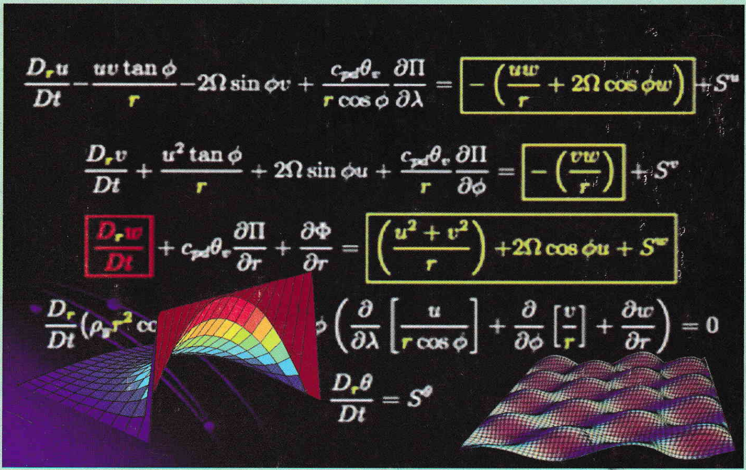
دانشگاه پیام نور

معادلات دیفرانسیل

دکتر سعید فاریابی



دانشگاه پیام نور

معادلات دیفرانسیل

(رشتهٔ ریاضی)

دکتر سعید فاریابی

بسم الله الرحمن الرحیم

پیشگفتار ناشر

کتاب‌های دانشگاه پیام نور حسب مورد و با توجه به شرایط مختلف یک درس در یک یا چند رشتهٔ دانشگاهی، به‌صورت کتاب درسی، متن آزمایشگاهی، فرادرسی، و کمک‌درسی چاپ می‌شوند.

کتاب درسی ثمرهٔ کوشش‌های علمی صاحب اثر است که براساس نیازهای درسی دانشجویان و سرفصل‌های مصوب تهیه و پس از داوری علمی، طراحی آموزشی، و ویرایش علمی در گروه‌های علمی و آموزشی، به چاپ می‌رسد. پس از چاپ ویرایش اول اثر، با نظرخواهی‌ها و داوری علمی مجدد و با دریافت نظرهای اصلاحی و متناسب با پیشرفت علوم و فناوری، صاحب اثر در کتاب تجدیدنظر می‌کند و ویرایش جدید کتاب با اعمال ویرایش زبانی و صوری جدید چاپ می‌شود.

متن آزمایشگاهی (م) راهنمایی است که دانشجویان با استفاده از آن و کمک استاد، کارهای عملی و آزمایشگاهی را انجام می‌دهند.

کتاب‌های فرادرسی (ف) و **کمک‌درسی** (ک) به منظور غنی‌تر کردن منابع درسی دانشگاهی تهیه و بر روی لوح فشرده تکثیر می‌شوند و یا در وبگاه دانشگاه قرارمی‌گیرند.

مدیریت تولید محتوا و تجهیزات آموزشی

فهرست مطالب

فصل اول: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۱

فصل دوم: کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۶۹

فصل سوم: معادلات دیفرانسیل خطی ۱۰۱

فصل چهارم: جواب‌های سری معادلات دیفرانسیل خطی ۱۹۳

فصل پنجم: توابع بسل ۲۶۹

فصل ششم: دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل ۲۹۱

فصل هفتم: تبدیلات لاپلاس ۳۲۵

مراجع ۳۷۰

فصل اول

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

در این فصل روش‌های حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را مطالعه می‌کنیم و در فصل دوم در مورد اهمیت این گونه معادلات و جایگاه آنها در بین سایر علوم آشنا می‌شویم.

۱-۱ مقدمه و تعاریف

۱-۱-۱ تعریف: فرض کنید تابع $y=f(x)$ بر بازه $I=(a,b)$، تعریف شده باشد. هر معادله‌ای شامل متغیر مستقل x، تابع $y=f(x)$ و مشتق‌های f را **یک معادله دیفرانسیل** معمولی می‌نامیم.

۱-۱-۲ مثال: هر یک از معادلات زیر یک معادله دیفرانسیل می‌باشد.

$$\frac{dy}{dx}=\cos x \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1-x^2} \qquad (2)$$

$$f'(x)=f''(x) \qquad (3)$$

$$y''+3(y')^3+2x=5 \qquad (4)$$

$$(y''')^3+(y'')^4+y'=x \qquad (5)$$

$$(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0 \qquad (6)$$

$$x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}-۳x\frac{dy}{dx}+۴y=\cos x \qquad (۷)$$

$$xy^{(۴)}+۲y''+(xy')^{۵}=x^{۳} \qquad (۸)$$

۱-۱-۳ مثال: یک مسأله ساده در حساب دیفرانسیل و انتگرال یافتن کلیه توابعی است که به ازای هر x در معادلات (۱) و (۲) صدق کنند.

حل: روشن است که $y=\sin x+c$ در معادله (۱) و $y=\tan^{-۱}x+c$ در معادله (۲) صدق می‌کنند، در آن c ثابت اختیاری است. با کمی دقت متوجه می‌شویم که پیدا کردن توابعی که در سایر معادلات دیفرانسیل مثال ۱-۱-۲ صدق کنند، ساده نیست.

۱-۱-۴ تعریف: یک **معادله دیفرانسیل جزئی** معادله‌ای متشکل از یک تابع مجهول با بیش از یک متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی آن است.

برای مثال، معادله زیر برای تابع مجهول دو متغیره $u(x,t)$ یک معادله دیفرانسیل جزئی است.

$$\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}=c^{۲}\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}$$

۱-۱-۵ تذکر: توجه کنید که چون در اینجا ما تنها معادلات دیفرانسیل معمولی را مطالعه خواهیم کرد، از این پس کلمه معمولی را حذف می‌کنیم.

۱-۱-۶ تعریف: **مرتبه** یک معادله دیفرانسیل بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می‌شود.

۱-۱-۷ مثال: مرتبه معادلات داده نشده در مثال ۱-۱-۲ را تعیین کنید.

حل: معادلات (۱)، (۲) و (۶) از مرتبه اول، معادلات (۳)، (۴) و (۷) از مرتبه دوم، معادله (۵) از مرتبه سوم و معادله (۸) از مرتبه چهارم می‌باشند.

۱-۱-۸ تعریف: به طور کل، یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام را می‌توان به صورت

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=۰ \qquad (۹)$$

نوشت. تحت شرایط مناسبی روی تابع F، معادله (۹) را می‌توان نسبت به $y^{(n)}$ برحسب ۱+n متغیر دیگر x، y، .... y' $y^{(n-1)}$ حل نمود و به‌صورت

$$y^{(n)} = f(x,y,y'\dots\dots y^{(n-1)}) \qquad (10)$$

نوشت. در این کتاب فرض می‌کنیم که همیشه بتوان این امر را انجام داد. در غیر این صورت، معادله‌ای به صورت (۹) را در واقع ممکن است با بیشتر از یک معادله به صورت (۱۰) نمایش داد.

۱-۱-۹ مثال: معادله $x(y')^2 + 4y' - 6x^2 = 0$ را به صورت (۱۰) بنویسید.

حل: این معادله در واقع دو معادله دیفرانسیل زیر را نمایش می‌دهد.

$$y' = \frac{-2-\sqrt{4+6x^3}}{x} \quad \text{یا} \quad y' = \frac{-2+\sqrt{4+6x^3}}{x}$$

۱-۱-۱۰ تعریف: تابع g، تعریف شده بر بازه (a,b)، را **جوابی** از معادله (۱۰) می‌نامیم، اگر g در این بازه n بار مشتق‌پذیر باشد و به ازای هر x از این بازه

$$g^{(n)}(x) = f(x,g(x),g'(x),\dots,g^{(n-1)}(x))$$

برقرار باشد.

۱-۱-۱۱ مثال: تحقیق کنید که تابع

$$y = \tan x - x \qquad x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n = 0,\pm 1,\pm 2 \qquad (11)$$

جوابی از معادله دیفرانسیل

$$y' = (x+y)^2 \qquad (12)$$

است.

حل: در اینجا $y = \tan x - x$ ، $y' = \sec^{2} x - 1 = \tan^{2} x$ با جایگذاری این مقادیر به جای y و y' در معادله (۱۲) اتحاد زیر به دست می‌آید.

$$\tan^{2} x = (x + \tan x - x)^{2} = \tan^{2} x$$

پس تابع داده شده در هر یک از بازه‌های مشخص شده در (۱۱) جوابی از معادله (۱۲) است.

۱-۱-۱۲ تمرین: تحقیق کنید که تابع تعریف شده با ضابطه

$$y = x^{2} \quad -\infty < x < \infty$$

جوابی از معادله زیر است

$$(y'')^{3} + (y')^{2} - y - 3x^{2} - 8 = 0 \qquad (۱٤)$$

۱-۱-۱۳ تعریف: رابطه $f(x,y) = 0$ را یک **جواب ضمنی** معادله دیفرانسیل

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0 \qquad (۱۵)$$

بر بازه $I = (a,b)$ می‌نامیم، اگر

الف) y را به‌عنوان تابع ضمنی از x بر I تعریف کند، یعنی اگر تابع $g(x)$ تعریف شده بر I وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر x در I،

$$f(x, g(x)) = 0$$

ب. $g(x)$ در (۱۵) صدق کند، یعنی به ازای هر x در I،

$$F(x, g(x), g'(x), \dots, g^{(n)}(x)) = 0$$

۱-۱-۱٤ مثال: آیا $f(x,y) = x^{2} + y^{2} - 25 = 0$ یک جواب ضمنی از معادله دیفرانسیل

$$F(x, y, y') = yy' + x = 0 \qquad (۱٦)$$

بر بازه $I: -5 < x < 5$ است.

حل: ابتدا توجه می‌کنیم که تابع داده شده y را می‌توان به‌عنوان تابع ضمنی‌ای از x بر I تعریف کرد، زیرا اگر $g(x)$ را یکی از توابع $y=\pm\sqrt{25-x^2}$ انتخاب کنیم، مثلاً با انتخاب $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ داریم:

$$g'(x)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}} \qquad -5<x<5$$

با جایگذاری $g(x)$ به جای y و $g'(x)$ به جای y' در (۱۶) نتیجه می‌شود که

$$F\big((x,g(x),g'(x)\big)=\sqrt{25-x^2}\left(-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\right)+x=0$$

چون طرف چپ معادله اخیر صفر است، معادله نسبت به x اتحاد است و بنابراین شرایط تعریف ۱-۱-۱۳ برقرارند.

۱-۱-۱۵ تذکر: روش کلی برای اینکه ثابت کنیم تابع ضمنی‌ای جوابی از معادله دیفرانسیل است آن است که به‌طور ضمنی از تابع مشتق می‌گیریم، اگر به معادله دیفرانسیل منجر گردد، آنگاه تابع ضمنی را جواب ضمنی‌ای از معادله دیفرانسیل می‌گوییم. اگر عمل مشتق‌گیری ضمنی را به‌طور چشم بسته انجام دهیم، برای مثال نتیجه می‌گیریم که $x^2+y^2=0$ جواب ضمنی‌ای از $x+yy'=0$ است، ولی $y,x^2+y^2=0$ را به‌طور ضمنی به‌عنوان تابعی از x بر بازه‌ای تعریف نمی‌کند. تنها در نقطه $(0,0)$ در این فرمول صدق می‌کند. بنابراین ادعای جواب بودن $x^2+y^2=0$ بی‌معنی است.

۱-۱-۱۶ تمرین: آیا

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy=0 \quad , \qquad -\infty<x<\infty \tag{17}$$

یک جواب ضمنی معادله

$$F(x,y,y')=(y^2-x)y'-y+x^2=0 \ , \quad -\infty<x<\infty \tag{18}$$

است؟

۱-۱-۱۶ تمرین‌های بخش ۱-۱

۱. مرتبه هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

(الف) $y' + xy = y^{۲}$

(ب) $dy + (xy - \cos x)dx = ۰$

(ج) $dy + (xy - \cos x)dx = ۰$

(د) $\left(\dfrac{d^{٤}y}{dx^{٤}}\right)\left(\dfrac{d^{۳}y}{dx^{۳}}\right) + \dfrac{dy}{dx} = ۰$

(هـ) $e^{y'''} + xy'' + y = ۰$

(و) $\left(\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}\right)^{۳} - (y''')^{٤} + x = ۰$

۲. ثابت کنید هر یک از توابع داده شده در ستون سمت چپ، جواب معادله دیفرانسیل متناظر در ستون سمت راست می‌باشد.

(الف) $y' + y = ۰$, $y = e^{-x}$

(ب) $y' = e^{x}$, $y = e^{x}$

(پ) $f'(x) = f''(x)$, $y = e^{x} + ۲$

(ت) $(۱ + x^{۲})y' = xy$, $y = \sqrt{۱ + x^{۲}}$

(ث) $xy' + y = y^{۲}$, $y = \dfrac{۲}{x + ۲}$

(ج) $x + yy' = ۰$, $y = \sqrt{۱٦ - x^{۲}}$

(چ) $y'' - y = ۰$, $y = \cosh x$

(ح) $y' - ۲xy = ۱$, $y = e^{x^{۲}} \int_{۰}^{x} e^{-t^{۲}} dt + e^{x^{۲}}$

(خ) $y'' - y = ۰$, $y = ae^{x} + be^{-x}$

۳. نشان دهید که معادله دیفرانسیل $\left|\frac{dy}{dx}\right|+|y|=0$ دارای جواب نیست.

٤. آیا تابع ضمنی داده شده در سمت چپ، یک جواب ضمنی معادله دیفرانسیل سمت راست است؟

(الف) $y^2-1-(2y+xy)y'=0$, $y^2-1=(x+2)^2$

(ب) $e^{x-y}+e^{y-x}\frac{dy}{dx}=0$, $e^{2y}+e^{2x}=1$

(ج) $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$, $x^2+y^2+1=0$

۵. تعیین کنید به ازای کدام مقادیر r، e^{rx} جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده است.

(الف) $y''+y'=0$

(ب) $y''-y'-2y=0$

٦. تعیین کنید به ازای کدام مقادیر r، $y=x^r$ جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده است.

(الف) $x>0$, $x^2y''-3xy'+3y=0$

(ب) $x>0$, $x^2y''+2xy'=0$

۱-۲ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

۱-۲-۱ بنا بر آنچه در نظریه انتگرال‌گیری در حساب دیفرانسیل و انتگرال آموختیم، برخی معادلات دیفرانسیل ساده به‌صورت $y'=f(x)$ را به‌آسانی می‌توان حل نمود.

برای مثال، اگر

$$y'=e^x$$

آنگاه جواب معادله را می‌توان با یک انتگرال‌گیری ساده به‌دست آورد، یعنی

$$y=e^x+c$$

که در آن c یک ثابت اختیاری است. اگر

$$y''=e^x \tag{۱}$$

آنگاه، جواب آن با دو بار انتگرال‌گیری از (۱) به دست می‌آید

$$y=e^x+c_1x+c_2$$

که در آن c_1 و c_2 ثابت‌های اختیاری هستند. سرانجام، اگر

$$y'''=e^x \tag{۲}$$

آنگاه جواب آن را می‌توان با سه بار انتگرال‌گیری از (۲) به دست آورد.

$$y=e^x+c_1x^2+c_2x+c_3$$

که در آن c_1، c_2 و c_3 ثابت‌های اختیاری می‌باشند.

۱-۲-۲ تمرین: جواب معادله دیفرانسیل $y''=2x$ را پیدا کنید.

۱-۲-۳ تعریف: به نظر می‌رسد که با توجه به مثال (۱-۲-۱) می‌توان دو حکم زیر را نتیجه گرفت اولاً، اگر معادله دیفرانسیل حداقل دارای یک جواب باشد، آن‌گاه بی‌شمار جواب دارد (یادآور می‌شویم که cها می‌توانند بی‌شمار مقدار بگیرند). ثانیاً، اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه اول باشد، جواب معادله دیفرانسیل شامل یک ثابت اختیاری است، اگر از مرتبه دوم باشد، آنگاه جواب معادله دیفرانسیل شامل دو ثابت اختیاری است، اگر از مرتبه nام باشد، جواب معادله دیفرانسیل شامل n ثابت اختیاری است. مثال‌های

زیر نشان می‌دهند که دو حکم فوق ممکن است برای معادلات دیفرانسیل خاصی برقرار نباشند.

۱-۲-٤ مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(y')^{2}+y^{2}=0$$

و همچنین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$(y'')^{2}+y^{2}=0$$

تنها دارای یک جواب $y=0$ است.

۱-۲-۵: مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$|y'|+1=0$$

و همچنین معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$|y''|+1=0$$

جواب ندارد.

۱-۲-٦ مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$xy'=1 \qquad (3)$$

در بازه $I=(-1,1)$ دارای جواب نیست. به‌طور صوری با حل معادله دیفرانسیل به‌دست می‌آوریم.

$$y=\mathrm{Ln}|x|+c \qquad (4)$$

ولی این تابع در $x=0$ ناپیوسته است. بنا به تعریف ۱-۱-۹، جواب باید به ازای هر x در I در معادله دیفرانسیل صدق کند. توجه کنید که اگر $x<0$، آنگاه بنا بر (٤) در بالا

$$y=\mathrm{Ln}(-x)+c_{1}\,, \qquad x<0$$

جواب معتبری از (۳) است. اگر $x>0$، آنگاه بنا بر (٤)

$$y=\mathrm{Ln}(x)+c_{2} \qquad x>0$$

نیز جواب معتبری از (۳) می‌باشد.

۱-۲-۷ مثال: جواب معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$(y'-3y)(y'-2y)=0$$

عبارت است از

$$(y-c_1e^{3x})(y-c_2e^{2x})=0$$

که به جای یک ثابت شامل دو ثابت اختیاری است.

۱-۲-۸ تذکر: مثال‌های بالا بیان می‌کنند که نباید بلافاصله نتیجه گرفت هر معادله دیفرانسیلی دارای جواب می‌باشد، یا اگر معادله دارای جواب باشد تعداد ثابت‌های این جواب برابر با مرتبه معادله دیفرانسیل است. با وجود این، دسته زیادی از معادلات دیفرانسیل وجود دارند که دو حکم بالا در مورد آنها درست می‌باشد و این دسته‌ها معادلاتی هستند که ما با آنها در این درس مواجه هستیم. تنها برای این دسته‌های خاص ادعا می‌کنیم که: جواب یک معادله دیفرانسیل از مرتبه n شامل n ثابت اختیاری، مانند c_1، c_2، .... و c_n، است.

معمولاً جوابی که شامل nام ثابت، مانند c_1، c_2، .... ، c_n است را یک **خانواده n- پارامتری** از جواب‌ها می‌نامیم. برای مثال، با توجه به ۱-۲-۱ می‌گوییم $y=e^x+c$ یک خانواده ۱- پارامتری از جواب‌های معادله $y'=e^x$ و $y=e^x+c_1x+c_2$ یک خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های معادله $y''=e^x$ است.

۱-۲-۹ تعریف: توابع $n+1$ متغیره با متغیرهای x، c_1، c_2، ....، c_n تعریف شده توسط

$$y=f(x,c_1,c_2,\dots,c_n) \qquad (5)$$

را یک **خانواده n- پارامتری** از جواب‌های معادله دیفرانسیل مرتبه nام

$$y=F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) \qquad (6)$$

می‌نامیم، در صورتی که به ازای هر انتخاب دلخواه اعداد $c_۱,c_۲,...,c_n$ ، تابع $f(x)$ که توسط (۵) تعریف شده در معادله (۶) صدق کند. یعنی، اگر

$$F(x,f,f',...,f^{(n)})=۰$$

اینک برای دسته‌های معادلات دیفرانسیلی که مورد بررسی قرار می‌دهیم، ادعا می‌کنیم که:

"یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام دارای یک خانواده n- پارامتری از جواب‌هاست."

۱-۲-۱۰ مثال: نشان دهید که توابع تعریف شده توسط

$$y=f(x,c_۱,c_۲)=۲x+۳+c_۱e^x+c_۲e^{۲x} \qquad (۷)$$

از سه متغیر x، $c_۱$ و $c_۲$ یک خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر است.

$$F(x,y,y',y'')=y''-۳y'+۲y-۴x=۰ \qquad (۸)$$

حل: مشتق اول و دوم (۷) عبارتند از:

$$y'=f'(x)=۲+c_۱e^x+۲c_۲e^{۲x} \quad , \quad y''=f''(x)=c_۱e^x+۴c_۲e^{۲x}$$

با جایگذاری مقادیر f، f′، f″ به جای y، y′ ، y″ در (۸) به دست می‌آوریم:

$$F(x,f,f',f'')=c_۱e^x+۴c_۲e^{۲x}-۶-۳c_۱e^x-۶c_۲e^{۲x}$$
$$+۴x+۶+۲c_۱e^x+۲c_۲e^{۲x}-۴x=۰$$

۱-۲-۱۱ تمرین: تحقیق کنید که توابع $y=c_۱\cos ax+c_۲\sin ax$ یک خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم $y''+a^۲y=۰$ است.

۱-۲-۱۲ روش یافتن معادله دیفرانسیل وقتی خانواده n- پارامتری از جواب‌ها معلوم باشد:

در هر مورد باید معادله دیفرانسیلی را تعیین کنیم که شرایط زیر را دارا باشد.

۱. مرتبه آن برابر با تعداد ثابت‌های داده شده در هر خانواده باشد.
۲. با خانواده داده شده سازگار باشد.
۳. ثابت‌های اختیاری در آن ظاهر نشده باشد.

۱-۲-۱۳ مثال: معادله دیفرانسیلی را به قسمی پیدا کنید که خانواده ۱- پارامتری از جواب‌های آن عبارت است از:

$$y = c\sin x + x \qquad (۹)$$

حل: با توجه به مطالب بیان شده در بالا، چون (۹) شامل یک ثابت اختیاری است، پس (۹) جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. با مشتق‌گیری از (۹)، به دست می‌آوریم

$$y' = c\cos x + ۱ \qquad (۱۰)$$

این معادله دیفرانسیل نمی‌تواند معادله خواسته شده باشد چون شامل پارامتر c است.

برای حذف کردن c، معادله (۹) را در $-\cos x$ و معادله (۱۰) را در $\sin x$ ضرب کرده و آنها را با یکدیگر جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود که:

$$(-\cos x)y + (\sin x)y' = -x\cos x + \sin x$$

یا

$$(y' - ۱)\sin x + (x - y)\cos x = ۰$$

$$y' = (y - x)\cot x + ۱ \qquad , \qquad x \neq ۰, \pm\pi, \pm۲\pi, \ldots$$

۱-۲-۱٤: مثال: معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که خانواده ۱- پارامتری از جواب‌های آن خانواده دایره‌های زیر باشد.

$$(x - c)^۲ + (y - c)^۲ = ۲c^۲ \qquad (۱۱)$$

حل: چون در اینجا خانواده ۱- پارامتری داریم، پس (۱۱) جواب‌های یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. با ساده کردن (۱۱) به‌دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 = 2c(x+y)$$

یا

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = 2c \qquad y \neq -x$$

بنابراین، با دیفرانسیل‌گیری از دو طرف رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{(x+y)(2x\,dx+2y\,dy)-(x^2+y^2)(dx+dy)}{(x+y)^2}=0$$

در نتیجه معادله خواسته شده عبارت است از:

$$(x^2+2xy-y^2)dx-(x^2-2xy+y^2)dy=0$$

۱-۲-۱۵: مثال: معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های آن عبارت است از:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \qquad (12)$$

حل: چون باید دو ثابت را حذف کنیم، مشتق دوم را به‌دست می‌آوریم

$$y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x} \qquad (13)$$

$$y'' = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x} \qquad (14)$$

حذف c_1 از دو معادله (۱۳) و (۱٤) به $y''+y' = 6c_2 e^{2x}$ منتهی می‌گردد، حذف c_1 از دو معادله (۱۲) و (۱۳) به $y'+y = 3c_2 e^{2x}$ منجر می‌گردد. از این رو به‌دست می‌آوریم.

$$y''+y' = 2(y'+y)$$
$$y''-y'-2y = 0$$

۱-۲-۱٦ تمرین: معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های آن عبارت است از:

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad (۱۵)$$

توجه کنید که در (۱۵) α و A پارامتر اختیاری هستند.

۱-۲-۱۷ جواب عمومی، جواب خصوصی، شرایط اولیه

یک خانواده n- پارامتری از جواب‌های یک معادله دیفرانسیل مرتبه nام را معمولاً **جواب عمومی** معادله دیفرانسیل می‌نامیم و تابعی که از یک مجموعه معین از مقادیر به‌دست می‌آید را **جواب خصوصی** معادله دیفرانسیل می‌نامیم. برای مثال، $y = ce^{2x}$ که خانواده ۱- پارامتری از جواب‌های $y' - 2y = 0$ است را جواب عمومی می‌نامیم و اگر قرار دهیم $c = -1$، آنگاه $y = -e^{2x}$ را یک جواب خصوصی می‌نامیم. روشن است که از جواب عمومی می‌توان تعداد بی‌شمار جواب خصوصی به‌دست آورد.

جواب عمومی، باید شامل همه جواب‌های معادله دیفرانسیل باشد. یعنی باید هر جواب خصوصی را بتوان با نسبت دادن مقادیر مناسب به ثابت‌های $c_1, c_2, \ldots, c_n$ به‌دست آورد. ولی، معادلات دیفرانسیلی وجود دارند که همه جواب‌های آن از خانواده n- پارامتری از جواب‌ها به‌دست نمی‌آیند. برای مثال معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$y = xy' + (y')^2 \qquad (۱۶)$$

دارای خانواده ۱- پارامتری زیر به‌عنوان جواب است.

$$y = cx + c^2 \qquad (۱۷)$$

معمولاً، این جواب را به دلیل اینکه یک ثابت اختیاری است جواب عمومی می‌نامیم ولی به معنی واقعی، جواب عمومی نیست، زیرا شامل همه جواب‌های خصوصی نمی‌باشد. مثلاً تابع

$$y = -\frac{x^2}{4} \qquad (۱۸)$$

نیز یک جواب (۱۶) است. و نمی‌توان این جواب را از (۱۷)، به ازای مقداری که به c نسبت می‌دهیم، به‌دست آورد.

جواب‌هایی از نوع (۱۸)، یعنی، آنهایی که از یک خانواده n- پارامتری یا جواب عمومی به‌دست نمی‌آیند را **جواب‌های منفرد** می‌نامیم. در این متن معمولاً هر خانواده n- پارامتری از جواب‌ها را **جواب عمومی** می‌نامیم.

۱-۲-۱۸ مثال: فرض کنید موقعیت جسمی در لحظه t از مبدأ توسط خانواده ۲- پارامتری

$$x=16t^2+c_1t+c_2 \qquad (19)$$

داده شده است. ثابت‌ها را به قسمی انتخاب کنید که جسم در $t=0$ در ۱۰ فوتی از مبدأ بوده و با سرعت ۲۰ فوت بر ثانیه حرکت کند.

حل: در اینجا سرعت توسط مشتق‌گیری از (۱۹) به‌دست می‌آید.

$$v=32t+c_1 \qquad (20)$$

از این رو ثابت‌های c_1، c_2 باید به قسمی انتخاب شوند که وقتی $t=0$, $x=10$ داشته باشیم $v=20$. با جایگذاری این مقادیر به جای v,x,t در (۱۹) و (۲۰)، در می‌یابیم که $c_1=20, c_2=10$ بنابراین جواب خصوصی که در شرایط داده شده این مسأله صدق می‌کنند عبارت است از:

$$x=16t^2+20t+10$$

۱-۱-۱۹ تعریف: n شرط که به ما امکان می‌دهد تا مقادیر ثابت دلخواه $c_1, c_2, ..., c_n$ را در یک خانواده n- پارامتری به‌گونه‌ای تعیین کنیم که همه شرایط در نقطه $x=x_0$ داده شده باشند، **شرایط اولیه** نامیده می‌شوند. یک معادله دیفرانسیل همراه با شرایط اولیه را یک **مسأله با مقدار اولیه** می‌نامیم.

۱-۲-۲۰ تذکر: معمولاً تعداد شرایط اولیه باید با مرتبه معادله دیفرانسیل برابر باشد. البته، حالت‌های استثنایی نیز وجود دارد که در آنها می‌توان این شرایط را تعمیم داد.

۱-۲-۲۱ مثال: ابتدا جواب عمومی

$$yy' = (y+1)^2 \qquad (21)$$

را پیدا کرده سپس جواب خصوصی را که در شرط $y(2)=0$ (نماد $y(2)=0$ به این معناست که نقطه $(2,0)$ باید بر جواب خصوصی واقع باشد و یا در آن صدق کند) صدق می‌کند تعیین کنید.

حل: اگر $y \neq -1$، می‌توانیم دو طرف معادله (۲۱) را بر $(y+1)^2$ تقسیم کنیم. لذا به‌دست می‌آوریم.

$$\int \frac{y}{(y+1)^2} dy = \int dx \qquad y \neq -1$$

بنابراین، با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{1}{y+1} + Ln|y+1| = x + c \qquad y \neq -1 \qquad (22)$$

که جواب عمومی خواسته شده است. برای یافتن جواب خصوصی که در شرط $y(2)=0$ صدق می‌کند با قرار دادن $x=2$؛ $y=0$ در (۲۲) به‌دست می‌آوریم

$$c=-1 \text{ یا } 2+c=1$$

در نتیجه جواب خصوصی از قرار دادن $c=-1$ در (۲۲) به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{y+1} + Ln|y+1| = x - 1 \quad , \qquad y \neq -1$$

توجه کنید که تابع تعریف شده توسط $y=-1$ نیز جوابی از (۲۱) است (درستی این مطلب را تحقیق کنید.) از این رو $y+1=0$ نیز جواب منفردی از معادله (۲۱) است که از (۲۲) به‌دست نمی‌آید.

۱-۲-۲۲ تمرین‌های بخش ۱-۲

۱. نشان دهید که تابع سمت راست یک خانواده ۲- پارامتری از جواب‌های معادله دیفرانسیل سمت چپ است.

(الف) $y'' + y' - x^{۲} - ۲x = ۰ \quad , \quad y = c_{۱} + c_{۲} e^{-x} + \frac{x^{۳}}{۳}$

(ب) $y'' + ۳y' + ۲y - ۱۲e^{x} = ۰ \quad , \quad y = c_{۱} e^{-۲x} + c_{۲} e^{-x} + ۲e^{x}$

(ج) $x^{۲}y'' + ۵xy' + ۴y = ۰, \quad x > ۰ \quad , \quad y = c_{۱} x^{-۲} + c_{۲} e^{-۲} \mathrm{Ln}\, x$

۲. معادله دیفرانسیلی را تعیین کنید که خانواده n- پارامتری داده شده جواب آن باشد.

(الف) $y = cx + c^{۳}$

(ب) $y = c_{۱} e c_{۲} x$

(ج) $y = c_{۱} \cos ۳x + c_{۲} \sin ۳x$

(د) $y = c_{۱} e^{۲x} + c_{۲} e^{-۲x}$

(هـ) $r = a(۱ - \cos\theta)$

۳. معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که جواب آن عبارت است از:

(الف) خانواده دایره‌هایی به شعاع معین که مراکزشان بر محور x واقع باشد.

(ب) خانواده دایره‌هایی به مرکز (h,k) و شعاع معین.

(ج) خانواده خطوط راستی که عرض از مبداء آنها تابعی از شیب خطوط باشد.

(د) خانواده خطوط راستی که بر دایره $x^{۲} + y^{۲} = c^{۲}$ مماس باشند.

(هـ) خانواده خطوط راستی که بر سهمی $y^{۲} = ۲x$ مماس باشند.

۱-۳ هم‌شیب یک معادله

در بخش‌های بعد روش‌های متعددی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول را مطالعه خواهیم کرد. قبل از مطالعه این روش‌های حل، نگاهی کوتاه از نقطه نظر هندسی به حل این گونه معادلات می‌کنیم.

۱-۳-۱ تعریف: معادله مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (۱)$$

را در نظر بگیرید. می‌توان معادله (۱) را به‌عنوان دستگاهی در نظر گرفت که به هر نقطه (a,b) در حوزه تعریف تابع f جهتی با ضریب زاویه‌ای $f(a,b)$ نسبت می‌دهد. در نتیجه می‌توان در مورد میدان راستای معادلهٔ دیفرانسیل صحبت کرد. در واقع هر جواب معادله (۱) باید نموداری داشته باشد، که در هر نقطه دارای راستایی است که معادله (۱) ایجاب می‌کند. این مطلب را می‌توان به‌طور اساسی با ترسیم منحنی‌هایی که **هم‌شیب** نامیده می‌شوند، یعنی، منحنی‌هایی در امتداد راستایی که توسط (۱) مشخص شده است انجام داد.

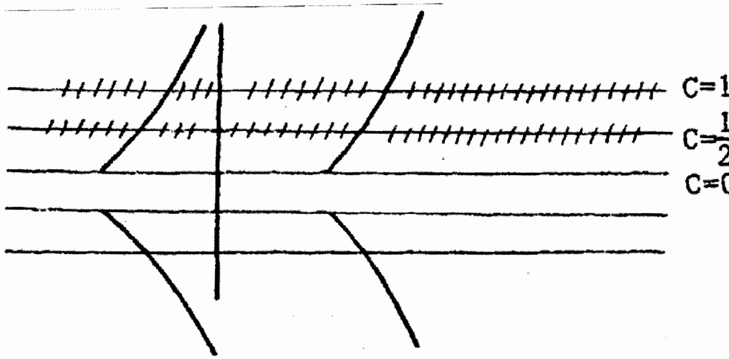
۱-۳-۲ مثال: معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx}=y \qquad (۲)$$

را در نظر بگیرید. هم‌شیب‌ها خطوط راست $f(x,y)=y=c$ هستند. به ازای هر مقدار c، خطی را به‌دست می‌آوریم که، در هر نقطه بر این خط، راستای منحنی جواب‌ها که توسط معادله دیفرانسیل مشخص می‌شود، برابر با c است.

برای نمونه، در هر نقطه بر خط $y=۱$ معادله (۲) راستایی با ضریب زاویه‌ی ۱ را مشخص می‌کند. در شکل (۱) تعداد متعددی از این هم‌شیب‌ها را رسم کرده‌ایم که راستای وابسته به هر هم شیب را توسط یک علامت کوچک نشان داده شده است. اگر از هر نقطه در صفحه شروع کرده و در امتداد یک منحنی که راستایش همیشه در

راستای مشخص شده باشد، پیش برویم، آنگاه یک منحنی جواب به‌دست می‌آید. تعدادی از منحنی‌های جواب در شکل (۱) رسم شده‌اند.



شکل (۱)

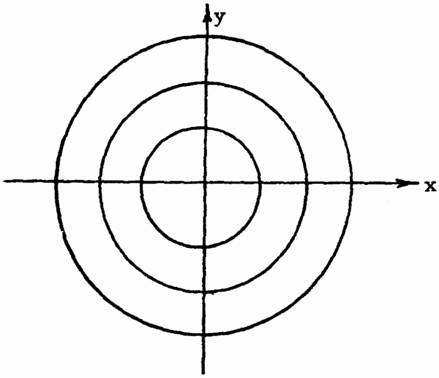
۱-۳-۳ مثال: با استفاده از هم‌شیب‌ها تعدادی از منحنی‌های جواب معادله

$$\frac{dy}{dx} = x^۲ + y^۲ \qquad (۳)$$

را رسم کنید.

حل: در اینجا هم شیب‌ها دایره‌های $x^۲ + y^۲ = c$، با $c > ۰$ هستند. وقتی $c = \frac{۱}{۴}$، شعاع هم‌شیب‌ها $\frac{۱}{۲}$ است. به ازای $c = ۱$، شعاع هم‌شیب‌ها برابر ۱ و به ازای $c = ۴$، شعاع هم‌شیب‌ها ۲ می‌باشد.

در شکل (۲) برخی از این هم‌شیب‌ها را رسم کرده‌ایم. با مشخص کردن راستای مناسب بر هر یک از این دایره‌ها می‌توان تعدادی از جواب‌های (۳) را رسم کرد.



شکل (۲)

۱-۳-۴ تمرین: برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر تعدادی از هم‌شیب‌ها را با راستای مناسب مشخص کرده و تعدادی از منحنی‌های جواب را رسم کنید.

الف) $\dfrac{dy}{dx} = x$

ب) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

در زیر یک قضیه مهم در مورد وجود و یگانگی جواب‌ها را بدون اثبات ارائه می‌دهیم.

۱-۳-۵ قضیه: معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم T نمایش ناحیه مستطیل شکل تعریف شده توسط

$$|y - y_0| \le b \qquad , \qquad |x - x_0| \le a$$

به مرکز (x_0, y_0) باشد. همچنین فرض کنیم f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ توابع پیوسته‌ای از x و y در T باشند. در این صورت بازه‌ای حول x_0 مانند $|x-x_0| \le h$ و یک تابع $y(x)$ با ویژگی‌های زیر وجود دارد:

(الف) $y=y(x)$ جوابی از معادله (۱) در بازه $|x-x_0| \le h$ صدق می‌کند.

(ب) در بازه $|x-x_0| \le h$، $y(x)$ در نابرابری $|y(x)-y_0| \le b$ صدق می‌کند.

(پ) $y(x)$ در بازه $|x-x_0| \le h$ یگانه است، به عبارت دیگر $y(x)$ تنها تابعی است که همه ویژگی‌های (الف)، (ب) و (پ) را داراست.

در مثال ۱-۳-۳، (x_0, y_0) را می‌توان نقطه دلخواهی در نظر گرفت، چون $f(x,y)=y$ و مشتق جزئی آن $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ در هر مستطیلی پیوسته می‌باشد. بنابراین قضیه وجودی، وجود دقیقاً یک جواب را که از هر نقطه (x_0, y_0) می‌گذرد، تضمین می‌کند.

مجدداً در مثال ۱-۳-۴، تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ و مشتق جزئی آن، یعنی $\frac{\partial f}{\partial y}=2y$، در هر مستطیلی پیوسته هستند. نتیجه می‌شود که از هر نقطه دلخواه (x_0, y_0) در صفحه، دقیقاً یک منحنی جواب می‌گذرد.

در بخش‌های بعدی این فصل روش‌های حل برخی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و کاربردهای آنها را بررسی خواهیم کرد.

۱-۴ معادلات دیفرانسیل جداشدنی

۱-۴-۱ معادله دیفرانسیل جدا شدنی

اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اولی را بتوان به‌صورت

$$f(x)dx+g(y)dy=0 \qquad (1)$$

نوشت، که در آن ضریب dx تنها تابعی از x و ضریب dy تنها تابعی از y باشد، آنگاه آن معادله را **جدا شدنی** می‌نامیم. در این صورت جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$\int f(x)\,dx+\int g(y)\,dy=c$$

که در آن c ثابتی اختیاری است.

۱-٤-۲ مثال: معادله دیفرانسیل $x\sqrt{۱-y}\,dx-\sqrt{۱-x^۲}\,dy=۰$ را حل کنید.

نخست توجه کنید که معادله دیفرانسیل تنها به ازای $|x|\leq ۱\,,\,y\leq ۱$ معنی دارد. علاوه بر این اگر $y\neq ۱\,,\,x\neq \pm ۱$ آنگاه با تقسیم دو طرف معادله بر $\sqrt{۱-y}\sqrt{۱-x^۲}$، به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{\sqrt{۱-x^۲}}dx-\frac{dy}{\sqrt{۱-y}}=۰\quad,\quad -۱<x<۱\qquad,\qquad y<۱$$

اینک این معادله به‌صورت (۱) است و جواب عمومی آن عبارت است از:

$$\sqrt{۱-x^۲}-۲\sqrt{۱-y}=c\quad,\quad -۱<x<۱\qquad,\qquad y<۱$$

همچنین توجه کنید که $y=۱$ نیز به ازای مقادیر x بین ۱- و ۱ در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

۱-٤-۳ مثال: مسأله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$۲x(y+۱)\,dx-y\,dy=۰$$

$$y(۰)=-۲$$

حل: معادله را به ازای $y\neq -۱$ می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\frac{y}{y+۱}dy=۲x\,dx$$

جواب عمومی عبارت است از

$$\int \frac{y}{y+۱} dy = ۲\int x\,dx$$

یا

$$\int (۱-\frac{۱}{y+۱})\,dy = ۲\int x\,dx$$

بنابراین

$$y - Ln|y+۱| = x^۲ + c$$

یا

$$x^۲ = y - Ln|y+۱| + c$$

که در آن c ثابتی اختیاری است. با استفاده از شرط اولیه $y(۰) = -۲$، خواهیم داشت:

$$۰ = -۲ - Ln|-۲+۱| + c$$

یا

$$c = ۲$$

بنابراین جواب مسأله با مقدار اولیه عبارت است از:

$$x^۲ = y - Ln|y+۱| + ۲$$

توجه کنید که $y = -۱$ جواب منفردی از معادله است.

۱-٤-٤ مثال: معادله $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y \neq ۰$ را حل کنید.

حل: معادله داده شده را می‌توان به‌صورت

$$y\,dy + x\,dx = ۰ \quad , \qquad y \neq ۰$$

نوشت. با انتگرال‌گیری از دو طرف این معادله به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{y^۲}{۲} + \frac{x^۲}{۲} = \frac{c}{۲}$$

یا

$$y^۲ + x^۲ = c \qquad , \qquad y \neq ۰$$

چون $x^۲ \geq ۰$, $y^۲ \geq ۰$, $x^۲ + y^۲ = c \geq ۰$. اگر $c = ۰$، آنگاه $x = ۰$, $y = ۰$. ولی $y \neq ۰$، پس $c > ۰$. در نتیجه جواب عمومی خانواده دایره‌های $y^۲ + x^۲ = k^۲$ است.

۱-٤-٥ مثال: معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x \cos y + \sqrt{x+۱} \sin y \, dy = ۰ \qquad (۳)$$

حل: نخست توجه کنید که (۳) وقتی معنی دارد که $x \geq -۱$. به علاوه، اگر $x \neq -۱, \dots, y \neq \pm\frac{\pi}{۲}, \pm\frac{۳\pi}{۲}$، می‌توان معادله (۳) را بر $\sqrt{x+۱} \cos y$ تقسیم کرد، به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{x}{\sqrt{x+۱}} dx + \frac{\sin y}{\cos y} dy = ۰ \quad , \quad x > -۱ \quad , \quad y \neq -\frac{\pi}{۲}, \pm\frac{۳\pi}{۲}, \dots$$

در نتیجه جواب عمومی عبارت است از:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+۱}} dx + \int \frac{\sin y}{\cos y} dy = c$$

یا

$$\frac{۲(x-۲)}{۳} \sqrt{x+۱} - \mathrm{Ln}|\cos y| = c \quad , \quad x > -۱ \quad , \quad y \neq \pm\frac{\pi}{۲}, \pm\frac{۳\pi}{۲}, \dots$$

در ضمن توابع $y = \pm\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}, \dots$ نیز در معادله دیفرانسیل صدق می‌کنند.

۱-٤-٦ تمرین‌های بخش ۱-٤

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید. در ضمن بازه‌هایی را که معادله دیفرانسیل و جواب معتبر هستند تعیین کرده و همچنین جواب‌های خصوصی را که عضوی از خانواده جواب‌ها نیست، مشخص کنید.

۱. $xy^2dx+(1-x)dy=0$

۲. $(y^2+1)dx-(x^2+1)dy=0$

۳. $(xy^2-x)dx+(x^2y+y)dy=0$

۴. $xy^3dx+(y+1)e^{-x}dy=0$

۵. $\frac{dr}{d\theta}\cot\theta-r=2$

۶. $x\operatorname{Ln}x\,dy+\sqrt{1+y^2}\,dx=0$

۷. $(x-1)\cos y\,dy=2x\sin y\,dx$

۸. $(y^2-1)dx-(2y+xy)dy=0$

۹. $y'=\frac{x}{y^2\sqrt{1+x^2}}$

۱۰. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\operatorname{Ln}x$

۱۱. نشان دهید که تغییر متغیر $u=ax+by$، معادلـه دیفرانسـیل $y'=F(ax+by+c)$ را به معادله‌ای جداشدنی تبدیل می‌کند.

۱۲. با استفاده از نتیجه تمرین ۱۱ معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $y'=(y+4x-1)^2$

(ب) $\frac{dy}{dx}=\cos(x+y)-1$

(ج) $(2x-6y+3)dx-(x-3y+1)dy=0$

(د) $(2x+3y-1)dx+(2x+3y+2)dy=0$

۱-۵ معادلات دیفرانسیل همگن

۱-۵-۱ تعریف: تابع $f(x,y)$ را **همگن از درجه** n گوییم اگر به ازای هر $t>0$

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$$

که در آن n عددی ثابت است.

۱-۵-۲ مثال: درجه هر یک از توابع زیر را، در صورت همگن بودن، تعیین کنید.

(الف) $f(x,y)=x^{۲}+y^{۲}+y^{۲}\,Ln\frac{x}{y}$

(ب) $f(x,y)=\sqrt{y}\sin\frac{x}{y}$

(ج) $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$

(د) $f(x,y)=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^{۲}}-\frac{x+۵y}{x^{۳}}$

(هـ) $f(x,y)=\frac{x+۱}{y-x}$

حل: (الف) با استفاده از تعریف بالا، چون

$$f(tx,ty)=(tx)^{۲}+(ty)^{۲}+(ty)^{۲}\,Ln\frac{tx}{ty}=t^{۲}x^{۲}+t^{۲}y^{۲}+t^{۲}y^{۲}Ln\frac{x}{y}$$

$$=t^{۲}(x^{۲}+y^{۲}+y^{۲}Ln\frac{x}{y})\quad =t^{۲}f(x,y)$$

پس $f(x,y)$ یک تابع همگن از درجه ۲ است.

(ب) $f(tx,ty)=\sqrt{ty}\sin\frac{tx}{ty}$

بنابراین

$$f(tx,ty)=t^{\frac{۱}{۲}}\sqrt{y}\sin\frac{x}{y}=t^{\frac{۱}{۲}}f(x,y)$$

پس $f(x,y)$ یک تابع همگن از درجه $\frac{۱}{۲}$ است.

(ج) $f(tx,ty)=\frac{tx}{tx+ty}=\frac{x}{x+y}t^{۰}f(x,y)$

در نتیجه تابع $f(x,y)$ همگن از درجه صفر است.

(د)
$$f(tx,ty)=\frac{e^{\frac{tx}{ty}}}{(ty)^{2}}-\frac{tx+5ty}{(tx)^{3}}$$

بنابراین:

$$f(tx,ty)=\frac{e^{\frac{x}{y}}}{t^{2}y^{2}}-\frac{t(x+5y)}{t^{3}x^{3}}=t^{-2}\left[\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y^{2}}-\frac{x+5y}{x^{3}}\right]=t^{-2}f(x,y)$$

پس $f(x,y)$ یک تابع همگن از درجه ۲- است.

(ه)
$$f(tx,ty)=\frac{tx+1}{ty-tx}=\frac{tx+1}{t(y-x)}$$

بنابراین تابع $f(x,y)$ همگن نیست. چون این تابع همگن نیست، پس صحبت کردن در مورد درجهٔ آن بی‌مورد است.

۱-۵-۳ تمرین: درجه هر یک از توابع زیر را، در صورت همگن بودن، تعیین کنید.

