. Taylor, *Advanced Calculus*. New York: Blaisdell, 1955.
4. M. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points* (4th ed.). Cambridge University Press, 1961.
5. J. DePree and C. Oehring, *Elements of Complex Analysis*. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1969.
- X 6. T. Apostol, *Mathematical Analysis*. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1967.
7. *Ibid.*
8. L. Ahlfors, *Complex Analysis* (2nd ed.). New York: McGraw-Hill, 1966, p.141.
9. J. DePree and C. Oehring, *Op. cit.*
10. L. Ahlfors, *Op. cit.*, p. 114.
11. E. Hille, *Analytic Function Theory*, Vol. 2. Lexington, Mass: Ginn, 1962.
12. Z. Nehari, *Introduction to Complex Analysis* (rev. ed.). Boston: Allyn and Bacon, 1968, pp. 188-205.
13. E. Hille, *Op. cit.*
14. J. DePree and C. Oehring, *Op. cit.*, p. 80.
15. Z. Nehari, *Op. cit.*, p. 165.