(الف)
$$f(x,y)=\frac{x^{2}}{x^{2}+y^{2}}$$

(ب)
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x}}{x-y}e^{\frac{x}{y}}$$

(ج)
$$f(x,y)=2y+\sqrt{x^{2}+y^{2}}$$

۱-۵-٤ تعریف: معادله دیفرانسیل $y'=f(x,y)$ را **یک معادله دیفرانسیل همگن** می‌گوییم، اگر تابع $f(x,y)$ یک تابع همگن از درجه صفر باشد.

۱-۵-۵ روش حل معادلات همگن

معادله دیفرانسیل همگن

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم که با استفاده از تغییر متغیر $v=\frac{y}{x}$ یا $y=xv$، معادله را می‌توان به یک معادله جداشدنی تبدیل کرد. چون $f(x,y)$ همگن از درجه صفر است، پس

$$f(x,y) = f(x,vx) = x^{0} f(1,v) = f(1,v) \qquad (2)$$

با مشتق‌گیری از $y=xv$ نسبت به x به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

با توجه به رابطه اخیر و (۲)، معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(1,v)$$

یا

$$x\frac{dv}{dx} = f(1,v) - v$$

که یک معادله دیفرانسیل جداشدنی است. اکنون می‌توانیم این معادله دیفرانسیل جدا شدنی را با روشی که در بخش ۱-۴ دیدیم حل کنیم.

۱-۵-۶ مثال: معادله $(x-y)dx + (x-4y)dy = 0$ را حل کنید.

معادله را به‌صورت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x-y)}{x-4y} \qquad (3)$$

می‌نویسیم. چون تابع $\frac{-(x-y)}{x-4y}$ همگن از درجه صفر است، پس معادله دیفرانسیل همگن است. در نتیجه برای حل معادله از تغییر متغیر $v=\frac{y}{x}$ یا $y=xv$ استفاده

می‌کنیم. چون، $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ ، معادله (۳) را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{-(x-vx)}{(x-4vx)}=\frac{v-1}{1-4v}$$

با جدا کردن متغیرها به‌دست می‌آوریم

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v-1}{1-4v}-v=\frac{v-1-v+4v^2}{1-4v}=\frac{4v^2-1}{1-4v}$$

پس

$$\frac{1-4v}{4v^2-1}dv=\frac{dx}{x} \quad , \quad v\neq\pm\frac{1}{2}$$

با استفاده از کسرهای جزئی این معادله را می‌توان به صورت

$$\frac{dx}{x}=\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-2v}-\frac{\frac{3}{2}}{1+2v}\right)dv$$

نوشت. با انتگرال‌گیری از دو طرف به‌دست می‌آوریم

$$\text{Ln}|x|=-\frac{1}{4}\text{Ln}|1-2v|-\frac{3}{4}\text{Ln}|1+2v|+c$$

یا

$$4\text{Ln}|x|+\text{Ln}|1-2v|+3\text{Ln}|1+2v|=4c$$

یا

$$\text{Ln}\left(|x|^4.|1-2v|.|1+2v|^3\right)=4c$$

که در آن c ثابتی دلخواه است. با نوشتن این معادله به‌صورت نمایی به‌دست می‌آوریم

$$|x|^4.|1-2v|.|1+2v|^3=e^{4c}>0$$

قرار می‌دهیم $k=e^{4c}>0$ و v را با $\frac{y}{x}$ جانشین می‌کنیم.

$$|x|^4.\left|1-\frac{2^{x}y}{x}\right|.\left|1+\frac{2y}{x}\right|^3=k>0$$

یا

$$|x|.\left|1-\frac{2y}{x}\right|.|x|^3.\left|1+\frac{2y}{x}\right|^3=k$$

یا

$$|x-2y|.|x+2y|^3=k>0$$

اینک حالت $v=\pm\frac{1}{2}$ را بررسی می‌کنیم. در این حالت $\frac{y}{x}=\pm\frac{1}{2}$ و دو جواب $x\pm 2y=0$ را می‌یابیم. حال نشان می‌دهیم $y=\frac{1}{2}x\ ,\ y=-\frac{1}{2}x$ جواب‌های معادله هستند. اگر $y=\frac{1}{2}x$ آنگاه، $dy=\frac{1}{2}dx$. با قرار دادن این مقادیر در معادله به‌دست می‌آوریم.

$$(x-y)dx+(x-4y)dy=(x-\frac{1}{2}x)dx+(x-2x)(\frac{1}{2}dx)=0$$

به همین نحو، می‌توان نشان داد که $y=-\frac{1}{2}x$ نیز یک جواب معادله است.

۱-۵-۷ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(\sqrt{x^2-y^2}+y)dx-xdy=0$ را پیدا کنید.

حل: نخست معادله را به‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}\quad ,\quad x\neq 0\quad ,\quad \left|\frac{y}{x}\right|\leq 1$$

می‌نویسیم. چون تابع $\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$ یک تابع همگن از درجه صفر است (چرا؟) پس معادله دیفرانسیل همگن می‌باشد. با استفاده از تغییر متغیر $v=\frac{y}{x}$ یا $y=xv$، $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ معادله به

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\sqrt{x^2-v^2x^2}+vx}{x}=\pm\sqrt{1-v^2}+v\quad ,\quad x\neq 0\quad ,\quad |v|\leq 1$$

(علامت مثبت وقتی $x > 0$ و منفی وقتی $x < 0$ تبدیل می‌گردد. اینک با جدا کردن متغیرها خواهیم داشت

$$\frac{dv}{\pm\sqrt{1-v^2}} = \frac{dx}{x} \quad , \quad x \neq 0 \quad , \quad |v| < 1$$

با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم.

$$\ln x = \sin^{-1} v + c \quad , \quad |v| < 1 \quad , \quad x > 0$$

$$-\ln(-x) = \sin^{-1} v + c \quad , \quad |v| < 1 \quad , \quad x < 0$$

با جایگذاری $v = \frac{y}{x}$، به دست می‌آوریم

$$\ln x = \sin^{-1}\frac{y}{x} + c \quad , \quad \left|\frac{y}{x}\right| < 1 \quad , \quad x > 0$$

$$-\ln(-x) = \sin^{-1}\frac{y}{x} + c \quad , \quad \left|\frac{y}{x}\right| < 1 \quad , \quad x < 0$$

به علاوه، به ازای $v = \pm 1$ دو جواب $y = \pm x$ را به‌دست می‌آوریم. به‌آسانی می‌توانید درستی این مطلب را تحقیق کنید.

۱-۵-۸ تمرین‌های بخش ۱-۵

جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

۱. $(x^2 - xy + y^2)dx - xy\,dy = 0$

۲. $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

۳. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$

۴. $\left|x\csc\left(\dfrac{y}{x}\right) - y\right|dx + x\,dy = 0$

۵. $(x - y\ln y + y\ln x)dx + x(\ln y - \ln x)dy = 0$

۶. $\left[x - y\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)dx + x\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]dy = 0$

در تمرین‌های زیر، جواب خصوصی را که در شرط اولیه داده شده صدق می‌کند، پیدا کنید.

۷. $(16x+5y)dx+(3x+y)dy=0 \ , \ y(1)=-3$

۸. $(xe^{\frac{x}{y}}+y)dx=x\,dy \ , \ y(1)=0$

۹. $y'-\frac{y}{x}+\csc\frac{y}{x}=0 \quad , \quad y(1)=0$

۱۰. نقطه‌ای بر یک منحنی در صفحه xy به قسمی حرکت می‌کند که زاویه‌ای که خط مماس با محور xها می‌سازد سه برابر زاویه‌ای است که شعاع حامل با محور xها می‌سازد، معادله این منحنی را تعیین کنید.

۱۱. (الف) فرض کنید F یک تابع همگن از درجه k برحسب x و y باشد. نشان دهید F را می‌توان به‌صورت $F=x^k\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ نوشت.

(ب) با استفاده از قسمت (الف) قضیه اویلر را ثابت کنید: اگر F یک تابع همگن از درجه k برحسب x و y باشد، آنگاه

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}=kF$$

۱۲. معادله دیفرانسیل مرتبه اول $(a_1x+b_1y+c_1)y'=a_2x+b_2y+c_2$ را در نظر بگیرید. (الف) اگر $a_1b_2-a_2b_1=0$، آنگاه معادله به معادله‌ای از نوع مسأله ۱۱ در تمرین ۱-٤-٦ تبدیل می‌گردد.

(ب) هرگاه $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$، آنگاه تغییر متغیر جدید

$$u=x+k \qquad v=y+h$$

معادله را به یک معادله همگن تبدیل می‌کند.

۱۳. با استفاده از تمرین ۱۲ معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $(2x-y+1)dx+(x+y)dy=0$

(ب) $(2x+3y-1)dx+(4x+6y+2)dy=0$

(ج) $(x+2y)dx+(y-1)dy=0$

$$(x+y-۲)dx-(x-y-٤)dy=۰ \qquad (د)$$

۱-٦ معادلات دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ که آن را به‌صورت

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰ \qquad (۱)$$

می‌نویسیم، در نظر بگیرید. معادله (۱) را **کامل** می‌نامیم اگر تابع $F(x,y)$ با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته وجود داشته باشد، به قسمی که

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=M(x,y) \quad , \quad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=N(x,y) \qquad (۲)$$

قضیه: هرگاه معادله دیفرانسیل (۱) کامل و تابع F با ویژگی‌های (۲) موجود باشد، آنگاه تابع $y=f(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل است اگر و تنها اگر در معادله‌ای به‌صورت $F(x,y)=c$ که در آن c ثابت است، صدق می‌کند.

اثبات: فرض کنید که تابع $y=f(x)$ جوابی از معادله‌ی (۱) باشد. در این صورت

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy=۰$$

یا

$$dF(x,y)=۰$$

از این رو $F(x,y)=c$ ، برعکس، فرض کنید که تابع (مشتق‌پذیر) F در معادله $F(x,y)=c$ صدق نماید. در این صورت با دیفرانسیل‌گیری، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}dy=۰$$

یا

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$$

از این رو تابع $y=f(x)$ جوابی از معادله دیفرانسیل است.

۱-۶-۳ محک: اینک محکی را ارائه می‌دهیم که توسط آن می‌توان کامل بودن یا نبودن معادله‌ای را تشخیص داد. فرض می‌کنیم که توابع M و N و مشتقات جزئی آنها در ناحیه‌ای پیوسته بوده و معادله (۱) کامل باشد. در این صورت تابعی مانند F، وجود دارد به قسمی که

$$M=\frac{\partial F}{\partial x} \qquad , \qquad N=\frac{\partial F}{\partial y}$$

از این رو

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad , \qquad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

و چون مشتقات مخلوط F (طرفین راست تساوی‌های فوق) برابرند. در نتیجه:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \tag{۳}$$

از این رو اگر معادله (۱) کامل باشد، آنگاه شرط (۳) برقرار است.

۱-۶-۳ قضیه: فرض کنید M، N در شرط (۳) در ناحیه مستطیل شکل

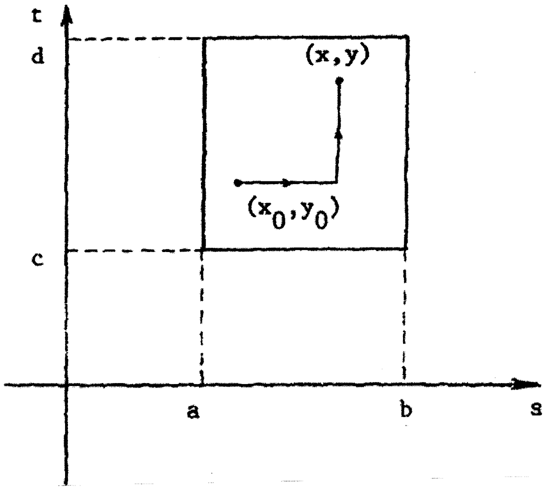
$$D=\{(x,y) | a<x<b, c<y<d\}$$

صدق کند. در این صورت معادله $Mdx+Ndy=0$ کامل است.

اثبات: فرض کنید (x_0, y_0) نقطه ثابتی در D باشد. تابع دو متغیره F را به ازای هر (x,y) متعلق به D توسط

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x} M(s,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} N(x,t)dt \tag{٤}$$

تعریف می‌کنیم. شکل ۱ را ببینید. باید ثابت کنیم که $\frac{\partial F}{\partial x}=M$ و $\frac{\partial F}{\partial y}=N$



شکل (۱)

با مشتق‌گیری نسبت به x، داریم:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} dt$$

با استفاده از شرط (۳)، یعنی $\frac{\partial N(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial M(x,t)}{\partial t}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial M(x,t)}{\partial t} dt$$

$$= M(x,y_0) + M(x,y) - M(x,y_0) \qquad = M(x,y)$$

به همین نحو، می‌توان نشان داد که $N = \frac{\partial F}{\partial y}$. چون تابع F در ویژگی‌های (۲) صدق می‌کند، پس معادله دیفرانسیل کامل است.

وقتی معادله دیفرانسیلی کامل باشد، از فرمول (٤) می‌توان جهت یافتن F استفاده کرد. ولی معمولاً این تابع را می‌توان به روش ساده‌تری به‌دست آورد. این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

۱-٦-٤ مثال: معادله دیفرانسیل $y\,dx + (x + y^2)dy = 0$ را حل کنید.

حل: با کمی دقت متوجه می‌شویم که این معادله جدا شدنی نبوده و همگن نمی‌باشد. پس برقراری شرط (۳) را می‌آزماییم. در اینجا

$M(x,y)=y$ و $N(x,y)=x+y^{۲}$. از این رو

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial (y)}{\partial y}=۱$$

و

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial (x+y^{۲})}{\partial x}=۱$$

چون $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$، پس معادله کامل می‌باشد. پس طبق قضیه ۱-۶-۳، تابعی مانند F، وجود دارد به قسمی که $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x+y^{۲}$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=y$ با انتگرال‌گیری از رابطه $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=y$ نسبت به x، با فرض ثابت بودن y، مشاهده می‌کنیم که F به‌صورت

$$F(x,y)=xy+f(y) \qquad (۵)$$

می‌باشد که در آن f، تابعی دلخواه از y است. اکنون f را باید به قسمی انتخاب کنیم که شرط $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x+y^{۲}$ نیز برقرار باشد. لذا باید داشته باشیم

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x+f'(y)=x+y^{۲}$$

یا

$$f'(y)=y^{۲}$$

پس یک انتخاب ممکن برای f عبارت است از $f(y)=\frac{۱}{۳}y^{۳}$. بنابراین از معادله (۵)، نتیجه می‌گیریم که

$$F(x,y)=xy+\frac{۱}{۳}y^{۳}$$

پس بنا بر قضیه ۱-۶-۱، جواب عمومی معادله داده شده عبارت است از

$$F(x,y)=c$$

یا

$$xy+\frac{۱}{۳}y^{۳}=c$$

۱-۶-۵ مثال: جواب عمومی معادله $\frac{dy}{dx}=-\frac{e^y}{xe^y+۲y}$ را پیدا کنید.

حل: معادله را به‌صورت $M(x,y)dx+N(x,y)dy=۰$ می‌نویسیم. داریم

$$e^y\,dx+(x\,e^y+۲y)\,dy=۰$$

در اینجا $M(x,y)=e^y$ و $N(x,y)=x\,e^y+۲y$. از این رو

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial(e^y)}{\partial y}=e^y$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial(x\,e^y+۲y)}{\partial x}=e^y$$

چون $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$، پس معادله کامل می‌باشد. پس تابعی مانند F، وجود دارد به قسمی که

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=e^y \quad , \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x\,e^y+۲y$$

با انتگرال‌گیری از $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=x\,e^y+۲y$ نسبت به y، با فرض ثابت بودن x، مشاهده می‌کنیم که F به‌صورت $F(x,y)=x\,e^y+y^۲+h(x)$ می‌باشد که در آن h تابع دلخواهی از x است. اکنون h را باید به قسمی انتخاب کنیم که شرط $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=e^y$ نیز برقرار باشد. باید داشته باشیم

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=e^y+h'(x)=e^y$$

یا

$$h'(x)=۰$$

پس یک انتخاب ممکن برای h عبارت است از $h(x)=1$. بنابراین

$$F(x,y)=xe^{y}+y^{2}+1$$

در نتیجه جواب عمومی معادله داده شده عبارت است از:

$$xe^{y}+y^{2}+1=c$$

یا

$$xe^{y}+y^{2}=k$$

که در آن $K=c-1$.

۱-۶-۶ تمرین: معادله $y'=\dfrac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$ را حل کنید.

۱-۶-۷ تمرین: ثابت کنید هر معادله دیفرانسیل جداشدنی، کامل است.

۱-۶-۸ عامل

فرض کنید معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ کامل نباشد. اگر تابعی مانند $\rho(x,y)$ وجود داشته باشد، به قسمی که معادله

$$\rho(x,y)M(x,y)dx+\rho(x,y)N(x,y)dy=0$$

کامل باشد آنگاه $\rho(x,y)$ را یک **عامل انتگرال‌ساز معادله** می‌نامیم.

۱-۶-۹ مثال: معادله دیفرانسیل $(y^{2}+y)dx-xdy=0$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که معادله دیفرانسیل کامل نیست ولی اگر دو طرف معادله را در $\dfrac{1}{y^{2}}$ ضرب کنید به یک معادله دیفرانسیلی کامل تبدیل می‌گردد. (یعنی $\dfrac{1}{y^{2}}$ یک عامل انتگرال‌ساز است).

حل: در اینجا

$$M=y^{2}+y$$

و

$$N=-x$$

اینک مشاهده می‌کنیم که $\frac{\partial M}{\partial y}=2y+1$ و $\frac{\partial N}{\partial x}=-1$. پس معادله دیفرانسیل کامل نیست، ولی اگر دو طرف معادله را در $\frac{1}{y^2}$ ضرب کنیم، به دست می‌آوریم

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)dx-\frac{x}{y^2}dy=0$$

در اینجا

$$N=\frac{-x}{y^2} \text{ و } M=1+\frac{1}{y}$$

اکنون مشاهده می‌کنیم که

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}$$

و

$$\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y^2}$$

در نتیجه $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. پس معادله دیفرانسیل کامل است و با روش حل معادلات دیفرانسیل کامل را حل کرد. با وجود این، این معادله را می‌توان با روش زیر نیز حل کرد.

نخست معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+y^2\,dy=0$$

جمله اول برابر است با $d(\frac{x}{y})$. در نتیجه داریم

$$d(\frac{x}{y})+y^2\,dy=0$$

با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$\frac{x}{y}+\frac{y^3}{3}=c$$

۱-۶-۱۰ مثال: نشان دهید تابع ρ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (۶)$$

است، اگر در معادله دیفرانسیل جزئی $N\frac{\partial\rho}{\partial x}-M\frac{\partial\rho}{\partial y}=\rho\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ صدق کند.

حل: دو طرف معادله (۶) را در ρ، عامل انتگرال‌ساز، ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\rho Mdx+\rho Ndy=0$$

از شرط لازم برای کامل بودن این معادله، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho M)=\frac{\partial}{\partial x}(\rho N)$$

$$M\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial N}{\partial x}$$

این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$N\frac{\partial\rho}{\partial x}-M\frac{\partial\rho}{\partial y}=\rho\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (۷)$$

۱-۶-۱۱ مثال: تحت چه شرطی معادله (۶) عامل انتگرال‌سازی دارد که تنها تابعی از x باشد؟

حل: فرض کنیم معادله (۶) عامل انتگرال‌سازی مانند ρ داشته باشد که تنها تابعی از x است. در این صورت از (۷) به‌دست می‌آوریم:

$$N\frac{d\rho}{dx}=\rho\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

که می‌توان آن را به‌صورت

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

نوشت. اگر طرف راست این معادله تنها تابعی از x باشد و آن را $g(x)$ بنامیم، آنگاه $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}=g(x)$. از این رو، با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آوریم

$$\operatorname{Ln}\rho=\int g(x)\,dx$$

در نتیجه

$$\rho=e^{\int g(x)dx}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که اگر

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=g(x) \qquad (۸)$$

آنگاه یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله (٦) عبارت است از:

$$\rho=e^{\int g(x)dx}$$

۱-٦-۱۳ تمرین: یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل

$$(e^x-\sin y)dx+\cos y\,dy=0$$

پیدا کنید.

۱-٦-١٤ مثال: تحت چه شرطی معادله (٦) عامل انتگرال‌سازی دارد که تنها تابعی از y باشد؟

حل: فرض کنید معادله (٦) عامل انتگرال‌سازی مانند ρ داشته باشد که تنها تابعی از y است. در صورت از (۷) به‌دست می‌آوریم

$$-M\frac{d\rho}{dy}=\rho\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

که می‌توان آن را به‌صورت

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dy}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial y}}{-M}$$

نوشت. اگر طرف راست این معادله تنها تابعی از y باشد و آن را $h(y)$ بنامیم، آنگاه

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dy} = h(y)$$

از این رو، با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آوریم.

$$\operatorname{Ln}\rho = \int h(y)\,dy$$

در نتیجه

$$\rho = e^{\int h(y)dy}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که اگر

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} = h(y) \qquad (9)$$

آنگاه

$$\rho = e^{\int h(y)dy}$$

یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله (y) است.

۱-۶-۱٤ مثال: **یک** عامل انتگرال‌ساز برای معادله زیر پیدا کرده و سپس آن را حل کنید.

$$xy\,dx + (1+x^2)\,dy = 0$$

حل: به‌آسانی می‌توان نشان داد که معادله دیفرانسیل کامل نیست. اینک وجود عامل انتگرال‌سازی را برای معادله که تنها تابعی از y باشد بررسی می‌کنیم. در اینجا

$$M = xy \quad , \quad N = 1 + x^2$$

بنابراین

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x \quad , \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x$$

با تشکیل (۹) خواهیم داشت:

$$h(y)=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\frac{x-۲x}{-xy}=\frac{۱}{y}$$

از این رو $\rho=e^{\int\frac{۱}{y}dy}=e^{\operatorname{Ln} y}=y$. با ضرب دو طرف معادله (۱۰) در y یک معادله دیفرانسیل کامل (نشان دهید) به دست می‌آید.

$$xy^۲dx+y(۱+x^۲)dy=۰ \qquad (۱۱)$$

اینک بنا به روش حل معادلات دیفرانسیل کامل، تابعی، مانند F، وجود دارد به قسمی که

$$\frac{\partial F}{\partial x}=xy^۲ \qquad , \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=(۱+x^۲)y$$

برای یافتن F، می‌توان از $\frac{\partial F}{\partial x}$ با فرض ثابت بودن y، انتگرال گرفت در نتیجه

$$F=\frac{x^۲y^۲}{۲}+f(y)$$

اکنون f را باید به قسمی انتخاب کنیم که شرط $\frac{\partial F}{\partial y}=(۱+x^۲)y$ نیز برقرار باشد. باید داشته باشیم

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^۲y+f'(y)=y+yx^۲$$

یا

$$f'(y)=y$$

پس یک انتخاب ممکن برای f عبارت است از $f(y)=\frac{y^۲}{۲}$. بنابراین

$$F(x,y)=\frac{x^۲y^۲}{۲}+\frac{y^۲}{۲}$$

در نتیجه جواب عمومی عبارت است از:

$$\frac{x^۲y^۲}{۲}+\frac{y^۲}{۲}=\frac{c}{۲}$$

یا

$$x^{۲}y^{۲}+y^{۲}=c$$

۱-٦-۱۵ مثال: تحت چه شرطی معادله (٦) عامل انتگرال‌سازی دارد که تابعی از $z=xy$ است؟

حل: فرض کنید معادله (٦) عامل انتگرال‌سازی داشته باشد که تابعی از $z=xy$ باشد. در این صورت از معادله (٧) خواهیم داشت

$$N.\frac{\partial\rho(z)}{\partial x}-M\frac{\partial\rho(z)}{\partial y}=\rho(z)(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}) \qquad (۱۱)$$

چون $z=xy$، $\frac{\partial z}{\partial x}=y$. بنابراین، $\frac{\partial\rho(z)}{\partial x}=\frac{d\rho(z)}{dz}.y$ به همین نحو $\frac{\partial\rho(z)}{\partial y}=\frac{d\rho(z)}{dz}.x$. با قرار دادن مقادیر در (۱۱) و ساده کردن به دست می‌آوریم

$$N.y\frac{d\rho(z)}{dz}-Mx\frac{d\rho(z)}{dz}=\rho(z)(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})$$

$$\frac{۱}{\rho(z)}.\frac{d\rho(z)}{dz}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{Ny-Mx}$$

اگر طرف راست این معادله تابعی از $z=xy$، مثلاً برابر با $v(z)$ باشد، آنگاه

$$\frac{۱}{\rho(z)}\frac{d\rho(z)}{dz}=v(z)$$

از این رو با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری، به دست می‌آوریم.

$$Ln\,\rho(z)=\int v(z)dz$$

پس

$$\rho(z)=e^{\int v(z)dz}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که اگر

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=v(z) \qquad (۱۲)$$

آنگاه یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله (۶) عبارت است از:

$$\rho = e^{\int \nu(z)dz}$$

۱-۶-۱۶ تمرین: یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله دیفرانسیل

$$(y^3 + xy^2 + y)dx + (x^3 + x^2y + x)dy = 0$$

پیدا کنید.

۱-۶-۱۷: گاهی معادله دیفرانسیل (۶) دارای عامل انتگرال‌سازی به صورت $\rho(x,y) = x^m y^n$ است، که در آن m ثابت‌های مناسبی هستند. اینک مثالی ارائه می‌دهیم که روش یافتن اینگونه عامل انتگرال‌سازها را توضیح می‌دهد.

۱-۶-۱۸ مثال: عامل انتگرال‌سازی برای معادله $(x^2 + xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0$ پیدا کرده و سپس معادله را حل کنید.

حل: نخست معادله را به صورت (۶) می‌نویسیم.

$$(-3xy + 2y^3)dx + (x^2 + xy^2)dy = 0 \tag{13}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که این معادله کامل نیست. برای یافتن عامل انتگرال‌سازی به صورت $\rho(x,y) = x^m y^n$ دو طرف معادله را در $\rho(x,y)$ ضرب می‌کنیم. معادله زیر به دست می‌آید.

$$(-3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3})dx + (x^{m+2}y^n + x^{m+1}y^{n+2})dy = 0$$

اینک در صورت امکان m و n را به قسمی پیدا می‌کنیم که شرط لازم برای کامل بودن معادله برقرار باشد. در اینجا

$$M = -3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3} \quad , \quad N = x^{m+2}y^n + x^{m+1}y^{n+2}$$

بنابراین

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -3(n+1)x^{m+1}y^n + 2(n+3)x^m y^{n+2}$$

و

$$\frac{\partial N}{\partial x}=(m+2)x^{m+1}y^{n}+(m+1)x^{m}y^{n+2}$$

در نتیجه معادله کامل است اگر

$$-3(n+1)x^{m+1}y^{n}+2(n+3)x^{m}y^{n+2}$$

$$=(m+2)x^{m+1}y^{n}+(m+1)x^{m}y^{n+2}$$

با ضرب کردن دو طرف معادله در $\frac{1}{x^{m}y^{n}}$ به دست می‌آوریم

$$-3(n+1)x+2(n+3)y^{2}=(m+2)x+(m+1)y^{2}$$

معادله بالا یک اتحاد می‌شود، اگر n,m به قسمی انتخاب شوند که

$$-2(n+1)=m+2 \quad , \quad 2(n+3)=m+1$$

با حل این دو معادله نسبت به m و n در می‌یابیم که

$$M=-2 \quad , \quad m=1$$

از این رو، یک عامل انتگرال‌ساز عبارت است از xy^{-2} با ضرب کردن دو طرف معادله (۱۳) در xy^{-2} به دست می‌آوریم

$$(-3x^{2}y^{-1}+2xy)dx+(x^{3}y^{-2}+x^{2})dy=0$$

به آسانی می‌توان نشان داد که این معادله کامل است. اینک با روش حل معادلات دیفرانسیل کامل، تابعی مانند F وجود دارد به قسمی که

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3x^{2}y^{-1}+2xy \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x}=x^{3}y^{-2}+x^{2}$$

اینک برای یافتن F، از $\frac{\partial F}{\partial y}=x^{3}y^{-2}+x^{2}$ با فرض ثابت بودن x انتگرال می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که F عبارت است از

$$F(x,y)=-x^{3}y^{-1}+x^{2}y+g(x)$$

که در آن g تابع دلخواهی از x است. در اینجا g را باید به قسمی انتخاب کرد که شرط $\frac{\partial F}{\partial x}=-3x^2y^{-1}+2xy$ نیز برقرار باشد. لذا باید داشته باشیم

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3x^2y^{-1}+2xy+g'(x)=-3x^2y^{-1}+2xy$$

یا

$$g'(x)=0$$

پس یک انتخاب ممکن برای g عبارت است از $g(x)=k$، بنابراین

$$F(x,y)=-x^3y^{-1}+x^2y+k$$

در نتیجه جواب عمومی عبارت است از:

$$-x^3y^{-1}+x^2y=c$$

۱-۶-۱۹ تمرین: عامل انتگرال‌سازی برای معادله زیر **بیابید.**

$$y(2x^2y^3+3)dx+x(x^2y^3-1)dy=0$$

۱-۶-۲۰ تذکر: گاهی با جستجو کردن و با استفاده از فرمول‌های زیر می‌توان عامل انتگرال‌سازی برای معادله داده شده، پیدا کرد.

$$d(x^2+y^2)=2(xdx+ydy) \tag{14}$$

$$d(xy)=xdy+ydx \tag{15}$$

$$d(\tan^{-1}\frac{y}{x})=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2} \tag{16}$$

$$d(\frac{y}{x})=\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2} \tag{17}$$

$$d(\frac{x}{y})=\frac{y\,dx-xdy}{y^2} \tag{18}$$

۱-۶-۲۱ مثال: معادله دیفرانسیل $(y^{2}+y)dx-xdy=0$ را حل کنید.

حل: معادله دیفرانسیل را به صورت $y^{2}dx+ydx-xdy=0$ می‌نویسیم. با استفاده از فرمول (۱۸) و با ضرب کردن دو طرف معادله در $\frac{1}{y^{2}}$ به دست می‌آوریم.

$$dx+\frac{y\,dx-x\,dy}{y^{2}}=0$$

یا

$$dx+d(\frac{x}{y})=0$$

از این رو با انتگرال‌گیری جواب عمومی به دست می‌آید:

$$x+\frac{x}{y}=c$$

یا

$$y=\frac{x}{c-x} \quad , \quad y\neq 0$$

توجه کنید که $y=0$ نیز در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

۱-۶-۲۲ مثال: معادله دیفرانسیل $x\,dy-y\,dx=(4x^{2}+9y^{2})(4x\,dx+9y\,dy)$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را بر $4x^{2}+9y^{2}$ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{x\,dy-y\,dx}{4x^{2}+9y^{2}}=4x\,dx+9y\,dy$$

اینک طرف راست این معادله را به صورت دیفرانسیل کامل می‌نویسیم. صورت و مخرج کسر طرف چپ را بر x^{2} تقسیم می‌کنیم. به دست می‌آوریم:

$$\frac{\frac{xdy-ydx}{x^{2}}}{4+9(\frac{y^{2}}{x^{2}})}=2d(x^{2})+\frac{9}{2}d(y^{2})$$

یا

$$\frac{d(\frac{x}{y})}{4+9(\frac{y^2}{x^2})}=2d(x^2)+\frac{9}{2}d(y^2)$$

یا

$$\frac{d(\frac{x}{y})}{4\left[1+(\frac{3y}{2x})^2\right]}=2d(x^2)+\frac{9}{2}d(y^2)$$

اینک صورت و مخرج کسر طرف چپ را در $\frac{3}{2}$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{\frac{3}{2}d(\frac{y}{x})}{6\left[1+(\frac{3y}{2x})^2\right]}=2d(x^2)+\frac{9}{2}d(y^2)$$

$$\frac{d(\frac{3y}{2x})}{6\left[1+(\frac{3y}{2x})^2\right]}=2d(x^2)+\frac{9}{2}d(y^2)$$

طرف چپ معادله را می‌توان به صورت

$$\frac{1}{6}d\left(\tan^{-1}(\frac{3y}{2x})\right)=2d(x^2)+\frac{9}{2}d(y^2)$$

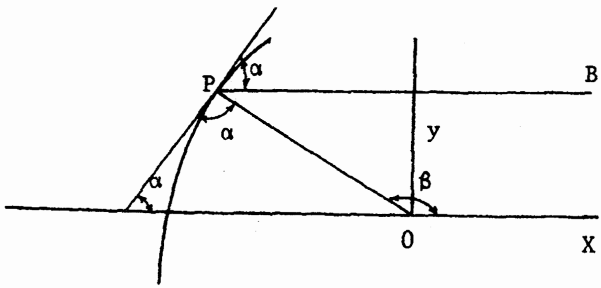
نوشت. با انتگرال‌گیری جواب عمومی به دست می‌آید.

$$\frac{1}{6}\tan^{-1}(\frac{3y}{2x})=2x^2+\frac{9}{2}y^2+c$$

۱-۶-۲۳ تمرین: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x\,dy=(y+x^2+9y^2)dx$ را پیدا کنید.

۱-۶-۲۴ مثال: از منبعی نورانی واقع بر مبداء مختصات، دسته نوری به منحنی‌ای واقع در همان صفحه می‌تابد و موازی محور x انعکاس می‌یابد. معادله این منحنی را پیدا کنید.

حل: با توجه به شکل (۲) در زیر مشاهده می‌کنیم که اشعه OP و اشعه انعکاس BP با خط مماس در P زاویه‌هایی برابر α می‌سازند.



شکل (۲)

از این رو با استفاده از فرمول مثلثاتی $\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$ و با توجه به اینکه $\tan\alpha=\tan(\beta-\alpha)$ خواهیم داشت

$$\tan\alpha=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

یا

$$y'=\frac{\frac{y}{x}-y'}{1+(\frac{y}{x})y'}$$

پس از ساده کردن، معادله را می‌توان به صورت خلاصه

$$y(y')^2+2xy'+y=0$$

نوشت. با حل این معادله درجه دوم نسبت به y' به دست می‌آوریم

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

یا

$$x\,dx + y\,dy = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\;dx$$

با استفاده از فرمول (۱٤)، خواهیم داشت

$$\pm\frac{d(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}} = dx$$

بنابراین

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = x + c$$

با مربع کردن دو طرف معادله و ساده کردن، به دست می‌آوریم

$$y^2 = 2cx + c^2$$

اینک دو طرف معادله را در $\dfrac{1}{x^2+9y^2}$ ضرب می‌کنیم. به دست می‌آوریم

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+9y^2} = dx$$

با تقسیم کردن صورت و مخرج کسر طرف چپ این معادله بر x^2، خواهیم داشت

$$\frac{\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}}{1+9\dfrac{y^2}{x^2}} = dx$$

بنابراین:

$$\frac{d(\frac{y}{x})}{1+(\frac{3y}{x})^2} = dx$$

با ضرب کردن دو طرف معادله در ۳، به دست می‌آوریم

$$\frac{d(\frac{۳y}{x})}{۱+(\frac{۳y}{x})^۲}=۳dx$$

طرف راست معادله را می‌توان به صورت:

$$d\tan^{-۱}(\frac{۳y}{x})=۳dx$$

نوشت، با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$\tan^{-۱}(\frac{۳y}{x})=۳x+c$$

۱-۶-۲۶ تمرین‌های بخش ۱-۶

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱. $(x+۳)^{-۱}\cos y\,dx-\left[\sin y\,Ln(۵x+۱۵)-\frac{۱}{y}\right]dy=۰$

۲. $(x-۱)^{-۱}y\,dx+\left[Ln(۲x-۲)+\frac{۱}{y}\right]dy=۰$

۳. $\frac{y}{x}dx-(\frac{y^۲}{۲x^۲}+x)dx=۰$

٤. $(۳x^۲+۲y\sin ۲x)dx+(۲\sin^۲ x+۳y^۲)dy=۰$

۵. $e^{۲x}(dy+۲y\,dx)=x^۲dx$

معادلات دیفرانسیل زیر را با یافتن عامل انتگرال‌سازی حل کنید.

٦. $(x^۲+y^۲+x)dx+xy\,dy=۰$

۷. $(x^۲+y^۲-y)dx-(x^۲+y^۲-x)dy=۰$

۸. $(x^٤y^۲-y)dx+(x^۲y^٤-x)dy=۰$

.۹ $e^x(x+1)dx+(ye^x-xe^x)dy=0$

.۱۰ $y(y+2x+1)dx-x(2y+x-1)dy=0$

.۱۱ $xdy-ydx=(1+y^2)dy$

.۱۲ $x\,dy=(x^5-x^3y^2+y)dx$

۱-۷ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول: معادله برنولی

۱-۷-۱ **تعریف:** یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام به صورت

$$F(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$$

را **خطی** نامیم هرگاه F یک چند جمله‌ای درجه اول برحسب $y,y',\dots,y^{(n)}$ باشد. به عبارت دیگر، معادله

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

را که در آن توابع $a_0,a_1,\dots,a_n$ و f بر بازه I تعریف شده و به ازای هر x در I $a_0(x)\neq 0$، یک معادله خطی می‌نامیم. معادله‌ای که خطی نباشد **غیرخطی** نامیده می‌شود. معادله دیفرانسیل خطی **مرتبه اول** به صورت $a_0(x)y'+a_1(x)y=f(x)$ است. چون $a_0(x)$ همواره بر بازه I ناصفر است، پس می‌توان دو طرف را بر $a_0(x)$ تقسیم کرده و معادله را به صورت ساده

$$y'+p(x)y=q(x) \qquad (1)$$

نوشت، که در آن

$$p(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)} \quad , \quad q(x)=\frac{f(x)}{a_0(x)}$$

۱-۷-۲ **تمرین:** یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله (۱) که تنها تابعی از x است، پیدا کنید.

۱-۷-۳ **قضیه:** معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول (۱) را حل کنید.

اثبات: بنا بر ۱-۷-۲ می‌دانیم که $\rho = e^{\int p(x)dx}$ یک عامل انتگرال‌ساز از (۱) می‌باشد. با ضرب کردن دو طرف معادله (۱) در این عامل انتگرال‌ساز به دست می‌آوریم:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

ولی به آسانی می‌توان تحقیق کرد طرف چپ معادله اخیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = \frac{d}{dx}\left[ye^{\int p(x)dx}\right]$$

بنابراین

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{\int p(x)dx}\right] = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

اکنون با ضرب کردن دو طرف معادله در dx و انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم:

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c$$

یا

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right] \qquad (۲)$$

از این رو (۲) جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱) می‌باشد.

۱-۷-۴ مثال: معادله دیفرانسیل $y' - ۲xy = e^{x^۲}$ را حل کنید.

حل: با مقایسه معادله داده شده با (۱) مشاهده می‌کنیم که معادله خطی است. در اینجا $p(x) = -۲x$ و $q(x) = e^{-x^۲}$. یک عامل انتگرال‌ساز از این معادله عبارت است از:

$$e^{\int -۲xdx} = e^{-x^۲}$$

با ضرب کردن دو طرف معادله در $e^{-x^۲}$، خواهیم داشت:

$$e^{-x^۲}y' - ۲xe^{-x^۲}y = e^{-x^۲}.e^{x^۲}$$

یا

$$e^{-x^2}dy - 2xe^{-x^2}y\,dx = dx$$

این معادله متناظر با (۲) است. از این رو طرف چپ این معادله به صورت دیفرانسیل کامل زیر است:

$$d(e^{-x^2}y) = dx$$

با انتگرال‌گیری، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده به دست می‌آید.

$$e^{-x^2}y = x + c$$

یا

$$y = e^{x^2}(x + c)$$

۱-۷-۵ تمرین: یک جواب خصوصی از مسأله با مقدار اولیه زیر را پیدا کنید.

$$x\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{\sin x}{x^2} \qquad ; \qquad x \neq 0$$

۱-۷-۶ تعریف: حالت خاصی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n \tag{۳}$$

به ازای $n \neq 0,1$ ، یک **معادله دیفرانسیل برنولی** "Berunoulli" نامیده می‌شود.

توجه می‌کنیم که به ازای $n = 0$ معادله (۳) به یک معادله دیفرانسیل خطی و برای $n = 1$ به یک معادله با متغیرهای جداشدنی تبدیل می‌شود.

۱-۷-۷ روش حل معادلات برنولی

هر معادله برنولی را می‌توان با تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل کرد. با تقسیم معادله (۳) بر y^n به دست می‌آوریم

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = Q(x) \tag{٤}$$

با به کار بردن تغییر متغیر $z = y^{1-n}$ نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

بنابراین

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx}$$

با جایگذاری این مقدار در معادله (٤)، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dz}{dx}+p(x)z=Q(x)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می‌باشد.

۱-۷-۸ مثال: جواب عمومی معادله زیر را بیابید.

$$y'+xy=\frac{x}{y^{3}} \quad , \qquad y\neq 0$$

حل: با مقایسه این معادله با معادله (۳) مشاهده می‌کنیم که معادله داده شده یک معادله برنولی با $n=-3$ است. از ضرب کردن معادله در y^{3} به دست می‌آوریم

$$y^{3}y'+xy^{4}=x$$

با استفاده از تغییر متغیر $z=y^{4}$ ، داریم:

$$\frac{dz}{dx}=4y^{3}y'$$

در نتیجه معادله به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{1}{4}\frac{dz}{dx}+xz=x$$

با ضرب کردن دو طرف معادله در ٤ به دست می‌آوریم

$$\frac{dz}{dx}+4xz=4x$$

پس یک عامل انتگرال‌ساز برای این معادله عبارت است از:

$$\rho=e^{\int 4x\,dx}=e^{2x^{2}}$$

با ضرب کردن دو طرف معادله در e^{2x^2} ، خواهیم داشت:

$$e^{2x^2}\frac{dz}{dx}+4xe^{2x^2}=4xe^{2x^2}$$

یا

$$e^{2x^2}dz+4xe^{2x^2}dx=4xe^{2x_2}dx$$

از این رو

$$d(ze^{2x^2})=4xe^{2x^2}dx$$

با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم

$$ze^{2x^2}=e^{2x^2}+c$$

یا

$$z=e^{-2x^2}(e^{2x^2}+c)$$

با قراردادن $z=y^4$ در این معادله، خواهیم داشت:

$$y^4=1+ce^{-2x^2}$$

۱-۷-۹ تمرین: معادلات زیر را حل کنید.

(الف) $$\frac{dx}{dy}+2xy=e^{-y^2}$$

(ب) $$(1-x^3)\frac{dy}{dx}-2(1+x)y=y^{\frac{5}{2}}$$

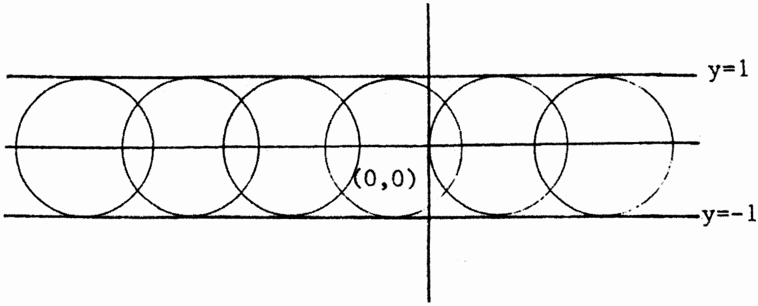
۱-۷-۱۰ خانواده منحنی‌ها و پوش

در بخش‌های قبل مشاهده کردیم که به روش‌های مختلف می‌توان خانواده ۱- پارامتری از جواب‌ها، یعنی $f(x,y,c)=0$، را برای انواع خاصی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ پیدا کرد. اگر این خانواده ۱- پارامتری جواب عمومی نباشد، آنگاه در صورت وجود جواب‌های خصوصی، یافتن آنها کاری بسیار پیچیده و مشکل است.

با این وجود، در یک حالت خاص روش استانداردی برای یافتن اینگونه جواب‌های خصوصی وجود دارد. روشی را که توضیح می‌دهیم به «پوش» خانواده منحنی‌ها معروف است.

۱-۷-۱۱ پوش یک خانواده از منحنی‌ها

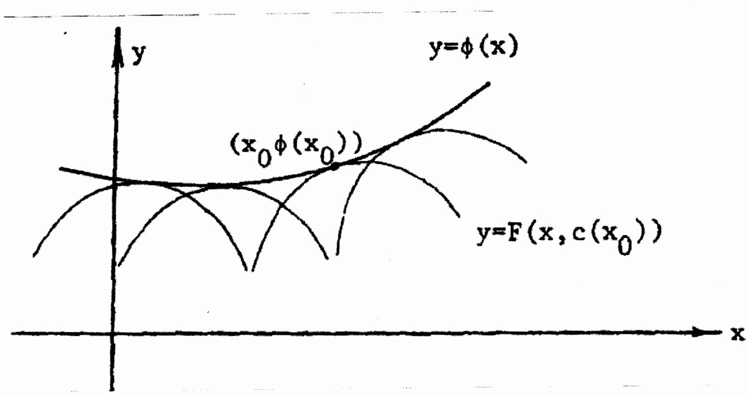
خانواده دایره‌های $(x-c)^۲+y^۲=۱$ به مرکز $(c,۰)$ و شعاع ۱ را در نظر می‌گیریم (شکل (۱) را ببینید). هر دایره بر خط‌های $y=\pm۱$ مماس است.



شکل (۱)

خطوط $y=\pm۱$ شبیه به پوش خانواده دایره‌ها به نظر می‌رسند. به طور کلی تعریف زیر را داریم.

۱-۷-۱۲ تعریف: خانواده منحنی‌های $y=F(x,c)$ را در نظر می‌گیریم. گوییم $y=\phi(x)$ یک **پوش** این خانواده از منحنی‌هاست، اگر در هر نقطه بر $y=\phi(x)$ یک منحنی از خانواده به قسمی وجود داشته باشد که در آن نقطه بر پوش مماس باشد. (شکل (۲) را ببینید.)



شکل (۲)

به ازای هر نقطه $(x_0,\phi(x_0))$، مقداری از c مانند $c=c(x_0)$، موجود باشد به قسمی که منحنی‌های $y=\phi(x)$، $y=F(x,c(x_0))$ در نقطه $(x_0,\phi(x_0))$ مماس باشند. همچنین فرض می‌کنیم که $c'(x)\neq 0$.

با توجه به این فرض، می‌توان آزمون ساده‌ای به دست آورد که توسط آن تعیین نمود خانواده $y=F(x,c)$ پوش دارد یا خیر، و در صورت وجود فرمولی برای آن به دست آورد.

۱-۷-۱۳ قضیه: خانواده منحنی‌های $y=F(x,c)$ دارای پوش $y=\phi(x)$ است اگر و تنها اگر یک تابع c به قسمی وجود داشته باشد که $F_c(x,c(x))=0$ و $\phi(x)=F(x,c(x))$.

تذکر: قضیه فوق بیان می‌کند که «پوش» در صورت وجود، منحنی $y=F(x,c(x))$ است، که در آن c به طور ضمنی توسط معادله $F_c(x,c)=0$ تعریف می‌شود. معادله پوش از حذف c بین معادلات

$$y=F(x,c) \qquad , \qquad F_c(x,c)=0 \qquad (1)$$

به دست می‌آید.

اثبات: فرض می‌کنیم که $y=\phi(x)$ پوشی از خانواده $y=F(x,c)$ باشد. فرض کنیم که c تابعی باشد که $y=\phi(x)$ و $y=F(x,c(x_0))$ در $(x_0,\phi(x_0))$، به ازای هر x_0، مماس باشند.

به ازای هر x_0، داریم

$$\phi(x_0)=F(x_0,c(x_0,c(x_0)) \qquad (2)$$

یعنی اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$\phi(x)=F(x,c(x)) \qquad (3)$$

از شرط مماس بودن منحنی‌ها به ازای هر x_0، نتیجه می‌گیریم که

$$\phi'(x_\circ) = F_x(x, c(x_\circ))\big|_{x=x_\circ} = F(x_\circ, c(x_\circ))$$

از این رو، اتحاد

$$\phi(x) = F_x(x, c(x)) \qquad (\text{٤})$$

را خواهیم داشت. اگر ϕ' را از (۳) حساب کنیم، به دست می‌آوریم

$$\phi'(x) = F_x(x, c(x)) + F_c(x, c(x))c'(x) \qquad (\text{٥})$$

با مقایسه (٤) و (٥) و با فرض $c'(x) \neq \cdot$، داریم

$$F_c(x, c(x)) = \cdot \qquad (\text{٦})$$

فرمول‌های (۳) تا (٦) مفروضات قضیه است.

با برعکس کردن بحث بالا می‌توان نشان داد که (٦) و (۳) شرط کافی برای این مطلب که است که $y = \phi(x)$ پوشی از خانواده $y = F(x, c)$ است.

۱-۷-۱٤ مثال: خانواده $y = ۲cx - c^۲$ را در نظر بگیرید. پوشی برای این خانواده پیدا کنید.

حل: معادله (٦) برای این مثال عبارت است از:

$$۲x - ۲c = \cdot$$

که تابع $c(x) = x$ را تعریف می‌کند. بنابراین (با توجه به فرمول (٥) پوش عبارت است از:

$$y = ۲x.x - x^۲ = x^۲$$

۱-۷-۱٥ تذکر: برای خانواده منحنی‌های داده شده به صورت

$$G(x, y, c) = \cdot \qquad (\text{٧})$$

می‌توان نشان داد که پوش، در صورت وجود، با حذف c بین (٧)

$$G_c(x, y, c) = \cdot \qquad (\text{٨})$$

به دست می‌آید.

۱-۷-۱۶ تمرین: خانواده‌های زیر را در نظر بگیرید. پوش هر یک از این خانواده‌ها را پیدا کنید.

(الف) $y=(x-c)^3$

(ب) $(x-c)^2+y^2=1$

۱-۷-۱۷ معادله کلرو: ساده‌ترین نوع خانواده منحنی‌ها، خط‌های راست می‌باشند. می‌دانیم که

$$y=mx+b \qquad (9)$$

نمایش چنین خانواده‌ای است. شیب هر یک از خط‌های خانواده برابر با m و عرض از مبداء آن برابر با b است. از این رو (۹) یک خانواده ۲- پارامتری می‌باشد.

اگر b تابعی از شیب (m) باشد، یعنی $b=f(m)$، از آن می‌توان یک خانواده ۱- پارامتری به دست آورد. از این رو (۹) به

$$y=mx+f(m) \qquad (10)$$

تبدیل می‌گردد.

برای یافتن معادله دیفرانسیلی که خانواده ۱- پارامتری جواب‌های آن خانواده (۱۰) باشد، با مشتق‌گیری از (۱۰) نسبت به x به دست می‌آوریم

$$y'=m$$

با جایگذاری این مقدار برای m در (۱۰) معادله دیفرانسیل

$$y=y'x+f(y') \qquad (11)$$

را به دست می‌آوریم که به **معادله کلرو** "Clairaul" موسوم است.

۱-۷-۱۸ تذکر: اگر با معادله دیفرانسیل (۱۱) شروع کنیم، جواب آن را می‌توان با جانشین کردن y' با پارامتر c به سادگی پیدا کرد. برای مثال، جواب معادله کلرو $y=y'x+(y')^2$، خانواده خط‌های غیرقائم $y=cx+c^2$ است. اگر خانواده (۱۰) پوش

داشته باشد، این پوش یک جواب خصوصی (۱۱) است که از خانواده جواب‌های (۱۰) به دست نمی‌آید. یک شرط کافی وجود پوش برای خانواده (۱۰) این است که پوش در معادلات پارامتری (۷) و (۸) صدق کند، یعنی

$$y - cx - f(c) = 0$$

$$x + f'(c) = 0$$

۱-۷-۱۹ مثال: خانواده ۱- پارامتری جواب‌های معادله کلرو

$$y = y'x + (y')^2 \qquad (12)$$

را پیدا کرده و پوش‌های خانواده جواب‌ها را مورد بررسی قرار دهید.

حل: با توجه به تذکر ۱-۷-۱۸ در می‌یابیم که یک خانواده ۱- پارامتری از جواب‌ها عبارت است از:

$$y = cx + c^2 \qquad (13)$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که این جواب‌ها در معادله دیفرانسیل داده شده صدق می‌کنند. همچنین بنا بر تذکر ۱-۷-۱۵، یک مجموعه از مقادیر که در معادلات پارامتری (۷) و (۸) صدق می‌کنند عبارتند از:

$$y - cx - c^2 = 0 \qquad (14)$$

$$x + 2c = 0 \Rightarrow c = -\frac{x}{2}$$

با قرار دادن $c = -\frac{x}{2}$ در معادله (۱۴) یک پوش از خط‌های غیرقائم (۱۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

چون $y = -\frac{x^2}{4}$ در معادله (۱۲) صدق می‌کند، پس یک جواب خصوصی از آن است.

۱-۷-۲۰ تمرین: خانواده ۱- پارامتری جواب‌های معادله کلرو

$$y = y'x + \operatorname{Log} y'$$

را پیدا کرده و پوش‌های خانواده جواب‌ها را مورد بررسی قرار دهید.

۱-۷-۲۱ معادله ریکاتی: معادله دیفرانسیل به صورت

$$y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2 \qquad , \qquad f_2(x) \neq 0 \qquad (15)$$

را یک **معادله ریکاتی** "Riccati" می‌نامیم.

۱-۷-۲۲ روش حل: اگر $y_1(x)$ یک جواب خصوصی از معادله (۱۷) باشد جایگذاری

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \qquad , \qquad y' = y_1' - \frac{1}{u^2}u' \qquad (16)$$

معادله را به معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر تبدیل می‌کند.

$$u' + \left[f_1(x) + 2f_2(x)y_1\right]u = -f_2(x) \qquad (17)$$

از این نکته استفاده می‌کنیم که چون y_1 یک جواب خصوصی از معادله (۱۵) می‌باشد، پس

$$y_1' = f_0(x) + f_1(x)y_1 + f_2(x)y_1^2$$

۱-۷-۲۳ مثال: معادله دیفرانسیل $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2$ را با فرض $y_1(x) = -x^2$ حل کنید.

حل: با به کار بردن تغییر متغیر $y = -x^2 + \frac{1}{u}$ به دست می‌آوریم.

$$y' = -2x - \frac{1}{u^2}u'$$

پس از جایگذاری مقادیر y و y' در معادله داده شده، خواهیم داشت:

$$-2x - \frac{1}{u^2}u' = x^3 + \frac{2}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right) - \frac{1}{x}\left(-x^2 + \frac{1}{u}\right)^2$$

$$-۲x-\frac{۱}{u^۲}u'=x^۳-۲x+\frac{۲}{xu}-x^۳+۲\frac{x}{u}-\frac{۱}{xu^۲}$$

پس از ساده کردن و ضرب کردن دو طرف در $u^۲$، به دست می‌آوریم:

$$u'+\left[\frac{۲}{x}+۲x\right]u=\frac{۱}{x} \qquad (۱۸)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی است. یک عامل انتگرال‌ساز از این معادله عبارت است از:

$$e^{\int(\frac{۲}{x}+۲x)dx}=e^{۲\operatorname{Ln}x+x^۲}=x^۲e^{x^۲}$$

با ضرب کردن دو طرف معادله (۱۸) در $x^۲e^{x^۲}$ به دست می‌آوریم

$$x^۲e^{x^۲}u'+(۲x+۲x^۳)e^{x^۲}u=xe^{x^۲}$$

یا

$$x^۲e^{x^۲}du+(۲x+۲x^۳)e^{x^۲}udx=xe^{x^۲}dx$$

طرف چپ این معادله دیفرانسیل کامل است، پس

$$d(x^۲e^{x^۲}u)=xe^{x^۲}dx$$

با انتگرال‌گیری، داریم:

$$x^۲e^{x^۲}u=\frac{۱}{۲}e^{x^۲}+c$$

یا

$$u=\frac{۱}{۲x^۲}+\frac{c}{x^۲e^{x^۲}}$$

ولی از تغییر متغیر $y=-x^۲+\frac{۱}{u}$ نسبت به u، به دست می‌آوریم

$$u=\frac{۱}{y+x^۲}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله ریکاتی داده شده عبارت است از:

$$\frac{1}{y+x^2}=\frac{1}{2x^2}+\frac{c}{x^2e^{x^2}}$$

یا

$$y=-x^2+\frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2c}$$

۱-۷-۲٤ تمرین: معادله دیفرانسیل $y'=2\tan x\sec x-y^2\sin x$; $(y_1(x)=\sec x)$ را حل کنید.

۱-۷-۲۵ تمرین‌های بخش ۱-۷

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

۱. $xy'+y=x^3$

۲. $xy'+y=y^2\operatorname{Ln}x$

۳. $\tan\theta\dfrac{dr}{d\theta}-r=\tan^2\theta$

٤. یک جواب خصوصی از مسأله مقدار اولیه زیر را پیدا کنید.

$$2\cos x\,dy=(y\sin x-y^3)dx \quad ; \quad y(0)=1$$

در تمرین‌های زیر یک خانواده ۱- پارامتری جواب‌های هر یک از معادلات کلرو را پیدا کرده و پوش‌های خانواده جواب‌ها را مورد بررسی قرار دهید.

۵. $y=xy'-(y')^3$

٦. $y=xy'+\left[1+(y')^2\right]$

معادلات ریکاتی زیر را حل کنید.

۷. $y'=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{y}{x}-y^2$, $y_1(x)=\dfrac{1}{x}$

۸. $y'=1+\dfrac{y}{x}-\dfrac{y^2}{x^2}$, $y_1(x)=x$

۹. فرض کنید تابع q بر بازه $[0,\infty)$ پیوسته بوده و $\lim_{x\to\infty} q(x)=L$. اگر k یک عدد مثبت باشد، نشان دهید که هر جواب معادله $y'+ky=q(x)$ هنگامی که x به بی‌نهایت میل می‌کند، به $\frac{L}{K}$ میل می‌کند.

در تمرین‌های زیر با به کار بردن یک متغیر وابسته جدید، معادله را به معادله‌ای خطی تبدیل کرده و سپس آن را حل کنید.

۱۰. $xe^y.y'-e^y=\frac{2}{x}$

۱۱. $y'-\frac{1}{x+1}y\,\mathrm{Ln}\,y=(x+1)y$

۱-۷-۲۶ تمرین گوناگون فصل اول

در تمرین‌های زیر جواب عمومی معادلات دیفرانسیل داده شده را پیدا کنید.

۱. $(2y-xy\,\mathrm{Ln}\,x)dx-2x\,\mathrm{Ln}\,x\,dy=0$

۲. $y'+ay=Ke^{bx}$

۳. $y'=(x+y)^2$

٤. $y'+8x^3y^3+2xy=0$

۵. $(xy\sqrt{x^2-y^2}+x)y'=y-x^2\sqrt{x^2-y^2}$

٦. $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+x+y$

۷. $xy'-y(\mathrm{Ln}\,xy-1)=0$

۸. $(xy-x^2)y'+y^2-3xy-2x^2=0$

۹. $(x^2y-1)y'+xy^2-1=0$

۱۰. $y'\cos x+y+(1+\sin x)\cos x=0$

۱۱. $(x^2-y)y'+x=0$

۱۲. $(2xy^3-x^4)y'+2x^3y-y^4=0$

۱۳. $(2y^3+y)y'-2x^3-x=0$

۱۴. $y'-e^{x-y}+e^x=0$

۱۵. $y'=\dfrac{x+3y}{x-y}$

۱۶. $y'=\dfrac{x+3y-5}{x-y-1}$

۱۷. $y'=1+x^2-2xy+y^2 \quad , \quad y_1(x)=x$

۱۸. $y'=\dfrac{2\cos^2 x-\sin^2 x+y^2}{2\cos x} \quad , \quad y_1(x)=\sin x$

۱۹. $(y')^3-3xy'+3y=0$

۲۰. $xy'-e^y-y=0$

۲۱. ثابت کنید که اگر معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ همگن باشد آنگاه $\rho(x,y)=\dfrac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$ یک عامل انتگرال‌ساز است.

۲۲. تابع f بر بازه I کراندار است، اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر x در I، $|f(x)|\le M$. فرض کنید تابع q بر بازه $[0,\infty)$ پیوسته و کراندار باشد. نشان دهید

(الف) هر جواب معادله $y'+ky=q(x)$ بر بازه $[0,\infty)$ کراندار است.

(ب) معادله $y'-ky=q(x)$ دارای جواب‌هایی است که بر بازه $[0,\infty)$ بی‌کران می‌باشند.

فصل دوم

کاربردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول

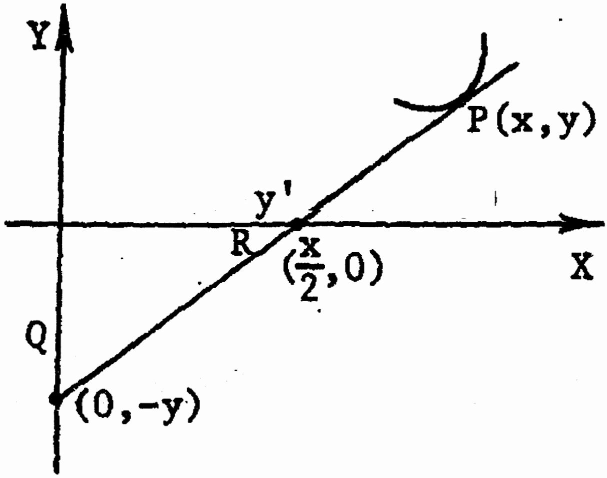
در این فصل چند کاربرد معادلات دیفرانسیل را ارائه می‌کنیم.

۲-۱ مسائل هندسی

در این بخش مسائل خاص هندسی که به معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی اول منتهی می‌گردد را بررسی می‌کنیم.

۲-۱-۱ مثال: خانواده منحنی‌هایی را پیدا کنید، که طول پاره‌خط مماس بر منحنی بین نقطه‌ی تماس و محور y ها توسط محور x ها به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

حل: (شکل (۱) را ببینید). فرض کنید $P(x,y)$ نقطه‌ای بر منحنی خواسته شده باشد و PQ قطعه مورد نظر از خط مماس رسم شده بر منحنی در این نقطه باشد. بنا بر فرض، PQ توسط محور x ها به دو قسمت مساوی تقسیم می‌گردد. از این رو مختصات نقاط P و Q به ترتیب عبارتند از: (x,y) , $(\cdot,-y)$.



شکل (۱)

بنابراین معادله‌ی خط مماس عبارت است از:

$$y-(-y)=y'(x-۰)$$

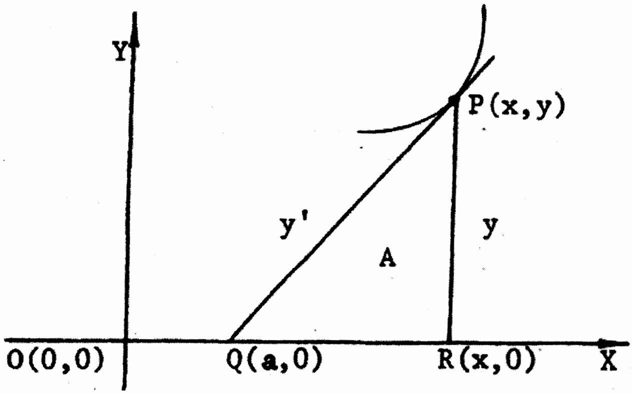
که از آن به دست می‌آوریم

$$\frac{۲y}{x}=y'=\frac{dy}{dx}$$

به آسانی می‌توان این معادله را با جدا کردن متغیر ها حل کرد، خواهیم داشت:

$$y=cx^{۲} \qquad x\neq ۰ \quad , \qquad y\neq ۰$$

۲-۱-۲ مثال: (شکل (۲) را ببینید). خانواده منحنی‌هایی را به قسمی پیدا کنید که مساحت ناحیه‌ی محدود بین محور x ها، خط مماس رسم شده بر یک منحنی از این خانواده در نقطه‌ی $P(x,y)$ و خطی که از نقطه‌ی P به موازات محور y ها رسم می‌شود، مقدار ثابت A باشد.



شکل (۲)

حل: در نقطه‌ی $P(x,y)$ خط مماس بر منحنی خواسته شده را رسم می‌کنیم. محل برخورد این خط با محور x ها را Q با مختصات $Q(a,\cdot)$ می‌نامیم بنابراین مختصات R ، محل تلاقی محور x ها و خطی که از P به موازات محور yها رسم می‌شود، برابر $(x,\cdot)$ خواهد بود. معادله‌ی خط مماس عبارت است از:

$$y-\cdot=y'(x-a) \qquad , \qquad x\neq a$$

یا

$$\frac{y}{x-a}=y' \quad , \quad x\neq a$$

با حل این معادله نسبت به a به دست می‌آوریم:

$$a=x-\frac{y}{y'}$$

که فاصله‌ی Q تا مبدأ را نمایش می دهد. از این رو اندازه پاره‌خط QR برابر است با

$$x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)=\frac{y}{y'}$$

ناحیه‌ای که مساحت آن برابر است با A، از فرمول

$$A=\frac{۱}{۲}y\left(\frac{y}{y'}\right)=\frac{y^{۲}}{۲y'}$$

به دست می‌آید. از این رو

$$y' = \frac{y^{۲}}{۲A}$$

که یک معادله‌ی جدا شدنی است. جواب عمومی آن عبارت است از:

$$\frac{۱}{y} = -\frac{x}{۲A} + c$$

یا

$$y = \frac{۲A}{۲Ae - x} \quad , \qquad x \neq ۲Ae$$

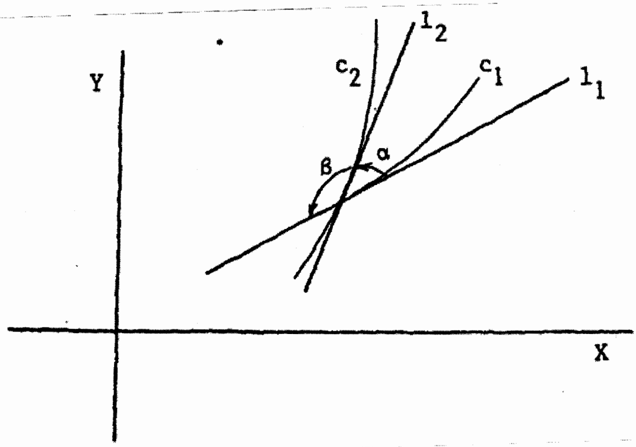
۲-۱-۳ تمرین: خانواده منحنی‌هایی را به قسمی پیدا کنید که زاویه‌ی بین خط مماس و خط قائم در هر نقطه از یک منحنی از این خانواده، توسط شعاع حامل، بـه دو قسـمت مساوی تقسیم گردد.

۲-۱-٤ تمرین: خانواده منحنی‌هایی بـا ویژگـی زیـر را پیـدا کنیـد. مسـاحت ناحیـه‌ی محدود به یک منحنی از این خانواده، محور x ها و خط‌های $x=a$, $x=b$ متناسب با طول قوس منحنی بین این خط‌های قائم باشد.

۲-۲ مسیرهای هم‌زاویه

وقتی دو منحنـی در صـفحه‌ای متقـاطع باشـند، زاویـه بـین آنهـا توسـط زاویـه‌ی بـین مماس‌های رسم شده بر آنها در نقطه‌ی تقاطع تعریف می‌شود. همان طور که در شـکل (۱) ملاحظه می‌کنید، $I_۱$ و $I_۲$ را به ترتیب خطوط مماس بر منحنی‌های $c_۱$ و $c_۲$ در نظـر گرفته و α را زاویه‌ی مثبـت از منحنـی $c_۱$ بـه منحنـی $c_۲$ و β را زاویـه‌ی مثبـت از منحنی $c_۲$ به منحنی $c_۱$ می‌نامیم. اگـر شـیب $l_۱$ را $m_۱$ و $l_۲$ را $m_۲$ بنـامیم، آنگـاه خواهیم داشت:

$$\tan\alpha = \frac{m_۲ - m_۱}{۱ + m_۱ m_۲} \quad , \qquad \tan\beta = \frac{m_۱ - m_۲}{۱ + m_۱ m_۲} \qquad (۱)$$



شکل (۱)

۲-۲-۱ تعریف: وقتی یک منحنی هر عضو یک خانواده‌ی ۱- پارامتری از منحنی‌ها را با زاویه‌ی یکسانی قطع کند آن را یک **مسیر از خانواده‌ی هم زاویه** می‌نامیم.

۲-۲-۲ تعریف: دو خانواده‌ی ۱- پارامتری را مسیرهای یک خانواده‌ی ۱- پارامتری هم زاویه با یکدیگر می‌نامیم در صورتی که هر عضو یک خانواده تمام عضوهای خانواده‌ی دیگر را با زاویه‌ی یکسانی قطع کند.

۲-۲-۳ تذکر: یک مسأله جالب یافتن مسیرهای هم زاویه‌ای است که با یک خانواده‌ی ۱- پارامتری از منحنی‌های داده شده زاویه‌ای به اندازه‌ی α می‌سازد. فرض کنیم شیب یک منحنی از خانواده‌ی ۱- پارامتری داده شده y'_1 و شیب یک مسیر هم زاویه y' باشد. در این صورت زاویه حاصل از تقاطع آنها که از خط مماس با شیب y' به طرف خط مماس با شیب y'_1 اندازه‌گیری شده است برابر α خواهد بود. در این صورت بنا بر (۱) خواهیم داشت:

$$\tan\alpha = \frac{y'_1 - y'}{1 + y'_1 y'} \qquad (۲)$$

۲-۲-۴ مثال: خانواده‌ی ۱- پارامتری سهمی‌های

$$y = ax^{2} \qquad (3)$$

داده شده است. یک خانواده‌ی ۱- پارامتری از مسیرهای هم زاویه را به قسمی پیدا کنید که زاویه‌ی بین منحنی‌ها، یعنی α، از مسیرهای خواسته شده به طرف خانواده‌ی داده شده اندازه‌گیری شده باشد، برابر با 45° باشد.

حل: با مشتق‌گیری از (۳) به دست می‌آوریم:

$$y' = 2ax \qquad (4)$$

مجدداً از (۳)، داریم:

$$a = \frac{y}{x^{2}}$$

با جایگذاری این مقدار در (۴) به دست می‌آوریم:

$$y' = \frac{2y}{x} \qquad , \qquad x \neq 0$$

که شیب منحنی‌های داده شده در هر نقطه‌ی (x,y)، $x \neq 0$ است و متناظر با y'_1 در فرمول (۲) می‌باشد. بنا بر فرض $\alpha = \frac{\pi}{4}$ و لذا $\tan\alpha = 1$ است. از این رو (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$1 = \frac{\frac{2y}{x} - y'}{1 + \frac{2y}{x}y'} = \frac{2y - xy'}{x + 2yy'}$$

با ساده کردن این معادله به دست می‌آوریم:

$$(x - 2y)dx + (x + 2y)dx = 0$$

که یک معادله دیفرانسیل همگن است (با به کار بردن تغییر متغیر $z = \frac{y}{x}$).

نشان دهید که جواب عمومی این معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$\operatorname{Ln}\sqrt{2x^{2} - xy + y^{2}} + \frac{3}{\sqrt{7}}\tan^{-1}\left(\frac{4y - x'}{\sqrt{7}\,x}\right) = c \quad , \quad x \neq 0$$

(چرا؟)

۲-۲-۵ تذکر: توجه کنید که در حل مثال بالا قبل از استفاده از فرمول (۲) پارامتر را از معادله‌ی (٤) حذف کردیم. بدینوسیله معادله دیفرانسیلی را پیدا می‌کنیم که خانواده‌ی منحنی‌های داده شده جواب‌های آن می‌باشند.

۲-۲-٦ تمرین: خانواده‌ی ۱- پارامتری دایره‌های $x^۲+y^۲=k^۲$ داده شده است. یک خانواده‌ی ۱- پارامتری از مسیرهای هم زاویه را به قسمی پیدا کنید که زاویه بین منحنی‌ها، یعنی α، از مسیرهای خواسته شده به طرف خانواده داده شده اندازه‌گیری شده باشد و برابر با ٤٥° باشد.

۲-۲-۷ تعریف: یک منحنی که هر عضو یک خانواده‌ی ۱- پارامتری از منحنی‌ها را با زاویه‌ی ۹۰° قطع کند، یک **مسیر متعامد** از خانواده نامیده می‌شود.

۲-۲-۸ تعریف: دو خانواده‌ی ۱- پارامتری را **مسیرهای متعامد** می‌نامیم، اگر هر عضو یک خانواده هر عضو خانواده‌ی دیگر را با زاویه‌ی ۹۰° قطع کند.

مسیرهای متعامد مسائل جالبی هستند، زیرا در بسیاری از زمینه‌های فیزیک رخ می‌دهند.

توجه کنید که اگر $y'_۱$ شیب خانواده داده شده و y' شیب خانواده مسیرهای متعامد باشد. آنگاه از حساب دیفرانسیل و انتگرال داریم

$$y'_۱\,y'=-۱ \qquad , \qquad y'=-\frac{۱}{y'_۱} \qquad (۵)$$

۲-۲-۹ مثال: مسیرهای متعامد بر خانواده‌ی ۱- پارامتری منحنی‌های

$$y=cx^{۵} \qquad (٦)$$

را پیدا کنید.

حل: با مشتق‌گیری از (٦) به دست می‌آوریم:

$$y'=۵cx^{٤} \qquad (۷)$$

مجدداً از (۶) به دست می‌آوریم:

$$c=\frac{y}{x^{5}} \qquad , \qquad x\neq 0$$

با قرار دادن این مقدار در (۷) خواهیم داشت:

$$y'=\frac{5y}{x} \qquad , \qquad x\neq 0$$

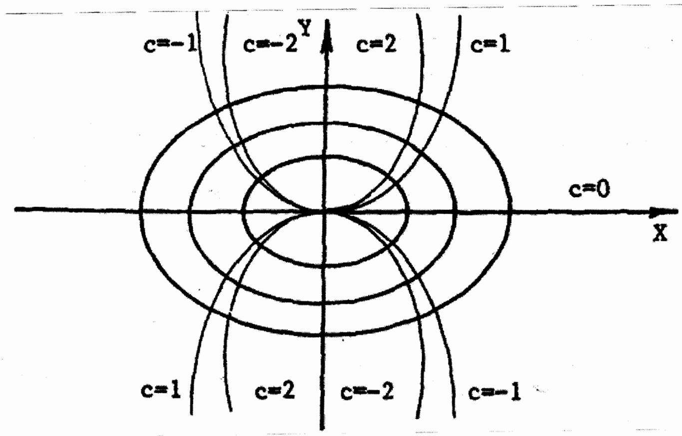
که شیب خانواده منحنی‌های داده شده در هر نقطه‌ی (x,y) و $x\neq 0$ است و متناظر با y'_1 در فرمول (۵) است. از این رو شیب خانواده متعامد یعنی y' برابر است با:

$$y'=-\frac{x}{5y} \qquad , \qquad x\neq 0 \qquad , \qquad y\neq 0$$

که با روش جدا کردن متغیرها، می‌توان جواب عمومی آن را به دست آورد.

$$x^{2}+5y^{2}=k \qquad , \qquad x\neq 0 \qquad , \qquad y\neq 0$$

که یک خانواده‌ی ۱- پارامتری از بیضی‌هاست. (شکل (۲) را ببینید).

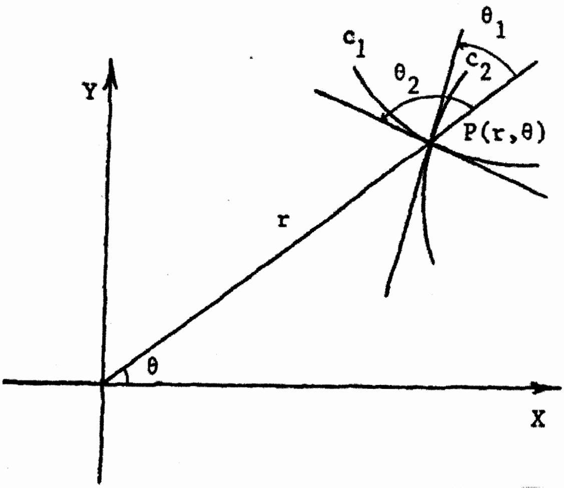


شکل (۲)

۲-۲-۱۰ تمرین: مسیرهای متعامد بر خانواده‌ی ۱- پارامتری منحنی‌های $y=cx^{2}$ را پیدا کنید.

۲-۲-۱۱ فرمول مسیر متعامد در مختصات قطبی

مختصات نقطه تلاقی دو مسیر عمود بر یکدیگر $c_۱$ و $c_۲$ را $p(r,\theta)$ می‌نامیم.



شکل (۳)

زاویه‌های خطوط مماس بر هر یک از منحنی‌های $c_۱$ و $c_۲$ که با شعاع حامل r می‌سازند را به ترتیب $\theta_۱$ و $\theta_۲$ می‌نامیم. (که از شعاع حامل به طرف خط مماس و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شود.) چون دو خط مماس بر یکدیگر عمودند، از شکل واضح است که:

$$\theta_۱ = \theta_۲ + \frac{\pi}{۲}$$

بنابراین

$$\tan\theta_۱ = \tan(\theta_۲ + \frac{\pi}{۲}) = -\frac{۱}{\tan\theta_۲} \qquad (۸)$$

از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که

$$\tan\theta_۲ = \frac{rd\theta}{dr} \qquad (۹)$$

از این رو (۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\tan\theta_1 = -\frac{dr}{rd\theta} \qquad (۱۰)$$

۲-۲-۱۲ تذکر: با مقایسه‌ی (۹) و (۱۰) مشاهده می‌کنیم که اگر دو منحنی برهم عمود باشند، آنگاه $\frac{rd\theta}{dr}$ از یکی برابر منفی عکس $\frac{rd\theta}{dr}$ دیگری است.

برعکس، اگر یکی از دو منحنی در (۹) و دیگری در (۱۰) صدق کند، آنگاه منحنی‌ها بر هم عمود می‌باشند. پس برای تعیین مسیرهای متعامد یک خانواده منحنی‌های داده شده، $\frac{rd\theta}{dr}$ آن خانواده را محاسبه می‌کنیم، سپس $\frac{rd\theta}{dr}$ را با منفی عکس آن، یعنی $-\frac{dr}{rd\theta}$، جانشین می‌کنیم.

جواب‌های این معادله دیفرانسیل جدید، خانواده منحنی‌های عمود بر خانواده منحنی‌های داده شده را به دست می‌دهد.

۲-۲-۱۳ مثال: مسیرهای متعامد بر خانواده منحنی‌های

$$r = k\sec\theta \qquad (۱۱)$$

را، در مختصات قطبی، پیدا کنید.

حل: با مشتق‌گیری از (۱۱) به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dr}{d\theta} = k\sec\theta\tan\theta \qquad (۱۲)$$

مجدداً، از (۱۱) داریم

$$k = \frac{r}{\sec\theta}$$

با جایگذاری این مقدار در (۱۲) به دست می‌آوریم

$$\frac{dr}{d\theta} = r\tan\theta$$

یا

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{\tan\theta} \qquad (۱۳)$$

از این رو بنا بر (۱۰) معادله دیفرانسیل خانواده متعامد برابر است با:

$$-\frac{dr}{r\,d\theta}=\frac{۱}{\tan\theta}$$

یا

$$\frac{dr}{r}=-\cot\theta\,d\theta$$

که جواب عمومی آن عبارت است از:

$$r\sin\theta=c$$

۲-۲-۱٤ تذکر: مجدداً یادآور می‌شویم که قبل از اینکه بتوانیم از (۱۰) استفاده کنیم باید پارامتر را در (۱۲) حذف کرد تا (۱۳) به دست آید.

۲-۲-۱۵ تمرین: خانواده منحنی‌های عمود بر خانواده دایره‌های زیر را پیدا کنید.

$$(x-k)^۲+y^۲=k^۲$$

۲-۲-۱٦ تمرین‌های بخش ۲-۲

برای هر یک از خانواده منحنی‌های زیر، یک خانواده ۱- پارامتری از مسیرهای هم زاویه را، برای زاویه‌ی داده شده در هر مسأله پیدا کنید. در اینجا زاویه‌ی بین منحنی‌ها از مسیر خواسته شده به خانواده داده شده اندازه‌گیری شده است.

۱. $y^۲=٤kx \quad , \quad \alpha=٤۵^\circ$

۲. $y=٤kx \quad , \quad \tan\alpha=\frac{۱}{۲}$

۳. معادله دیفرانسیل یک خانواده منحنی‌ها برابر است با:

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=۰$$

معادله دیفرانسیل یک خانواده هم زاویه را که با خانواده داده شده زاویه‌ی $\alpha\neq\frac{\pi}{۲}$ می‌سازد، پیدا کنید. در اینجا از خانواده مسیرهای خواسته شده به خانواده داده شده اندازه‌گیری شده است.

برای هر یک از خانواده منحنی‌های زیر، مسیرهای متعامد را در مختصات قطبی پیدا کنید.

۴. $r = K\cos\theta$

۵. $r^2 = K\cos 2\theta$

۶. مسیرهای متعامد بر همه‌ی سهمی‌هایی را که رأس آنها بر مبدأ و کانون آنها بر محور x قرار دارد، پیدا کنید.

۷. مسیرهای متعامد بر خط‌های مستقیمی که ضریب زاویه‌ی آنها برابر با عرض از مبدأ است، پیدا کنید.

۲-۳ مسائل تلاشی و مخلوط

بسیاری از قوانین طبیعی علوم را می‌توان برحسب معادلات دیفرانسیل بیان کرد.

۲-۳-۱ آهنگ تلاشی یک ماده‌ی رادیواکتیو: تجربه نشان می‌دهد که ماده رادیواکتیو با آهنگی متناسب با مقدار متلاشی نشده ماده، متلاشی می‌گردد. بنابراین، اگر $x(t)$ مقدار ماده‌ی متلاشی نشده موجود در لحظه‌ی t باشد، آنگاه داریم:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \qquad (1)$$

فرض کنید در لحظه‌ی t_0 مقدار ماده متلاشی نشده برابر x_0 و در لحظه‌ی t_1 برابر x_1 باشد. بنابراین شرایط اولیه‌ی زیر را داریم:

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad x(t_1) = x_1 \qquad (2)$$

با جدا کردن متغیرها در معادله‌ی (۱) به دست می‌آوریم:

$$\frac{dx}{dt} = -kdt \qquad (3)$$

با انتگرال‌گیری، خواهیم داشت:

$$\text{Ln}\, x = -kt + \text{Ln}\, c$$

(در اینجا $x > 0$ و $\text{Ln}\, c$ یک ثابت اختیاری به ازای $c > 0$ است) یا

$$x = ce^{-kt}$$

اینک به کمک شرایط (۲) می‌توان اعداد c و k در این فرمول را معین کرد. ولی، به روش زیر نیز می‌توانیم عمل کنیم. می‌نویسیم:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{x} = -k\int_{t_0}^{t_1} dt$$

و در این صورت، داریم:

$$\mathrm{Ln}\frac{x_1}{x_0} = -k(t_1 - t_0)$$

و بنابراین

$$k = \frac{1}{t_1 - t_0}\mathrm{Ln}\frac{x_0}{x_1}$$

حال که مقدار k معین شد، معادله‌ی (۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -k\int_{t_0}^{t} dt$$

با محاسبه‌ی این انتگرال به دست می‌آوریم:

$$\mathrm{Ln}\frac{x}{x_0} = -k(t - t_0)$$

با قرار دادن مقدار k در این معادله نتیجه می‌گیریم که:

$$x = x_0 \exp\left[-\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}\mathrm{Ln}\frac{x_0}{x_1}\right]$$

۲-۳-۲ مثال: فرض می‌کنیم x_0 مقدار ماده‌ی رادیواکتیو موجود در لحظه‌ی $t=0$ و T مدت لازم جهت متلاشی شدن نصف آن باشد. نشان دهید که T مستقل از x_0 است. مدت زمان T **نیم عمر ماده‌ی رادیواکتیو** نامیده می‌شود.

حل: اگر $x(t)$ مقدار ماده متلاشی نشده موجود در لحظه‌ی t باشد. داریم:

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آوریم:

$$x = ce^{-kt}$$

از طرفی شرایط اولیه‌ی $x(\cdot)=x_\cdot$ ، $x(T)=\frac{x_\cdot}{۲}$ را داریم. با به کار بردن این شرایط در معادله‌ی بالا نتیجه می‌شود که $\frac{x_\cdot}{۲}=x_\cdot e^{-kt}$ و $c=x_\cdot$.
یا

$$T=\frac{۱}{k}\operatorname{Ln}۲$$

۲-۳-۳ مثال: تعداد باکتری‌ها در یک کشت، با آهنگی متناسب با تعداد باکتری‌های موجود افزایش می‌یابد. اگر تعداد باکتری‌ها پس از گذشت یک ساعت دو برابر شود، تعداد باکتری‌های در کشت را در پایان $\frac{۷}{۲}$ ساعت پیدا کنید.

حل: فرض می‌کنیم x نمایش تعداد باکتری‌ها در کشت، در لحظه‌ی t باشد. در این صورت بنا بر مفروضات مسأله داریم:

$$\frac{dx}{dt}=kx \qquad , \qquad \frac{dx}{x}=k\,dt \tag{٤}$$

که در آن k ثابت تناسب است.

اگر تعداد باکتری‌ها در $t=\cdot$ برابر $x_\cdot$ باشد. با دو بار انتگرال‌گیری و قرار دادن همه‌ی شرایط اولیه، به دست می‌آوریم:

$$\int_{x=x_\cdot}^{۲x_\cdot}\frac{dx}{x}=k\int_{t=\cdot}^{۱}dt \qquad , \qquad \int_{x_\cdot}^{x}\frac{dx}{x}=k\int_{t=\cdot}^{۷/۲}dt$$

از معادله‌ی اول به دست می‌آوریم:

$$\operatorname{Ln}(۲x_\cdot)-\operatorname{Ln}x_\cdot=k$$

پس

$$k=\operatorname{Ln}۲$$

و از معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود که:

$$\operatorname{Ln}\frac{x}{x_\cdot}=\frac{۷}{۲}\operatorname{Ln}۲$$

یا

$$x = x_{\circ} ۲^{\frac{۷}{۲}} = ۱۱/۳۱ x_{\circ}$$

از این رو تعداد باکتری‌ها در پایان $\frac{۷}{۲}$ ساعت برابر است با ۱۱/۳۱ برابر تعداد اولیه‌ی باکتری‌های موجود در کشت است.

۲-۳-۴ تمرین: فرض می‌کنیم $x(t)$ مقدار ماده‌ی رادیواکتیو موجود در لحظه‌ی t باشد. $x(\circ) = x_{\circ}$ هرگاه T نیم عمر این ماده باشد (مثال ۲-۳-۲ را ببینید)، ثابت کنید:

$$x = x_{\circ} e^{-\frac{t}{T} Ln ۲}$$

۲-۳-۵ تمرین: ۱. فرض می‌کنیم که رشد جمعیت کشوری متناسب با جمعیت موجود باشد و جمعیت آن در مدت ۵۰ سال دو برابر می‌شود. جمعیت فعلی کشور ۲۰۰۰۰۰۰۰ است.

(الف) چه موقع جمعیت آن به ۳۰۰۰۰۰۰۰ می‌رسد؟

(ب) جمعیت آن پس از گذشت ۱۰ سال چقدر می‌شود؟

۲. اگر ده درصد از ماده‌ی رادیواکتیوی در مدت ۱۰۰ سال متلاشی شود، آنگاه نیم عمر آن چقدر است؟

۲-۴ مسأله‌ی مخلوط

در این بخش مسائلی را بررسی می‌کنیم، که مقدار ماده‌ای در محلولی را به عنوان تابعی از زمان بیان می‌کند، که در آن این مقدار به طور لحظه‌ای تغییر می‌کند.

۲-۴-۱ مثال: مخزنی محتوی ۱۰۰ گالن آب است. در مخزن به اشتباه ۳۰۰ پوند نمک به جای ۲۰۰ پوند حل می‌کنیم. برای تصحیح این شرط، محلول با سرعت ۳ گالن بر دقیقه از مخزن خارج و آب با سرعت ۳ گالن بر دقیقه به مخزن وارد می‌شود. (برای سادگی فرض می‌کنیم که غلظت محلول در مخزن یکنواخت نگه داشته می‌شود، مثلاً

با به هم زدن محلول). چه مدت طول می‌کشد تا نمک موجود در مخزن به مقدار مورد نظر برسد.

حل: فرض می‌کنیم x نمایش مقدار نمک برحسب پوند، در لحظه‌ی t، در محلول باشد. در این صورت آهنگ تغییرات x، $\frac{dx}{dt}$ از قاعده‌ی زیر به دست می‌آید. $\frac{dx}{dt}$ برابر است با آهنگ ورود نمک به مخزن منهای آهنگ خروج آن در لحظه‌ی t. غلظت محلول در مخزن عبارت است از $\frac{x}{۱۰۰}$ (زیرا حجم محلول در مخزن همواره ۱۰۰ گالن است). از این رو آهنگ خروج نمک از مخزن برابر با $۳(\frac{x}{۱۰۰})$ گالن بر دقیقه است. از طرفی چون آب وارد مخزن می‌شود، پس به معادله دیفرانسیل $\frac{dx}{dt}=-\frac{۳}{۱۰۰}$ می‌رسیم که جواب آن عبارت است از:

$$x = ce^{-\frac{۳}{۱۰۰}t} \qquad (۱)$$

با جایگذاری شرط اولیه‌ی $x=۳۰۰$، $t=۰$ در (۱)، به دست می‌آوریم $c=۳۰۰$.

از این رو معادله‌ی (۱) به معادله‌ی

$$x = ۳۰۰e^{-\frac{۳}{۱۰۰}t} \qquad (۲)$$

تبدیل می‌گردد. این معادله مقدار نمک در محلول را به عنوان تابعی از زمان، t، به دست می‌دهد. وقتی $x=۲۰۰$، از معادله‌ی (۲)، خواهیم داشت:

$$\frac{۲}{۳}=e^{-\frac{۳}{۱۰۰}t} \qquad , \qquad Ln\frac{۳}{۲}=\frac{۳}{۱۰۰}t$$

که از آن در می‌یابیم

$$t=۱۳/۵ \text{ دقیقه}$$

۲-٤-۲ تمرین: مخزنی محتوی ۱۰۰ گالن مخلوط نمک است که غلظت نمک در آن ۳ پوند بر گالن می‌باشد. سه گالن از همان محلول با غلظت ۲ پوند بر گالن به مخزن وارد و در همان لحظه ۳ گالن از محلول از مخزن خارج می‌شود (اگر غلظت محلول در

مخزن یکنواخت نگه داشته شود). مقدار نمک موجود از مخزن را به عنوان تابعی از زمان، t، پیدا کنید).

۲-٤-۳ تمرین: مخزنی در ابتدا شامل ۵۰ گالن آب خالص است. در لحظه‌ی $t=0$ محلولی شامل ۲ پوند نمک حل شده در یک گالن آب با سرعت ۳ گالن بر دقیقه به مخزن دارد و در همان لحظه محلول با همان سرعت از مخزن خارج می‌شود. (اگر غلظت محلول در مخزن یکنواخت نگهداشته شود).

۱. مقدار نمک موجود در مخزن در هر لحظه‌ی $t>0$ چقدر است؟

۲. در پایان ۲۵ دقیقه چه مقدار نمک در مخزن موجود است؟

۳. پس از گذشت یک فاصله‌ی زمانی طولانی، چقدر نمک در مخزن موجود خواهد بود؟

۲-۵ قانون خنک‌سازی

در این بخش تغییرات دما در یک جسم خنک شونده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر جسمی در یک محیط فراگیر خنک شود (مثل هوا یا آب). **قانون خنک سازی نیوتن** بیان می‌کند که آهنگ تغییر مستقیماً با اختلاف دماها متناسب است.

بنابراین، اگر $T(t)$ دمای جسمی در لحظه‌ی t و T، T_0 دمای (ثابت) محیط فراگیر باشد، آنگاه

$$\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0), \qquad (1)$$

در اینجا K ثابتی مثبت است. علامت منفی به این دلیل ظاهر گردیده است که اگر $u>u_0$ آنگاه $\frac{du}{dt}$ منفی می‌شود.

۲-۵-۱ مثال: جسمی را که دمای آن ۱۸۰ درجه‌ی سانتی‌گراد است در مایعی که دمای آن بر ۶۰ درجه‌ی سانتیگراد ثابت نگه داشته شده است، وارد می‌کنیم. اگر بعد از یک

دقیقه دمای جسم به ۱۲۰ درجه‌ی سانتیگراد کاهش یابد، چه مدت طول می‌کشد تا دمای جسم به ۹۰ درجه‌ی سانتیگراد برسد؟

حل: فرض کنید T نمایش دمای جسم در لحظه‌ی t باشد. در این صورت معادله‌ی (۱)، با $T_{\circ} = ٦٠$، به صورت زیردر می‌آید.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - ٦٠)$$

با به کار بردن شرایط داده شده و انتگرال‌گیری، به دست می‌آوریم:

$$\int_{T=١٨٠}^{٩٠} \frac{dT}{T-٦٠} = -k\int_{t=٠}^{t} dt$$

$$\int_{T=١٨٠}^{١٢٠} \frac{dt}{T-٦٠} = -k\int_{t=٠}^{١} dt$$

از معادله‌ی انتگرالی اول، به دست می‌آوریم:

$$\text{Ln}\,٠/٥ = -k \qquad , \qquad k = \text{Ln}\,٢$$

لذا با معلوم بودن ضریب ثابت k، از معادله انتگرالی دوم، در می‌یابیم که

$$\text{Ln}\,٠/٢٥ = -(\text{Ln}\,٢)t \qquad , \qquad t = \frac{\text{Ln}\,٤}{\text{Ln}\,٢} = \frac{٢\text{Ln}\,٢}{\text{Ln}\,٢} = ٢$$

از این رو دو دقیقه طول می‌کشد تا دمای جسم به ۱۰ درجه سانتیگراد کاهش یابد.

۲-۵-۲ تمرین: فرض کنید که دماسنجی در داخل اطاقی ۷۰ درجه فارنهایت را نشان می‌دهد. در محوطه‌ای که درجه حرارت آن ۱۰ درجه فارنهایت قرار داده می‌شود، پس از سه دقیقه دماسنج درجه‌ی ۲۵ درجه‌ی فارنهایت را نشان می‌دهد. فرمولی که دمای دماسنج را در زمان‌های مختلف بعدی نشان می‌دهد، پیدا کنید.

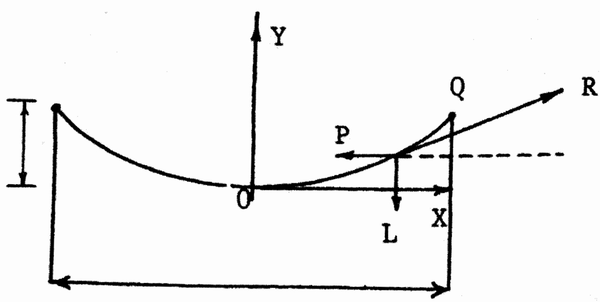
۲-۵-۳ تمرین: جسم گرمی در هوایی که دمای آن ۲۰ درجه سانتیگراد است قرار می‌گیرد. پس از ۵ دقیقه دمای آن به ۲۰۰ درجه سانتیگراد و پس از ۱۰ دقیقه (۵ دقیقه

بعد) دمای آن به ۱۶۰ درجه‌ی سانتیگراد می‌رسد. اندازه‌ی دمای اولیه جسم چقدر است؟

۲-۶ کابل آویزان

۲-۶-۱ مثال: کابلی از نوک دو برج هم ارتفاع که رأس آن در ۵۰ فوتی زیر نقطه‌ی اتصال بوده و دو برج به فاصله‌ی ۲۰۰ فوتی از یکدیگر قرار دارند، آویخته شده است. از وزن کابل صرف‌نظر می‌کنیم، ولی کابل باری را که چگالی آن (x^2+100) است، را متحمل می‌شود. معادله منحنی کابل آویزان را پیدا کنید.

حل: چون کابل در حال سکون است، پس برآیند نیروهای وارد بر آن صفر می‌باشد (شکل (۱) را ببینید).



شکل (۱)

دستگاه مختصاتی با مبدأ در رأس، یعنی در پایین‌ترین نقطه‌ی کابل، در نظر می‌گیریم. خط مماس در رأس افقی است. قطعه‌ی OQ را در نظر بگیرید. نیروهای وارد بر آن عبارتند از: بار L و نیروی کشش R از قسمت‌های متصل کابل.

این نیروهای کششی در امتداد خط‌های مماس بر منحنی می‌باشند. نیروهای کششی از طرف کابل را می‌توان به مؤلفه‌های $R\cos\theta$ در جهت افقی و $R\sin\theta$ در جهت قائم تجزیه کرد.

با استفاده از این واقعیت که برآیند نیروها صفر می‌باشد، خواهیم داشت:

$$R\cos\theta - P = ۰ \quad , \quad R\sin\theta - L = ۰$$

در این صورت

$$y' = \frac{L}{P}$$

چون $\mu(x)$ چگالی بار داده شده است، پس مقدار L برابر است با

$$L = \int_۰^x \mu(x)dx$$

بنابراین، برای این مسأله، خواهیم داشت:

$$L = \int_۰^x (۱۰۰ + x^۲)dx = ۱۰۰x + \frac{۱}{۳}x^۳$$

بنابراین، معادله دیفرانسیل زیر را داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{p}(۱۰۰x + \frac{۱}{۳}x^۳)$$

این معادله جداشدنی است و جواب عمومی آن عبارت است از:

$$y = \frac{۱}{P}(۵۰x^۲ + \frac{۱}{۱۲}x^٤)$$

با استفاده از این شرایط که منحنی از نقاط $(\pm ۱۰۰, ۵۰)$ می‌گذرد (زیرا پایین‌ترین نقطه کابل نقطه‌ی وسط آن نیز می‌باشد). بنابراین P برابر می‌شود با

$$P = (۱۰۰)^۲\left[\frac{۵۳}{۳}\right]$$

با قرار دادن این مقدار در (۱) به دست می‌آوریم

$$y = \frac{۳}{۱۰٦۰۰}\left(x^۲ + \frac{x^٤}{٦۰۰}\right)$$

۲-٦-۲ تمرین: زنجیری به دو نقطه که در یک امتداد بوده و به فاصله‌ی ۱۲ فوتی از یکدیگر قرار دارند، آویخته شده است. ضریب زاویه‌ی (شیب) آن در نقطه‌ی تکیه‌گاه $\frac{۳}{٤}$ و چگالی آن توسط فرمول $(۱+as)^{-\frac{۱}{۲}}$ داده شده است.

در اینجا $s > ۰$، که در آن s طول منحنی اندازه‌گیری شده از رأس می‌باشد. معادله دیفرانسیلی برای منحنی زنجیر پیدا کرده و سپس در حالت $a = ۰$، منحنی را پیدا کنید.

۲-۷ حرکت جسمی در امتداد خط مستقیم قائم، افقی، شیب‌دار

بنابر قانون اول حرکت نیوتن، جسمی که در حال سکون باشد در حال سکون باقی خواهد ماند، و جسمی که در حرکت باشد سرعت خود را حفظ می‌کند، مگر اینکه یک نیروی خارجی بر آن وارد شود. بنابر قانون دوم حرکت نیوتن، آهنگ تغییر گشتاور جسمی (سرعت x جرم گشتاور) متناسب است با برآیند نیروی خارجی، F، که بر آن وارد می‌شود. به بیان ریاضی، داریم:

$$F = km\frac{dv}{dt} \qquad (۱)$$

که در آن m جرم جسم، (±۱۰۰,۵۰) سرعت آن است و $k > ۰$ ثابت تناسب است که به واحدهای مورد استفاده بستگی دارد. اگر واحدها عبارت باشند از فوت برای فاصله، پوند برای نیرو، اسلاگ برای جرم (برابر است با $\frac{۱}{۳۲}$ پوند) و ثانیه برای زمان، آنگاه $k=۱$ و (۱) به

$$F = m\frac{dv}{dt} = ma = m\frac{d^۲ s}{dt^۲} \qquad (۲)$$

تبدیل می‌شود که در آن s مسافت پیموده شده توسط متحرک از یک نقطه با **شتاب** ثابت می‌باشد. بنابراین نیروی ۱ پوندی، جرم ۱ اسلاگی با شتاب ۱ فوت بر مربع ثانیه به دست می‌دهد. یادآور می‌شویم که F، a و v کمیت‌های برداری هستند. از این رو مشخص کردن جهت مثبت در اینگونه مسائل ضروری است.

اگر بنویسیم:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}.\frac{ds}{dt} \qquad (۳)$$

چون $\frac{ds}{dt} = v$، لذا (۳) به صورت

$$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{ds} \qquad (٤)$$

در می‌آید. در نتیجه (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F = mv\frac{dv}{ds}$$

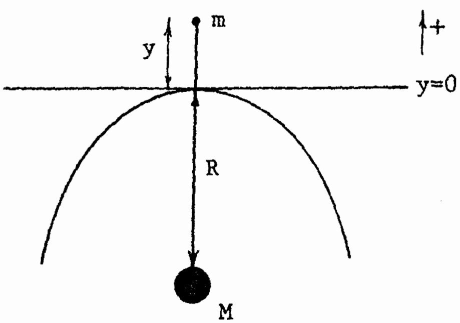
نیوتن همچنین قانون جذب بین دو جسم را به ما می‌دهد. اگر m_1 و m_2 جرم‌های دو جسم به فاصله‌ی r از یکدیگر باشند، نیروی جذب بین آنها توسط

$$F = K\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

داده می‌شود. در اینجا $k > 0$ ثابت تناسب است.

۲-۷-۱ حرکت قائم: (شکل ۲ را ببینید)

شکل زیر را ملاحظه کنید.



شکل (۲)

$M =$ جرم زمین

$m =$ جرم جسم در میدان جاذبه زمین

$R =$ شعاع زمین

$y =$ فاصله جسم از سطح زمین

نیروی جاذب بین جسم و زمین (به فرض آن که جرم آنها به ترتیب در مرکزشان متمرکز است) عبارت است از:

$$F = -G\frac{Mm}{(R+y)^2} \qquad (5)$$

علامت منفی نیز لازم است زیرا نیروی حاصل به طرف **ثابت ثقل** مرکز زمین است و جهت مثبت را در جهت بالا انتخاب کرده‌ایم. اگر فاصله جسم در بالای سطح زمین، یعنی y، در مقایسه با شعاع زمین کوچک باشد، آنگاه مقدار خطا در نوشتن (۵) به صورت:

$$F=-\frac{GMm}{R^{2}} \tag{6}$$

نیز کوچک خواهد بود. اینک با جایگذاری S با y در (۲) می‌توان نوشت:

$$m\frac{d^{2}y}{dt^{2}}=\frac{GMm}{R^{2}}$$

چون G، M و R اعداد ثابت هستند، می‌توان $\frac{GM}{R^{2}}$ را با یک ثابت جدید که آن را g می‌نامیم، جانشین کرد. سرانجام معادله دیفرانسیل حرکت یک جسم در حال سقوط در میدان جاذبه زمین به صورت زیر به دست می‌آید.

$$m\frac{d^{2}y}{dt^{2}}=-gm \quad , \qquad m\frac{dv}{dt}=-gm \tag{7}$$

که در آن $v=\frac{dy}{dt}$. از (۷) داریم:

$$\frac{d^{2}y}{dt^{2}}=-g \tag{8}$$

بنابراین ثابت g، شتاب جسم ناشی از نیروی جاذبه‌ی زمین است. معمولاً g به **نیروی ثقل** معروف است، که مقدار آن در نقاط مختلف زمین و در ارتفاع‌های مختلف کمی تغییر می‌کند. برای راحتی g را برابر ۳۲ فوت بر مربع ثانیه فرض می‌کنیم. با انتگرال‌گیری از (۸) معادله‌ی سرعت را به دست می‌آوریم:

$$v=\frac{dy}{dt}=-gt+c_{1} \tag{9}$$

و با انتگرال‌گیری از (۹) معادله‌ی مسافت را به دست خواهیم آورد:

$$y=-\frac{gt^{2}}{2}+c_{1}t+c_{2} \tag{10}$$

۲-۷-۲ مثال: توپی را از بالای ساختمانی که ارتفاع آن ٦٤ فوت است، با سرعت ۱۸ فوت بر ثانیه به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. هر یک از موارد زیر را پیدا کنید.

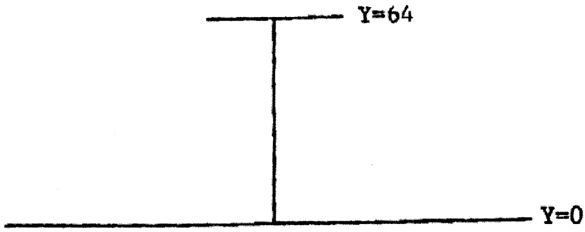
۱. توپ تا چه ارتفاعی بالا خواهد رفت.

۲. چه مدت طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد.

۳. سرعت توپ در لحظه‌ی برخورد با زمین را محاسبه کنید.

(شکل (۳) را ببینید). بنا بر فرمول (۱۰) با $g = ۳۲$، داریم:

$$y = -۱۶t^{۲} + c_{۱}t + c_{۰} \qquad (۱۱)$$



شکل (۳)

با مشتق‌گیری از (۱۱) به دست می‌آوریم:

$$v = -۳۲t + c_{۱} \qquad (۱۲)$$

اگر مبداء را در سطح زمین در نظر بگیریم، شرایط اولیه عبارتند از: $t=۰$ و $y = ۶۴$ و $v = ۴۸$. با جایگذاری این مقادیر در (۱۱) و (۱۲)، به دست می‌آوریم:

$$c_{۱} = ۴۸ \qquad , \qquad c_{۲} = ۶۴$$

بنابراین (۱۱) و (۱۲) به ترتیب به

$$y = -۱۶t^{۲} + ۴۸t + ۶۴ \qquad , \qquad v = -۳۲t + ۴۸ \qquad (۱۳)$$

تبدیل می‌گردد. توپ تا وقتی که سرعت آن به صفر برسد به بالا رفتن ادامه می‌دهد، وقتی $v=۰$، $t=۱/۵$ ثانیه و وقتی $t=۱/۵$ ثانیه، $y=۱۰۰$ فوت است. از این رو، توپ تا ۱۰۰ فوتی زمین بالا می‌رود.

وقتی توپ در سطح زمین است، که $y=۰$، و وقتی که در (۱۳) قرار دهیم $y=۰$، $t=۴$ ثانیه به دست می‌آید. از این رو توپ پس از ۴ ثانیه به زمین می‌رسد و در لحظه‌ی برخورد با زمین سرعت آن برابر است با

$$v = (-۳۲)(۴) + ۴۸ = -۸۰ \text{ فوت بر ثانیه}$$

علامت منفی مشخص می‌کند که توپ به طرف پایین در حرکت است.

۲-۷-۳ تذکر: در مثال بالا، عامل مقاومت هوا را در نظر نگرفتیم. ولی در حالات واقعی نمی‌توان این عامل را نادیده گرفت. مقاومت هوا، از جمله با چگالی هوا، سرعت جسم و غیره تغییر می‌کند. علاوه بر این، چگالی هوا خود با ارتفاع و با زمان تغییر می‌کند. مقاومت هوا همیشه در جهت مخالف حرکت اثر می‌کند.

۲-۷-٤ تمرین: جسمی به جرم m اسلاگ از ارتفاع ۵۰۰۰ فوتی رها می‌شود. سرعت و مسافت آن را برحسب زمان t پیدا کنید. فرض می‌کنیم که نیروی مقاومت هوا متناسب با توان اول سرعت و با ثابت تناسب $\frac{m}{40}$ می‌باشد.

۲-۷-۵ تمرین: تمرین ۲-۷-٤ را در نظر بگیرید، با این تفاوت که فرض می‌کنیم نیروی مقاومت هوا متناسب با توان دوم سرعت باشد. سرعت جسم را به عنوان تابعی از زمان و همچنین سرعت نهایی جسم پیدا کنید.

۲-۷-٦ تمرین: قطره بارانی از ابر بدون حرکتی سقوط می‌کند. سرعت آن را به عنوان تابعی از مسافت سقوط قطره باران پیدا کنید. فرض می‌کنیم که مقاومت هوا متناسب با توان دوم سرعت باشد. همچنین سرعت نهایی آن را به‌دست آورید.

۲-۸ روش حل دو نوع خاص از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم در حالت کلی به صورت زیر است:

$$F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \qquad (1)$$

در این بخش دو دسته‌ی خاص از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم را که جواب آنها را می‌توان با حل کردن متوالی دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول به دست آورد، بررسی می‌کنیم.

۲-۸-۱ مثال: دسته‌ی اول، معادلات دیفرانسیل مرتبه دومی را در نظر می‌گیریم که در آنها تغییر وابسته، یعنی y، ظاهر نشده باشد. این نوع معادلات به صورت زیر می‌باشند.

$$G\left(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^{2}y}{dx^{2}}\right)=0$$

اگر y جوابی از این معادله باشد. قرار می‌دهیم $p=\frac{dy}{dx}$. در این صورت p باید جوابی از معادله دیفرانسیل مرتبه اول $G\left(x,p,\frac{dp}{dx}\right)=0$ باشد. اگر بتوانیم این معادله را نسبت به p حل کنیم، آنگاه جواب‌های معادله‌ی اصلی را می‌توان با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی $\frac{dy}{dx}=p(x)$ به دست آورد.

۲-۸-۲ مثال: معادله دیفرانسیل

$$x\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=2\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}-\frac{dy}{dx}\right]$$

را حل کنید.

حل: توجه می‌کنیم که در این معادله y ظاهر نشده است. با قرار دادن $p=\frac{dy}{dx}$ معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر را برحسب p، به دست می‌آوریم.

$$x\frac{dp}{dx}=2\left[p^{2}-p\right] \qquad (2)$$

با جدا کردن متغیرها، خواهیم داشت:

$$\frac{dp}{p^{2}-p}=\frac{2\,dx}{x} \quad , \quad x\neq 0 \quad , \quad p\neq 0 \quad , \quad p\neq 1 \qquad (3)$$

یا

$$\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)dp=2\frac{dx}{x}$$

با انتگرال‌گیری، به دست می‌آوریم:

$$Ln\left|\frac{p-1}{p}\right| = 2Ln|x| + c_1$$

یا

$$\frac{p-1}{p} = c_1 x^2$$

بنابراین

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-c_1 x^2}$$

اگر c_1 مثبت باشد، مثلاً $c_1 = a^2$ آنگاه داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-a^2x^2}$$

از این رو

$$y = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{1+ax}{1-ax}\right|c_2$$

اگر c_1 منفی باشد، مثلاً $c_1 = -\lambda^2$، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\lambda^2 x^2}$$

و

$$y = \frac{1}{b}\tan^{-1} bt + c_2$$

سرانجام از (۳) مشاهده می‌کنیم که چون $p=0$ و $p=1$ جواب‌های معادله‌ی (۲) هستند، پس $y=c$ و $y=x+c$ جواب‌های معادله‌ی (۱) می‌باشند.

۲-۸-۳ تمرین: معادله دیفرانسیل $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + 2x$ را حل کنید.

۲-۸-۴ تمرین: معادله دیفرانسیل $2x\frac{d^2y}{dx^2} = (\frac{dy}{dx})^2 - 1$ را حل کنید.

۲-۸-۵ مثال: دسته دوم از معادلات دیفرانسیلی که بررسی خواهیم کرد، معادلاتی هستند که در آنها متغیر مستقل x ظاهر نشده است، این نوع معادلات به صورت زیر هستند:

$$H\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$$

فرض می‌کنیم y یک جواب معادله باشد و قرار می‌دهیم $p=\frac{dy}{dx}$. در بازه‌ای که تابع y روی آن اکیداً صعودی یانزولی است، x را می‌توان تابعی از y در نظر گرفت و می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

در این صورت معادله‌ی بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$H\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right)=0$$

و این یک معادله‌ی مرتبه‌ی اول برحسب p است. اگر بتوان این معادله را حل کرد و جوابی برای p به دست آورد، آنگاه جوابی از معادله‌ی اصلی به وسیله‌ی حل معادله‌ی مرتبه‌ی اول $\frac{dy}{dx}=p(x)$ به دست می‌آوریم.

۲-۸-۶ مثال: معادله دیفرانسیل $y''+a^2y=0$ را حل کنید.

حل: در این معادله متغیر مستقل x ظاهر نشده است، پس بنابر آنچه که در ۲-۸-۵ بیان کردیم، قرار می‌دهیم $p=\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}=p\frac{dp}{dy}$ خواهیم داشت:

$$p\frac{dp}{dy}+a^2y=0$$

یا

$$p\,dp + a^2 y\,dy = 0$$

با انتگرال‌گیری به دست می‌آوریم:

$$p^2 + a^2 y^2 = k^2 a^2$$

بنابراین

$$p = \frac{dy}{dx} = \pm a\sqrt{k^2 - y^2}$$

یا

$$\frac{dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \pm a\,dx$$

با انتگرال‌گیری مجدد، به دست می‌آوریم

$$\sin^{-1}\left(\frac{y}{k}\right) = \pm ax + c$$

بنابراین

$$\frac{y}{k} = \sin(\pm ax + c)$$

یا

$$y = k\sin(\pm ax + c)$$

این جواب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = A\sin(ax + B)$$

یا

$$y = c_1 \sin ax + c_2 \cos ax$$

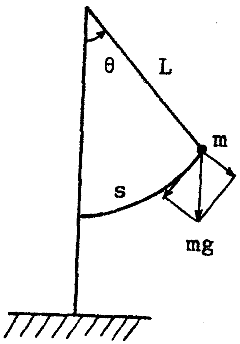
در اینجا $c_1 = A\cos B$ و $c_2 = A\sin B$

۲-۸-۷ تمرین: جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

۲-۸-۸ تمرین: آونگ ساده‌ای که تشکیل شده است از جسمی به جرم m، بـه انتهـای میله‌ای بدون جرم به طول L بسته شـده اسـت. انتهـای دیگـر میلـه بـه لـولای بـدون اصطکاکی وصل گردیده است، مانند شکل (٤).

فرض می‌کنیم که شتاب ناشی از جاذبه، مقدار ثابـت g بـوده و از مقاومـت هـوا صرفنظر شود.



شکل (٤)

(الف) نشان دهید که معادله‌ی حرکت عبارت است از:

$$\frac{d^{۲}\theta}{dt^{۲}}+\frac{g}{L}\sin\theta=۰$$

(ب) فرض می‌کنیم که آونگ از حالـت سـکون در لحظـه‌ی $t=۰$ و از وضـعیت $\theta=\alpha$، $۰<\alpha<\pi$، رها شود، اگر T دوره تناوب، یعنـی مـدت زمـان لازم بـرای یـک دوران کامل باشد، آنگاه نشان دهید که

$$T=٤\sqrt{\frac{L}{۲g}}\int_{۰}^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

(ج) نشان دهید که فرمول (ب) را می‌توان به صورت

$$٤(\frac{L}{g})^{\frac{۱}{۲}}\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{dz}{\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}z}}dz=٤\sqrt{\frac{L}{g}}\,F(k,\frac{\pi}{۲})$$

نوشت، که در آن

$$F(k,\theta)=\int_{0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^{2}\sin^{2}\theta}}$$

تابعی از K و θ است و آن را **انتگرال بیضوی از نوع اول** می‌نامند.

۲-۸-۹ تمرین‌های گوناگون فصل ۲

۱- β و α را از رابطه‌ی $X=\beta\sin(\omega t+\alpha)$ حذف کنید. در اینجا ω پارامتری است که احتیاجی به حذف کردن آن نیست.

۲- ثابت‌های c_1 و c_2 را از رابطه‌ی $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{3x}$ حذف کنید.

۳- مسیرهای متعامد بر خانواده سهمی‌هایی که از رأس‌های آنها بر مبداء و کانون‌هایشان بر محور yها قرار دارد، پیدا کنید.

٤- مسیرهای متعامد بر خانواده دلنماهای $r=a(1+\cos\theta)$ را پیدا کنید.

۵- خانواده مسیرهایی را پیدا کنید که خانواده خطوط راست $y=cx$ را به زاویه 45° قطع کند می‌برد. (زاویه در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت از خانواده منحنی‌های خواسته شده به طرف منحنی‌های داده شده اندازه‌گیری می‌شود.)

٦- معادله‌ی منحنی‌ای را پیدا کنید که انحنای آن همیشه برابر با سینوس شیب آن بوده و از نقطه‌ی (۰، ۱-) با ضریب زاویه‌ای ۱- می‌گذرد.

۷- جسمی به جرم m از حال سکون در امتداد یک خط مستقیم شروع به حرکت می‌کند. بر جسم نیروی ترمزی که یک تابع خطی از سرعت است وارد می‌شود. معادله‌ی حرکت جسم را پیدا کنید.

۸- جسمی به وزن ۸ پوند از حال سکون به طرف زمین سقوط می‌کند. فرض می‌کنیم مقاومت هوا، نیرویی که به طور عددی برابر است با $2v$، بر جسم وارد کند. سرعت جسم و مسافت طی شده را پس از t ثانیه، پیدا کنید.

۹- فرض کنید که جمعیت کشوری متناسب با تعداد افرادی که در حال حاضر در این کشور زندگی می‌کنند افزایش می‌یابد. اگر پس از ۲ سال جمعیت این کشور دو برابر و پس از ۳ سال جمعیت آن ۲۰۰۰۰ نفر گردد، جمعیت اولیه این کشور را پیدا کنید.

۱۰- فرض کنید جمعیت جهان در سال ۱۹۷۰ برابر با ۳/۵ بیلیون نفر بوده است و با آهنگ ۲ درصد در سال افزایش می‌یابد، چه موقع جمعیت جهان به ۵۰ بیلیون می‌رسد.

۱۱- ماده رادیواکتیوی با آهنگی متناسب با مقدار ماده رادیواکتیو باقیمانده در لحظه‌ی t زوال می‌یابد. فرمولی برای جرم این ماده نسبت به زمان به دست آورده و نیم عمر آن را پیدا کنید.

۱۲- جسمی که دمای آن $^\circ$۲۰ است در محیطی قرار داده می‌شود که دمای آن در درجه‌ی ثابت $^\circ$۶۰ نگه داشته شده است. پس از ۵ دقیقه دمای جسم به $^\circ$۳۰ افزایش می‌یابد.

(الف) دمای جسم را پس از گذشت ۲۰ دقیقه پیدا کنید.

(ب) چه موقع دمای جسم به $^\circ$۴۰ می‌رسد.

۱۳- معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم زیر را حل کنید.

(الف) $xy'' = y'$

(ب) $y''' - y'' = 1$

(ج) $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$

(د) $2xy'' = (y')^2 - 1$

(هـ) $y'' + y^{-3} = 0$

(و) $yy'' = y'(y' + 2)$

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل خطی

در این فصل با معرفی معادلات دیفرانسیل خطی، با روش حل این معادلات در حالات خاص آشنا می‌شویم.

۳-۱ معادلات دیفرانسیل خطی

۳-۱-۱ تعریف معادله دیفرانسیل

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x) \qquad (1)$$

را که در آن توابع

$$F(x), a_n(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$$

بر بازه‌ی I پیوسته بوده و $a_n(x)$ بر I متحد با صفر نباشد، را یک **معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی n ام** می‌نامیم.

۳-۱-۲ تعریف: اگر در معادله‌ی (۱)، $F(x)$ بر بازه‌ی I متحد با صفر باشد، آنگاه معادله‌ی

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0 \qquad (2)$$

را یک **معادله دیفرانسیل خطی مرتبه** n **ام همگن** می‌نامیم. در غیر این صورت، معادله (۱) را یک **معادله دیفرانسیل خطی مرتبه** n **ام غیرهمگن** می‌خوانیم.

۳-۱-۳ تعریف: یک **عملگر** عامل (تابعی) ریاضی است که یک تابع را به یک تابع دیگر تبدیل می‌کند. برای مثال، عملگر مشتق، عملگری است که تابع مشتق‌پذیر $f(x)$ را به تابع $f'(x)$ تبدیل می‌کند. فرض کنید D معرف عملگر مشتق‌گیری باشد، که آن را **عملگر دیفرانسیل** می‌نامیم. از این رو، اگر تابع y ، n بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$D^0y=y\ ,\ Dy=y'\ ,\ D^2y=y''\ ,\ \ldots\ ,\ D^ny=y^{(n)}$$

(از حروف دیگر نیز می‌توان به جای y استفاده کرد.) معمولاً D^0 را با ۱ نمایش می‌دهیم. برای نمونه، اگر $y(x)=x^3$، آنگاه

$$D^0y=x^3 \quad \text{و} \quad Dy=\frac{dy}{dx}=3x^2 \quad \text{و} \quad D^2y=\frac{d^2y}{dx^2}=6x \quad \text{و} \quad D^3y=\frac{d^3y}{dx^3}=6 \quad \text{و}$$

$D^4y=\dfrac{d^4y}{dx^3}=0$. اگر $r(\theta)=\sin\theta$ ، آنگاه

$$D^0r=\sin\theta\ ,\ Dr=\frac{dr}{d\theta}=\cos\theta\ ,\ D^2r\frac{d^2r}{d\theta^2}=-\sin\theta$$

۳-۱-٤ تذکر: با تشکیل یک ترکیب خطی از عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه‌ی صفر تا n عبارت

$$L=a_0+a_1D+a_2D^2+\ldots+a_nD^n,\ \ a_n\neq 0 \qquad (3)$$

به دست می‌آید.

در اینجا $a_0,a_1,\ldots,a_n$ توابعی هستند که بر بازه‌ی I تعریف شده‌اند. یک عملگر دیفرانسیل مرتبه‌ی n ام به صورت (۳) را به کمک رابطه‌ی

$$Ly=a_0+a_1Dy+a_2D^2y+\ldots+a_nD^ny$$

یا

$$Ly = a_0 + a_1 y' + a_2 y'' + \ldots + a_n y^{(n)}$$

تعریف می‌کنیم. با استفاده از این نماد معادله دیفرانسیل (۱) را می‌توان به صورت $Ly = F$ نوشت.

۳-۱-۵ مثال: معادله دیفرانسیل $xy''' + y'' - (x+1)y' + (1+\frac{1}{x})y = 0$ را به صورت $Ly = 0$ نوشته و نشان دهید که $Ly = x$ یک جواب معادله دیفرانسیل است.

حل: در اینجا $L = xD^3 + D^2 - (x+1)D + (1+\frac{1}{x})$. برای اینکه نشان دهیم که $y = x$ به ازای هر $x \neq 0$، جوابی از معادله دیفرانسیل داده شده است، $L(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{aligned} L(x) &= (xD^3 + D^2 - (x+1)D + (1+\frac{1}{x}))(x) \\ &= x(x)''' + (x)'' - (x+1)(x)' + (1+\frac{1}{x})(x) \\ &= 0 + 0 - (x+1) + x + 1 = 0 \end{aligned}$$

۳-۱-۶ تمرین: با فرض $L = D^2 - 3D + 5$، $f(x) = e^{2x}$، Lf را حساب کنید. عملگر دیفرانسیل خطی L ویژگی‌های بنیادی زیر را دارد.

۳-۱-۷ قضیه: اگر توابع y_1, y_2 حداقل n- بار مشتق‌پذیر باشند و c عددی ثابت، آنگاه

الف) $L(cy_1) = cLy_1$

ب) $L(y_1 + y_2) = Ly_1 + Ly_2$

اثبات: در اینجا اثبات را تنها برای حالت مرتبه‌ی دوم بررسی می‌کنیم. خواننده می‌تواند حالت کلی را با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کند. چون $L = a_2 D^2 + a_1 D + a_0$، پس

$$\begin{aligned} L(cy_1) &= (a_2 D^2 + a_1 D + a_0)(cy_1) \\ &= a_2 (cy_1)'' + a_1 (cy_1)' + a_0 (cy_1) \\ &= c(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) \\ &= cLy_1 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= a_2 (y_1 + y_2)'' + a_1 (y_1 + y_2)' + a_0 (y_1 + y_2) \\ &= (a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + (a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) \\ &= Ly_1 + Ly_2 \end{aligned}$$

۳-۱-۸ نتیجه: اگر y_1 و y_2 دو تابع و c_1 و c_2 اعداد ثابتی باشند، آنگاه

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2$$

به طور کلی، اگر $y_1, y_2, \ldots, y_m$، m تابع و $c_1, c_2, \ldots, c_m$ اعداد ثابتی باشند، آنگاه داریم:

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m) = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 + \ldots + c_m Ly_m \qquad (4)$$

۳-۱-۹ تمرین: (الف) اگر $y_1, y_2, \ldots, y_n$، n جواب معادله‌ی خطی همگن $Ly = 0$، باشند، ثابت کنید به ازای ثابت‌های $c_1, c_2, \ldots, c_n$، $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$ نیز یک جواب معادله است.

(ب) اگر y_h جوابی از معادله دیفرانسیل خطی همگن $Ly = 0$ بوده و y_p یک جواب خصوصی از معادله‌ی غیرهمگن $Ly = F(x)$ باشد، نشان دهید $y = y_h + y_p$ جوابی از معادله‌ی $Ly = F(x)$ است.

۳-۱-۱۰ تمرین‌های بخش ۳-۱

۱. لااقل یک جواب معادله‌ی $x^3y''' + x^2y'' + y' + y = 0$ را پیدا کنید.

۲. فرض کنید عملگرهای L_2, L_1 عبارتند از:
$L_1 = D + x$ ، $L_2 = D + 1$، $L_2(L_1 f)$ و $L_1(L_2 f)$ را پیدا کرده و نشان دهید که $L_1(L_2 f) \neq L_2(L_1 f)$.

۳. عملگر $L = x^2D^2 - 2$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که x^2 و x^{-1} و ترکیب خطی آنها، یعنی $c_1 x^2 + c_2 x^{-1}$، جواب‌هایی از معادله دیفرانسیل $Ly = 0$ هستند.

۴. نشان دهید که توابع $y_1(x) = x^4$ و $y_2(x) = x^{-2}$ جواب‌هایی از معادله‌ی $g(x) \neq 0, y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ از معادله‌ی $x^2y'' - xy' - 8y = 0$ بر بازه‌ی $(0, \infty)$ می‌باشند. سپس جوابی از معادله را پیدا کنید که در شرایط اولیه‌ی $Y(1) = 3$ و $Y'(1) = 0$ صدق می‌کند.

۵. اگر y_2, y_1 جواب‌هایی از معادله‌ی غیرهمگن $LY = F$ باشند، نشان دهید $y_1 - y_2$ جوابی از معادله‌ی همگن $LY = 0$ است.

۶. اگر $y = f(x)$ جوابی از معادله ، باشد، نشان دهید که $y = cf(x)$، که در آن c ثابت دلخواهی به غیر از ۱ است، جواب معادله نیست.

۷. فرض کنید توابع $F, a_0, a_1, \ldots, a_n$ بر بازه‌ی I از همه‌ی مراتب مشتق‌پذیر باشند و a_n هرگز صفر نشود. نشان دهید که هر جواب معادله (۲)، بر بازه‌ی I از همه‌ی مراتب مشتق‌پذیر است.

۳-۲ توابع مستقل خطی - جواب عمومی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی nام

۳-۲-۱ تعریف: مجموعه توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$، که هر یک بر بازه‌ی مشترک I تعریف شده‌اند را بر I **وابسته‌ی خطی** می‌نامیم، اگر مجموعه‌ای از ثابت‌ها، مانند $c_1, c_2, \ldots, c_n$ که همگی صفر نیستند موجود باشد، به قسمتی که

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n = 0 \qquad (1)$$

یعنی به ازای هر x در I، داشته باشیم

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x) = 0$$

اگر چنین مجموعه‌ای از ثابت‌های $c_1, c_2, \ldots, c_n$ موجود نباشد، آنگاه این مجموعه از توابع را **مستقل خطی** می‌نامیم.

۳-۲-۲ تعریف: طرف چپ فرمول (۱) را **ترکیب خطی** مجموعه توابع $f_1, f_2, \ldots, f_n$ می‌نامیم.

۳-۲-۳ مثال: تعیین کنید کدام یک از مجموعه توابع زیر بر بازه I وابسته خطی و کدام یک مستقل خطی است.

(الف) $x, -2x, -3x, 4x \quad ; \quad I = (-\infty, +\infty)$

(ب) $x^p, x^q, (p \neq q) \quad ; \quad I = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

(ج) $e^x, 0, \sin x, 1 \quad ; \quad I = (-\infty, +\infty)$

۳-۲-٤ حل: نخست مشاهده می‌کنیم که همه‌ی توابع در هر مجموعه بر بازه‌ی متناظر با آنها تعریف شده است. دوم ترکیب خطی هر مجموعه را تشکیل می‌دهیم.

(الف) ترکیب خطی مجموعه توابع در این مجموعه را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم

$$c_1 x + c_2(-2x) + c_3(-3x) + c_4(4x) = 0$$

یا

$$(c_1 - 2c_2 - 3c_3 + 4c_4)\, x = 0 \qquad (2)$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که بی‌نهایت مجموعه از اعداد برای c ها وجود دارد به طوری که (۲) به ازای هر $x \in I$ برقرار باشد. برای مثال

$$c_1 = 2 \ , \ c_2 = 1 \ , \ c_3 = 0 \ , \ c_4 = 0$$

یا

$$c_1 = 5 \ , \ c_2 = 3 \ , \ c_3 = 1 \ , \ c_4 = 1$$

از این رو بنا بر تعریف ۳-۲-۱، مجموعه توابع در قسمت (الف) وابسته خطی هستند.

(ب) ترکیب خطی توابع در قسمت (ب) را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم

$$c_1x^p + c_2x^q = 0 \qquad (3)$$

اگر فرض کنیم که x^q, x^p در I توابع وابسته خطی باشند، آنگاه بنا بر تعریف ۳-۲-۱، باید ثابت‌هایی چون c_2, c_1 که هر دو صفر نیستند وجود داشته باشد، به طوری که (۳) برحسب x یک اتحاد باشد. چون c_2, c_1 هر دو صفر نیستند، می‌توان یکی آنها، مثلاً $c_1 \neq 0$ انتخاب کرد.

با تقسیم دو طرف (۳) بر $c_1 x^q$ ، به دست می‌آوریم.

$$x^{p-q} = -\frac{c_2}{c_1} \ , \ p \neq q$$

مقدار طرف چپ رابطه بالا به ازای هر x در بازه‌ی $x<0, x>0$ تغییر می‌کند.

ولی طرف راست این رابطه به ازای مقادیر معین c_2, c_1 ثابت است. از این رو، فرض وابسته خطی بودن x^q, x^p به یک تناقض منجر می‌گردد.

(پ) ترکیب خطی مجموعه توابع در قسمت (ج) را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم

$$c_1e^x + c_2.0 + c_3 \sin x + c_4 .1 = 0 \qquad (4)$$

c_4, c_3, c_1 را برابر صفر و c_2 را برابر با یک عدد غیرصفر انتخاب می‌کنیم. در این صورت بنا به تعریف ۳-۲-۱، این توابع، وابسته خطی‌اند.

اینک بدون اثبات به بیان دو قضیه در رابطه با جواب عمومی و وجود و یگانگی جواب معادله دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی nام همگن

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (5)$$

می‌پردازیم.

۳-۲-۵ قضیه: فرض کنید توابع $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ بر بازه‌ی I پیوسته بوده و a_0 بر I هرگز صفر نشود. اگر

$n, y_1, y_2, \dots, y_n$

$y_n ,..., y_2 , y_1$، n جواب مستقل خطی از معادله‌ی مرتبه‌ی nام (۵) باشند، آنگاه هر جواب معادله‌ی (۵) بر بازه‌ی I به صورت

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n$$

است که در آن $c_1 , c_2 ,...., c_n$ اعداد ثابتی هستند. به علاوه معادله‌ی (۵) همیشه دارای n جواب مستقل خطی است.

۳-۲-۶ قضیه: اگر توابع $a_n , a_{n-1} ,..., a_1 , a_0$ بر بازه‌ی I پیوسته بوده و a_0 بر I هرگز صفر نشود، آنگاه یک و تنها یک جواب از معادله‌ی

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$$

بر تمام بازه‌ی I وجود دارد که در شرایط اولیه‌ی

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y_1 \ ,..., \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

در نقطه‌ی x_0 متعلق به I، صدق می‌کند.

مثال ۳-۲-۷: معادله‌ی مرتبه‌ی دوم $y'' - 3y' - 4y = 0$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که x. دو جواب معادله می‌باشند. همچنین جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

حل: به آسانی می‌توان نشان داد که y_1 و y_2 جواب معادله می‌باشد. اینک ثابت می‌کنیم که y_1 و y_2 مستقل خطی می‌باشند. ترکیب خطی y_2 , y_1 را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} = 0$$

با قرار دادن $x = 0$ و $x = 1$ در این معادله، به شرایط $c_1 e^4 + c_2 e^{-1} = 0$ و $c_1 + c_2 = 0$ می‌رسیم. در نتیجه $c_1 = c_2 = 0$. بنا بر قضیه‌ی ۳-۲-۴ جواب عمومی معادله برابر است با

$$y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$$

در اینجا c_2 , c_1 ثابت‌های دلخواه هستند و هر جواب معادله به این صورت است.

۳-۲-۸ تمرین: نشان دهید $c_1\frac{1}{x}+c_2x^2$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2y''-2y=0$ است.

۳-۲-۹ تمرین‌های بخش ۳-۲

۱. تعیین کنید کدام یک از توابع داده شده، وابسته خطی یا مستقل خطی می‌باشند (قلمرو هر یک از توابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است).

(الف) $2x\,,\,x^2+1$

(ب) $\cos x\,,\,\sin x$

(ج) $e^{ax}\,,\,e^{bx}\,;\,a\neq b$

(د) $e^{ax}\,,\,xe^{ax}$

۲. جوابی از معادله‌ی دیفرانسیل

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0\ ,\ \ \alpha<x<\beta$$

را پیدا کنید که در شرایط اولیه $y(x_0)=0\ ,\ y'(x_0)=0$، که در آن x_0 نقطه‌ای در بازه‌ی (α,β) است، صدق کند.

۳. جوابی از معادله دیفرانسیل $y'y''-x=0$ را که در شرایط

$$y'(1)=1\,,\ y(1)=2$$

صدق می‌کند، پیدا کنید.

٤. نشان دهید که هر مجموعه از توابع که شامل تابع صفر باشد، وابسته خطی است.

۵. فرض کنید $y=f(x)$ جوابی از مسأله با مقدار اولیه‌ی

$$y''-3y'+2y=0\ ,\ \ y(1)=0\ ,\ \ y'(1)=1$$

باشد. در این صورت $f''(1), f'''(1)$ را پیدا کنید.

در تمرین‌های زیر نشان دهید که تابع مقابل معادله دیفرانسیل داده شده، جواب عمومی آن معادله است.

٦. $y''-y=0\ ;\ \ y=c_1\cosh x+c_2\sinh x$

۷. $y''' = 0 \;;\; y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$

۸. $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0 \;;\; y = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 \; (x > 0)$

۳-۳ رونسکینی

در تمرین ۱ قسمت (ج) (۳-۲-۹) نشان دادیم که توابع e^{ax} . e^{bx} ; $(a \neq b)$ مستقل خطی هستند. اینک استقلال خطی آنها را با استفاده از روش دیگری که اهمیت خاصی دارد، مجدداً ثابت می‌کنیم. برای این منظور، ترکیب خطی آنها را برابر صفر قرار می‌دهیم. داریم

$$c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} = 0 \qquad (1)$$

از این معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم. به دست می‌آوریم

$$c_1 a e^{ax} + c_2 b e^{bx} = 0 \qquad (2)$$

در نتیجه معادلات (۱) و (۲) به ازای هر x برقرار می‌باشند.

$$c_1 e^{ax} + c_2 e^{bx} = 0$$
$$c_1 a e^{ax} + c_2 b e^{bx} = 0$$

اگر c_1, c_2 هر دو هم زمان صفر نباشند، دترمینان ضرایب، یعنی

$$\begin{vmatrix} e^{ax} & e^{bx} \\ a e^{ax} & b e^{bx} \end{vmatrix}$$

باید به ازای هر x برابر صفر باشد. چون مقدار این دترمینان برابر با $(b-a)e^{(a+b)x}$ است و چون $a \neq b$، پس مقدار دترمینان هرگز صفر نیست. در نتیجه c_1 و c_2 هر دو صفر هستند و بنابراین توابع مستقل خطی می‌باشند.

اینک این فرایند را تعمیم می‌دهیم.

۳-۳-۱ تعریف: فرض کنید توابع $f_1,f_2,...,f_n$ بر بازه‌ی I تعریف شده و دست کم $n-1$ بار، بر بازه‌ی I، مشتق‌پذیر باشند. دترمینان

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \dots & f_n''(x) \\ \vdots & & & \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

را **رونسکینی** توابع $f_1,f_2,...,f_n$ در نقطه‌ی x می‌نامیم و آن را با $W(x;f_1,f_2,...,f_n)$ یا گاهی توسط $W(x)$، نمایش می‌دهیم.

۳-۳-۲ تمرین: رونسکینی توابع $1,x,x^2$ را پیدا کنید.

۳-۳-۳ قضیه: فرض کنید توابع $f_1,f_2,...,f_n$ بر بازه‌ی I دست کم $n-1$ بار مشتق‌پذیر باشند. اگر این توابع وابسته خطی باشند، آنگاه رونسکینی آنها در هر نقطه‌ی I صفر است. در نتیجه اگر رونسکینی در هیچ نقطه‌ی I صفر نشود، آنگاه توابع مستقل خطی هستند.

اثبات: اگر توابع داده شده وابسته خطی باشند، آنگاه ثابت‌های $c_1,c_2,...,c_n$ که همگی صفر نیستند وجود دارد، به قسمی که

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n = 0$$

با $n-1$ بار مشتق‌گیری از این معادله به ازای هر مقدار معین x در I روابط زیر به دست می‌آیند.

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

$$c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) + \dots + c_n f_n'(x) = 0$$

$$c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0$$

چون این دستگاه همگن خطی نسبت به $c_1, c_2, \dots, c_n$ دارای جواب غیر بدیهی است، پس دترمینان دستگاه، که همان رونسکینی است، باید برابر صفر باشد. در نتیجه به ازای هر x در I، $w(x)=0$.

۳-۳-۴ مثال: نشان دهید توابع

$$f_1(x)=e^{r_1 x}, f_2(x)=c^{r_2 x}, \ f_3(x)=e^{r_3 x}$$

که $r_1 \neq r_2 \neq r_3$، مستقل خطی می‌باشند.

حل: رونسکینی توابع داده شده را تشکیل می‌دهیم. داریم

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & e^{r_3 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & r_3 e^{r_3 x} \\ r_1^2 e^{r_1 x} & r_2^2 e^{r_2 x} & r_3^2 e^{r_3 x} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(r_1+r_2+r_3)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}$$

با ساده کردن دترمینان، به دست می‌آوریم:

$$W(x)=e^{(r_1+r_2+r_3)x}(r_2-r_1)(r_3-r_1)(r_3-r_2)$$

چون $r_1 \neq r_2 \neq r_3$، پس $W(x) \neq 0$، در نتیجه توابع نمایی داده شده مستقل خطی می‌باشند.

۳-۳-۵ تمرین: توابع $f_1(x)=e^{r_1 x}, \ f_2(x)=e^{r_2 x}, \dots, f_n(x)=e^{r_n x}$ را با شرط $r_i \neq r_j$ برای $i \neq j$، در نظر بگیرید. ثابت کنید که به ازای هر x، این مجموعه از توابع مستقل خطی است.

۳-۳-۶ تذکر: عکس قضیه‌ی ۳-۳-۳ درست نیست. یعنی، اگر رونسکینی متحد صفر باشد، ممکن است توابع مستقل خطی باشند. برای نمونه، به ازای هر x توابع

$$f_1(x)=x^3,\ \ f_2(x)=x^2|x|$$

را در نظر بگیرید. به ازای $x\geq 0$، داریم

$$f_1(x)=x^3, f_2(x)=x^3$$

بنابراین

$$W(x;f_1,f_2)=\begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix}$$

به ازای $x<0$، داریم

$$f_1(x)=x^3,\ \ f_2(x)=-x^3$$

و رونسکینی در این حالت عبارت است از:

$$W(x;f_1,f_2)=\begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix}=0$$

پس به ازای هر x، $W(x)=0$. با وجود این، توابع f_1, f_2 مستقل خطی می‌باشند. زیرا با تشکیل ترکیب خطی این توابع و برابر صفر قرار دادن آن به دست می‌آوریم:

$$c_1x^3+c_2x^2|x|=0$$

با قرار دادن $x=1$ و $x=-1$ در این معادله، خواهیم داشت:

$$c_1+c_2=0$$
$$-c_1+c_2=0$$

از این رو $c_1=c_2=0$. پس توابع مستقل خطی می‌باشند.

۳-۳-۷ تمرین‌های بخش ۳-۳

۱. نخست رونسکینی مجموعه توابع داده شده را حساب کرده، سپس وابستگی یا استقلال خطی این مجموعه را تعیین کنید.

الف) $x \, , \, x e^{x} \, , (x \neq 0)$

ب) $x+1 \, , \, x+2 \, , \, x+3$

ج) $e^{x} \, , \, e^{-x} \, , \, e^{2x}$

د) $\sin \lambda x \, , \, \cos \lambda x \, , (\lambda \neq 0)$

در تمرین‌های زیر نشان دهید که تابع داده شده، جواب عمومی معادله دیفرانسیل مقابل است.

۲. $y'' + \lambda y = 0 \quad ; \quad y = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \quad ; \quad \lambda \neq 0$

۳. $x^2 y'' - x(x+2) y' + (x+2) y' = 0 \quad ; \quad y = c_1 x + c_2 x e^{x} \, , \; x \neq 0$

٤. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \quad ; \quad y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

۵. فرض کنید توابع y_1 , y_2 جواب‌هایی از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ بر بازه‌ی I بوده و a_2 بر I هرگز صفر نشود. ثابت کنید که رونسکینی y_1 و y_2، یعنی W در معادله دیفرانسیل $a_2 W' + a_1 W = 0$ صدق می‌کند و از این معادله نتیجه بگیرید که $W = c e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$ این فرمول به **فرمول آبل** معروف است. از فرمول آبل نتیجه می‌شود که رونسکینی دو جواب بر بازه‌ی I متحد صفر است یا هرگز صفر نیست.

٦. نشان دهید که دو تابع $y = x^2$ و $y = 0$ هر دو جواب‌هایی از معادله‌ی

$$x^2 y'' - 4 x y' + (x^2 + 6) y = 0$$

بوده و هر دو در شرایط اولیه‌ی $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$ صدق می‌کنند. آیا این مطلب قضیه‌ی ۳-۲-٦ را نقض می‌کند و اگر نه، چرا؟

۷. فرض کنید y_1 و y_2 بر بازه‌ی I تعریف شده و دوبار مشتق‌پذیر باشند. نشان دهید که $W(x; y_1, y_2, y) = 0$ معادله دیفرانسیلی برحسب y است که y_1 , y_2 جواب‌های آن می‌باشند.

۸. معادله دیفرانسیلی را پیدا کنید که جواب عمومی آن $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x}$ باشد.

۳-٤ عملگرهای چند جمله‌ای

برای پیدا کردن جواب عمومی معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی nام

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (1)$$

باید یک مجموعه‌ی مستقل خطی از n جواب آن را پیدا کنیم. این کار را می‌توان به سادگی برای حالت‌های خاصی، از جمله وقتی همه‌ی توابع a_i ها ثابت باشند انجام داد.

۳-٤-۱ تعریف: معادله‌ی (۱) را به صورت $Ly = 0$ می‌نویسیم، که در آن

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

چند جمله‌ای P، وابسته به این عملگر، را به صورت

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

تعریف می‌کنیم. پس داریم:

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

$p(D)$ را یک **عملگر چند جمله‌ای** می‌نامیم. در اینجا $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ اعداد ثابتی هستند.

۳-٤-۲ تعریف: دو عملگر L_1, L_2 را **برابر** می‌گوییم و می‌نویسیم $L_1 = L_2$، اگر، به ازای هر y، $L_1 y = L_2 y$، مشروط بر اینکه این دو عمل تعریف شده باشند. **مجموع** $L_1 + L_2$ و **حاصلضرب** $L_1 L_2$، عملگرهایی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$(L_1 + L_2) y = L_1 y + L_2 y$$

$$(L_1 L_2) y = L_1 (L_2 y)$$

در اینجا y تابعی است که اعمال طرف راست این روابط تعریف شده باشد.

۳-٤-۳ مثال: اگر $p_۱(D)=۳D^۳+D^۲+۳D-۱$ و $p_۲(D)=۵D^۲-۷D+۳$ آنگاه $[p_۱(D)+p_۲(D)]Y$ را پیدا کنید.

حل: بنا بر تعریف

$$\begin{aligned}[p_۱(D)+p_۲(D)]y &= p_۱(D)y+P_۲(D)y\\ &=(۳D^۳+D^۲+۳D-۱)y+(۵D^۲-۷D+۳)y\\ &=۳y'''+y''+۳y'-y+۵y''-۷y'+۳y\\ &=۳y'''+٦y''-٤y'+۲y\end{aligned}$$

بنابراین

$$p_۱(D)+p_۲(D)=۳D^۳+٦D^۲-٤D+۲$$

چون

$$\begin{aligned}p_۱(r)+p_۲(r)&=۳r^۳+r^۲+۳r-۱+۵r^۲-۷r+۳\\ &=۳r^۳+٦r^۲-٤r+۲\end{aligned}$$

پس $P_۱(D)+P_۲(D)$ عملگر چند جمله‌ای است و چند جمله‌ای وابسته به آن $P_۱+P_۲$ است.

۳-٤-٤ تعریف: حاصلضرب تابع $h(x)$ در یک عملگر چند جمله‌ای $P(D)$ را توسط رابطه‌ی $[h(x)P(D)]y=h(x)[P(D)y]$ **تعریف می‌کنیم**

۳-٤-۵ تمرین:

(الف) $(۳x^۳+۲)\left[(D^۲+۳D+۲)+(۲D^۲-۱)\right]e^{۲x}$ را حساب کنید.

(ب) $\left[(D^۲-D+۱)(D^۲-۱)\right](x^۲+۲)$ را حساب کنید.

۳-٤-٦ قضیه: چند جمله‌ای‌های عملگر و دلخواه $R(D),Q(D),P(D)$ دارای خاصیت‌های جابجایی و شرکت‌پذیری هستند. یعنی

$$P(D).Q(D)=Q(D).P(D)$$

$$P(D)\left[Q(D).[R(D)\right]=P(D)Q(D)\left]R(D)\right.$$

اثبات: می‌دانیم که حاصلضرب چند جمله‌ای‌های P و Q جابجایی هستند، یعنی به ازای هر r، $p(r).Q(r)=Q(r).p(r)$. در نتیجه عملگرهای چند جمله‌ای نیز دارای خاصیت جابجایی می‌باشند.

همچنین با توجه به خاصیت شرکت‌پذیری برای چند جمله‌ای‌ها، یعنی

$$P(r)\left[Q(r)R(r)\right]=\left[P(r)Q(r)\right]R(r)$$

داریم

$$P(D)\left[Q(D)R(D)\right]=\left[P(D)Q(D)\right]R(D)$$

۳-٤-۷ تذکر: اگر P چند جمله‌ای باشد، که بتوان آن را به صورت تجزیه شده‌ی

$$P(r)=P_1(r).P_2(r)....P_k(r)$$

نوشت، آنگاه

$$P(D)=P_1(D)P_2(D)...P_k(D)$$

به دلیل خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری عملگرهای چند جمله‌ای تحت عمل ضرب، ترتیب دسته‌بندی عملگرها در ضرب مهم نیست.

۳-٤-۸ تذکر: چند جمله‌ای P به صورت $P(r)=a_n r^n+a_{n-1}r^{n-1}+...+a_1 r+a_0$ را در نظر می‌گیریم. همیشه P را می‌توان به صورت حاصلضرب عامل‌های خطی $P(r)=a_n(r-r_n)(r-r_{n-1})...(r-r_2)(r-r_1)$ نوشت، که در آن اعداد $r_n, r_{n-1}, ..., r_2, r_1$، ممکن است متمایز نبوده یا مختلط باشند. در ضمن اگر P یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی و $r_1=a+ib$، $b\neq 0$ یک ریشه‌ی مختلط آن باشد، آنگاه $r_2=a-ib$ ریشه دیگری از P خواهد بود. زیرا

$$(r-r_1).(r-r_2)=\left[r-(a+ib)\right]\left[r-(a-ib)\right]=(r-a)^2+b^2$$

یک چند جمله‌ای درجه دوم با ضرایب حقیقی است. به عبارت دیگر، هرچند جمله‌ای، مانند P با ضرایب حقیقی را می‌توان به عامل‌های درجه اول و درجه دوم با ضرایب حقیقی تجزیه کرد. در نتیجه هر عملگر چند جمله‌ای، مانند

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-۱} D^{n-۱} + \ldots + a_۱ D + a_۰$$

با ضرایب حقیقی را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب عملگرهای چند جمله‌ای از مرتبه‌ی اول و دوم نوشت.

۳-٤-۹ مثال: چند جمله‌ای عملگر $P(D) = D^۳ - ۵D^۲ + ۹D - ۵$ را به صورت حاصل‌ضرب عامل‌های مرتبه‌ی اول و دوم با ضرایب حقیقی بنویسید.

حل: چند جمله‌ای متناظر با عملگر چند جمله‌ای عبارت است از:

$$P(r) = r^۳ - ۵r^۲ + ۹r - ۵$$

چند جمله‌ای $P(r)$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$P(r) = (r-۱)(r^۲ - ٤r + ۵)$$

پس می‌توان نوشت:

$$P(D) = (D-۱)(D^۲ - ٤D + ۵)$$

۳-٤-۱۰ جواب یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

معادله دیفرانسیل

$$P(D)Y = ۰ \qquad (۱)$$

با

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-۱} D^{n-۱} + \ldots + a_۱ D + a_۰$$

را در نظر می‌گیریم. اگر تابعی جواب معادله دیفرانسیل (۱) باشد، آنگاه یک ترکیب خطی از این تابع و n مشتق اول آن باید صفر شود. اگر $f(x) = e^{rx}$ فرض شود،

چون مشتقات f مضاربی از خود f هستند، به ازای هر عدد صحیح نامنفی m، خواهیم داشت:

$$D^m e^{rx} = r^m e^{rx} \qquad (۲)$$

اینک می‌کوشیم تا جواب‌هایی از معادله‌ی (۱) را که به صورت تابع نمایی می‌باشند، به دست آوریم. بنا بر فرمول (۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(D)e^{rx} &= (a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0)e^{rx} \\ &= (a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0)e^{rx} \end{aligned}$$

یا

$$P(D)e^{rx} = p(r)e^{rx} \qquad (۳)$$

چند جمله‌ای $P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$ را **چند جمله‌ای کمکی** و $P(r) = 0$ را **معادله‌ی کمکی وابسته** به معادله دیفرانسیل (۱) می‌نامیم. فرض کنید $r_1, r_2, \dots, r_n$ صفرهای چند جمله‌ای P باشند، در این صورت

$$P(D)e^{rx} = a_n (r - r_1)(r - r_2)\dots(r - r_n)e^{rx}$$

اگر r_i یک ریشه حقیقی معادله کمکی باشد، آنگاه تابع $e^{r_i x}$ جوابی از معادله‌ی (۱) است. اگر $r_1, r_2, \dots, r_n$ اعدادی حقیقی و متمایز باشند، هر یک از توابع $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$ نیز جواب معادله‌ی (۱) می‌باشند.

در تمرین ۳-۳-۵ نشان داده‌ایم که این توابع مستقل خطی هستند. در نتیجه بنابر قضیه‌ی ۳-۲-٤، جواب عمومی معادله (۱) برابر است با:

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

۳-٤-۱۱ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$ را پیدا کنید.

حل: این معادله را می‌توان به صورت

$$(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = 0$$

نوشت. معادله‌ی کلی این معادله عبارت است از:

$$r^{۳}+۲r^{۲}-r-۲=۰$$

یا

$$(r-۱)(r+۱)(r+۲)=۰$$

ریشه‌های این معادله عبارت است از ۱، ۱−، ۲−. پس بنا بر ۳-٤-۹ توابع $e^{-۲x}$، e^{-x} و e^{x} جواب‌های معادله دیفرانسیل هستند و چون مستقل خطی می‌باشند، در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$y(x)=c_{۱}e^{x}+c_{۲}e^{-x}+c_{۳}e^{-۲x}$$

۳-٤-۱۲ تمرین: معادله دیفرانسیل $y'''-۳y''+۲y'=۰$ را به صورت $P(D)y=۰$ نوشته و جواب عمومی آن را پیدا کنید.

۳-٤-۱۳ تذکر: در بخش‌های بعدی حالاتی را بررسی می‌کنیم که معادله کمکی دارای ریشه‌های برابر یا مختلط باشد.

۳-٤-۱٤ تمرین‌های بخش ۳-٤

۱. مقدار هر یک از عبارات زیر را حساب کنید:

(الف) $(D^{۲}-۲D-۳)\cos ۲x$

(ب) $(D^{۲}-٤D+۲)(x^{۲}+x+۱)$

(ج) $\left[x^{۲}(D^{۲}+۱)\right](۲e^{x})$

(د) $\left[(x-۱)(D^{۳}+D^{۲})\right](e^{۲x})$

۲. ثابت کنید عملگر چند جمله‌ای‌ها با ضرایب غیرثابت، نسبت به عمل ضرب دارای خاصیت جابجایی نیست.

۳. معادله دیفرانسیلی با ضرایب حقیقی به صورت $P(D)y=0$ به قسمی به دست آورید که اعداد داده شده صفرهایی از چند جمله‌ای کمکی P وابسته به آن باشد و معادله دیفرانسیل از کمترین مرتبه‌ی ممکن باشد.

(الف) $r_1=3 \quad , \quad r_2=2$

(ب) $r_1=r_2=1 \quad , \quad r_3=0$

(ج) $r_1=1-2i$

(د) $r_1=i \quad , \quad r_2=1$

٤. جواب عمومی معادلات داده شده را پیدا کنید.

(الف) $y'''-4y'=0$

(ب) $y''-y'-2y=0$

(ج) $4y''-5y'=0$

(د) $y''-3y'+2y=0$

۳-۵ جواب‌های مختلط

در این بخش به بیان مفاهیمی از توابع مختلط، که در تعیین جواب‌های مختلف یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام به آنها نیازمندیم، می‌پردازیم. جزئیات مطالب ارائه شده را می‌توان در درس توابع مختلط یافت.

۳-۵-۱ تعریف: یک تابع مختلط، مانند W، با متغیر حقیقی را می‌توان به عنوان یک زوج مرتب از توابع حقیقی (u,v) در نظر گرفت. می‌نویسیم

$$W(x)=u(x)+iv(x)$$

که در آن i واحد موهومی با خاصیت $i^2=-1$ است. u را قسمت حقیقی و v را قسمت موهومی تابع W می‌نامیم. **مشتق تابع مختلط** W توسط رابطه‌ی

$$W'(x)=u'(x)+iv'(x)$$

تعریف می‌شود، مشروط بر اینکه $u'(x)$ و $v'(x)$ موجود باشند.

۳-۵-۲ قضیه: فرض می‌کنیم

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

عملگری باشد که در آن ضرایب a_i ها توابعی با مقدار حقیقی باشند. اگر تابع مختلط $W(x) = u(x) + iv(x)$ جواب مختلطی از معادله‌ی

$$Ly = 0 \qquad (1)$$

باشد، یعنی اگر $LW = 0$ آنگاه دو تابع حقیقی u و v (قسمت‌های حقیقی و موهومی w) نیز جواب‌های حقیقی معادله‌ی (۱) می‌باشند. یعنی

$$Lu = 0 \quad , \qquad Lv = 0$$

اثبات: بنا بر تعریف (۳-۵-۱)، داریم

$$a_k D^k W = a_k D^k u + i a_k D^k v \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

پس

$$LW = Lu + i Lv$$

چون W یک جواب مختلط از معادله‌ی $Ly = 0$ است. یعنی $LW = 0$، پس

$$Lu + i Lv = 0$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$Lu = 0 \; , \; Lv = 0$$

زیرا یک عدد مختلط هنگامی صفر است که قسمت‌های حقیقی و موهومی آن صفر باشند.

۳-۵-۳ قضیه معادله غیرهمگن

$$Ly = F \qquad (2)$$

با $F(x) = f(x) + ig(x)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $W = u + iv$ جوابی از معادله‌ی (۲) باشند، آنگاه

$$Lu = f \quad , \quad Lv = g$$

بنابراین با پیدا کردن یک جواب مختلط از معادله‌ی (۲)، جواب‌های حقیقی معادلات $Ly = f$, $Ly = g$ به دست می‌آیند.

۳-۵-٤ تعریف: اگر z نمایش عددی مختلط باشد، تعریف می‌کنیم

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad (۳)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \qquad (٤)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \qquad (٥)$$

ثابت می‌شود که هر یک از این سری‌ها به ازای هر z همگراست.

۳-۵-۵ مثال: بسط سری $\cos i$ را پیدا کنید.

حل: بنابر (۵)، با $z = i$ و $i^2 = -1$، داریم

$$\cos i = 1 - \frac{(i)^2}{2!} + \frac{(i)^4}{4!} + \dots$$

$$\cos i = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

۳-۵-٦ تمرین: به کمک فرمول‌های (۳)، (٤) و (۵) اثبات‌های غیردقیقی از اتحادهای زیر ارائه دهید.

$$e^0 = 1 \qquad (٦)$$

$$e^{z_1} . e^{z_2} = e^{z_1 + z_2} \qquad (۷)$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad (۸)$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \qquad (۹)$$

$$\sin z=\frac{۱}{۲i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) \qquad (۱۰)$$

$$\cos z=\frac{۱}{۲}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right) \qquad (۱۱)$$

۳-۵-۷ تمرین: به کمک فرمول‌های تمرین (۳-۵-٦)، نشان دهید که اگر $z=x+iy$ آنگاه

$$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y) \qquad (۱۲)$$

۳-۵-۸ قضیه: تابع مختلط

$$F(x)=e^{h(x)} \qquad (۱۳)$$

را که در آن $h(x)=u(x)+i\nu(x)$، در نظر می‌گیریم. اگر $h(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$F'(x)=h'(x)e^{h(x)}$$

اثبات: در فرمول (۱۳) به جای $h(x)$ مقدار $u(x)+i\nu(x)$ قرار داده و از فرمول (۱۲) استفاده می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned}F(x)=e^{h(x)}&=e^{u(x)+i\nu(x)}\\&=e^{u(x)}\left(\cos\nu(x)+i\sin\nu(x)\right)\\&=e^{u(x)}\cos\nu(x)+ie^{u(x)}\sin\nu(x)\end{aligned}$$

بنابراین، با به کار بردن تعریف ۳-۵-۱، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}F'(x)&=\left(e^{u(x)}\cos\nu(x)\right)'+i\left(e^{u(x)}\sin\nu(x)\right)'\\&=u'(x)e^{u(x)}\cos\nu(x)-\nu'(x)e^{u(x)}\sin\nu(x)\\&+i\left(u'(x)e^{u(x)}\sin\nu(x)+\nu'(x)e^{u}(x)\cos\nu(x)\right)\\&=u'(x)\left[e^{u(x)}\cos\nu(x)+ie^{u(x)}\sin\nu(x)\right]\\&+i\nu'(x)\left[e^{u(x)}\cos\nu(x)+ie^{u(x)}\sin\nu(x)\right]\\&=(u'(x)+i\nu'(x))\left[e^{u(x)}\cos\nu(x)+ie^{u(x)}\sin\nu(x)\right]\end{aligned}$$

$$= h'(x)e^{h(x)}$$

۳-۵-۹ تمرین‌های بخش ۳-۵

۱. اگر $W_1 = u_1 + i v_1, W_2 = u_2 + i v_2$ دو تابع مختلط مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید که $(W_1 + W_2)' = W_1' + W_2'$.

۲. هر تابع نمایی داده شده را برحسب توابع مثلثاتی و هر تابع مثلثاتی را برحسب توابع نمایی بیان کنید.

(الف) $e^{(1-i)x}$ (ب) e^{-2ix}

(ج) $e^{(-2+i)x}$ (د) $\cos 3x$

(ه) $\sin x$ (و) $\sin 4x$

۳. نشان دهید که $y = e^{ix}$ جوابی از معادله دیفرانسیل $(D^2 + 1)y = 0$ است. سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل را پیدا کنید.

٤. نشان دهید که $y = e^{(-1+2i)x}$ جوابی از معادله دیفرانسیل $(D^2 + 2D + 5)y = 0$ است. سپس جواب عمومی معادله دیفرانسیل را پیدا کنید.

۵. معادله دیفرانسیل غیرهمگن $y'' - y' + 4y = 13e^{ix}$ را در نظر بگیرید. جوابی از معادله را که به صورت $y = Ae^{ix}$ است، پیدا کنید.

با استفاده از این جواب، یک جواب حقیقی برای هر یک از معادلات زیر پیدا کنید.

$$y'' - 2y' + 4y = 13\cos x\ ,\ y'' - 2y' + 4y = 13\sin x$$

٦. همه‌ی جواب‌های معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ را بر بازه‌ی $(0,\infty)$ که به صورت $y = x^c$ هستند و c ممکن است مختلط باشد، به دست آورید. با استفاده از این جواب، دو جواب حقیقی مستقل خطی از معادله را پیدا کنید.

۳-٦ حالتی که برخی یا همه‌ی ریشه‌های معادله‌ی کمکی مختلط باشند

۳-٦-۱ معادله دیفرانسیل

$$P(D)y = 0 \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم

$$P(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

که در آن a_i ها اعداد ثابت حقیقی می‌باشند. فرض کنید $r_1 = a + ib$ یک ریشه مختلط معادله‌ی کمکی، $P(r) = 0$، باشد. می‌دانیم که مزدوج این ریشه، یعنی $a - ib$، نیز ریشه‌ی دیگری از معادله‌ی کمکی است. در نتیجه با استفاده از فرمول (۱۲) از بخش ۳-۵، داریم

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$$

$$e^{(a-ib)x} = e^{ax}(\cos bx - i\sin bx) \qquad (۲)$$

که جواب‌های مختلط معادله‌ی (۱) هستند. از این رو، بنا بر قضیه‌ی ۳-۵-۲، می‌دانیم که قسمت‌های حقیقی و موهومی یک جواب مختلط، یعنی $e^{ax}\cos bx$ و $e^{ax}\sin bx$ جواب‌های حقیقی معادله‌ی (۱) می‌باشند. توجه کنید که برای پیدا کردن دو جواب حقیقی فرقی نمی‌کند که از خود ریشه مختلط یا مزدوج آن استفاده کنیم، زیرا وقتی که می‌خواهیم جواب عمومی معادله را تشکیل دهیم، این جواب‌ها در ثابت‌های دلخواه ضرب می‌شوند و در نتیجه علامت منفی در قسمت موهوی جواب در (۲) از بین می‌رود.

بنابراین، به هر زوج از صفرهای مزدوج مختلط چند جمله‌ای کمکی $P(r)$، یک زوج از جواب‌های حقیقی معادله‌ی (۱) متناظر می‌گردد.

۳-۶-۲ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 2y' + 2y = 0$ را پیدا کنید.

حل: معادله‌ی کمکی این معادله عبارت است از:

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

ریشه‌های این معادله $1 \pm i$ هستند. در اینجا، در مقایسه با ۳-۶-۱، داریم $a = 1$ و $b = 1$. از این رو

$$e^{(1+i)x} = e^x(\cos x + i\sin x)$$

یک جواب مختلط است. قسمت‌های حقیقی و موهومی این جواب، یعنی $e^x \cos x$ و $e^x \sin x$، دو جواب حقیقی و مستقل خطی معادله می‌باشند. (چرا؟) در نتیجه جواب عمومی معادله داده شده عبارت است از:

$$Y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$$

۳-۶-۳ تمرین: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + a^2 y = 0$ را به دست آورید، سپس نشان دهید که می‌توان این جواب را به صورت

$$Y(x) = A\cos(ax + \alpha)$$

یا

$$Y(x) = B\sin(ax + \beta)$$

نوشت، که در آن A، B، α و β اعداد ثابت می‌باشند.

۳-۶-٤ قضیه: فرض کنید که $r_1, r_2, \dots, r_n$ و n صفر متمایز از چند جمله‌ای کمکی $P(r)$ وابسته به معادله دیفرانسیل (۱) باشند. یعنی

$$P(r) = a_n (r - r_1)(r - r_2)\dots(r - r_n)$$

اگر مجموعه توابع

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \dots, e^{r_n x}$$

که برخی از آنها ممکن است مختلط باشند، جواب‌هایی از معادله‌ی (۱) بر بازه‌ی $(-\infty,\infty)$ باشند، که نسبت به مجموعه‌ی اعداد مختلط مستقل خطی هستند، آنگاه n جواب حقیقی متناظر با این جواب‌های مختلط، یک مجموعه‌ی مستقل خطی از توابع حقیقی بر بازه‌ی $(-\infty,\infty)$ را تشکیل می‌دهند.

اثبات: فرض می‌کنیم که $c_1, c_2, \dots, c_n$ اعداد حقیقی باشند به قسمی که به ازای هر x

$$c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx + \dots = 0$$

در این صورت، با استفاده از فرمول‌های (۱۰) و (۱۱) بخش ۳-۵، داریم

$$c_1 e^{ax}\left[\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}\right]+c_2 e^{ax}\left[\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}\right]+\dots=0$$

یا

$$\left[\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2i}\right]e^{(a+ib)x}+\left[\frac{c_1}{2}-\frac{c_2}{2i}\right]e^{(a-ib)x}+\dots=0$$

قرار می‌دهیم

$$c'_1=\frac{1}{2}[c_1-c_2 i]\,,\ c'_2=\frac{1}{2}[c_1+c_2 i] \qquad (3)$$

بنابراین

$$c'_1 e^{(a+ib)x}+c'_2 e^{(a-ib)x}+\dots=0$$

چون بنا بر فرض قضیه، توابع نمایی مستقل خطی می‌باشند، پس

$$c'_1=c'_2=\dots=0$$

از طرفی با حل معادلات (۳) نسبت به c_1 , c_2، به دست می‌آوریم

$$c_1=c'_1+c'_2 \quad , \quad c_2=i(c'_1-c'_2)$$

در نتیجه $c_1=c_2=\dots=0$. از این رو n جواب حقیقی، مستقل خطی هستند.

۳-۶-۵ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'''+y''+y'+y=0$ را پیدا کنید.

حل: معادله‌ی کمکی، یعنی

$$P(r)=r^3+r^2+r+1=0$$

دارای ریشه‌های $r_1=1$، $r_2=i$ و $r_3=-i$ است. بنابراین

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

یک جواب مختلط معادله می‌باشد و $\cos x$ و $\sin x$ جواب‌های حقیقی معادله هستند. در ضمن e^x نیز یک جواب حقیقی دیگر از معادله است. بنا بر قضیه‌ی ۳-۶-۴، توابع e^x، $\sin x$ و $\cos x$ مستقل خطی می‌باشند. در نتیجه

$$Y(x) = c_1 e^{x} + c_2 \sin x + c_3 \cos x$$

جواب عمومی معادله دیفرانسیل است.

۳-۶-۶ تمرین: فرض کنید که $P(D) = (D^2 - 1)(D^2 - 4D + 5)$ باشد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$P(D)y = 0$$

اینک حالتی را که چند جمله‌ای کمکی $P(r)$ دارای صفرهای تکراری است، بررسی می‌کنیم.

۳-۶-۷ قضیه: اگر r عددی حقیقی یا مختلط و تابع W که ممکن است مختلط باشد، لااقل n بار مشتق‌پذیر باشد، آنگاه

$$(D - r)^n \left[e^{rx} W(x) \right] = e^{rx} D^n W(x) \qquad (4)$$

اثبات: برای اثبات فرمول (۴) از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. روشن است که فرمول به ازای $n = 0$ درست است. اینک درستی این فرمول را به ازای $n = 1$ ثابت می‌کنیم.

$$\begin{aligned}(D - r)\left[e^{rx} W(x) \right] &= e^{rx} W'(x) + re^{rx} W(x) - r e^{r(x)} W(x)\\ &= e^{vx} W'(x)\\ &= e^{rx} DW(x)\end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم فرمول (۴) به ازای $n = k$ درست باشد و درستی آن را به ازای $n = k + 1$ ثابت می‌کنیم. داریم

$$\begin{gathered}(D - r)^{k+1} \left[e^{rx} W(x) \right] =\\ (D - r)(D - r)^k \left[e^{rx} W(x) \right]\end{gathered}$$

بنا بر فرض استقرای ریاضی، خواهیم داشت:

$$(D - r)^k \left[e^{rx} W(x) \right] = e^{rx} D^k W(x)$$

پس:

$$(D-r)^{k+1}\left[e^{rx}W(x)\right]=(D-r)\left[e^{rx}D^{k}W(x)\right]$$
$$=e^{rx}D^{k+1}W(x)+re^{rx}D^{k}W(x)-re^{rx}D^{k}W(x)$$
$$=e^{rx}D^{k+1}W(x)$$

در نتیجه اثبات درستی فرمول (٤) کامل شده است.

۳-٦-۸ قضیه: فرض می‌کنیم $P(r)$ چند جمله‌ای کمکی وابسته به معادله‌ی (۱) باشد. اگر r_1 یک ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی کمکی $P(r)=0$ باشد که k بار تکرار می‌شود، آنگاه هر یک از k تابع $(0\le j\le k-1)$، $x^{j}e^{r_1 x}$ جوابی از معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی nام معادله (۱) است. اگر $a+ib$، $(b\neq 0)$ یک ریشه مختلط از $P(r)=0$ باشد که k بار تکرار می‌شود (در این حالت $a-ib$ ریشه دیگری از معادله کمکی است که k بار تکرار می‌شود) آنگاه هر یک از $2k$ تابع

$$x^{j}e^{ax}\cos bx\ ,\ x^{j}e^{ax}\sin bx \qquad , \qquad 0\le j\le k-1$$

جواب معادله‌ی (۱) است.

اثبات: چون r_1 یک ریشه معادله‌ی کمکی است که k بار تکرار می‌شود، پس

$$P(r)=a_n(r-r_1)^{k}Q(r)$$

که در آن $Q(r)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی $n-k$ است. در نتیجه

$$P(D)=a_n Q(D)(D-r_1)^{k}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که هر یک از توابع

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, \dots, x^{k-1}e^{r_1 x}$$

جوابی از معادله‌ی $P(D)y=0$ است. بنا بر قضیه‌ی ۳-٦-۷، خواهیم داشت

$$P(D)(x^{j}e^{r_1 x})=a_n Q(D)(D-r_1)^{k}x^{j}er^{r_1 x}$$
$$=a_n Q(D)e^{r_1 x}D^{k}x^{j}$$

روشن است که به ازای $j<k$ ، $D^k x^j = 0$. پس حکم ثابت شده است.
از طرفی اگر $r_1 = a+ib$ یک ریشه‌ی معادله‌ی کمکی باشد که k بار تکرار می‌شود، آنگاه $r_2 = a-ib$ نیز یک ریشه‌ی معادله‌ی کمکی است که k بار تکرار می‌گردد. بنابراین هر یک از $2k$ تابع

$$x^j e^{(a+ib)x} \;,\; x^j e^{(a-ib)x} \quad , \quad 0 \le j \le k-1$$

جواب مختلط از معادله دیفرانسیل (۱) می‌باشد. چون قسمت‌های حقیقی و موهومی جواب مختلط، دو جواب حقیقی از معادله هستند، پس هر یک از $2k$ تابع حقیقی

$$x^j e^{ax} \cos bx \;,\; x^j e^{ax} \sin bx \quad , \quad 0 \le j \le k-1$$

جواب حقیقی می‌باشد. در نتیجه اگر P دارای صفرهای تکراری باشد، آنگاه می‌توان n جواب حقیقی از معادله‌ی مرتبه‌ی n ام (۱) را پیدا کرده‌ایم. در اینجا مستقل خطی بودن این جواب‌ها را می‌پذیریم.

۳-۶-۹ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''' - 3Y'' + 3y' - y = 0$ را پیدا کنید.

حل:

معادله‌ی کمکی

$$P(r) = r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد.

$$P(r) = (r-1)^3 = 0$$

از این رو $r=1$، ریشه‌ای از معادله‌ی کمکی است که سه بار تکرار می‌شود. در نتیجه بنا بر قضیه‌ی (۳-۶-۸) سه جواب مستقل متناظر با این ریشه‌ها عبارتند از:

$$y_1 = e^x \,,\; y_2 = x e^x \,,\; y_3 = x^2 e^x$$

بنابراین، بنابر قضیه (۳-۲-۵) جواب عمومی این معادله دیفرانسیل عبارت است از

$$Y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

۳-۶-۱۰ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y^{(4)}+2y''+y=0$ را پیدا کنید.

حل: معادله‌ی کمکی

$$P(r)=r^4+2r^2+r=0$$

را در نظر می‌گیریم. این معادله را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد.

$$P(r)=(r^2+1)^2=0$$

از این رو $r_1=i$ و $r_2=-i$ هر دو ریشه‌هایی از معادله‌ی کمکی می‌باشند که دو بار تکرار می‌شوند. در نتیجه بنا بر قضیه‌ی (۳-۶-۸) چهار جواب مختلط متناظر با این ریشه‌ها عبارتند از:

$$e^{ix},\ xe^{ix},\ e^{-ix},\ xe^{-ix}$$

بنابراین، قسمت‌های حقیقی و موهومی دو تابع مختلط

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

و

$$xe^{ix}=x(\cos x+i\sin x)=x\cos x+ix\sin x$$

یعنی، چهار تابع $\cos x$، $\sin x$، $x\cos x$ و $x\sin x$ جواب‌های حقیقی مستقل خطی معادله‌ی دیفرانسیل داده شده می‌باشند. در نتیجه، بنا بر قضیه‌ی (۳-۲-۵) جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$y(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3x\cos x+c_4x\sin x$$

یا

$$y(x)=(c_1+c_3x)\cos x+(c_2+c_4x)\sin x$$

۳-۶-۱۱ تمرین: مسأله با مقدار اولیه‌ی

$$3y'''+5y''+y'-y=0$$

$$y(0)=0\ ,\quad y'(0)=1\quad ,\quad y''(0)=-1$$

را حل کنید.

۳-۶-۱۲ تمرین‌های بخش ۳-۶

در تمرین‌های ۱ تا ۸، جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را پیدا کنید.

۱. $6y''-11y'+4y=0$

۲. $y''+2y'-y=0$

۳. $y''+4y'+4y=0$

۴. $y^{(4)}-a^2y=0 \quad , \quad a>0$

۵. $y'''-4y''+y'+6y=0$

۶. $y^{(5)}+2y'''+y'=0$

۷. $y^{(4)}+4y''=0$

۸. $y''-4y'+20y=0$

در تمرین‌های ۹ تا ۱۲، مسأله با مقدار اولیه داده شده را حل کنید.

۹. $y''-2y'+5y=0;\ y(0)=2,\ y'(0)=4$

۱۰. $y'''-6y''+11y'-6y=0;\ y(\pi)=0,\ y'(\pi)=0\ ,\ \ y''(\pi)=1$

۱۱. $y''-\frac{6}{5}y'+\frac{9}{25}y=0\ ;\ y(1)=0\ ,\ \ y'(1)=2$

۱۲. $y''+y'-6y=0\ ;\ y(0)=4\ ,\ y'(0)=3$

۱۳. معادله دیفرانسیلی با ضرایب ثابت، با کمترین مرتبه‌ی ممکن، به قسمی پیدا کنید که تابع داده شده زیر یک جواب آن باشد.

(الف) xe^{-2x}

(ب) $x-e^{3x}$

(ج) $x\cos x$

(د) $e^x\sin 2x+3e^{-x}$

۱۴. فرض کنید $P(D)=a_2D^2+a_1D+a_0$ باشد. نشان دهید اگر قسمت‌های حقیقی دو ریشه‌ی معادله‌ی کمکی $p(r)=0$ منفی باشند، آنگاه هر جواب معادله‌ی دیفرانسیل $p(D)Y=0$، زمانی که x به مثبت بی نهایت میل کند، به صفر می‌گراید.

۳-۷ معادلات کوشی ـ اویلر

۳-۷-۱ تعریف: معادله دیفرانسیل خطی به صورت

$$b_nx^ny^{(n)}+b_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots+b_1xy'+b_0y=0$$

یا

$$Ly=(b_nx^nD^n+b_{n-1}x^{n-1}D^{(n-1)}+\dots+b_1xD+b_0)y=0 \qquad (1)$$

که در آن $b_n,b_{n-1},\dots,b_1,b_0$ اعداد ثابت هستند، به **معادله‌ی کوشی ـ اویلر** (Cauchy-Euler) یا به **معادله‌ی هم‌بعد** معروف است. برای مثال هر یک از معادلات

$$x^2y''-xy'+5y=0 \qquad , \qquad x^3y'''+3x^2y''+y=0$$

یک معادله‌ی کوشی اویلر می‌باشد.

۳-۷-۲ مثال: معادله کوشی ـ اویلر (۱) را می‌توان روی بازه‌ی باز $(0,\infty)$، با تغییر متغیر $u=\operatorname{Ln}x$ یا $x=e^u$، به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد. یادآور می‌شویم، در حالتی که $x\in(-\infty,0)$، از تغییر متغیر $u=\operatorname{Ln}(-x)$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید $Y(u)=y(e^u)$. اینک با استفاده از قاعده‌ی زنجیری $xDy, x^2D^2y,\dots,x^nD^ny$ را برحسب متغیر u می‌نویسیم.

$$xDy=x\frac{dy(x)}{dx}=e^u.\frac{dY(u)}{du}.\frac{du}{dx}$$

و چون $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-u}$، با قرار دادن این مقدار در رابطه بالا به جای $\frac{du}{dx}$ به دست می‌آوریم

$$xDy=\frac{dY(u)}{du}=DY(u)$$

با استفاده مجدد از قاعده‌ی زنجیری، داریم:

$$x^{2}D^{2}y(x)=x^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}}=x^{2}\frac{d}{dx}\left[\frac{dy(x)}{dx}\right]$$
$$=e^{2u}\frac{d}{dx}\left[\frac{dY(u)}{du}.\frac{du}{dx}\right]$$

با قرار دادن $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-u}$ در این رابطه، به دست می‌آوریم:

$$x^{2}D^{2}y_{(x)}=e^{2u}\frac{d}{dx}\left[\frac{dY(u)}{du}.\frac{1}{x}\right]$$
$$=e^{2u}\frac{d}{du}\left[\frac{dY(u)}{du}.e^{-u}\right]\frac{du}{dx}$$
$$=e^{2u}\left[\frac{d^{2}Y(u)}{du^{2}}e^{-u}-\frac{dY(u)}{du}e^{-u}\right]e^{-u}$$
$$=\frac{d^{2}Y(u)}{du^{2}}-\frac{dY(u)}{du}=(D^{2}-D)Y(u)$$
$$=D(D-1)Y(u)$$

با استفاده از استقراء ریاضی، نشان می‌دهیم که

$$x^{n}D^{n}y(x)=D(D-1)...(D-n+1)Y(u) \qquad (2)$$

در بالا ثابت کردیم که این فرمول به ازای $n=2$ و $n=1$ برقرار است. اینک فرض می‌کنیم که این فرمول به ازای $n=k$ برقرار باشد و درستی آن را برای $n=k+1$ ثابت می‌کنیم. بنا بر فرض استقراء داریم

$$x^{k}D^{k}y(x)=D(D-1)...(D-K+1)Y(u)$$

پس،

$$D^{k}y(x)=\frac{1}{x^{k}}D(D-1)....(D-K+1)Y(u)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف این رابطه نسبت به x و با استفاده از قاعده‌ی زنجیری، خواهیم داشت:

$$D^{k+1}y(x)=-\frac{k}{x^{k+1}}[D(D-1)...(D-k+1)]\,y(u)$$
$$+\frac{1}{x^k}\frac{d}{dx}([D(D-1)...(D-k+1)]Y(u))$$

$$=-\frac{k}{x^{k+1}}[D(D-1)...(D-k+1)]Y(u)+\frac{1}{x^k}.\frac{d}{du}\left(\left[D(D-1)...(D-k+1).\frac{du}{dx}\right]\right)$$

با قرار دادن مقدار $\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$ و ضرب کردن فرمول بالا در x^{k+1} به دست می‌آوریم:

$$x^{k+1}D^{k+1}y(x)=-k[D(D-1)....(D-k+1)]\,Y(u)$$
$$+D[D(D-1)....(D-k+1)]Y(u)$$

با فاکتورگیری عبارت مشترک $D(D-1)....(D-k+1)$ از عبارت بالا، خواهیم داشت:

$$x^{k+1}D^{k+1}y(x)=[D(D-1)....(D-k+1)](D-k)\,Y(u)$$
$$=D(D-1)....(D-k+1)(D-k)\,Y(u)$$

که درستی فرمول (۲) را به ازای $n=k+1$ ثابت می‌کند.

با استفاده از فرمول (۲) مشاهده می‌کنیم که معادله‌ی (۱) به معادله‌ی

$$(b_n[D(D-1)...(D-n+1)+b_{n-1}[D(D-1)....(D-n+2)]$$
$$+...+b_2D(D-1)+b_1D+b_0)\,Y(u)=0$$

تبدیل می‌شود، که معادله دیفرانسیلی با ضرایب ثابت برحسب $D=\frac{d}{du}$ است.

یادآور می‌شویم که در حالت خاص، $n=2$ معادله‌ی (۱) به صورت

$$b_2x^2D^2y+b_1xDy+b_0y=0\quad,\quad x\in(0,\infty)$$

در می‌آید و با تغییر متغیر $u=\operatorname{Ln}x$ و با استفاده از فرمول (۲)، داریم:

$$x^2D^2y=D(D-1)\,Y(u)$$

$$xDy = DY(u)$$

در نتیجه معادله به صورت

$$b_2\left[D(D-1)Y(u)\right] + b_1 DY(u) + b_0 Y(u) = 0$$

یا

$$b_2 Y''(u) + \left[b_1 - b_2\right]Y'(u) + b_0 Y(u) = 0$$

در می‌آید. با فرض $a_2 = b_2$، $a_1 = b_1 - b_2$، $a_0 = b_0$، خواهیم داشت:

$$a_2 Y''(u) + a_1 Y'(u) + a_0 Y(u) = 0$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت است.

۳-۷-۳ مثال: مسأله با مقدار اولیه‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0 \qquad x \in (0,\infty)$$
$$y(1) = 1 \qquad , \qquad y'(1) = 0$$

حل: با به کار بردن تغییر متغیر $u = \ln x$ و فرمول (۲)، معادله دیفرانسیل داده شده به صورت

$$D(D-1)Y + 2DY - 6Y = 0$$

یا

$$Y'' + Y' - 6Y = 0 \qquad (3)$$

در می‌آید. معادله کمکی وابسته به معادله‌ی (۳) عبارت است از:

$$p(r) = r^2 + r - 6 = 0$$

و دارای ریشه‌های $r_1 = 2$ و $r_2 = -3$ است. بنابراین جواب عمومی (۳) به صورت $Y(u) = c_1 e^{2u} + c_2 e^{-3u}$ است. در نتیجه جواب عمومی معادله‌ی اصلی بر بازه‌ی $(0,\infty)$ با قرار دادن $u = \ln x$ در معادله‌ی بالا به دست می‌آید. داریم

$$Y = c_1 e^{2\ln x} + c_2 e^{-3\ln x}$$

یا

$$y = c_1 e^{\operatorname{Ln} x^{2}} + c_2 e^{\operatorname{Ln} x^{-3}}$$

پس

$$y = c_1 x^{2} + c_2 x^{-3}$$

جواب عمومی معادله‌ی اصلی است. با مشتق‌گیری از این جواب به دست می‌آوریم:

$$y' = 2c_1 x - 3c_2 x^{-4}$$

با قرار دادن شرایط $y(1) = 1$ و $y'(1) = 0$ در y و y'، خواهیم داشت:

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$2c_1 + 3c_2 = 0$$

با حل این دستگاه معادلات نتیجه می‌گیریم که

$$c_1 = \frac{3}{5} \ , \ c_2 = \frac{2}{5}$$

پس، جواب مسأله با مقدار اولیه عبارت است از:

$$y(x) = \frac{3}{5}x^{2} + \frac{2}{5}x^{-3}$$

۳-۷-٤ تمرین: جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را به ازای $x \in (0,\infty)$، پیدا کنید.

$$x^{3}y''' + 4x^{2}y'' - 8xy' + 8y = 0$$

۳-۷-۵: معادله‌ی (۱) را می‌توانیم مستقیماً با کوشش در یافتن جواب‌هایی به صورت $Y = x^{r}$ بدون هیچگونه تغییر متغیری حل کنیم. در می‌یابیم که

$$D^{k} X^{r} = r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)x^{r-k}$$

و

$$x^{k}D^{k}x^{r} = r(r-1)(r-2)\ldots(r-k+1)x^{r}$$

با قرار دادن در معادله‌ی (۱) به دست می‌آوریم

$$Ly=\left[b_n r(r-1)...(r-n+1)+b_{n-1}r(r-1)...(r-n+2)+...+b_1 r+b_n\right]x^r=0$$

یا

$$Ly=Q(r)x^r=0$$

که در آن،

$$Q(r)=b_n r(r-1)...(r-n+1)+b_{n-1}r(r-1)...(r-n+2)+...+b_1 r+b_n$$

اگر r_1 یک صفر حقیقی از Q باشد که k بار تکرار می‌شود، توابع

$$x^{r_1}(\mathrm{Ln}\,x)^j \qquad 0\le j\le k-1 \tag{4}$$

k جواب مستقل معادله هستند (تمرین ٦ بخش [۳-۵-۹] را ببینید.) اگر $a+ib$ و $a-ib$ صفرهایی از Q باشند که k بار تکرار می‌شوند، در این صورت توابع

$$x^a(\mathrm{Ln}\,x)^j\cos(b\,\mathrm{Ln}\,x),\ x^a(\mathrm{Ln}\,x)^j\sin(b\,\mathrm{Ln}\,x),\quad 0\le j\le k-1 \tag{5}$$

$2k$ جواب مستقل خطی از معادله است.

۳-۷-٦ تمرین: با روش بیان شده در ۳-۷-۵ معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x^2y''-5xy'+13y=0$$

۳-۷-۷ تمرین‌های بخش ۳-۷

در تمرین‌های ۱ تا ۵، به ازای x های متعلق به بازه‌ی $(0,\infty)$، جواب عمومی معادله را پیدا کنید.

۱. $x^2y''+xy'-p^2y=0$، که در آن p عددی ثابت است.

۲. $2x^2y''+xy'-y=0$

۳. $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$

۴. $x^2y''+xy'+9y=0$

۵. $x^4y^{(4)}+6x^3y'''+7x^2y''+xy'-y=0$

در تمرین‌های ٦ و ٧، جواب مسأله با مقدار اولیه را بر بازه‌ی $(0,\infty)$ پیدا کنید.

٦. $x^2y''-3xy'+13y=0\ ,\ \ y(1)=-1\ ,\ \ y'(1)=1$

٧. $x^2y''+xy'+4y=0\ ,\ \ y(1)=1\ ,\ \ y'(1)=4$

٨. نشان دهید که تغییر متغیر $t=ax+b$ معادله‌ی

$$b_2(ax+b)^2y''+b_1(ax+b)y'+b_0y=0$$

را به معادله‌ی کوشی ـ اویلر تبدیل می‌کند.

٩. با استفاده از نتیجه‌ی تمرین ٨، جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

(الف) $(x-3)^2y''+3(x-3)y'+y=0 \quad , \qquad x>3$

(ب) $(x-1)^2y''-4(x-1)y'-14y=0 \quad , \qquad x>1$

۳-۸ معادلات غیرهمگن

معادله‌ی خطی

$$Ly=F \tag{1}$$

را که در آن $L=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\dots+a_1(x)D+a_0(x)$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم توابع $a_i(x)$ ها بر بازه‌ی I پیوسته بوده و $a_n(x)$ بر بازه‌ی I هرگز صفر نشود.

اگر F تابع صفر نباشد، معادله‌ی (۱) را یک **معادله دیفرانسیل غیرهمگن** می‌نامیم.

همیشه معادله همگنی به صورت

$$Ly=0 \tag{2}$$

وابسته به معادله‌ی غیرهمگن (۱) وجود دارد.

۳-۸-۱ قضیه: فرض می‌کنیم توابع $y_1,y_2,\dots,y_n$ و n جواب مستقل خطی از معادله‌ی همگن (۲) بر بازه‌ی I و y_p یک جواب خصوصی از معادله‌ی غیرهمگن (۱) بر همین بازه باشد. در این صورت، جواب عمومی معادله‌ی غیرهمگن (۱) عبارت است از:

$$c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n+y_p \qquad (۳)$$

که در آن $c_1,c_2,\dots,c_n$ اعداد ثابت دلخواه هستند.

اثبات: نخست نشان می‌دهیم که هر جواب به صورت (۳)، جوابی از معادله‌ی (۱) است. بنا به ویژگی‌های عملگر، داریم

$$L(c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n+y_p) \qquad (۴)$$
$$=c_1Ly_1+c_2Ly_2+\dots+c_nLy_n+Ly_p$$

چون توابع $y_1,y_2,\dots,y_n$ جواب‌هایی از معادله‌ی همگن (۲) و y_p جوابی خصوصی از معادله‌ی (۱) است، پس

$$Ly_1=Ly_2=\dots=Ly_n=0 \quad , \quad Ly_p=F$$

از این رو (۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$L(c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n+y_p)=0+0+\dots+0+F=F$$

و این رابطه‌ی خواسته شده است. اینک ثابت می‌کنیم که هر جواب معادله‌ی (۱)، مانند y، را می‌توان به صورت (۳) نوشت. چون y_p و y جواب‌هایی از معادله‌ی (۱) می‌باشند، پس

$$Ly_p=F\ ,\ Ly=F$$

بنابراین،

$$L(Y-Y_p)=LY-LY_p=F-F=0$$

این رو، $y-y_p$ جوابی از معادله‌ی همگن $Ly=0$ است. در نتیجه بنا بر قضیه‌ی (۳-۲-۵) $y-y_p$ باید به صورت

$$y-y_p=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n$$

$$y=c_1y_1+c_2y_2+\dots+c_ny_n+y_p$$

باشد. که این همان حکم خواسته شده است.

۳-۸-۲ مثال: معادله‌ی دیفرانسیل $y''-2y'+y=3e^{-x}$ را در نظر بگیرید. تحقیق کنید که $y_p=e^{-x}$ یک جواب خصوصی این معادله است. سپس جواب عمومی آن را پیدا کنید.

حل: معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$Ly=(D^2-2D+1)y=3e^{-x}$$

اینک، $y_p=3e^{-x}$ را در معادله قرار می‌دهیم. داریم

$$L(e^{-x})=(D^2-2D+1)e^{-x}$$

$$=e^{-x}+2e^{-x}+e^{-x}=3e^{-x}$$

از این رو، $y_p=3e^{-x}$ یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیرهمگن است. بنا به قضیه‌ی (۸-۳-۱) جواب عمومی معادله‌ی غیرهمگن داده شده برابر با جواب عمومی معادله‌ی همگن به اضافه‌ی این جواب خصوصی است. معادله‌ی همگن $(D^2-2D+1)\ y=0$ را در نظر می‌گیریم. معادله‌ی کمکی این معادله‌ی همگن عبارت است از:

$$P(r)=r^2-2r+1=0$$
$$=(r-1)^2=0$$

پس، ۱ ریشه‌ی معادله‌ی کمکی است که دوبار تکرار می‌شود. از این رو جواب عمومی معادله‌ی همگن بنا بر مطالب بخش گذشته برابر است با

$$Y(x)=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$$

بنابراین، جواب عمومی غیرهمگن به صورت $Y(x)=c_1e^{x}+c_2xe^{x}+e^{-x}$ است.

۳-۸-۳ تمرین: معادله دیفرانسیل غیرهمگن $P(D)y=ce^{ax}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که اگر $P(a)\neq 0$ آنگاه معادله دیفرانسیل دارای جوابی به صورت

$Y = A e^{ax}$ است، که در این حالت $Y = \frac{c e^{ac}}{P(a)}$، یک جواب خصوصی از معادله‌ی غیرهمگن باشد.

۳-۸-۴ تمرین: جواب عمومی هر یک از معادلات دیفرانسیل غیرهمگن زیر را پیدا کنید.

(الف) $y'' - ۳y' + ۲y = ٤e^{۳x}$

(ب) $(D+۱)(D+۲)(D+۳)y = ٦e^{-٤x}$

۳-۸-۵ قضیه: اگر y_p, z_p به ترتیب جواب‌های خصوصی معادلات $Ly = f, Ly = g$ باشند، آنگاه $y_p + z_p$ یک جواب خصوصی معادله‌ی $Ly = f + g$ است.

اثبات: چون $Ly_p = f, Lz_p = g$، پس

$$L(y_p + z_p) = Ly_p + Lz_p = f + g$$

۳-۸-٦ تمرین: جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل $y'' + ۳y' = ٤e^{-x} - ۲e^{-۲x}$ را به دست آورید.

۳-۸-۷ روش ضرایب نامعین: اینک روشی را بیان می‌کنیم که به یافتن یک جواب خصوصی معادله‌ی غیرهمگن با ضرایب ثابت

$$P(D)y = (a_n D^n + a_{n-۱} D^{n-۱} + \ldots + a_۱ D + a_۰)y = F \qquad (۵)$$

وقتی که F ترکیب خطی از توابع

$$x^j,\ x^j e^{cx},\ x^j e^{ax}\sin bx,\ x^j e^{ax}\cos bx \qquad (٦)$$

باشد، منجر می‌شود. در واقع، بنا به قضیه‌ی ۳-۸-۵، می‌توان توجه خود را به حالتی که F تنها مضرب ثابتی از توابع (٦) است، معطوف داشت. برای نمونه، برای پیدا کردن یک جواب خصوصی معادله‌ی

$$Ly = e^x \cos ۲x - ۱۰x^۳ e^x \qquad (۷)$$

نخست به ترتیب جواب‌های خصوصی z_p , y_p، از معادلات

$$Ly = e^x \cos ۲x \qquad\qquad Ly = -۱۰x^۳ e^x$$

را به دست می‌آوریم. در نتیجه بنا بر قضیه‌ی ۳-۸-۵، $y_p + z_p$ یک جواب خصوصی معادله‌ی (۷) خواهد بود.

بنا به قضیه‌ی (۳-۵-۳)، اگر $W = u + iv$ یک جواب خصوصی مختلط از معادله‌ی $Ly = Ax^j e^{(a+bi)x}$ باشد آنگاه u و v به ترتیب جواب‌های خصوصی معادلات $Ly = Ae^{ax}\sin bx$ و $Ly = Ax^j e^{ax}\cos bx$ می‌باشند.

معادله‌ی مرتبه‌ی n ام با ضرایب ثابت به صورت $P(D)y = Ax^j e^{cx}$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که ثابت c (که ممکن است مختلط یا صفر باشد) ریشه‌ای از معادله‌ی کمکی $(P(r) = ۰)$ نباشد. پس، همیشه یک چند جمله‌ای عملگر $Q(D)$ با ضرایب حقیقی وجود دارد که

$$Q(D)F = ۰ \qquad (۸)$$

در این صورت عملگر $Q(D)$ و F را پوچ می‌کند. برای مثال، اگر c یک عدد حقیقی باشد، می‌توان

$$Q(D) = (D-c)^{j+۱}$$

و اگر $c = a + ib$ یک عدد مختلط باشد، می‌توان

$$\begin{aligned} Q(D) &= \left[(D-\overline{c})(D-c)\right]^{j+۱} \\ &= \left[(D-a+ib)(D-a-ib)\right]^{j+۱} \\ &= \left[(D-a)^۲ + b^۲\right]^{j+۱} \end{aligned}$$

را انتخاب کرد. توجه می‌کنیم با این انتخاب‌ها $Q(D)$ از کمترین مرتبه‌ی ممکن است.

فرض کنید مرتبه‌ی $Q(D)$ و m باشد. اگر $Q(D)$ را در دو طرف معادله‌ی (۵) عمل دهیم، مشاهده می‌کنیم که هر جواب معادله‌ی (۵) جوابی از معادله‌ی همگن

$$Q(D)p(D)y = ۰ \qquad (۹)$$

است. توجه کنید لزومی دارد که هر جواب معادله‌ی (۹) جوابی از معادله‌ی (۵) باشد.

مرتبه‌ی این معادله $m+n$ است. هر جواب معادله‌ی

$$p(D)y=0 \qquad (10)$$

جوابی از معادله‌ی (۹) است، ولی معادله‌ی اخیر دارای جواب‌هایی اضافی نیز هست. فرض می‌کنیم که $y_1, y_2, ..., y_n$، n جواب مستقل خطی از معادله‌ی (۱۰) و $Z_1, Z_2, ..., Z_n$، m جواب مستقل خطی از معادله‌ی $Q(D)y=0$ باشند. پس، جواب عمومی معادله‌ی (۹) عبارت است از:

$$A_1y_1+A_2y_2+...+A_ny_n+B_1z_1+B_2z_2+...+B_mz_m$$

که در آن A_iها و B_i ها ثابت‌های دلخواه هستند. اینک ضرایب A_iها و B_i ها را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$P(D)(A_1y_1+A_2y_2+...+A_ny_n+\beta_1z_1+\beta_2z_2+...+B_mz_m)=F$$

چون $p(D)(A_1y_1+A_2y_2+...+A_ny_n)=0$ پس ضرایب B_i ها را به قسمی پیدا می‌کنیم که

$$p(D)(B_1z_1+B_2z_2+...+B_mz_m)=F$$

روش بالا را برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله‌ی

$$P(D)Y=Ax^je^{cx} \qquad (11)$$

به صورت زیر خلاصه می‌کنیم: نخست چند جمله‌ای عملگر $Q(D)$ را به قسمی انتخاب می‌کنیم که

$$Q(D)(x^je^{cx})=0$$

در این صورت، چون c جوابی از معادله‌ی کمکی $Q(r)=0$ است که $j+1$ بار تکرار می‌شود، پس جواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$y_p(x)=(B_0+B_1x+...+B_jx^j)e^{cx} \qquad (12)$$

و آن را جواب آزمایشی معادله‌ی (۱۱) می‌نامیم. و ثابت‌های B_i ها را به قسمی انتخاب می‌کنیم که y_p یک جواب خصوصی از (۱۱) گردد. متذکر می‌شویم که در این حالت فرض کرده‌ایم که c جوابی از معادله‌ی کمکی $P(r)$ نباشد.

۳-۸-۸ تذکر: اگر c ریشه‌ای از معادله‌ی کمکی $P(r)=0$ باشد، که k بار تکرار می‌شود، آنگاه جواب آزمایشی به صورت

$$y_p(x)=x^k(B_0+B_1x+\dots+B_jx^j)e^{cx} \qquad (13)$$

در می‌آید.

۳-۸-۹ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+4y'+4y=4x^2+6e^x$ را پیدا کنید.

حل: نخست جواب عمومی معادله‌ی همگن وابسته به آن، یعنی

$$y''+4y'+4y=0$$
$$(D^2+4D+4)y=0$$

را پیدا می‌کنیم. معادله‌ی کمکی $P(r)=r^2+4r+4=0$ را در نظر می‌گیریم. به آسانی مشاهده می‌کنیم که $r=-2$ ریشه‌ای از این معادله است که دو بار تکرار می‌شود. پس جواب عمومی معادله‌ی همگن برابر است با

$$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$$

اینک، با استفاده از روش ضرایب نامعین، جواب خصوصی از معادله‌ی غیرهمگن را به دست می‌آوریم. بنا به ۳-۸-۷ معادله را می‌توان به صورت دو معادله‌ی

$$(D^2+4D+4)y=4x^2e^{0x} \qquad (14)$$

و

$$(D^2+4D+4)y=6e^x \qquad (15)$$

در نظر گرفت. جواب خصوصی معادله‌ی غیرهمگن داده شده برابر است با مجموع جواب‌های خصوصی (۱٤) و (۱۵). چون صفر و یک، ریشه‌های معادله‌ی همگن نمی‌باشند، پس بنابه(۱۲)، جواب‌های آزمایشی (۱٤) و (۱۵) به ترتیب عبارتند از:

$$y_p=(A_0+A_1x+A_2x^2)e^{0x} \quad , \quad z_p=Ae^x$$

با قرار دادن y_p در معادله‌ی (۱٤) خواهیم داشت:

$$(D^2+4D+4)\left[A_0+A_1x+A_2x^2\right]=4x^2$$

$$2A_2+4A_1+2A_2x+4A_0+4A_1x+4A_2x^2=4x^2$$

$$(2A_2+4A_1+4A_0)+(2A_2+4A_1)x+4A_2x^2=4x^2$$

چون این رابطه باید به ازای هر x برقرار باشد، خواهیم داشت:

$$2A_2+4A_1+4A_0=0$$
$$2A_2+4A_1=0$$
$$4A_2=4$$

با حل این دستگاه معادلات، به دست می‌آوریم

$$A_2=1 \quad , \qquad A_1=-2 \qquad , \qquad A_0=\frac{3}{2}$$

از این رو،

$$y_p=\frac{3}{2}-2x+x^2$$

یک جواب خصوصی از معادله‌ی (۱۴) است. به همین نحو $Z_p=Ae^x$ را در معادله‌ی (۱۵) قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$(D^2+4D+4)(Ae^x)=6e^x$$
$$Ae^x+4Ae^x+4Ae^x=6e^x$$
$$9Ae^x=6e^x$$

از این رو،

$$A=\frac{2}{3}$$

بنابراین

$$z_p=\frac{2}{3}e^x$$

یک جواب خصوصی معادله‌ی (۱۵) است. در نتیجه جواب عمومی معادله‌ی غیرهمگن داده شده برابر است با

$$y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}+x^2-2x+\frac{3}{2}+\frac{2}{3}e^x$$

۳-۸-۱۰ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+4y'+4y=3xe^{-2x}$ را پیدا کنید.

حل: نخست جواب عمومی معادله‌ی همگن $(D^2+4D+4)y=0$ را پیدا می‌کنیم. معادله‌ی کمکی این معادله عبارت است از:

$$p(r)=r^2+4r+4=0$$
$$=(r+2)^2=0$$

پس، $r=-2$ ریشه‌ای از معادله‌ی کمکی است که دوبار تکرار می‌شود. بنابراین، جواب عمومی معادله همگن وابسته به صورت $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$ است. در اینجا، چون ۲-، دوبار ریشه‌ی معادله‌ی کمکی است. پس بنا به تذکر ۳-۸-۸ جواب آزمایشی به صورت

$$y_p=x^2(A_0+A_1x)e^{-2x}$$
$$=(A_0x^2+A_1x^3)e^{-2x}$$

در می‌آید. اینک مشتق اول و دوم y_p را حساب می‌کنیم.

$$y'_p=(2A_0x+3A_1x^2)e^{-2x}-2(A_0x^2+A_1x^3)e^{-2x}$$

یا

$$y'_p=-2A_1x^3e^{-2x}+3A_1x^2e^{-2x}-2A_0x^2e^{-2x}+2A_0xe^{-2x}$$

و

$$y''_p=4A_1x^3e^{-2x}-6A_1x^2e^{-2x}+6A_1xe^{-2x}-6A_1x^2e^{-2x}$$
$$-4A_0xe^{-2x}+4A_0x^2e^{-2x}+2A_0e^{-2x}-4A_0xe^{-2x}$$

یا

$$y''_p=4A_1x^3e^{-2x}-12A_1x^2e^{-2x}$$
$$+6A_1xe^{-2x}+4A_0x^2e^{-2x}$$
$$-8A_0xe^{-2x}+2A_0x^2e^{-2x}$$

با قرار دادن y_p در معادله دیفرانسیل اصلی، به دست می‌آوریم

$$6A_1xe^{-2x}+2A_0e^{-2x}=3xe^{-2x}$$

چون این رابطه باید به ازای هر x برقرار باشد، پس

$$6A_1 = 3 \qquad , \qquad 2A_0 = 0$$

بنابراین

$$A_1 = \frac{1}{2} \qquad , \qquad A_0 = 0$$

با قرار دادن این مقادیر در y_p، به دست می‌آوریم

$$y_p = \frac{1}{2}x^3 e^{-2x}$$

در نتیجه، جواب عمومی معادله‌ی غیرهمگن، برابر است با:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2}x^3 e^{-2x}$$

۳-۸-۱۱ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ را به دست آورید.

حل: نخست معادله‌ی همگن $y'' - 3y' + 2y = 0$ را در نظر می‌گیریم. به آسانی می‌توان نشان داد (چرا؟) که جواب عمومی معادله‌ی همگن عبارت است از:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x}$$

چون $\sin x$ قسمت موهومی تابع مختلط e^{ix} است، پس قسمت موهومی یک جواب خصوصی معادله‌ی

$$y'' - 3y' + 2y = e^{ix} \qquad (16)$$

و یک جواب خصوصی معادله‌ی اصلی است. چون i یک ریشه‌ی معادله‌ی کمکی نمی‌باشد، پس بنا به (۱۲) یک جواب آزمایشی برای (۱۶) به صورت $y_p = Ae^{ix}$ است. با قرار دادن این جواب آزمایشی در معادله‌ی (۱۶) به دست می‌آوریم:

$$y'_p = Aie^{ix}$$

$$y''_p = -Ae^{ix}$$

$$-Ae^{ix} - 3(Aie^{ix}) + 2(Ae^{ix}) = e^{ix}$$

یا

$$A(۱-۳i)e^{ix}=e^{ix}$$

بنابراین

$$A=\frac{۱}{۱-۳i}$$

با ضرب کردن صورت و مخرج کسر در مزدوج مخرج، خواهیم داشت:

$$A=\frac{۱}{۱-۳i}.\frac{۱+۳i}{۱+۳i}=\frac{۱+۳i}{۱۰}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}i$$

با قرار دادن این مقدار در جواب آزمایشی به دست می‌آوریم:

$$y_p=\left(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}\right)e^{ix}$$

$$=\left(\frac{۱}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰}i\right)(\cos x+i\sin\theta)$$

$$=\frac{۱}{۱۰}(\cos\theta-۳\sin\theta)+\frac{i}{۱۰}(۳\cos\theta+\sin\theta)$$

همانطور که قبلاً متذکر شدیم قسمت موهومی این جواب، یعنی

$$\frac{۱}{۱۰}(۳\cos\theta+\sin\theta)$$

یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل غیرهمگن داده شده است. پس جواب عمومی معادله‌ی اصلی عبارت است از:

$$y=c_۱e^{x}+c_۲e^{۲x}+\frac{۱}{۱۰}(۳\cos\theta+\sin\theta)$$

۳-۸-۱۲ تمرین: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+y=٤x\sin x$ را پیدا کنید.

۳-۸-۱۳ مثال: معادله دیفرانسیل $x>۰$ ، $x^۲y''+xy'-y=۹x^۲\operatorname{Ln}x$ را حل کنید.

حل: روشن است که معادله دیفرانسیل داده شده یک معادله‌ی کوشی ـ اویلر می‌باشد، پس با به کار بردن تغییر متغیر $u=\operatorname{Ln}x$، خواهیم داشت:

$$x^۲y''=D(D-۱)Y(u)$$

$$xy'=DY(u)$$

و

$$x = e^{u} \quad , \quad x^{۲} = e^{۲u}$$

در نتیجه، معادله‌ی داده شده به معادله‌ی

$$[D(D-۱)+D-۱]Y(u) = ۹ue^{۲u} \qquad (*)$$

یا

$$Y''(u) - Y(u) = ۹ue^{۲u} \qquad (۱۷)$$

تبدیل می‌شود. اینک جواب عمومی معادله‌ی همگن

$$(D^{۲}-۱)Y(u) = ۰$$

را پیدا می‌کنیم. معادله‌ی کمکی این معادله عبارت است از:

$$P(r) = r^{۲} - ۱ = ۰$$

که $r_۱ = ۱$, $r_۲ = -۱$ ریشه‌های آن می‌باشند. در نتیجه جواب عمومی معادله‌ی همگن به صورت $Y(u) = c_۱e^{u} + c_۲e^{-u}$ است. چون ۲ ریشه‌ی معادله‌ی کمکی نیست، پس جواب آزمایشی معادله‌ی (*) بنا به فرمول (۱۲) به صورت

$$y_p = (A_۰ + A_۱u)e^{۲u}$$

است. با قرار دادن y_p در معادله‌ی (۱۷)، به دست می‌آوریم

$$y_p' = A_۱e^{۲u} + ۲(A_۰ + A_۱u)e^{۲u}$$

$$y_p'' = ۲A_۱e^{۲u} + ۲A_۱e^{۲u} + ٤(A_۰ + A_۱u)e^{۲u}$$

$$٤A_۱e^{۲u} + ٤(A_۰ + A_۱u)e^{۲u} - (A_۰ + A_۱u)e^{۲u} = ۹ue^{۲u}$$

یا

$$(٤A_۱ + ۳A_۰)e^{۲u} + ۳A_۱ue^{۲u} = ۹ue^{۲u}$$

چون این معادله به ازای هر u برقرار است، پس

$$٤A_۱ + ۳A_۰ = ۰$$

$$۳A_۱ = ۹$$

در نتیجه،

$$A_1 = 3 \quad , \quad A_0 = -4$$

پس، یک جواب خصوصی از معادله‌ی (۱۷) برابر است با: $y_p = (3u-4)e^{2u}$
بنابراین، جواب عمومی معادله‌ی (۱۷) به صورت $Y(u) = c_1 e^{u} + c_2 e^{-u} + (3u-4)e^{2u}$ در می‌آید. با قرار دادن $u = \operatorname{Ln} x$ جواب عمومی معادله‌ی اصلی به صورت $y(x) = c_1 x + c_2 x^{-1} + (3\operatorname{Ln} x - 4)x^2$ به دست می‌آید.

۳-۸-۱٤ تمرین‌های بخش ۳-۸

جواب عمومی هر یک از معادلات دیفرانسیلی زیر را پیدا کنید.

۱. $Y''' - 6Y'' + 11Y' - 6Y = e^{x}$

۲. $y'' + 3y' + 2y = 4$

۳. $y'' - 3y' = 2e^{2x}\cos x$

٤. $y'' + 3y' + 2y = 8 + 6e^{x} + 2\sin x$

۵. $y'' + 4y = x\sin 2x$

٦. $y'' + y' - 6y = x + e^{2x}$

۷. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^{x}$

۸. $y'' - y = \sin^2 x$

جواب هر یک از مسائل با مقادیر اولیه زیر را پیدا کنید.

۹. $y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x}$

$y(0) = 0 \qquad y'(0) = -1 \qquad y''(0) = 2$

۱۰. $y'' - 5y' + 6y = (2x-3)e^{x}$

$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 3$

۱۱. $y'' + 9y = 8\cos x$

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

۱۲. معادله‌ی دیفرانسیل $P(D)y = Ae^{cx}$ را در نظر بگیرید، که در آن $P(D)$ یک چند جمله‌ای عملگر از درجه‌ی n است. اگر عدد c یک ریشه‌ی معادله‌ی کمکی، $P(r)=0$ باشد که m بار تکرار می‌شود، آنگاه $P(r)=Q(r)(r-c)^m$، که در آن $Q(r)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n-m$ است و $Q(c)\neq 0$. نشان دهید که در این حالت معادله دیفرانسیل داده شده دارای یک جواب خصوصی به صورت

$$y(x)=\frac{A}{m!Q(c)}x^m e^{cx}$$

است.

۱۳. با استفاده از تمرین ۱۲ جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

(الف) $y''+4y=4\cos x$

(ب) $(D+1)(D-2)^3 y=6e^{2x}$

۱۴. به ازای x های متعلق به بازه‌ی $(0,\infty)$، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

(الف) $x^2y''-6y=4x^2$

(ب) $x^2y''-xy'+y=6x^2 \operatorname{Ln} x$

۳-۹ روش تغییر پارامترها

روش ضرایب نامعین که در بخش گذشته مورد بحث قرار گرفت، این امکان را به ما می‌دهد تا یک جواب خصوصی از معادله‌ی $Ly=F$ را تنها در حالت خاصی که L عملگری با ضرایب ثابت و F تابعی به صورت $F=x^j e^{cx}$ باشد، پیدا کنیم. در این بخش روش تغییر پارامترها را بررسی می‌کنیم. این روش به ما امکان می‌دهد تا یک جواب خصوصی معادله‌ی $Ly=F$ را در حالت کلی، یعنی برای هر تابع F، هر عملگر L، مشروط بر اینکه جواب عمومی معادله‌ی همگن $Ly=0$ در دسترس باشد، به دست آوریم. یادآور می‌شویم که استفاده از روش ضرایب نامعین در صورت امکان آسان‌تر است.

۳-۹-۱ قضیه: معادله دیفرانسیل غیرهمگن

$$P(D)y=F(x) \qquad (1)$$

را که در آن

$$P(D)=a_n(x)D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\dots+a_1(x)D+a_0(x)$$

و ضرایب $a_i(x)$ ها و تابع دلخواه $F(x)$ بر بازه‌ی I پیوسته و به ازای هر x متعلق به I، $a_n(x)\neq 0$، در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که توابع $u_1,u_2,\dots,u_n$، n جواب مستقل خطی از معادله‌ی همگن $Ly=0$، بر I باشند. اگر توابع c_i ها چنان باشند که مشتق‌های آنها، یعنی c'_i، در دستگاه معادلات

$$c'_1u_1+c'_2u_2+\dots+c'_nu_n=0$$

$$c'_1u'_1+c'_2u'_2+\dots+c'_nu'_n=0$$

$$c'_1u_1^{(n-2)}+c'_2u_2^{(n-2)}+\dots+c'_nu_n^{(n-2)}=0$$

$$c'_1u_1^{(n-1)}+c'_2u_2^{(n-1)}+\dots+c'_nu_n^{(n-1)}=0$$

صدق کنند، آنگاه

$$y_p=c_1u_1+c_2u_2+\dots+c_nu_n$$

یک جواب خصوصی از معادله‌ی غیرهمگن (۱) است.

اثبات: یک جواب خصوصی از معادله‌ی غیرهمگن (۱) را به صورت

$$y_p=c_1(x)u_1+c_2(x)u_2+\dots+c_n(x)u_n \qquad (2)$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا ضرایب $c_1(x),c_2(x),\dots,c_n(x)$ را باید تعیین کنیم. با قرار دادن y_p در معادله‌ی غیرهمگن (۱)، یک شرط به دست می‌آید و $n-1$ شرط دیگر را در جریان مشتق‌گیری از y_p، تحمیل خواهد کرد. با مشتق‌گیری از y_p، به دست می‌آوریم

$$Y'_p=(c_1u'_1+c_2u'_2+\dots+c_nu'_n)+(c'_1u_1+c'_2u_2+\dots+c'_nu_n) \qquad (3)$$

برای ساده‌تر کردن مشتق اول در (۳)، شرط

$$c'_1u_1+c'_2u_2+\dots+c'_nu_n=0 \qquad (4)$$

را تحمیل می‌کنیم. از این رو، مشتق اول به صورت

$$y_p' = c_1 u_1' + c_2 u_2' + \ldots + c_n' u_n \tag{5}$$

در می‌آید. با مشتق‌گیری مجدد از (۵)، خواهیم داشت

$$y_p'' = (c_1' u_1' + c_2' u_2' + \ldots + c_n' u_n') + (c_1 u_1'' + c_2 u_2'' + \ldots + c_n u_n'') \tag{6}$$

اینک، قرار می‌دهیم

$$c_1' u_1' + c_2' u_2' + \ldots + c_n' u_n' = 0 \tag{7}$$

در نتیجه، مشتق دوم به صورت

$$y_p'' = c_1 u_1'' + c_2 u_2'' + \ldots + c_n u_n'' \tag{8}$$

در می‌آید. تا اینجا دو شرط (٤) و (۷) را بر مشتق توابع c_i ها تحمیل کرده‌ایم. این روش را تا مشتق $(n-1)$ام ادامه می‌دهیم. مشتق y_p به صورت

$$y_p^{(n-1)} = (c_1' u_1^{(n-2)} + c_2' u_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' u_n^{(n-2)}) + (c_1 u_1^{(n-1)} + c_2 u_2^{(n-1)} + \ldots + c_n u_n^{(n-1)}) \tag{9}$$

است. اینک شرط زیر را تحمل می‌کنیم.

$$c_1' u_1^{(n-2)} + c_2' u_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' u_n^{(n-2)} = 0$$

پس، مشتق $n-1$ام y_p فرمول (۹)، به صورت

$$y_p^{(n-1)} = c_1 u_1^{(n-1)} + c_2 u_2^{(n-1)} + \ldots + c_n u_n^{(n-1)} \tag{10}$$

در می‌آید.

به این ترتیب تا اینجا $n-1$ شرط زیر را بر c_i' ها تحمیل کرده‌ایم

$$c_1' u_1 + c_2' u_2 + \ldots + c_n' u_n = 0 \tag{11}$$

$$c_1' u_2' + c_2' u_2' + \ldots + c_n' u_n' = 0$$

$$c_1' u_2^{(n-2)} + c_2' u_2^{(n-2)} + \ldots + c_n' u_n^{(n-2)} = 0$$

با مشتق‌گیری از (۱۰)، به دست می‌آوریم:

$$y_p^{(n)} = c_1 u_1^{(n)} + c_2 u_2^{(n)} + \dots + c_n u_n^{(n)} + c_1' u_1^{(n-1)} + c_2' u_2^{(n-1)} + \dots + c_n' u_n^{(n-1)} \qquad (12)$$

از این رو، مشتق kام y_p توسط فرمول

$$y_p^{(k)} = c_1 u_1^{(k)} + c_2 u_2^{(k)} + \dots + c_n u_n^{(k)} \qquad 0 \le k \le n-1 \qquad (13)$$

داده می‌شود. با قرار دادن عبارات (۱۲) و (۱۳) در معادله‌ی دیفرانسیل (۱) شرط n ام بر c_i' ها به دست می‌آید. داریم:

$$\begin{aligned} a_n(x)\Big[& c_1 u_1^{(n)} + c_2 u_2^{(n)} + \dots + c_n u_n^{(n)} \\ & + c_1' u_1^{(n-1)} + c_2' u_2^{(n-1)} + \dots + c_n' u_n^{(n-1)} \Big] \\ & + a_{n-1}(x)\Big[c_1 u_1^{(n-1)} + c_2 u_2^{(n-1)} + \dots + c_n u_n^{(n-1)} \Big] \\ & + \dots + a_1(x)\left[c_1 u_1' + c_2 u_2' + \dots + c_n u_n' \right] \\ & + a_0(x)\left[c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_n u_n \right] = F(x) \end{aligned}$$

با دسته‌بندی جمله‌های مشابه، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & c_1\Big[a_n(x) u_1^{(n)} + a_{n-1}(x) u_1^{(n-1)} + \dots + a_1(x) u_1' + a_0(x) u_1 \Big] \\ & + c_2\Big[a_n(x) u_2^{(n)} + a_{n-1}(x) u_2^{(n-1)} + \dots + a_1(x) u_2' + a_0(x) u_2 \Big] \\ & + \dots + c_n\Big[a_n(x) u_n^{(n)} + a_{n-1}(x) u_n^{(n-1)} + \dots + a_1(x) u_n' + a_0(x) u_n \Big] \\ & + a_n(x)\Big[c_1' u_1^{(n-1)} + c_2' n_2^{(n-1)} + \dots + c_n' u_n^{(n-1)} \Big] = F(x) \end{aligned}$$

چون u_i ها جواب‌های معادله‌ی همگن می‌باشند، پس رابطه‌ی بالا به صورت

$$a_n(x)\Big[c_1' u_1^{(n-1)} + c_2' u_2^{(n-1)} + \dots + c_n' u_n^{(n-1)} \Big] = F(x)$$

یا

$$c'_1 u_1^{(n-1)} + c'_2 u_2^{(n-1)} + \dots + c'_n u_n^{(n-1)} = \frac{F(x)}{a_n(x)} \qquad (14)$$

در می‌آید. از این رو، $n-1$ شرط (۱۱) همراه با شرط (۱٤)، n شرط زیر را بر c'_i ها به دست می‌دهد.

$$c'_1 u_1 + c'_2 u_2 + \dots + c'_n u_n = 0 \qquad (15)$$

$$c'_1 u'_1 + c'_2 u'_2 + \dots + c'_n u'_n = 0$$

$$c'_1 u_1^{(n-2)} + c'_2 u_2^{(n-2)} + \dots + c'_n u_n^{(n-2)} = 0$$

$$c'_1 u_1^{(n-1)} + c'_2 u_2^{(n-1)} + \dots + c'_n u_n^{(n-1)} = \frac{F(x)}{a_n(x)}$$

و دترمینان ضرایب c'_i ها در این دستگاه معادلات همزمان غیرهمگن، یعنی

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ u'_1 & u'_2 & \dots & u'_n \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \dots & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \dots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

برابر با رونسکینی جواب‌های مستقل خطی $u_1, u_2, \dots, u_n$ است. چون رونسکینی مخالف صفر است، پس دستگاه (۱۵) بر I دارای یک جواب یگانه است. به این ترتیب اگر دستگاه (۱۵) نسبت به c'_i ها حل شود با انتگرال‌گیری می‌توان c_i ها را به دست آورد. در نتیجه برای به دست آوردن یک جواب خصوصی از معادله‌ی (۱)، فرض می‌کنیم c'_i ها در شرایط (۱۵) صدق کنند. در این صورت تابع (۲) دارای مشتق‌هایی است که از فرمول‌های (۱۲) و (۱۳) به دست می‌آیند. به این ترتیب ثابت کردیم که (۲) یک جواب خصوصی معادله‌ی (۱) است.

۳-۹-۲ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 2y = \sin e^{-x}$ را پیدا کنید.

حل: توجه کنید در اینجا نمی‌توان جواب خصوصی معادله را از روش ضرایب نامعین به دست آورد. زیرا در اینجا $F = \sin e^{-x}$ به صورت $x^j e^{c_x}$ نیست.

معادله‌ی همگن $y''-3y'+2y=0$ را در نظر می‌گیریم. معادله‌ی کمکی $p(r)=r^2-3r+2=0$ دارای ریشه‌های $r_1=1$ و $r_2=2$ است. در نتیجه جواب عمومی معادله‌ی همگن به صورت $c_1e^x+c_2e^{2x}$ است. برای به دست آوردن جواب خصوصی معادله از روش تغییر پارامتر استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$y_p=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{2x} \tag{16}$$

مشتقات اول c_1, c_2 باید در شرایط (۱۵) صدق کنند. یعنی

$$c_1'(x)e^x+c_2'(x)e^{2x}=0$$

$$c_1(x)e^x+2c_2'(x)e^{2x}=\sin e^{-x}$$

با حل این دستگاه نسبت به $c_1'(x)$ و $c_2'(x)$، به دست می‌آوریم:

$$c_1'=-e^{-x}\sin e^{-x} \quad , \quad c_2'=e^{-2x}\sin e^{-x}$$

بنابراین

$$c_1=\int \sin e^{-x}(-e^{-x})dx$$
$$c_2=\int e^{-2x}\sin e^{-x}\,dx$$

برای محاسبه‌ی انتگرال‌ها، قرار می‌دهیم $u=e^{-x}$. خواهیم داشت:

$$c_1=\int \sin u\,du \quad , \quad c_2=-\int u\sin u\,du$$

برای محاسبه‌ی انتگرال دوم از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$c_1=-\cos u \quad , \quad c_2=-\sin u+u\cos u$$

در نتیجه با قرار دادن $u=e^{-x}$ در روابط بالا، به دست می‌آوریم:

$$c_1=-\cos e^{-x} \quad , \quad c_2=-\sin e^{-x}+e^{-x}\cos e^{-x}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۱۶) یک جواب خصوصی معادله‌ی همگن به دست می‌آید.

$$y_p=-\cos e^{-x}\,e^x+(-\sin e^{-x}+e^{-x}\cos e^{-x})e^{2x}$$
$$=-e^{2x}\sin e^{-x}$$

بنابراین جواب عمومی معادله‌ی غیرهمگن برابر است با:

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}-e^{2x}\sin e^{-x}$$

۳-۹-۳ تمرین: جواب عمومی معادلـه‌ی $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ ، $y''+y=\tan x$ را حـل کنید.

۳-۹-٤ مثال: جواب عـمـومی معادلـه دیفرانسـیل $x^2y''+xy'-y=x^2e^{-x}$ را بـرای xهای متعلق به بازه‌ی $(0,\infty)$ پیدا کنید.

حل: معادله دیفرانسیل داده شده با تغییر متغیر $u=\operatorname{Ln}x$ به معادله‌ی

$$\left[D(D-1)+D-1\right]Y(u)=e^{-e^{u}}e^{2u} \tag{17}$$

تبدیل می‌شود. معادله‌ی همگن وابسته به این معادله، یعنی

$$Y''(u)-Y(u)=0 \tag{18}$$

دارای معادله‌ی کمکی $p(r)=r^2-1=0$ است که در آن $r_1=1$ و $r_2=-1$ ریشه‌های آن هستند. پس جواب عمومی معادله‌ی همگن (۱۸) عبارت است از:

$$y=c_1e^{u}+c_2e^{-u}$$

بنا به روش تغییر پارامترها، مـی‌دانـیم کـه یـک جـواب خصوصـی از معادلـه‌ی غیرهمگن (۱۷) به صورت

$$y_p=c_1(u)e^{u}+c_2(u)e^{-u} \tag{19}$$

است. $c_1(u)$ و $c_2(u)$ باید به قسمی انتخاب شوند که شرایط زیر برقرار باشد.

$$c_1'(u)e^{u}+c_2'(u)e^{-u}=0$$
$$c_1'(u)e^{u}-c_2'(u)e^{-u}=e^{-e^{u}}.e^{2u}$$

با حل این دستگاه نسبت به c_1' و c_2' به دست می‌آوریم

$$c_1'(u)=\frac{1}{2}e^{-e^{u}}.e^{u}\quad,\quad c_2'(u)=-\frac{1}{2}e^{-e^{u}}.e^{3u}$$

با انتگرال‌گیری و با استفاده از تغییر متغیر $t=e^{u}$، خواهیم داشت:

$$c_۱=\frac{۱}{۲}\int e^{-t}\,dt \qquad c_۲=\int -\frac{۱}{۲}e^{-t}\,.\,t^{۲}\,dt$$

برای محاسبه‌ی انتگرال دوم، دوبار از انتگرال‌گیری به روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

$$c_۱=-\frac{۱}{۲}e^{-t} \quad , \quad c_۲=\frac{۱}{۲}t^{۲}e^{-t}+te^{-t}+e^{-t}$$

با قرار دادن $t=e^{u}$ در فرمول‌های $c'_۱$ و $c'_۲$، به دست می‌آوریم

$$c_۱=-\frac{۱}{۲}e^{-e^{u}} \qquad c_۲=e^{-e^{u}}\left[\frac{۱}{۲}e^{۲u}+e^{u}+۱\right]$$

با جانشین کردن این مقادیر در فرمول (۱۹)، یک جواب خصوصی از معادله‌ی (۱۷) به صورت

$$y_p=-\frac{۱}{۲}e^{-e^{u}}\,.\,e^{u}+e^{-e^{u}}\left[\frac{۱}{۲}e^{۲u}+e^{u}+۱\right]e^{-u}$$

یا

$$y_p=e^{-e^{u}}\left[۱+e^{-u}\right]$$

به دست می‌آید. پس جواب عمومی معادله‌ی (۱۷) عبارت است از:

$$y(u)=c_۱e^{u}+c_۲e^{-u}+e^{-e^{u}}\left[۱+e^{-u}\right]$$

با قرار $u=\operatorname{Ln}x$ در این جواب، جواب عمومی معادله‌ی غیرهمگن اصلی به دست می‌آید

$$y=c_۱x+c_۲x^{-۱}+e^{-x}\left[۱+x^{-۱}\right]$$

۳-۹-۵ کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل

معادله دیفرانسیل همگن مرتبه‌ی دوم

$$y''+p(x)y+q(x)y=۰ \qquad (۲۰)$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که ضرایب $p(x)$ و $q(x)$ بر بازه‌ی I پیوسته باشد.

اگر y_1 یک جواب غیربدیهی از معادله‌ی (۲۰) باشد، آنگاه به صورت زیر می‌توان جواب دومی از معادله (۲۰) را که نسبت به y_1 مستقل خطی است، به دست آورد.

فرض می‌کنیم که y_2 جواب دوم معادله، به صورت $y_2 = v(x)y_1$ باشد. اینک $v(x)$ را به قسمی به دست می‌آوریم که y_2 به جوابی از معادله‌ی (۲۰) تبدیل گردد. با قرار دادن y_2 در این معادله به دست می‌آوریم

$$y_2' = v'y_1 + vy_1'$$

$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''$$

از این رو

$$v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'' + p(x)(v'y_1 + vy_1') + q(x)vy_1 = 0$$

این معادله را به صورت

$$v(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + v''y_1 + v'(2y_1' + p(x)y_1) = 0$$

بازنویسی می‌کنیم. چون y_1 یک جواب معادله‌ی همگن (۲۰) است، پس پرانتز اول در طرف چپ این معادله برابر صفر است. در نتیجه

$$v''y_1 + v'(2y_1' + p(x)y_1) = 0$$

با تقسیم کردن دو طرف معادله بر $v'y_1$ به دست می‌آوریم

$$\frac{v''}{v'} + \frac{2y_1'}{y_1} + p(x) = 0$$

یا

$$\frac{dv'}{v'} + \frac{2dy_1}{y_1} = -p(x)dx$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه، خواهیم داشت:

$$\operatorname{Ln} v' + 2\operatorname{Ln} y_1 = -\int p(x)dx$$

یا

$$v'y_1^2 = e^{-\int p(x)dx}$$

با تقسیم کردن دو طرف این معادله بر y_1^2، به دست می‌آوریم

$$v' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}$$

یا

$$dv = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx} dx$$

با انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

$$dv = \frac{1}{Y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}$$

پس جواب دوم معادله‌ی همگن (۲۰) برابر است با

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx} dx \qquad (۲۱)$$

پس از این، می‌توان از این فرمول برای یافتن جواب دوم در صورت معلوم بودن جواب y_1 استفاده کرد.

۳-۹-۶ تمرین: ثابت کنید که جواب دوم y_2 داده شده توسط (۲۱)، با جواب y_1 از معادله‌ی (۲۰) یک مجموعه‌ی مستقل خطی تشکیل می‌دهند.

$$y'' + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\right) y' - y = 0$$

را پیدا کنید.

حل: y_2 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y_2 = y_1 g(x)$$

که در آن

$$g(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx} dx$$

رونسکینی y_1 و y_2 عبارت است از:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} y_1 & y_1 g(x) \\ y_1' & y_1' g(x)+y_1 g'(x) \end{vmatrix}$$
$$=y_1' y_1 g(x)+y_1^2 g'(x)-y_1' y_1 g(x)=y_1^2 g'(x)$$

روشن است که $g'(x)=\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)dx}$. با قرار دادن این مقدار در این رونسکینی، به دست می‌آوریم:

$$W(y_1,y_2)=e^{-\int p(x)dx}$$

که همیشه مخالف صفر است. پس دو جواب، مستقل خطی می‌باشند.

حل: با جستجو کردن متوجه می‌شویم که $y_1=x^2$ یک جواب معادله دیفرانسیل است. از این رو، جواب دوم را می‌توان با استفاده از فرمول (۲۱)، با $y_1=x^2$ به دست آورد.

$$y_2=x^2\int\frac{1}{x^4}e^{-\int\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x}\right)dx}dx$$
$$=x^2\int\frac{1}{x^4}e^{-\frac{x^2}{4}}.e^{\operatorname{Ln}x}dx$$
$$=x^2\int\frac{1}{x^3}e^{-\frac{x^2}{4}}dx$$

توجه کنید که در اینجا محاسبه‌ی انتگرال امکان‌پذیر نیست. پس جواب دوم را به همین شکل در نظر می‌گیریم. از این رو، جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$y=c_1x^2+c_2x^2\int\frac{1}{x^3}e^{-\frac{x}{4}}dx$$

۳-۹-۸ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $xy''+(1-2x)y'+(x-1)y=0$ را که $y_1=e^x$ یک جواب آن است، به دست آورید.

$$c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\,\mathrm{Ln}(\sec x+\tan x)\quad,\quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$$

به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $y=e^x$ یک جواب معادله‌ی همگن داده شده است. برای پیدا کردن جواب دوم از فرمول (۲۱) با $y_1=e^x$ استفاده می‌کنیم.

۳-۹-۹ تمرین: معادله دیفرانسیل از مرتبه‌ی دوم به صورت $xy''+y'+xy=0$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که تابع $j(x)$ (که آن را در فصل ۵ تعریف خواهیم کرد) یک جواب معادله باشد. جواب عمومی معادله دیفرانسیل را پیدا کنید.

۳-۹-۱۰ تمرین‌های بخش ۳-۹

در تمرین‌های ۱ تا ۱۰ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را پیدا کنید.

۱. $y''+y=\sec x$

۲. $y''+y=\sec^3 x$

۳. $y''+2y'+y=e^{-x}\mathrm{Ln}\,x$

٤. $y''-3y'+2y=\cos(e^{-x})$

۵. $y''-3y'+2y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

٦. $y'''+y'=\sec x$

۷. $(x^2-3x+1)y''-(x^2-x-2)y'+(2x-3)y=x(x^2-3x+1)^2$

۸. $y''-2xy'-2Y=0$

[راهنمایی: $y=e^{x^2}$ یک جواب معادله دیفرانسیل است.]

۹. $(2x^2+1)y''-4xy'+4y=0$

[راهنمایی: $y=x$ یک جواب معادله دیفرانسیل است.]

.۱۰ $y'' + xf(x)y' - f(x)y = 0$

[راهنمایی: $y = x$ یک جواب معادله دیفرانسیل است.]

.۱۱

$$xy'' - \frac{(1-2x)}{1-x}y' + \frac{(1-3x+x^2)}{(1-x)}y = (1-x)^2$$

[راهنمایی: $y_1(x) = e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل همگن وابسته به معادله‌ی دیفرانسیل داده شده است.]

۱۲. فرض می‌کنیم F بر بازه‌ی $[0, \infty)$ تعریف شده پیوسته باشد.

(الف) نشان دهید جواب عمومی معادله‌ی $y'' + k^2 y = F(x)$ را می‌توان به صورت

$$Y(x) = A\sin(kx + \alpha) - \frac{1}{k}\int_{x_0}^{x} \sin k(t-x)F(t)\,dt$$

نوشت. در اینجا A و α ثابت‌های دلخواه هستند و x_0 یک ثابت نامنفی است.

(ب) فرض می‌کنیم که اعداد x_1، M و a، $(a > 1)$، موجود باشند، به قسمی که:

$$|F(x)| \le M x^{-a} \qquad x \ge x_1$$

نشان دهید که هر جواب معادله‌ی قسمت (الف) بر بازه‌ی $[0,\infty)$ کراندار است.

۳-۱۰ کاربردهای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم

۳-۱۰-۱ حرکت موزون ساده ـ قانون هوک: فرض می‌کنیم متری به طور عمودی از تکیه‌گاهی مانند شکل (۱- الف) آویزان باشد. اگر l_0 برحسب فوت، طول فنر در حال سکون باشد، هنگامی که فنر به وسیله‌ی نیروی F (که به انتهای آن اثر می‌کند) به اندازه‌ی l، کشیده و یا فشرده شود. بنا بر قانون هوک اندازه‌ی نیرو، وقتی l زیاد بزرگ نباشد، با فاصله‌ی l متناسب است. یعنی

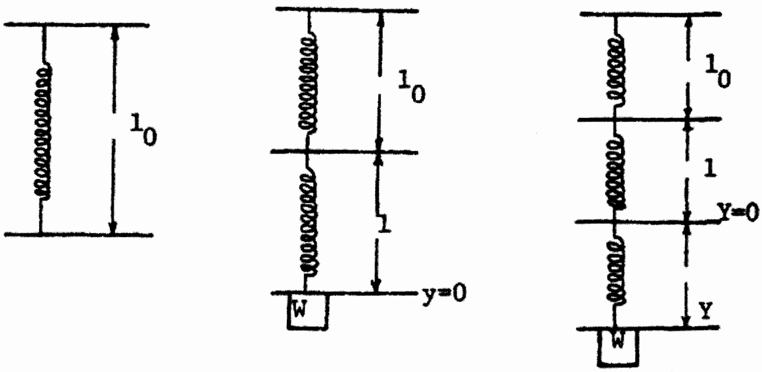
$$F = kl \qquad (1)$$

که در آن $k > 0$، ثابت تناسب است که به **ثابت فنر** موسوم است. نیروی به طرف پائینی که از آویختن وزنه‌ای به وزن w پوند به انتهای فنر ناشی می‌شود، وقتی فنر بر

سطح زمین باشد، برابر است با mg، که در آن m جرم (برحسب اسلاگ) وزنه‌ی آویخته شده و g نیروی ثقل زمین برحسب فوت بر مربع ثانیه می‌باشد. چون فنر در حال تعادل است، نیروی به طرف بالا باید برابر با نیروی به طرف پایین باشد. از این رو بنا بر (۱)

$$kl = mg \tag{۲}$$

فرض می‌کنیم $y=0$ وضعیت تعادل فنر هنگامی باشد، که وزنه‌ای w پوندی به آن آویخته شده است. اگر این فنر با وزنه را به اندازه‌ی y فوت بکشیم (شکل ۱ (پ) را ببینید) آنگاه نیروهای زیر بر فنر اثر می‌کنند.



(الف) (ب) (پ)

شکل (۱)

۱. نیروی ناشی از کشش فنر که به طرف بالا اثر می‌کند. که بنا به قانون هوک در اینجا برابر است با $k(l+y)$.

۲. نیروی ناشی از وزنه‌ی w پوندی که به فنر متصل شده و به طرف پایین اثر می‌کند، که برابر است با mg.

بنا به قانون دوم نیوتن، نیروی خالصی که بر این دستگاه اثر می‌کند برابر است با حاصل ضرب جرم دستگاه در شتاب آن. از این رو، با توجه به اینکه جهت مثبت را به طرف پایین انتخاب کرده‌ایم، داریم

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=mg-k(l+y)mg-kl-ky \qquad (۳)$$

با توجه به (۲)، رابطه‌ی (۳) به صورت زیر در می‌آید.

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky$$

یا

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}y=0 \qquad (٤)$$

اینک، مشاهده می‌کنیم که معادله‌ی (٤) یک معادلـه دیفرانسـیل خطـی مرتبـه دوم است. با توجه به تمرین ۱۱ از تمرین‌های گوناگون ۳-۹، می‌توان ثابت کرد که جـواب عمومی این معادله عبارت است از:

$$y=c\cos\left(\sqrt{k/m}\,t+\delta\right) \qquad (۵)$$
$$y=c\sin\left(\sqrt{k/m}\,t+\delta\right)$$

۳-۱۰-۲ مثال: جسمی به وزن ۵ پوند که به فنر مارپیچی متصل شـده اسـت، آن را بـه اندازه‌ی ٤ اینچ می‌کشد. وقتی فنر به حال سکون در می‌آید، آن را بـه انـدازه‌ی ٦ ایـنچ دیگر کشیده و رها می‌کنیم. معادله‌ی حرکت فنر را پیدا کنید.

حل: چون وزنه‌ی ۵ پوندی فنر را به اندازه‌ی ٤ اینچ یا $\frac{1}{3}$ فوت می‌کشد، بنا به فرمول (۲)، با $mg=5$ و $l=\frac{1}{3}$، خواهیم داشت:

$$\frac{k}{3}=5 \quad , \quad k=15$$

اینک با $g=32$، جرم جسم متصل شده به فنـر، یعنـی m، برابـر اسـت بـا $\frac{5}{32}$.

بنابراین، معادله‌ی حرکت بنا به (٤) عبارت است از:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{15}{5/32}y=0$$

یا

$$\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}+۹۶y=۰$$

بنابراین، بنا به (۵)، جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$y=c\cos\left(\sqrt{۹۶}\,t+\delta\right) \tag{۶}$$

$$\frac{dy}{dt}=-\sqrt{۹۶}\,c\sin\left(\sqrt{۹۶}\,t+\delta\right)$$

در اینجا، شرایط اولیه عبارتند از: $y(۰)=\frac{۱}{۲}$ و $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=۰}=۰$.

با قرار دادن این مقادیر در (۶)، معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$\frac{۱}{۲}=c\cos\delta \tag{۷}$$

$$۰=-\sqrt{۹۶}\,c\sin\delta$$

چون دامنه‌ی نوسان، یعنی c، نمی‌تواند برابر با صفر باشد، پس از معادله‌ی دوم در (۷) نتیجه می‌گیریم که $\delta=۰$. از این رو، با قرار دادن $\delta=۰$ در معادله‌ی اول در (۷)، $c=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. بنابراین معادله‌ی حرکت برابر است با

$$y=\frac{۱}{۲}\cos(\sqrt{۹۶}\,t)$$

۳-۱۰-۳ تعریف: یک جسم دارای **حرکت موزون ساده** است، اگر معادله‌ی حرکت آن در معادله دیفرانسیلی به صورت

$$\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}+\omega_{۰}^{۲}x=۰ \tag{۸}$$

صدق کند. در اینجا $\omega_۰$ یک ثابت مثبت است و x موقعیت جسم را به عنوان تابعی از زمان، یعنی t، بیان می‌کند.

به آسانی مشاهده می‌کنیم که (تمرین ۱۱ از تمرین‌های بخش ۳-۹ را ببینید) جواب عمومی معادله‌ی (۸) را می‌توان به صورت

$$x(t)=c\sin(\omega_۰ t+\delta) \tag{۹}$$

یا

$$x(t) = c\cos(\omega_0 t + \delta) \qquad (۱۰)$$

نوشت. بنابراین، می‌توان حرکت موزون ساده را به این صورت زیر نیز تعریف کرد: یک حرکت را موزون ساده می‌گوییم، اگر موقعیت جسم متحرک، یعنی x، را که تابعی از زمان است، بتوان به صورت (۹) یا (۱۰) نوشت. عدد $|c|$ **دامنه‌ی حرکت** نامیده می‌شود. توجه می‌کنیم که x بین $-|c|$, $|c|$ به طور متناوب نوسان می‌کند. دوره تناوب حرکت از فرمول $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ به دست می‌آید. **دوره تناوب** مدت زمان لازم برای حرکت جسم به اندازه یک دور کامل است. عدد ثابت

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

فرکانس حرکت نامیده می‌شود و تعداد دورها در واحد زمان را نشان می‌دهد.

۳-۱۰-٤ تمرین: جسمی که به یک فنر مارپیچ آویخته شده است، باعث یک حرکت موزون ساده در فنر می‌شود. فرض می‌کنیم که نوسان حرکت ۲ دور در دقیقه و دامنه‌ی آن ۱ فوت باشد. سرعت جسم را وقتی جسم از نقطه $y = \frac{1}{2}$ فوت می‌گذرد، پیدا کنید.

۳-۱۰-۵ حرکت نامیرا: حرکت جسمی در معادله دیفرانسیل به صورت

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + m\omega_0^2 y = f(t)$$

یا

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = \frac{1}{m}f(t) \qquad (۱۱)$$

که در آن $f(t)$ نیروی خارجی است که به جسم آویخته شده به فنر وارد می‌شود صدق می‌کند. فرض می‌کنیم که $f(t)$ نیرویی متناوب به صورت

$$f(t) = mF\sin(\omega t + \beta)$$

در این صورت باشد. (۱۱) به

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = F\sin(\omega t + \beta) \qquad (۱۲)$$

تبدیل می‌گردد. معادله دیفرانسیل همگن وابسته به (۱۲)، یعنی

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=0 \qquad (۱۳)$$

را در نظر می‌گیریم. بنابراین، جواب عمومی معادله‌ی (۱۳) برابر است با:

$$y_h = c\sin(\omega_0 t+\delta)$$

یک جواب خصوصی معادله‌ی (۱۲) به ماهیت نوسان دستگاه، یعنی ω_0، و ω از نیروی خارجی $mF\sin(\omega t+\beta)$ بستگی دارد. هر کدام از این حالات را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم.

حالت ۱ $\omega \neq \omega_0$: اگر $\omega \neq \omega_0$ باشد، آنگاه یک جواب خصوصی از معادله‌ی (۱۲) را با روش ضرایب نامعین به صورت زیر پیدا می‌کنیم. یک جواب خصوصی مختلط از معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\omega_0^2 y=Fe^{i(\omega t+\beta)} \qquad (۱۳)$$

را به صورت

$$y_p = AFe^{i(\omega t+\beta)} \qquad (۱٤)$$

در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که یک جواب خصوصی معادله‌ی (۱۲) قسمت موهومی جواب خصوصی (۱٤) است. اینک مشتقات اول و دوم y_p را در معادله‌ی (۱۳) قرار می‌دهیم. به‌دست می‌آوریم:

$$y_p' = AF(i\omega)e^{i(\omega t+\beta)}$$
$$y_p'' = -AF\omega^2 e^{i(\omega t+\beta)}$$
$$-AF\omega^2 e^{i(\omega t+\beta)} + AF\omega_0^2 e^{i(\omega t+\beta)} = Fe^{i(\omega t+\beta)}$$

در نتیجه

$$A(\omega_0^2-\omega^2)=1$$

یا

$$A = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

بنابراین، قسمت موهومی جواب خصوصی مختلط

$$y_p = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i(\omega t + \beta)}$$

یعنی:

$$\frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \beta)$$

یک جواب خصوصی معادله‌ی (۱۲) است. از این رو جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱۲) برابر است با

$$y = c\sin(\omega t + \delta) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \beta)$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود حرکت دستگاه در این حالت مجموع دو حرکت موزون ساده مجزا و متمایز است. بنابراین، جابجایی جسم از حالت تعادلش مجموع دو جابجایی (موزون) مجزا با دامنه‌های c و $\frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}$ می‌باشد. از این رو، مقدار ماکسیمم جابجایی نمی‌تواند از $|c| + \left|\frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2}\right|$ تجاوز کند. چون تمام حروف این نمایش ثابت می‌باشند، پس مقدار دامنه‌ی جابجایی متناهی است. حرکتی را که مقدار جابجایی جسم از حالت تعادلش نسبت به زمان مقداری متناهی باقی می‌ماند، **حرکت پایدار** می‌نامیم.

رفتار حرکت جسم تحت تأثیر دو حرکت موزون با نوسانهای متفاوت ω_0 و ω است. اگر $\frac{\omega_0}{\omega}$ یک عدد گویا، مثلاً ۳ باشد، آنگاه حرکت ناشی از جواب عمومی معادله‌ی همگن $y_h = c\sin(\omega_0 t + \delta)$ یک دوران است، در حالی که حرکت ناشی از جواب خصوصی $\frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t + \beta)$ تنها یک دوران می‌کند.

حالت ۲ $\omega = \omega_0$: اگر $\omega = \omega_0$، معادله دیفرانسیل حرکت به صورت

$$\frac{d^{2}y}{dt^{2}}+\omega_{0}^{2}y=F\sin(\omega_{0}t+\beta) \qquad (۱۵)$$

در می‌آید. بنا به حالت ۱، جواب عمومی معادله‌ی همگن

$$\frac{d^{2}y}{dt^{2}}+\omega_{0}^{2}y=0$$

برابر است با

$$y_h=c\sin(\omega t+\delta)$$

برای پیدا کردن یک جواب خصوصی، معادله‌ی دیفرانسیل

$$\frac{d^{2}y}{dt^{2}}+\omega_{0}^{2}y=Fe^{i(\omega_{0}t+\beta)} \qquad (۱۶)$$

را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که قسمت موهومی یک جواب خصوصی معادله‌ی (۱۶)، یک جواب خصوصی از معادله‌ی (۱۷) را به دست می‌دهد. بنا بر روش ضرایب نامعین، چون $i\omega_0$ یک ریشه‌ی معادله‌ی کمکی وابسته به معادله‌ی همگن است. در نتیجه، یک جواب خصوصی معادله‌ی (۱۶) به صورت

$$y_p=AFte^{i(\omega_{0}t+\beta)}$$

در می‌آید. با قرار دادن مشتق دوم y_p در معادله دیفرانسیل (۱۶)، به دست می‌آوریم:

$$y'_p=AFe^{i(\omega_{0}t+\beta)}+iAF\omega_{0}te^{i(\omega_{0}t+\beta)}$$

$$y''_p=iAF\omega_{0}e^{i(\omega_{0}t+\beta)}+iAF\omega_{0}e^{i(\omega_{0}t+\beta)}-AF\omega_{0}^{2}te^{i(\omega_{0}t+\beta)}$$

$$2iAFe^{i(\omega_{0}t+\beta)}-AF\omega_{0}^{2}te^{i(\omega_{0}t+\beta)}+AF\omega_{0}^{2}te^{i(\omega_{0}t+\beta)}=Fe^{i(\omega_{0}t+\beta)}$$

$$-2iAF\omega_{0}e^{i(\omega_{0}t+\beta)}=Fe^{i(\omega_{0}t+\beta)}$$

یا

$$2iAF\omega_{0}e^{i(\omega_{0}t+\beta)}=Fe^{i(\omega_{0}t+\beta)}$$

بنابراین

$$A=\frac{1}{2i\omega_{0}}=-\frac{i}{2\omega_{0}}$$

در نتیجه،

$$y_p = -\frac{iFt}{۲\omega_۰} e^{i(\omega_۰ t+\beta)}$$

$$= -\frac{iFt}{۲\omega_۰}(\cos(\omega_۰ t+\delta) + i\sin(\omega_۰ t+\beta)$$

از طرفی، می‌دانیم که قسمت موهومی این جواب خصوصی، یعنی

$$-\frac{F}{۲\omega_۰} t\cos(\omega_۰ t+\beta)$$

یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (۱۵) است. بنابراین جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برابر است با:

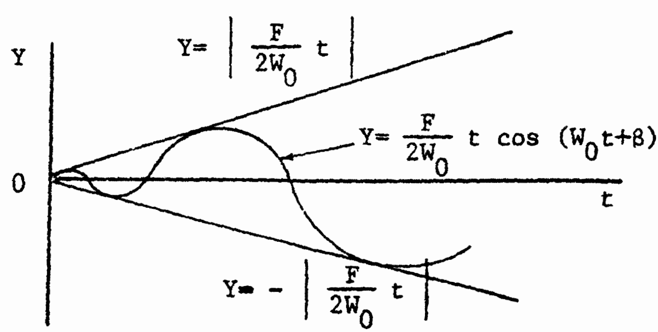
$$y = c\sin(\omega_۰ t+\delta) - \frac{F}{۲\omega_۰} t\cos(\omega_۰ t+\beta)$$

در این حالت مقدار ماکسیمم جابجایی از حرکت برابر است با

$$|c| + \left|\frac{F}{۲\omega_۰} t\right|$$

از وجود متغیر t در جمله‌ی دوم نتیجه می‌شود که جابجایی ناشی از این قسمت حرکت با زمان افزایش می‌یابد. (شکل (۲) را ببینید). حرکتی را که به طور نامحدود افزایش می‌یابد را **حرکت ناپایدار** می‌نامیم. همانگونه که ملاحظه می‌کنیم در این حالت نوسان‌ها به طور نامتناهی افزایش می‌یابد.

این پدیده را **تشدید** و $\omega_۰$ را **نوسان تشدید نامیرا** می‌نامیم.



شکل (۲)

۳-۱۰-٦ مثال: معادله دیفرانسیل حرکت دستگاهی عبارت است از

$$y'' + ٤y = \cos ٢t \qquad (١٧)$$

معادله‌ی حرکت آن را پیدا کنید. آیا حرکت پایدار است یا ناپایدار؟ مقدار نوسان تشدید نامیرا چقدر است؟

حل: معادلات دیفرانسیل همگن

$$y'' + ٤y = ٠$$

را در نظر می‌گیریم. جواب عمومی آن برابر است با

$$y_h = c\cos(٢t + \delta)$$

برای پیدا کردن جواب خصوصی معادله دیفرانسیل (۱۷)، معادله دیفرانسیل

$$y'' + ٤y = e^{٢it} \qquad (١٨)$$

را در نظر می‌گیریم. چون $٢i$ یک ریشه‌ی معادله‌ی کمکی است، پس یک جواب خصوصی معادله (۱۸) به صورت

$$y_p = Ate^{٢it}$$

در می‌آید. با قرار دادن این جواب در معادله‌ی (۱۸) به دست می‌آوریم:

$$y'_p = Ae^{٢it} + ٢iAte^{٢it}$$

$$y''_p = ٤iAe^{٢it} - ٤Ate^{٢it}$$

$$٤iAe^{٢i} - ٤Ate^{٢it} + ٤Ate^{٢it} = e^{٢it}$$

$$٤iAe^{٢it} = e^{٢it}$$

در نتیجه

$$A = -\frac{i}{٤}$$

و

$$y_p = -\frac{i}{۴} t e^{۲it}$$

از طرف دیگر، می‌دانیم که قسمت حقیقی y_p، یعنی $\frac{۱}{۴} t \sin ۲t$ یک جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل غیرهمگن (۱۷) است. بنابراین، جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱۷) برابر است با

$$y = c\cos(۲t + \delta) + \frac{۱}{۴} t \sin ۲t$$

از وجود عامل $\frac{t}{۴}$ در دامنه‌ی جمله‌ی دوم، نتیجه می‌شود که جابجایی با زمان افزایش می‌یابد. بنابراین حرکت ناپایدار است. چون در این حالت $\omega_0 = \omega = ۲$، پس نوسان تشدید نامیرا برابر با ۲ است.

۳-۱۰-۷ مثال: یک وزنه‌ی ۱۶ پوندی فنری را به اندازه‌ی ۶ اینچ می‌کشد. نیروی خارجی $f(t) = ۱۰\sin ۲t$ به دستگاه وصل شده است. معادله‌ی حرکت را پیدا کنید. مقدار ماکسیمم جابجایی چقدر است؟ آیا حرکت پایدار است یا ناپایدار؟ نوسان نیروی خارجی چقدر باشد تا تشدید تولید شود؟

حل: به دلیل وجود نیروی خارجی معادله‌ی دیفرانسیل (۴) به صورت

$$m\frac{d^۲y}{dt^۲} + ky = ۱۰\sin ۲t \qquad (۱۹)$$

در می‌آید. در اینجا $mg = ۱۶$، پس $m = \frac{۱}{۲}$. چون وزنه‌ی ۱۶ پوندی فنر را ۶ اینچ $= \frac{۱}{۲}$ فوت می‌کشد، از فرمول (۴) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{۱}{۲}k = ۱۶ \quad , \quad k = ۳۲$$

از این رو معادله (۱۹) به صورت

$$\frac{۱}{۲}\frac{d^۲y}{dt^۲} + ۳۲y = ۱۰\sin ۲t$$

یا

$$\frac{d^2y}{dt^2}+64y=20\sin 2t \qquad (20)$$

در می‌آید. معادله‌ی همگن

$$\frac{d^2y}{dt^2}+64y=0$$

دارای جواب عمومی

$$y_h=c\cos(8t+\delta)$$

است. برای پیدا کردن یک جواب خصوصی از معادله‌ی (۲۰)، معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2y}{dt^2}+64y=20e^{2it} \qquad (21)$$

را در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش ضرایب نامعین یک جواب خصوصی از این معادله به صورت

$$y_p=20Ae^{2it}$$

در می‌آید. با قرار دادن این جواب در (۲۱) به دست می‌آوریم

$$y_p'=40iAe^{2it}$$

$$y_p''=-80Ae^{2it}$$

$$-80Ae^{2it}+1280Ae^{2it}=20e^{2it}$$

بنابراین

$$y_p=\frac{20}{60}e^{2it}=\frac{1}{3}e^{2it}$$

می‌دانیم که، قسمت موهومی این جواب، یعنی $\frac{1}{3}\sin 2t$، یک جواب خصوصی از (۲۰) است. بنابراین، جواب عمومی معادله‌ی (۲۰)، یعنی

$$y=c\cos(8t+\delta)+\frac{1}{3}\sin 2t$$

معادله‌ی حرکت را به دست می‌دهد. مقدار ماکسیمم جابجایی این حرکت برابر است با $\frac{۱}{۳}+|c|$ که یک مقدار متناهی است. از این رو حرکت پایدار می‌باشد. برای تولید تشدید، نوسان نیروی خارجی باید برابر با ۸ رادیان بر واحد زمان باشد.

۳-۱۰-۸ تمرین‌های بخش ۳-۱۰

۱. جسمی به وزن ۱۲ پوند، فنری را به اندازه‌ی ٦ اینچ می‌کشد. وقتی فنر به حالت تعادل در می‌آید آن را به اندازه‌ی ٤ اینچ دیگر می‌کشیم و فنر را رها می‌کنیم. معادله حرکت، همچنین دوره تناوب، نوسان و دامنه‌ی حرکت جسم را پیدا کنید. سرعت جسم وقتی از وضعیت تعادل می‌گذرد چقدر است؟

۲. یک وزنه $\frac{۱}{٤}$ اسلاگی، فنری (با ثابت فنر $k=۱$ پوند بر فوت) را به اندازه‌ی ۲ فوت می‌کشد و به آن سرعت اولیه‌ای برابر با ۲ فوت بر ثانیه به طرف بالا می‌دهد. معادله‌ی حرکت را به قسمی پیدا کنید که نیروی خارجی برابر با $۱-\frac{dy}{dt}$ پوند به دستگاه وارد شود.

۳. جسمی در یک حرکت موزون ساده در امتداد محور ها، در $t=۰$ ، $y=۳$ و $v=\frac{dy}{dt}=۰$ را داراست. دقیقاً در $\frac{۱}{۲}$ ثانیه بعد این مقادیر تکرار می‌شوند. $v(t), Y(t)$ را پیدا کنید.

٤. در معادله‌ی (۱۲)، $\sin(\omega t+\beta)$ را با $\cos\omega t$ جانشین کرده و معادله دیفرانسیل حاصل را، وقتی $\omega \neq \omega_۰$ با شرایط $t=۰$، $y=y_۰$ و $v=v_۰$ حل کنید.

۵. جسم ٤ پوندی فنری را به اندازه‌ی ۱ اینچ می‌کشد. نیروی خارجی $f(t)=\frac{۱}{۸}\sin ۸\sqrt{٦}\, t$ به این دستگاه وارد می‌شود. معادله‌ی حرکت را پیدا کنید. آیا حرکت پایدار است یا ناپایدار؟ نوسان تشدید نامیرا چقدر است؟

٦. جسمی ۱٦ پوندی فنری را به اندازه‌ی ٤ اینچ می‌کشد. نیروی خارجی $f(t)=\sin ٤\sqrt{٦}\, t$ به دستگاه وارد می‌شود. پس از اینکه فنر به حالت سکون در می‌آید، آن را به اندازه‌ی ٦ اینچ جابجا کرده و به آن سرعتی برابر با ٤ فوت بر ثانیه می‌دهیم.

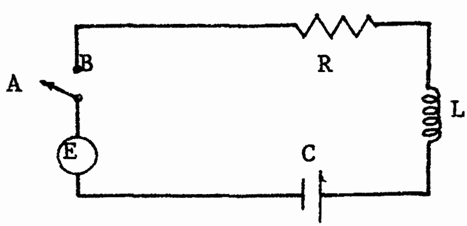
معادله‌ی حرکت جسم را پیدا کنید. آیا حرکت پایدار است یا ناپایدار؟ نوسان تشدید نامیرا چقدر است؟

۳-۱۱ مدارهای الکتریکی

در بخش گذشته به کمک قانون‌های نیوتن در مورد حرکت توانستیم رابطه‌ی بین نیروهای وارد بر یک دستگاه مکانیکی را تشکیل می‌دهیم. در این بخش قانون‌های مشابهی، معروف به قانون‌های کرشهف (Kirchhoff) (1824-1887)، به ما امکان می‌دهد تا رابطه‌ی بین نیروهایی که در یک دستگاه الکتریکی مولد و مصرف‌کننده انرژی هستند، تشکیل دهیم.

۳-۱۱-۱ مدار الکتریکی ساده

در یک مدار الکتریکی ساده که در شکل (۱) نشان داده شده است. منبع انرژی را در مدار با E نمایش داده‌ایم که ممکن است باطری یا ژنراتور باشد. مقدار جریان در مدار را در لحظه‌ی t با I(t) نمایش می‌دهیم. وقتی کلید در لحظه‌ی $t=0$ وصل شود، جریانی در مدار بسته برقرار می‌گردد.



شکل (۱)

در اینجا دستگاه واحدهای زیر را به کار می‌بریم. **آمپر** برای جریان I، **ولت** برای ولتاژ، **اهم** برای مقاومت R، **هنری** برای خودالقای L، **فاراد** برای خازن c، **کولمب** برای بار خازن و **ثانیه** برای زمان t. در این مدار سه عضو نشان داده شده با R، L و C مصرف‌کننده‌ی انرژی می‌باشند.

مقدار انرژی مصرفی در هر یک را با **افت ولتاژ** در آنها بیان می‌کنیم.

در فیزیک آموخته‌ایم که

افت ولتاژ در مقاومت R برابر است با RI،

افت ولتاژ در خود القاء L برابر است با $L\frac{dI}{dt}$،

افت ولتاژ در خازن c برابر است با $\frac{Q}{C}$، که در آن Q بار خازن می‌باشد. بار و جریان به وسیله‌ی معادلات زیر به هم مرتبط هستند.

$$I=\frac{dQ}{dt}\ ,\ \ Q(t)=\int_{t_0}^{t} I(s)ds+Q_0 \qquad (1)$$

در اینجا Q_0 بار خازن در $t=0$ است.

۳-۱۱-۲ قانون دوم کرشهف:

قانون دوم کرشهف بیان می‌کند که مجموع افت ولتاژ در مدار بسته باید برابر با ولتاژ به کار رفته (یعنی $E(t)$) باشد. از این رو رابطه‌ی زیر به ازای هر $t\geq 0$ برقرار است.

$$RJ+L\frac{dI}{dt}+\frac{Q}{C}=E(t) \qquad (2)$$

بنا به فرمول (۱)، خواهیم داشت:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{c}Q=E(t) \qquad (3)$$

که معادله دیفرانسیل مربوط به حرکت بار، Q، در مدار به عنوان تابعی از زمان t است. شباهت این معادله را با معادله‌ی نوسان‌های موزون

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+k\frac{dy}{dt}=F(t)$$

متذکر می‌شویم.

برای پیدا کردن جریان I در مدار به عنوان تابعی از زمان t، می‌توان معادله‌ی (۳) را برای Q حل کرد و از آن مشتق گرفت یا می‌توان از دو طرف (۲) نسبت به t مشتق گرفت و از (۱) استفاده کرد. به دست می‌آوریم

$$R\frac{dI}{dt}+L\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{c}\ \frac{dQ}{dt}=\frac{dE(t)}{dt}$$

یا

$$L\frac{d^{2}I}{dt^{2}}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{c}I=\frac{dE(t)}{dt} \qquad (4)$$

توجه می‌کنیم جمله‌ی $L\frac{d^{2}I}{dt^{2}}$ در معادله‌ی مدار، متناظر با جمله‌ی $m\frac{d^{2}y}{dt^{2}}$ در معادله‌ی نوسان‌های موزون است. این مطلب بدین معناست که جریان در حال عبور از خود القاء بلافاصله قبل و بعد از یک تغییر ناگهانی، یا پرش افت ولتاژ در آن، یکسان باشد. چون جریان قبل از وصل کردن کلید صفر است، داریم

$$I(0)=0$$

با به کار بردن این واقعیت می‌توان مقدار اولیه‌ی $\frac{dI}{dt}$ را از معادله‌ی (۲) به دست آورد. با فرض اینکه بار اولیه‌ی در خازن صفر است، خواهیم داشت:

$$LI'(0)+RI(0)=E(0)$$

یا

$$I'(0)=\frac{E(0)}{I}$$

در اغلب کاربردها مانند باطری یا مولد سینوسی و مولد جریان متناوب، ولتاژ اعمال شده تقریباً ثابت است. حالاتی را بررسی می‌کنیم که در آنها ولتاژ به کار رفته دارای مقدار ثابت E_0 است. در این صورت $E'(t)=0$ و معادله‌ی (٤) به صورت

$$L\frac{d^{2}I}{dt^{2}}+R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{c}I=0 \qquad (5)$$

با شرایط $I(0)=0$, $I'(0)=\frac{E_0}{L}$، در می‌آید. معادله‌ی کمکی این معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$P(r)=Lr^{2}+Rr+\frac{1}{c}=0$$

یا

$$r^{2}+\frac{R}{L}r+\frac{1}{cL}=0 \qquad (6)$$

ریشه‌های این معادله به علامت $\frac{R^{2}}{4L^{2}}-\frac{1}{cL}$, $\left[\frac{1}{4L^{2}}\left(R^{2}-\frac{4L}{c}\right)\right]$ یا $R^{2}-\frac{4L}{c}$ بستگی دارد. در اینجا حالتی که $R^{2}-\frac{4L}{c}<0$ بررسی می‌کنیم. در این حالت ریشه‌های معادله‌ی کمکی عبارتند از:

$$-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^{2}}{4L^{2}}-\frac{1}{cL}}$$

$$-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^{2}}{4L^{2}}-\frac{cL}{c^{2}L^{2}}}$$

یا

$$-\frac{R}{2L}\pm i\frac{\sqrt{4cL-c^{2}R^{2}}}{2cL}$$

بنابراین جواب عمومی معادله (۵) عبارت است از:

$$I(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A\sin\left(\frac{\sqrt{4cL-c^{2}R^{2}}}{2cL}t\right)+B\cos\left(\frac{\sqrt{4cL-c^{2}R^{2}}}{2cL}t\right)\right]$$

یا

$$I(t)=e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A\sin\alpha t+B\cos\alpha t\right]$$

که در آن $\alpha=\frac{\sqrt{4cL-c^{2}R^{2}}}{2cL}$. با مشتق‌گیری از $I(t)$ نسبت به t، به دست می‌آوریم

$$I'(t)=-\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\left[A\sin\alpha t+B\cos\alpha t\right]$$
$$+e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\alpha A\cos\alpha t-B\alpha\sin\alpha t\right]$$

با به کار بردن شرایط اولیه‌ی $I(0)=0$, $I'(0)=\frac{E_0}{L}$، معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$I(0)=B=0$$

$$I'(0)=-\frac{R}{2L}B+\alpha A=\frac{E_0}{L}$$

بنابراین $A=\frac{E_0}{\alpha L}$ و $B=0$. در نتیجه

$$I(t)=\frac{E_0}{\alpha L}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\alpha t$$

یک جواب مسأله با مقدار اولیه است.

۳-۱۱-۳ تمرین: جواب مسأله با مقدار اولیه‌ی (۵) را برای حالت $R^2-\frac{4L}{c}>0$، پیدا کنید.

۳-۱۱-۴ مثال: خازنی که ظرفیت آن $\frac{2}{1010}$ فاراد، یک خود القاء که ضریب القایی آن $\frac{1}{20}$ هنری و مقاومتی که مقاومت آن ۱ اهم است به طور سری به یکدیگر متصل شده‌اند. اگر در $t=0$ و $I=0$ و بار خازن ۱ کولمب باشد، بار و جریان در مدار ناشی از تخلیه شدن خازن را در $t=0/01$ ثانیه پیدا کنید.

حل: در اینجا $E(t)=0$، $c=\frac{2}{1010}$، $L=\frac{1}{20}$ و $R=1$.

از این رو معادله‌ی (۳) به صورت

$$\frac{1}{20}\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{dQ}{dt}+505Q=0$$

یا

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+20\frac{dQ}{dt}+10100Q=0$$

در می‌آید. جواب عمومی این معادله دیفرانسیل برابر است با:

$$Q(t)=e^{-10t}(c_1\sin 100t+c_2\cos 100t) \qquad (7)$$

بنابراین

$$I=\frac{dQ}{dt}=-10e^{-10t}(c_1\sin 100t+c_2\cos 100t)$$
$$+e^{-10t}(100c_1\cos 100t-100c_2\sin 100t) \qquad (8)$$

شرایط اولیه عبارتند از $Q(0)=1$ و $I(0)=0$. با قرار دادن این شرایط در (۷) و (۸)، به دست می‌آوریم

$$c_2=1$$
$$0=-10c_2+100c_1\ ,\ c_1=0/1$$

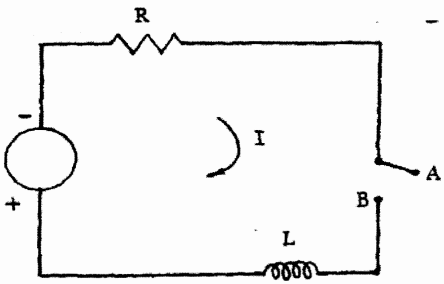
با قرار دادن این مقادیر در (۷) و (۸)، خواهیم داشت

$$Q(t)=e^{-10t}(0/1\sin 100t+\cos 100t)$$
$$I(t)=-10e^{-10t}(0/1\sin 100t+\cos 100t)$$
$$+e^{-10t}(10\cos 100t-100\sin 100t)$$

با قرار دادن $t=0/01$ در روابط بالا، به دست می‌آوریم

$$Q(0/01)=e^{-0/1}(0/1\sin 1+\cos 1)=0/57$$
$$I(0/01)=-10e^{-0/1}(0/1\sin 1+\cos 1)$$
$$+e^{-0/1}(10\cos 1-100\sin 1)=-76/9$$

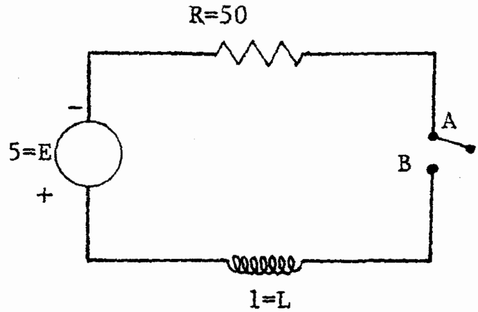
۳-۱۱-۵ تمرین: مداری مطابق شکل (۲) را در نظر می‌گیریم. مقدار جریان $I=I(t)$ را که در مدار جریان می‌یابد، پیدا کنید.



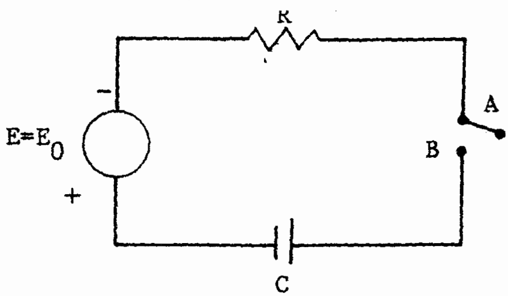
شکل (۲)

۳-۱۱-٦ تمرین‌های بخش ۳-۱۱

۱. مداری مطابق شکل زیر را در نظر می‌گیریم. در لحظه‌ی اولیه جریانی در مدار وجود ندارد. مقدار جریان در مدار را در لحظه‌ی t پیدا کنید.



۲. مداری مطابق شکل زیر را در نظر می‌گیریم. که در آن ولتاژ به کار رفته، مقدار ثابت E_0 است. مقدار جریان در مدار را در لحظه‌ی t پیدا کنید.



۳. مداری متشکل از خازنی با ظرفیت $\frac{2}{10^4}$ فاراد و مقاومتی با مقاومت ۱۰ اهم با نیروی محرکه‌ای با ولتاژ ۱۰۰ ولت به طور سری به یکدیگر متصل هستند. اگر ولتاژ در لحظه‌ی $t=0$ به کار رود، بار در خازن را به ازای $t>0$ پیدا کنید.

٤. مداری مطابق شکل زیر را در نظر می‌گیریم، که در آن ولتاژ به کار رفته مقدار ثابت E_0 است. مقدار جریان در مدار را در لحظه‌ی t پیدا کنید.

۳-۱۱-۷ تمرین‌های گوناگون فصل ۳

۱. $(D^2+5D-1)\left(\tan 2x-\frac{3}{x}\right)$ را حساب کنید.

۲. اگر $A=D+۲$ و $B=۳D-۱$، AB و BA را حساب کنید.

۳. فرض می‌کنیم $G=xD+۲$، $H=D-۱$، $G(Hy)$ و $H(Gy)$ را حساب کنید.

٤. با استفاده از قضیه‌ی (۳-٦-۷) نشان دهید که

(الف) $(D+r)^k e^{qx}=(q+r)^k e^{qx}$

(ب) اگر $P(D)$ عملگر چند جمله‌ای باشد، آنگاه

$P(D+r)e^{qx}=(r+q)^k e^{qx}$ جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

.۵ $y''-۳y'+۲y=۰$

.٦ $y''-۲ay'+a^۲y=۰$

.۷ $y''-٤y'+٤y=۰$

.۸ $y'''-٦y''+۱۲y'-۸y=۰$

.۹ $y^{(٤)}-۲y''=۰$

.۱۰ $۳٦y^{(٤)}-۳۷y''+٤y'+۵y=۰$

.۱۱ $y''-۲y'+۵y=۰$

.۱۲ $y^{(٤)}+۵y''+٦y=۰$

.۱۳ $y^{(٤)}+٤y''+٤y=۰$

مسائل با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

.۱٤ $y''+٤y'+۲۰y=۰,\quad y\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۰,\quad y'\left(\frac{\pi}{۲}\right)=۱$

.۱۵ $y''+٤y'+٤y=۰,\quad y(۰)=۱,\quad y'(۰)=۱$

۱٦. معادله دیفرانسیلی خطی با ضرایب ثابت را به قسمی پیدا کنید که دارای کمترین مرتبه‌ی ممکن بوده و تابع داده شده یک جواب آن باشد.

(الف) $x\cos ۲x$

(ب) $e^x \sin ۳x$

معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

.۱۷ $x^2y''-3xy'+13y=0$

.۱۸ $2x^2y''+3xy'-y=0$

.۱۹ $x^3y'''+2x^2y''+xy'-y=0$

.۲۰ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y''+9(x)y'+q(x)y=0$ را در نظر بگیرید. فرض می‌کنیم $z=u(x)$ یک تغییر متغیر جدید باشد، نشان دهید.

(الف)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}.\frac{dy}{dz}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\frac{dy}{dz}$$

(ب) معادله دیفرانسیل بالا با استفاده از این تغییر متغیر به صورت

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{d^2z}{dx^2}+p(x)\frac{dz}{dx}\right)\frac{dy}{dz}+q(x)y=0$$

در می‌آید.

(پ) معادله‌ی قسمت (ب) با انتخاب $z=u(x)=\int_a^x\ [q(t)]^{\frac{1}{2}}dx$ مشروط بر اینکه

$$\frac{z''+p(x)z'}{q(x)}=\frac{q'(x)+2p(x)q(x)}{2[q(x)]^{3/2}}$$

ثابت باشد، به یک معادله با ضرایب ثابت تبدیل می‌گردد.

.۲۱ با استفاده از تمرین ۲۰ معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(الف) $y''+xy'+e^{-x^2}y=0\quad,\quad -\infty<x<\infty$

(ب) $xy''+(x^2-1)y'+x^3y=0\quad,\quad 0<x<\infty$

معادلات دیفرانسیل غیرهمگن زیر را حل کنید.

.۲۲ $y''+3y'+2y=4$

۲۳. $y''-2y'-8y=9xe^{x}+10e^{-x}$

۲۴. $y^{(4)}-2y''+y=x-\sin x$

۲۵. $y''+2y'+y=x^{2}e^{-x}$

۲۶. $y'''+3y''+3y'+y=2e^{-x}-x^{2}e^{-x}$

۲۷. $y''+y=\sin x+e^{-x}$

۲۸. $y^{(5)}+2y'''+y'=2x+\sin x+\cos x$

۲۹. $y''+y=\sin 2x\sin x$

[راهنمایی: $\sin 2x\sin x=\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos 3x$.]

برای هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر، یک جواب خصوصی را که در شرایط اولیه داده شده صدق می‌کند، پیدا کنید.

۳۰. $y''-5y'-6y=e^{3x},\quad y(0)=2\quad,\quad y'(0)=1$

۳۱. $y'''-2y''+y'=2e^{x}+2x,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0$

۳۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y''+\lambda^{2}y=\sum_{m=1}^{N} a_m\sin m\pi x$ را پیدا کنید.

۳۳. جوابی از معادله دیفرانسیل

$$y''+y=\begin{cases} t & 0\le t\le \pi \\ \pi e^{\pi-t} & t>\pi \end{cases}$$

را که در شرایط اولیه‌ی $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ صدق می‌کند، به قسمی پیدا کنید که y و y' به ازای هر t پیوسته باشد.

[راهنمایی: نخست مسأله با مقدار اولیه را به ازای $t\le\pi$ و سپس آن را به ازای $t>\pi$ حل کرده و سپس ثابت‌ها را به قسمی پیدا کنید که y و y' در $t=\pi$ پیوسته باشند.]

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

۳۴. $y''+y=\sec^{3}x$

۳۵. $y''+y=\tan^{2}x$

۳۶. $y''-۲y'+y=e^{x}\operatorname{Ln}x$

۳۷. $x^{۲}y''+xy'-۴y=x^{۳}$

۳۸. $(D-۱)^{۳}y=\dfrac{۲e^{x}}{x^{۲}}$

۳۹. $x^{۳}y''+xy'-y=۰$

۴۰. $۲xy''+(۱-۴x)y'+(۲x-۱)y=e^{x}$

۴۱. $x^{۲}\cos x\dfrac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+(x\sin x-۲\cos x)(x\dfrac{dy}{dx}-y)=۰$

۴۲. $xy''-\dfrac{(۱-۲x)}{۱-x}y'+\dfrac{(۱-۳x+x^{۲})}{۱-x}y=(۱-x)^{۲}$

۴۳. با استفاده از تغییر متغیر $u=\dfrac{۱}{x}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$\left(۱-\frac{۱}{x}\right)y''+\left(\frac{۲}{x}-\frac{۲}{x^{۲}}-\frac{۱}{x^{۳}}\right)y'-\frac{۱}{x^{۴}}y=\frac{۲}{x}-\frac{۲}{x^{۲}}-\frac{۲}{x^{۳}}$$

را پیدا کنید.

۴۴. فرض می‌کنیم b,a اعداد حقیقی مثبت باشند و $a\neq b$. با فرض اینکه تابع F بر بازه‌ی $(۰,\infty)$ تعریف شده و پیوسته باشد،

(الف) نشان دهید که جواب عمومی معادله‌ی $(D+a)(D+b)y=F(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y(x)=c_{۱}e^{-ax}$$
$$+c_{۲}e^{-bx}+\frac{۱}{b-a}\int_{x_{۰}}^{x}\left[e^{-a(x-t)}-e^{-b(x-t)}\right]F(t)dt$$

که در آن $x_{۰}$ یک عدد نامنفی است.

(ب) هرگاه F کراندار باشد (یعنی $|F(x)|\leq M$ به ازای هر $x\geq ۰$ و عددی مانند M) نشان دهید هر جواب معادله در قسمت (الف) بر بازه‌ی $[۰,\infty)$ کراندار است.

۴۵. (الف) ثابت کنید که جایگذاری $y=e^{\int y_1(x)\,dx}$ معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

را به معادله‌ی ریکاتی $y_1'=-\dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}-\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}y_1-y_1^2$ تبدیل می‌کند. از این رو، اگر y_1 یک جواب از معادله‌ی ریکاتی باشد، آنگاه $y=e^{\int y_1\,dx}$ جوابی از معادله‌ی خطی است.

(ب) با استفاده از قسمت (الف) جواب عمومی معادله‌ی $xy''-y'-x^3y=0$ را پیدا کنید.

۴۶. معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم $a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=Q(x)$ **کامل** گفته می‌شود، اگر بتوانیم معادله را به صورت $\dfrac{d}{dx}\left[M(x)\dfrac{dy}{dx}+N(x)y\right]Q(x)$ نوشت. نشان دهید معادله دیفرانسیل $(x^2-2x)y''+4(x-1)y'+2y=e^{2x}$ کامل است و آن را حل کنید.

۴۷. (الف) نشان دهید که $x-\frac{1}{2}\sin x$ یک جواب از معادله‌ی بسل از مرتبه‌ی $\frac{1}{2}$ زیر است

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$$

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، جواب عمومی معادله دیفرانسیل غیرهمگن

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=3x^{\frac{3}{2}}\sin x \qquad x>0$$

را پیدا کنید.

۴۸. با استفاده از تمرین ۴۴، فرمولی برای یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''-5y'+6y=g(x)$ پیدا کنید.

۴۹. جسمی ۸ پوندی فنری را به اندازه‌ی ۲ فوت می‌کشد. پس از اینکه فنر به حالت سکون در می‌آید. نیروی خارجی $f(t)=\sin 6t$ وارد می‌کنیم. موارد زیر را پیدا کنید:

(الف) مسافت و سرعت را به عنوان تابعی از زمان راهنمایی: در $[v=0\,,\ y=0\,,\ t=0]$

(ب) نوسان دستگاه.

(پ) مقدار ماکسیمم جابجایی جسم از حالت تعادل آن.

(ت) حرکت پایدار یا ناپایدار است.

۵۰. به سؤالات تمرین ۴۹ در حالتی که در لحظه‌ی $t=0$ جسم در ۴ فوتی زیر وضعیت تعادلش نگه داشته شود و به آن سرعت ۳- فوت بر ثانیه داده شود، پاسخ دهید.

۵۱. معادله‌ی $\frac{d^2y}{dt^2}+w_0^2y=f(t)$ را با فرض اینکه $f(t)=Ft$ که در آن F عددی ثابت است، حل کنید. آیا حرکت پایدار یا ناپایدار است.

۵۲. جسمی به وزن ۱۶ پوند بر یک خط افقی حرکت می‌کند و با نیرویی که متناسب با فاصله‌ی آن از مبداء O است، به مبداء جذب می‌گردد. وقتی جسم در $x=-2$ است، این نیرو برابر با ۹ پوند می‌باشد. به علاوه، نیروی خارجی $f(t)=\sin 3t$ بر دستگاه وارد می‌شود. اگر در لحظه‌ی $t=0$، $x=2$، $v=0$ باشد،

(الف) معادله‌ی حرکت جسم را پیدا کنید.

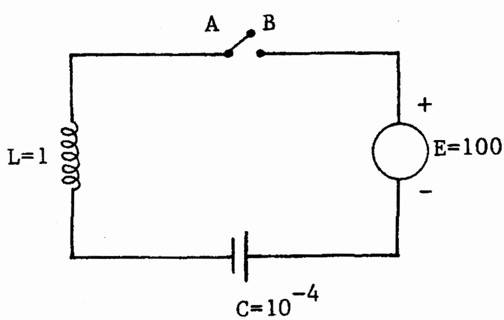
(ب) نوسان دستگاه را پیدا کنید.

۵۳. مداری مطابق شکل زیر را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $t=0$، $I=0$ و $Q=0$.

(الف) I و Q را به عنوان تابعی از t پیدا کنید.

(ب) نوسان دستگاه چقدر است؟

(پ) مقدار جریان در لحظه‌ی $t=0/02$ ثانیه چقدر است؟

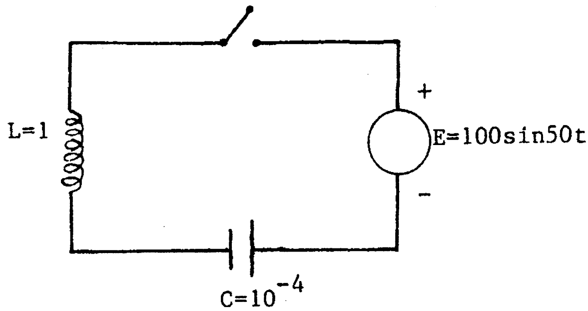


۵۴. مداری مطابق شکل زیر را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $t=0$، $I=0$ و $Q=0$.

(الف) I و Q را به عنوان تابعی از t پیدا کنید.

(ب) مقدار جریان در $t=0/02$ ثانیه پیدا کنید.

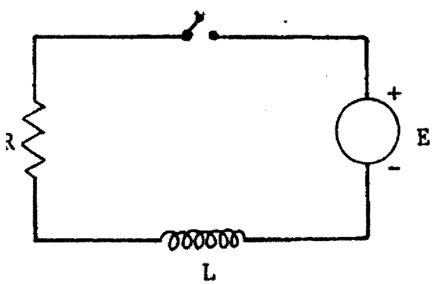
(پ) مقدار ماکسیمم جریان چقدر است؟



۵۵. مداری مطابق شکل زیر را که در آن خازن وجود ندارد در نظر می‌گیریم

(الف) I را در حالتی که $E=E_0$ و در $t=0$، $I=0$، پیدا کنید.

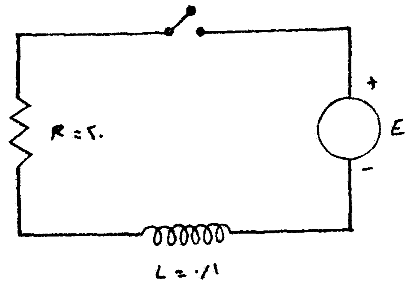
(ب) I را در حالتی که $E=E_0$ و در $t=0$، $I=0$، پیدا کنید.



۵۶. I را به عنوان تابعی از t برای مداری مطابق شکل زیر برای هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

(الف) $E=10$

(ب) $E(t)=100\sin 50t$


R = ۲۰
E
+
−
L = ۰/۱

فصل چهارم

جواب‌های سری معادلات دیفرانسیل خطی

در فصل‌های گذشته روش‌های حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و در چند حالت خاص با ضرایب متغیر را آموختیم. برای حل معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر و با مرتبه‌ی بالاتر از یک مؤثرترین روش برخورد استفاده از سری توانی است. برای اینکه مطالب این فصل را بهتر بیاموزیم بحث را با مرور مختصری بر سری‌های توانی شروع می‌کنیم.

۴-۱ سری‌های توانی

۴-۱-۱ سری توانی

یک سری به صورت

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \qquad (1)$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

که در آن $a_0, a_1, a_2, \dots, x_0$ اعداد ثابتی بوده و x متغیر است را **سری توانی** می‌نامیم. در اینجا x_0 **مرکز بسط** و a_i ها ضرایب سری توانی نامیده می‌شوند.

یک سری توانی ممکن است که:

۱. تنها به ازای مقدار $x = x_\circ$ همگرا باشد.

۲. به ازای هر x در یک همسایگی $x_\circ$ مطلقاً همگرا باشد یعنی، برای $|x - x_\circ| < R$ همگرا و برای $|x - x_\circ| > R$ واگرا باشد. در نقاط انتهایی $x_\circ \pm h$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد. عدد R **شعاع همگرایی** سری نامیده می‌شود.

۳. به ازای هر x، یعنی $-\infty < x < \infty$ مطلقاً همگرا باشد.

در حالت ۲ و ۳ مجموعه‌ی مقادیر x را که سری توانی همگراست **بازه‌ی همگرایی** سری می‌نامیم. در حالت ۲، اگر سری به ازای $x = x_\circ \pm R$ همگرا باشد، آنگاه بازه‌ی همگرایی برابر است با $x_\circ - R \le x \le x + R$.

٤-۱-۲ تذکر: (بازه‌ی همگرایی) در حساب دیفرانسیل و انتگرال آزمونهای خاصی را برای پیدا کردن بازه‌ی همگرایی سری توانی آموخته‌ایم. ساده‌ترین آنها که معمولاً به کار می‌بریم به «**آزمون نسبت**» معروف است. این آزمون بیان می‌کند شعاع همگرایی سری (۱) توسط

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \qquad (۲)$$

داده می‌شود، مشروط بر اینکه «حد» وجود داشته باشد. (اگر $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to \infty$، آنگاه قرار می‌دهیم $R = \infty$).

٤-۱-۳ مثال: بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=\circ}^{\infty} n!x^n$ را پیدا کنید.

حل: در اینجا $a_n = n!$ و $a_{n+1} = (n+1)!$، بنا به فرمول (۲) شعاع همگرایی برابر است با:

$$h = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = \circ$$

بنابراین، سری تنها به ازای $x = \circ$ همگراست.

٤-۱-٤ تمرین: بازه‌ی همگرایی سری توانی $\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n-۱} x^{۲n-۲}}{(۲n-۲)!}$ را پیدا کنید.

اینک چند قضیه در مورد سری‌های توانی را بدون اثبات بیان می‌کنیم. اثبات این قضایا را می‌توان در اکثر کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت، برای مثال کتاب تیلور[1] را ببینید.

٤-۱-٥ قضیه: اگر سری توانی (۱) بر بازه‌ی $I:|x-x_۰|<R$ ، که در آن R یک ثابت مثبت است همگرا باشد، آنگاه سری توانی، تابعی مانند $f(x)$ را تعریف می‌کند که به ازای هر x در I پیوسته است.

٤-۱-٦- تذکر: سری توانی

$$\sum_{n=۰}^{\infty} x^n \qquad (۳)$$

را که بر بازه‌ی $I=(-۱,۱)$ همگراست در نظر می‌گیریم. در این صورت بنا به قضیه‌ی (٤-۱-٥) سری (۳) تابعی را تعریف می‌کند که بر این بازه پیوسته است. به طور طبیعی این سؤال مطرح می‌شود که کدام تابع؟ پاسخ دادن به این سؤال در حالت کلی آسان نیست. ولی، چون سری (۳) یک سری هندسی است. می‌دانیم که به ازای x هایی که $|x|<۱$ است به تابع $\frac{۱}{۱-x}$ همگر می‌باشد.

٤-۱-۷ قضیه: اگر $f(x)$ به صورت زیر توسط یک سری توانی تعریف شده باشد

$$f(x)=\sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x-x_۰)^n \qquad I:|x-x_۰|<R \qquad (٤)$$

آنگاه،

$$f'(x)=\sum_{n=۱}^{\infty} n a_n (x-x_۰)^{n-۱} \qquad I:|x-x_۰|<R$$

---

1. Taylor, A.E., Advanced Calculus, Blais dell NewYork, 1955.

یعنی، سری توانی‌ای که از مشتق‌گیری جمله به جمله‌ی (٤) به دست می‌آید تابع مشتق $f(x)$ را بر بازه‌ی I تعریف می‌کند (یا به آن همگراست).

٤-۱-۸ قضیه: اگر $f(x)$ به صورت زیر توسط یک سری توانی تعریف شده باشد

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad I:|x-x_0|<R$$

آنگاه، به ازای هر دو نقطه‌ی دلخواه a و b متعلق به $(x_0-R\,,\,x_0+R)$ خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left[(b-x_0)^{n+1}-(a-x_0)^{n+1}\right]$$

به ویژه،

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} \qquad |x-x_0|<R$$

٤-۱-۹ تذکر: قضیه‌ی (٤-۱-۷) بیان می‌کند که مشتق مجموع یک سری توانی برابر است با مجموع سری مشتقات، چون سری مشتقات، مجدداً یک سری توانی است، برای پیدا کردن مشتق دوم دوباره می‌توان جمله به جمله از این سری مشتق گرفت. برای مثال، اگر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n-1}{n+2}x^n \qquad |x|<1$$

آنگاه،

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n+2}x^{n-1} \qquad |x|<1$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-1)}{n+2}x^{n-2} \qquad |x|<1$$

و الی آخر. سری مربوط به f' و f'' را با یک انتقال در اندیس جمع می‌توان به صورت (۱) نوشت. اگر قرار دهیم $k=n-1$

آنگاه، وقتی که n روی دنباله‌ی (...,۱,۲,۳) تغییر می‌نماید، k روی (...,۰,۱,۲) تغییر می‌کند. بنابراین،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n+2} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)k}{(k+3)} x^{k}$$

و چون در سری طرف راست k یک متغیر ظاهری است، پس آن را می‌توان به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n}{n+3} x^{n} \qquad |x|<1$$

نوشت. اگر در سری مربوط به f'' قرار دهیم $k=n-2$، آنگاه وقتی که n روی دنباله‌ی (...,۲,۳,٤) تغییر می‌کند، k روی (...,۰,۱,۲) تغییر می‌نماید. بنابراین

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-1)}{n+2} x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)(k+1)}{k+4} x^{k} \qquad |x|<1$$

و چون در سری طرف راست k یک متغیر ظاهری است، پس آن را می‌توان به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)(n+1)(n+1)}{n+4} x^{n} \qquad |x|<1$$

نوشت.

در حالت کلی با انتقال اندیس می‌توان نشان داد که

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (x-x_0)^{n}$$

بدین منظور قرار می‌دهیم $j=n-k$، وقتی n روی $(k,k+1,k+2,\dots)$ تغییر می‌کند j روی (...,۰,۱,۲) تغییر می‌کند، بنابراین

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n-k} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+k} (x-x_0)^{j}$$

و چون در سری طرف راست j یک متغیر ظاهری است، پس آن را می‌توان به صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (x-x_0)^{n}$$

نوشت. به عبارت دیگر، با کم کردن k واحد از اندیس جمع سری و اضافه کردن k واحد به همه‌ی n های داخل علامت Σ سری، دو سری مساوی به دست می‌آید.

٤-۱-۱۰ تذکر: در کار کردن با سری‌های توانی با مرکز بسط x_0 مخالف با صفر، غالباً به کار بردن تغییر متغیر $z = x - x_0$ مفید است، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

٤-۱-۱۱ قضیه: فرض می‌کنیم که، برای $|x - x_0| < R$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{و} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

در این صورت، برای $|x - x_0| < R$

الف) به ازای هر عدد حقیقی c داریم

$$cf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Ca_n (x - x_0)^n$$

ب) داریم

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$$

داریم

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

که در آن،

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

٤-۱-۱۲ تمرین: فرض کنید $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$ و $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(x-1)^n$

بسط سری توانی $f + g$ و fg را پیدا کنید.

۴-۱-۱۳ تمرین: سری $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ را به صورت $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$ بنویسید.

۴-۱-۱۴ قضیه: فرض می‌کنیم $f(x)$ توسط یک سری توانی تعریف شده باشد.

الف) اگر

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad |x-x_0|<R \tag{5}$$

آنگاه،

$$a_0=f(x_0)\,,\, a_1=f'(x_0)\,,\; a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\dots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\dots$$

ب) اگر $x_0=0$، یعنی

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x|<R \tag{6}$$

آنگاه،

$$a_0=f(0),\;\; a_1=f'(0)\;,\, a_2=\frac{f''(0)}{2!},\dots,a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!},\dots$$

۴-۱-۱۵ تعریف: سری در طرف راست (۵) را بسط **سری تیلور** $f(x)$ در یک همسایگی نقطه‌ی x_0 می‌نامیم و سری در طرف راست (۶) را بسط **سری مک لورن** $f(x)$ در یک همسایگی صفر می‌نامیم.

۴-۱-۱۶ مثال: بسط سری مک لورن تابع $f(x)=e^x$ را پیدا کنید.

حل: در اینجا به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $f^{(n)}(x)=e^x$ و $f^{(n)}(0)=1$. پس، بنا به قضیه‌ی ۴-۱-۱۴ (ب) داریم:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{n!}$$

در نتیجه بسط سری مک لورن e^x عبارت است از:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

با به کار بردن آزمون نسبت به آسانی می‌توان نشان داد که این سری به ازای هر x همگراست. در اینجا $a_n = \frac{1}{n!}$، پس بنا به آزمون نسبت شعاع همگرایی برابر است با:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

۴-۱-۱۷ تذکر: در اینجا تعدادی از سری‌های مک لورن را که درستی آنها در حساب دیفرانسیل و انتگرال اثبات شده است، می‌آوریم

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R \qquad (7)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad x \in R \qquad (8)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n-1} \qquad x \in R \qquad (9)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad |x| < 1 \qquad (10)$$

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} x^n \qquad |x| < 1 \qquad (11)$$

سری (۱۱) به **سری دو جمله‌ای** معروف است. اگر n یک عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه تنها تعداد متناهی از جمله‌های سری دو جمله‌ای غیرصفر هستند و این سری به ازای هر x معتبر است. سری (۱۰) را **سری هندسی** می‌نامیم.

۴-۱-۱۸ مثال: بسط سری مک لورن تابع $f(x)=\tan^{-1}x$ را با مشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری از یک سری دیگر پیدا کنید.

حل: می‌دانیم که

$$\tan^{-1}x=\int_{0}^{x}\frac{1}{1+t^{2}}dt$$

با استفاده از سری هندسی سری (۱۰) (با جایگذاری $-t^{2}$ به جای x) به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{1+t^{2}}=\frac{1}{1-(-t^{2})}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}t^{2n}\qquad |t^{2}|<1$$

با قرار دادن این مقدار در انتگرال و با استفاده از قضیه‌ی (۴-۱-۸) به دست می‌آوریم

$$\tan^{-1}x=\int_{0}^{x}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}t^{2n}\right]dt\qquad |x|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\int_{0}^{x}t^{2n}dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}t^{2n+1}\Big|_{0}^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n+1}x^{2n+1}\qquad |x|<1$$

۴-۱-۱۹ تمرین: بسط مک لورن تابع $f(x)=\frac{x}{4x+3}$ و بازه‌ای را که سری به تابع همگراست، پیدا کنید.

۴-۱-۲۰ تعریف: اگر سری $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n}$ به ازای هر x در بازه (x_0-R,x_0+R) به $f(x)$ همگرا باشد، می‌گوییم f **در نقطه‌ی** x_0 **تحلیلی** است.

۴-۱-۲۱ تمرین‌های بخش ۴-۱

بازه‌ی همگرایی هر یک از سری‌های توانی زیر را پیدا کنید.

۱. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$

۲. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}(x+3)^n$

۳. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1.3.5....(2n+1)}{(2n)!}x^n$

۴. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n^2+2)x^{n+1}$

۵. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1)(2n+3)x^{n+2}$

۶. فرض می‌کنیم $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ و $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$. بسط سری توانی $f+g$ و fg را پیدا کنید.

۷. فرض می‌کنیم $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n(n+1)}$، سری توانی ای که $f'(x)$ و $f''(x)$ را نمایش می‌دهد، پیدا کنید.

۸. بسط سری مک لورن تابع $f(x)=\frac{-2}{(x-1)(x+2)}$ را پیدا کنید.

۹. سری مک لورن تابع $f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ را به دست آورید.

۴-۲ نقاط معمولی

۴-۲-۱ تعریف: نقطه‌ی x_0 را یک **نقطه‌ی معمولی** برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه nام

$$y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+...+a_1(x)y'+a_0(x)y=F(x) \qquad (1)$$

می‌گوییم اگر هر یک از ضرایب $a_1(x)$ و $F(x)$ در x_0 تحلیلی باشند. نقطه‌ای را که معمولی نباشد، نقطه‌ی **منفرد معادله** می‌نامیم.

۴-۲-۲ مثال: نقاط منفرد معادله دیفرانسیل را پیدا کنید.

$$x^3(x^2-1)y''-x(x+1)y'-(x-1)y=0$$

حل: معادله را به صورت (۱) می‌نویسیم، داریم

$$y''-\frac{x(x+1)}{x^3(x^2-1)}y'-\frac{(x-1)}{x^3(x^2-1)}y=0$$

یا

$$y''-\frac{1}{x^2(x-1)}y'+\frac{1}{x^3(x+1)}y=0$$

روشن است که همه‌ی ضرایب این معادله در همه‌ی نقاط، به استثناء نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=-1$، تحلیلی می‌باشند. پس نقاط $x=0$، $x=1$ و $x=-1$ نقاط منفرد و همه‌ی نقاط دیگر نقاط معمولی معادله هستند.

اینک بدون اثبات، به بیان نتیجه‌ی اساسی زیر در مورد جواب‌های سری یک معادله دیفرانسیل در یک نقطه‌ی معمولی می‌پردازیم.

۴-۲-۳ قضیه: فرض کنیم هر یک از توابع $a_0, a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}$ و $F(x)$ در رابطه (۱) در نقطه‌ی $x=x_0$ تحلیلی باشند، یعنی هر تابع به وسیله‌ی بسط سری تیلور خود در نقطه‌ی x_0 در بازه‌ی $I=(x_0-R, x_0+R)$ نمایش داده شود. آنگاه یک جواب یگانه، مانند $y(x)$، از (۱) وجود دارد که در $x=x_0$ تحلیلی است و در n شرط اولیه‌ی

$$y(x_0)=k_0 \quad , \quad y'(x_0)=k_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=k_{n-1}$$

صدق می‌کند. یعنی هر جواب معادله‌ی (۱) روی I تحلیلی است و توسط سری تیلور خود در نقطه‌ی x_0 در بازه‌ی I نمایش داده می‌شود.

۴-۲-۴ روش حل اول: (مشتقات متوالی) روش مشتقات متوالی برای پیدا کردن یک سری توانی جواب از یک معادله دیفرانسیل خطی را توسط مثالهایی توضیح می‌دهیم.

۴-۲-۵ مثال: با استفاده از روش سری‌ها، یک جواب مسأله با مقدار اولیه‌ی زیر را پیدا کنید.

$$y'' - (x+1)y' + x^2 y = x \qquad (2)$$

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

حل: با مقایسه‌ی این معادله با معادله‌ی (۱) مشاهده می‌کنیم که $a_1(x) = -x-1$, $a_0(x) = x^2$ و $F(x) = x$. چون همه‌ی توابع چندجمله‌ای هستند، پس بازه‌ی همگرایی سری جواب بنا به قضیه‌ی (۴-۲-۳) برابر است با $(-\infty, +\infty)$. از طرفی، چون مقدار جواب و مشتق آن در $x=0$ داده شده است، پس جوابی به صورت سری مک لورن را می‌جوییم. داریم:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots \qquad (3)$$

با جایگذاری شرایط اولیه‌ی $x=0$، $y=1$، $y'=1$ در معادله دیفرانسیل (۲)، به دست می‌آوریم:

$$y''(0) - 1 = 0 \quad , \quad y''(0) = 1 \qquad (4)$$

اینک در (۳)، بنا به شرایط اولیه و (۴)، مقادیر $y(0)$، $y'(0)$ و $y''(0)$ معلوم هستند. برای پیدا کردن مقادیر ضرایب دیگر، از (۲) متوالیاً مشتق گرفته و مقادیر آنها را در (۱ ، ۰) حساب می‌کنیم. دو مشتق بعدی y عبارتند از:

$$y''' - (x+1)y'' - y' + x^2 y' + 2xy = 1 \qquad (5)$$

$$y^{(4)} - (x+1)y''' - 2y'' + x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0 \qquad (6)$$

از اینرو، وقتی $x=0$، $y=1$، $y'=1$، $y''=1$، از (۵) به دست می‌آوریم

$$y'''(0) = 3$$

و از (٦) به دست می‌آوریم

$$y^{(٤)}(\cdot)=۳$$

با قرار دادن این مقادیر در (۳)، خواهیم داشت:

$$y(x)=۱+x+\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۲}+\frac{x^{٤}}{۸}+\dots \quad , \quad -\infty<x<\infty$$

که پنج جمله از سری جواب (۲) را که در شرایط اولیه صدق می‌کند، به دست می‌دهد.

٤-۲-٦ تمرین: با استفاده از روش سری‌ها، یک جواب خصوصی از معادله با مقدار اولیه‌ی زیر را پیدا کنید.

$$y''+\frac{x}{۱-x^{۲}}y'-\frac{۱}{۱-x^{۲}}y=\cdot \qquad , \qquad |x|\neq ۱$$

$$y(\cdot)=۱ \qquad\qquad y'(\cdot)=۱$$

٤-۲-۷- روش حل دوم

اینک روش حل دوم برای به دست آوردن جواب سری یک معادله دیفرانسیل خطی را که به مشتق‌گیری بستگی ندارد توسط چند مثال توضیح می‌دهیم. این روش بسیار مفیدتر از روش حل قبلی می‌باشد.

٤-۲-۸ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y''+xy'+(x^{۲}+۲)y=\cdot \tag{۷}$$

را به صورت سری توانی برحسب توان‌های x (یعنی در حول $x_\cdot=\cdot$) پیدا کنید.

حل: چون در اینجا همه‌ی ضرایب چند جمله‌ای هستند، پس بازه‌ی همگرایی سری‌های جواب بنا به قضیه‌ی ٤-۲-۳ برابر است با $-\infty<x<\infty$. سری توانی جواب را به صورت

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

در نظر می‌گیریم. بنا به قضیه‌ی ٤-١-٧ با مشتق‌گیری از سری بالا، به دست می‌آوریم

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1}$$

و

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2}$$

با قرار دادن سری‌های بالا در معادله دیفرانسیل (٧) به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^{n-1} + (x^2+2) \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = 0$$

یا

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2A_n x^n = 0$$

در اینجا سومین سری، با x^2 شروع می‌شود در حالی که سری‌های اول و چهارم با x^0 و سری دوم با x شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌های اول و دوم از سری‌های اول و چهارم و جمله‌ی اول از سری دوم، می‌نویسیم:

$$(2A_2 + 2A_0) + [(3)(2)A_3 + A_1 + 2A_1]x + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2}$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} n A_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+2} + \sum_{n=2}^{\infty} 2A_n x^n = 0$$

اینک هر چهار سری با x^2 شروع می‌شوند. برای ترکیب سری‌ها، با تغییر اندیسهای جمع در سری‌های دوم، سوم و چهارم به $n=4$ [تذکر (٤-١-٩) را ببینید]، خواهیم داشت:

$$(2A_2 + 2A_0) + (6A_3 + 3A_1)x + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1) A_n x^{n-2}$$

$$+\sum_{n=4}^{\infty}(n-2)A_{n-2}x^{n-2}+\sum_{n=4}^{\infty}A_{n-4}x^{n-2}+\sum_{n=4}^{\infty}2A_{n-2}x^{n-2}=0$$

با گردآوری توان‌های مشابه x، به دست می‌آوریم

$$(2A_2+2A_0)+(3A_1+6A_3)x+\sum_{n=4}^{\infty}\left[n(n-1)A_n+(n-2+2)A_{n-2}+A_{n-4}\right]$$

یا

$$(2A_2+2A_0)+(6A_3+3A_1)x+\sum_{n=4}^{\infty}\left[n(n-1)A_n+nA_{n-2}+A_{n-4}\right]x^{n-2}=0 \tag{8}$$

می‌دانیم وقتی سری (۸) به ازای هر x در بـازه‌ی همگرایـی $-\infty<x<\infty$ برقـرار است، که ضریب هر توان x در طرف چپ (۸) برابر صفر باشد. پس باید داشته باشیم

$$2A_2+2A_0=0 \tag{9}$$

$$6A_3+3A_1=0$$

و به ازای هر $n\geq 4$، داریم:

$$n(n-1)A_n+nA_{n-2}+A_{n-4}=0 \tag{10}$$

این رابطه، به **رابطه‌ی بازگشتی** برای ضریب A_i معروف است. از معـادلات (۹)، A_2 و A_3 را می‌توان برحسب A_0 و A_1 به دست آورد. داریم:

$$A_2=-A_0 \tag{11}$$

$$A_3=-\frac{1}{2}A_1$$

با به کار بردن رابطه‌ی بازگشتی (۱۰) به ازای $n=4$ می‌توان A_4 را برحسب A_0، A_1، A_2 و A_3 و لذا برحسب A_0 و A_1 بیان کردن. در واقع هر یک از ضـرایب A_i را می‌توان برحسب A_0، A_1 بیان نمود.

با قرار دادن $n=4$ در رابطه بازگشتی (۱۰)، به‌دست می‌آوریم.

$$(4)(3)A_4+4A_2+A_0=0$$

یا

$$A_4 = -\frac{1}{3}A_2 - \frac{1}{k}A_0$$

با قرار دادن مقدار A_2 از (۱۱) در رابطه اخیر، خواهیم داشت

$$A_4 = -\frac{1}{3}(-A_0) - \frac{1}{12}A_0$$
$$= \frac{1}{3}A_0 - \frac{1}{12}A_0 = \frac{1}{4}A_0$$

به همین نحو، با قرار دادن $n=5$ در رابطه بازگشتی (۱۰)، به‌دست می‌آوریم

$$(5)(4)A_5 + 5A_3 + A_1 = 0$$

و با قرار دادن $A_3 = -\frac{1}{2}A_1$ از (۱۱) در رابطه بالا، خواهیم داشت

$$20A_5 - \frac{5}{2}A_1 + A_1 = 0$$

یا

$$A_5 = \frac{3}{40}A_1$$

به همین روش می‌توان هر ضریب زوج را برحسب A_0 و هر ضریب فرد را برحسب A_1 بیان کرد. چند جمله اول بسط یک بودن جواب عمومی با قرار دادن مقادیر به‌دست آمده در بالا در $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ به‌دست می‌آید. خواهیم داشت

$$y = A_0 + A_1 x - A_0 x^2 - \frac{1}{2}A_1 x^3 + \frac{1}{4}A_0 x^4 + \frac{3}{40}A_1 x^5 + \dots$$

$$y = A_0\left(1 - x^2 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right) + A_1\left(x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots\right) \qquad (12)$$

سری‌های داخل پرانتزها از قرار دادن $A_0 = 1$ و $A_1 = 0$ یا $A_0 = 0$ و $A_1 = 1$ در فرمول (۱۲) به‌دست می‌آیند. بنابراین هر کدام از این سری‌ها به ازای $-\infty < x < \infty$ همگرا هستند. قرار دادن

$$y_1(n)=1-x^2+\frac{1}{4}x^4+\dots$$

$$y_2(x)=x-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{40}x^5+\dots$$

نشان می‌دهیم که جواب‌های $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی می‌باشند. بدین منظور ترکیب خطی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را برابر صفر قرار می‌دهیم، یعنی

$$c_1y_2(x)+c_2y_2(x)=0$$

با قرار دادن $x=0$ در $y_1(x)$ و $y_2(x)$، به‌دست می‌آوریم

$$y_1(0)=1 \quad y_2(0)=0$$

پس

$$c_1y_2(0)+c_2y_2(0)=0 \tag{13}$$

یا

$$c_1=0$$

با قرار دادن $c_1=0$ در (۱۳) نتیجه می‌شود که به ازای هر n در بازه $(-\infty,+\infty)$

$$c_2y_2(x)=0$$

بنابراین، چون به ازای هر x، $y_2(x)$ صفر نمی‌باشد، پس $c_2=0$. در نتیجه $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مستقل خطی می‌باشند. از این رو جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده بر بازه $(-\infty,\infty)$ عبارت است از

$$y(x)=A_0y_1(x)+A_1y_2(x)$$

که در آن، A_0 و A_1 ثابت‌های اختیاری می‌باشند.

۴-۲-۹ مثال: بسط تیلور جواب‌های معادله‌ی $y''+(x-1)^2y'-4(x-1)y=0$ را در نقطه‌ی معمولی $x=1$ پیدا کنید.

حل: برای راحتی از تغییر متغیر $t=x-1$ استفاده می‌کنیم. در این صورت $x=1$ متناظر با $t=0$ می‌گردد، $Y(t)=y(t+1)$ داریم:

$$\frac{dY}{dx}=\frac{dY}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dY}{dt}$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dY}{dt})=\frac{d}{dt}(\frac{dY}{dt})\frac{dt}{dx}=\frac{d^2Y}{dt^2}$$

با این تغییر متغیر معادله دیفرانسیل داده شده به معادله‌ی

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+t^2\frac{dY}{dt}-4tY=0 \tag{14}$$

تبدیل می‌شود. چون در اینجا همه‌ی ضرایب چند جمله‌ای هستند، پس بازه‌ی همگرایی سری‌های جواب معادله‌ی (۱۴) بنا به قضیه‌ی ۴-۲-۳ برابر است با $-\infty<t<\infty$. بنابراین، بازه‌ی همگرایی سری‌های جواب معادله‌ی اصلی برابر است با $-\infty<x<\infty$. سری توانی جواب را به صورت

$$Y=\sum_{n=0}^{\infty}A_n t^n \tag{15}$$

در نظر می‌گیریم. با مشتق‌گیری از سری (۱۵) به دست می‌آوریم

$$\frac{dY}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}nA_n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)A_n t^{n-2}$$

با قرار دادن سری‌های بالا در معادله دیفرانسیل (۱۴) به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)A_n t^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}nA_n t^{n+1}-4\sum_{n=0}^{\infty}A_n t^{n+1}=0$$

در اینجا سری‌های دوم، با t^2 شروع می‌شود. در حالی که سری اول با t^0 و سری سوم با t شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌های اول و دوم سری اول و جمله‌ی اول سری سوم، می‌نویسیم:

$$2A_2 + [(3)(2)A_3 - 4A_0]t + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^{n+1}$$
$$-4\sum_{n=1}^{\infty} A_n t^{n+1} = 0$$

اینک هر سه سری با t^2 شروع می‌شوند. برای ترکیب سری‌ها، با تغییر اندیسهای جمع در سری‌های دوم و سوم به $n=4$ [تذکر ۴-۱-۹ را ببینید] خواهیم داشت:

$$2A_2 + [6A_3 - 4A_0]t + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2} + \sum_{n=4}^{\infty} (n-3)A_{n-3} t^{n-2}$$
$$-4\sum_{n=4}^{\infty} A_{n-3} t^{n-2} = 0$$

با گردآوری توان‌های مشابه t، به دست می‌آوریم

$$2A_2 + [6A_3 - 4A_0]t + \sum_{n=4}^{\infty} [n(n-1)A_n + (n-7)A_{n-3}]t^{n-2} = 0 \qquad (16)$$

می‌دانیم وقتی (۱۶) به ازای هر t در بازه‌ی همگرایی $-\infty < t < \infty$ برقرار است، که ضریب هر توان t در طرف چپ (۱۶) برابر صفر باشد. پس باید داشته باشیم

$$2A_2 = 0 \quad , \quad 6A_3 - 4A_0 = 0$$
$$n(n-1)A_n + (n-7)A_{n-3} = 0 \qquad n \geq 4 \qquad (17)$$

بنابراین،

$$A_2 = 0 \qquad A_3 = \frac{2}{3}A_0$$

از رابطه بازگشتی (۱۷) نتیجه می‌شود که

$$A_n = -\frac{(n-7)}{n(n-1)}A_{n-3}$$

برای محاسبه‌ی ضرایب A_n ها سه ستون به صورت زیر تشکیل می‌دهیم. با قرار دادن مقادیر $n \geq 4$ در رابطه‌ی بازگشتی، به دست می‌آوریم:

$$\frac{A_0}{A_3 = \frac{2}{3}A_0} \qquad \frac{A_1}{A_4 = -\frac{(-3)}{(4)(3)}A_1} \qquad \frac{A_2 = 0}{A_5 = -\frac{-2}{(5)(4)}A_2 = 0}$$

$$A_6 = -\frac{(-1)}{(6)(5)}A_3 \qquad A_7 = -\frac{0}{(7)(6)}A_4 = 0 \qquad A_8 = 0$$

$$A_9 = -\frac{(2)}{(9)(8)}A_6 \qquad A_{10} = -\frac{3}{(10)(9)}A_7 = 0 \qquad A_{11} = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A_{3n} = -\frac{(3n-7)}{3n(3n-1)}A_{3n-3} \qquad A_{3n+1} = 0 \qquad A_{3n+2} = 0$$

$$n \geq 1 \qquad\qquad n \geq 2 \qquad\qquad n \geq 1$$

ستون اول به ازای $n \geq 1$ به

$$A_{3n} = \frac{(-1)^n\left[(-4)(-1)(2)\ldots(3n-7)\right]}{\{(3)(6)(9)\ldots(3n)\}.\{(2)(5)(8)\ldots(3n-1)\}}A_0$$

تبدیل می‌گردد. برای ستون دوم $A_2 = -\frac{1}{4}A_1$ و بقیه‌ی A ها در این ستون صفر می‌باشند. در ستون سوم همه‌ی A ها برابر صفر هستند، زیرا متناسب با $A_2 = 0$ می‌باشند.

اینک جواب (۱۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Y(t) = A_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left[(-4)(-1)(2)\ldots(3n-7)\right]t^{3n}}{\{(3)(6)(9)\ldots(3n)\}\,\{(2)(5)(8)\ldots(3n-1)\}}\right]$$
$$+A_1\left(t + \frac{1}{4}t^4\right) \tag{18}$$

توجه می‌کنیم که، در حاصلضرب

$$(3)(6)(9)\ldots(3n)$$

n عامل وجود دارد که هر یک مضربی از ۳ می‌باشند. پس می‌توان آن را به صورت $(3)(6)(9)\dots(3n) = 3^n.(1)(2)\dots(n) = 3^n n!$ نوشت. کسر

$$\frac{(-4)(-1)(2)(5)(8)\dots(3n-1)(3n-4)(3n-7)}{(2)(5)(8)\dots(3n-1)} = 4(3n-4)(3n-7)$$

را در نظر می‌گیریم. بنابراین (۱۸) به صورت ساده شده‌ی زیر در می‌آید

$$Y = A_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n(3n-4)(3n-7)}{3^n n}t^{3n}\right]+$$
$$+A_1\left[t+\frac{1}{4}t^4\right)$$

با قرار دادن $t = x-1$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده، به ازای هر x، به دست می‌آید

$$y(x) = A_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n(3n-4)(3n-7)}{3^n n!}(x-1)^{3n}\right]+$$
$$A_1+\left[(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^4\right]$$

۴-۲-۱۰ مثال: بسط تیلور جواب‌های معادله دیفرانسیل

$$y'' + (x+1)y' = e^x$$

را در نقطه‌ی معمولی $x = 1$ پیدا کنید.

حل: با قرار دادن $t = x-1$، $Y(t) = y(t+1) = y(x)$ معادله دیفرانسیل به صورت

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+t\frac{dY}{dt} = e^{t+1} \tag{19}$$

در می‌آید. چون همه‌ی ضرایب در اینجا در $t=0$ تحلیلی هستند، پس بازه‌ی همگرایی سری‌های جواب (۱۹) بنا به قضیه‌ی ۴-۲-۳ برابر است با $-\infty < t < \infty$.
سری توانی جواب را به صورت

$$Y(t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \qquad (20)$$

در نظر می‌گیریم. با مشتق‌گیری از سری (۲۰) به دست می‌آوریم

$$\frac{dY}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^{n-1}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2}$$

و از طرفی، بنا به بسط مک لورن تابع e^x فرمول (۷) نتیجه می‌شود که

$$e^{t+1}=e.e^t=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

بنابراین معادله‌ی (۱۹) را می‌توان به صورت زیر دوباره‌نویسی کرد

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^n=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

در اینجا سری دوم در طرف چپ معادله‌ی بالا، با t شروع می‌شود در حالی که سری اول در طرف چپ و سری در طرف راست معادله بالا با t^0 شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌ی اول در سری اول و سری در طرف راست، می‌نویسیم

$$2A_2+\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty} nA_n t^n=e+e\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

اینک هر سه سری با t شروع می‌شوند. برای ترکیب سری‌ها، با تغییر اندیس در سری دوم و سری در طرف راست معادله‌ی بالا، به دست می‌آوریم

$$2A_2+\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)A_n t^{n-2}+\sum_{n=3}^{\infty} (n-2)A_{n-2} t^{n-2}=e+e\sum_{n=3}^{\infty}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$$

با گردآوری توان‌های مشابه t، خواهیم داشت:

$$2A_2+\sum_{n=3}^{\infty}\left[n(n-1)A_n+(n-2)A_{n-2}\right]t^{n-2}=e+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{e}{(n-2)!}t^{n-2}$$

می‌دانیم که معادله‌ی بالا وقتی به ازای هر t در بازه‌ی همگرایی $(-\infty,\infty)$ برقرار است که ضرایب هر توان t در طرف چپ و راست برابر باشند. در نتیجه

$$2A_2 = e \qquad , \qquad A_2 = \frac{e}{2}$$

$$n(n-1)A_n + (n-2)A_{n-2} = \frac{e}{(n-2)!} \qquad n \geq 3$$

از این رو،

$$A_n = -\frac{(n-2)}{n(n-1)}A_{n-2} + \frac{e}{n(n-1)(n-2)!}$$

یا

$$A_n = -\frac{(n-2)}{n(n-1)}A_{n-2} + \frac{e}{n!}$$

به ازای $n \geq 3$ و این فرمول، می‌توان ضرایب را حساب کرد.

$$A_3 = -\frac{1}{6}A_1 + \frac{e}{6}$$

$$A_4 = -\frac{2}{12}A_2 + \frac{e}{24} = -\frac{2}{12}\frac{e}{2} + \frac{e}{24} = \frac{-e}{24}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۲۰) جواب عمومی معادله‌ی (۱۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$Y(t) = A_0 + A_1 t + \frac{e}{2}t^2 + (-\frac{1}{6}A_1 + \frac{e}{6})t^3 + (-\frac{e}{24})t^4 + \ldots$$

یا

$$Y(t) = e(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + \ldots) + A_1(t - \frac{1}{6}t^3 + \ldots) + A_0$$

$$+ A_1(t - \frac{1}{6}t^4 + \ldots)$$

با جایگذاری $t = x - 1$ در جواب بالا، جواب عمومی معادله‌ی دیفرانسیل داده شده به دست می‌آید.

$$y(x) = e\left(\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 + \dots\right) \tag{۲۱}$$
$$+A_0 + A_1\left((x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^3 + \dots\right), \ |x| < \infty$$

توجه می‌کنیم که سری اول در (۲۱) که به ثابت‌های دلخواه A_0 و A_1 بستگی ندارد یک جواب خصوصی از معادله دیفرانسیل داده شده است.

۴-۲-۱۱ تمرین: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' - xy' - y = 0$ را به صورت سری توانی برحسب توان‌های x (یعنی در حول $x_0 = 0$) پیدا کنید.

٤-۲-۱۲ تمرین‌های بخش ٤-۲

۱. همه‌ی نقاط منفرد معادلات دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

(الف) $(x^{2}-4)y''+y=0$

(ب) $x^{2}(x-2)y''-x^{2}y'+xy=0$

(ج) $(\sin x)y''-y=0$

در تمرین‌های زیر تحقیق کنید $x=0$ یک نقطه‌ی معمولی معادله دیفرانسیل است و جواب عمومی معادله را برحسب سری توانی حول این نقطه بیان کنید. در مورد بازه‌ی همگرایی سری جواب بحث کنید.

۲. $y''-xy'+2y=0$

۳. $(1+4x^{2})y''-8y=0$

٤. $2y''+xy'-4y=0$

۵. $(1+2x^{2})y''+3xy'-3y=0$

در هر یک از مسائل با مقادیر اولیه زیر، جواب خصوصی را تا جمله‌های مرتبه kام با روش مشتقات متوالی به دست آورید، که در آن k عدد داده شده در مقابل هر معادله است.

٦. $y'-xy+x^{2}=0 \qquad y(0)=2 \quad , \quad k=5$

۷. $y''+3xy'+e^{x}y=2x \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=-1 \quad , \quad k=4$

۸. $y''+(\sin x)y=0 \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=1 \quad , \quad k=4$

۹. بسط سری توانی تابع

$$y=(1+x)^{p}$$

را که به سری دو جمله‌ای معروف است پیدا کنید. در اینجا p عددی حقیقی دلخواه است. راهنمایی: نخست معادله دیفرانسیل مرتبه اولی را پیدا کنید که تابع داده شده جوابی از آن است که در شرط $y(۰)=۱$ صدق می‌کند، و سپس معادله را با روش سری‌های توانی حل کنید.

در تمرین‌های زیر جواب عمومی معادله دیفرانسیل را برحسب سری توانی حول نقطه‌ی داده شده‌ی $x_۰$ بیان کنید.

.۱۰ $x_۰=۱$ $\quad y''+(x-۱)y=e^x$

.۱۱ $x_۰=-۳$ $\quad y''-۲(x+۳)y'-۳y=۰$

۴-۳ نقاط منفرد منظم

۴-۳-۱ تعریف: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی

$$p(x)\frac{d^۲y}{dx^۲}+q(x)\frac{dy}{dx}+r(x)y=۰ \qquad (۱)$$

را در نظر می‌گیریم. نقطه $x_۰$ یک **نقطه منفرد منظم** برای معادله (۱) گفته می‌شود اگر و تنها اگر بتوانیم معادله را به صورت

$$(x-x_۰)^۲\frac{d^۲y}{dx^۲}+(x-x_۰)P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=۰ \qquad (۲)$$

بنویسیم که در آن P و Q در $x_۰$ تحلیلی باشند. نقطه منفردی که منظم نباشد **غیرمنظم** می‌گوییم.

۴-۳-۲ مثال: نقاط منفرد منظم معادله دیفرانسیل $(x-۱)y''+\frac{۱}{x}y'-۲y=۰$ را پیدا کنید.

حل: با تقسیم دو طرف معادله بر $(x-۱)$، معادله بالا به صورت

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)} y' - \frac{2}{x-1} y = 0 \qquad (3)$$

در می‌آید. مشاهده می‌کنیم که نقاط منفرد معادله عبارتند از $x=0$ و $x=1$ با ضرب کردن معادله (۳) در x^2 به دست می‌آوریم

$$x^2 y'' + \frac{x}{x-1} y' - \frac{2x^2}{x-1} y = 0$$

با مقایسه این معادله با معادله‌ی (۲) مشاهده می‌کنیم

$$Q(x) = \frac{-2x^2}{x-1}, \quad P(x) = \frac{1}{x-1}$$

که هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند، در نتیجه بنا به تعریف ٤-۳-۱، $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است. به همین نحو، با ضرب کردن معادله (۳) در $(x-1)^2$ معادله

$$(x-1)^2 y'' + \frac{x-1}{x} y' - 2(x-1) y = 0$$

به دست می‌آید.

با مقایسه این معادله با معادله‌ی (۲) مشاهده می‌کنیم که $P(x) = \frac{1}{x}$ و $Q(x) = -2(x-1)$ که هر دو در $x=1$ تحلیلی هستند. در نتیجه بنا به تعریف ٤-۳-۱، $x=1$ یک نقطه منفرد منظم است.

٤-۳-۳ تمرین: نقاط منفرد معادله دیفرانسیل $(x-1)^3 x^2 y'' - 2(x-1) y' - 3y = 0$ را تعیین کرده و سپس منظم یا غیرمنظم بودن آنها را مشخص کنید.

٤-۳-٤ تذکر: اگر $x = x_0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم از معادله (۱) باشد، ثابت می‌شود که معادله (۱) دست کم دارای یک و گاهی دو جواب به صورت

$$y(x) = (x-x_0)^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad a_0 \neq 0 \qquad (4)$$

است. در اینجا s عددی است که لزوماً صحیح نیست. روش به دست آوردن جواب‌هایی به صورت (٤) به روش فروبنیوس مشهور است. این روش را با ارائه چند مثال توضیح می‌دهیم.

٤-۳-٥ مثال: تحقیق کنید که $x=0$ یک نقطه منفرد منظم معادله دیفرانسیل زیر است. جواب عمومی معادله را برحسب یم سری به صورت (٤) بیان کنید.

$$2xy''+(1+x)y'-2y=0$$

حل: با ضرب کردن معادله بالا در x به دست می‌آوریم:

$$2x^2y''+x(1+x)y'-2xy=0 \qquad (5)$$

با تقسیم دو طرف معادله‌ی (٥) بر ۲، معادله‌ی

$$x^2y''+\frac{1}{2}(x+1)xy'-xy=0$$

به دست می‌آید. با مقایسه این معادله با معادله‌ی (۲) مشاهده می‌کنیم که $P(x)=\frac{1}{2}(x+1)$ و $Q(x)=-x$ که هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند. در نتیجه بنا به تعریف ٤-۳-۱، $x=0$ یک نقطه منفرد منظم است. فرض می‌کنیم که معادله دارای جوابی به صورت

$$y(x)=x^s\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^{n+s} \qquad (6)$$

باشد. در این صورت

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_nx^{n+s-1}$$ [1]

و

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)A_nx^{n+s-2}$$

با قرار دادن سری‌های بالادر معادله‌ی (٥)، به دست می‌آوریم:

---

۱. توجه می‌کنیم که در اینجا اندیس جمع از یک شروع نمی‌شود. زیرا جمله اول سری، یعنی A_0x^s، ثابت نیست در نتیجه مشتق آن صفر نمی‌باشد.

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)A_n x^{n+s-2}+(x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_n x^{n+s-1}$$
$$-2x\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^{n+s}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+s)(n+s-1)A_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_n x^{n+s}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_n x^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}-2A_n x^{n+s+1}=0$$

در اینجا سری‌های سوم و چهارم با x^{s+1} شروع می‌شوند. در حالی که سری‌های دیگر با x^s شروع می‌شوند. با گردآوری جمله اول از سری‌های اول و دوم، می‌نویسیم:

$$2s(s-1)A_0 x^s+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+s)(n+s-1)A_n x^{n+s}+sA_0 x^s$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)A_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_n x^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}-2A_n x^{n+s+1}=0$$

یا

$$[2s(s-1)+s]A_0 x^s+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+s)(n+s-1)A_n x^{n+s}+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n-s)A_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_n x^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}-2A_n x^{n+s+1}=0$$

اینک هر چهار سری با x^{s+1} شروع می‌شوند. برای ترکیب سری‌ها با تغییر اندیس جمع در سری‌های سوم و چهارم به $n=1$ خواهیم داشت:

$$[2s(s-1)+s]A_0 x^s+\sum_{n=1}^{\infty}2(n+s)(n+s-1)A_n x^{n+s}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s)A_n x^{n+s}+\sum_{n=1}^{\infty}(n+s-1)A_{n-1}x^{n+s}+\sum_{n=1}^{\infty}-2A_{n-1}x^{n+s}=0$$

با گردآوری توان‌های مشابه x، به دست می‌آوریم

$$[2s(s-1)+s]A_0 x^s+\sum_{n=1}^{\infty}\{[2(n+s)(n+s-1)+(n+s)]A_n$$

$$+(n+s-1-2)A_{n-1}\} x^{n+s} = 0$$

چون $A_0 \neq 0$ و مشاهده می‌کنیم که s باید ریشه معادله‌ی

$$2s^2 - s = 0$$

یا

$$s(2s-1) = 0$$

باشد، بنابراین s باید یکی از مقادیر $s_1 = \frac{1}{2}$، $s_2 = 0$ را داشته باشد. در هر حالت ضرایب A_n ها باید در رابطه

$$\left[2(n+s)(n+s-1)+(n+s)\right]A_n + (n+s-3)A_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

یا

$$(n+s)(2n+2s-1)A_n + (n+s-3)A_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1 \qquad (7)$$

صدق کنند. وقتی $s = s_1 = \frac{1}{2}$، داریم:

$$(n+\frac{1}{2})(2n+2(\frac{1}{2})-1)A_n + (n+\frac{1}{2}-3)A_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

$$(2n+1)(n)A_n + (\frac{2n-5}{2})A_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

یا

$$A_n = -\frac{(2n-5)}{2n(2n+1)}A_{n-1} \qquad n \geq 1$$

با قرار دادن مقادیر $n \geq 1$ در رابطه بالا، به دست می‌آوریم

$$n=1 \qquad A_1 = -\frac{(-3)}{(2)(3)}A_0 = -\frac{(-3)}{(2)(3)}A_0$$

$$n=2 \qquad A_2 = -\frac{(-1)}{(4)(5)}A_1 = \frac{(-1)(-3)}{(2)(3)(4)(5)}A_0$$

$$n=3 \qquad A_3 = -\frac{1}{(6)(7)}A_2 = \frac{(-1)(-3)}{(2)(4)(6)(3)(5)(7)}A_0$$

$$n=4 \qquad A_4=-\frac{(3)}{(8)(9)}A_3=\frac{(-1)(-3)(3)}{(2)(4)(6)(8)(3)(5)(7)(9)}A_0$$

$$n=5 \qquad A_5=-\frac{(5)}{(10)(11)}A_4=-\frac{(-1)(-3)(3)(5)}{(2)(4)(6)(8)(10)(3)(5)(7)(9)(11)}A_0$$

$$\vdots$$

$$A_n=(-1)^n\frac{(-1)(-3)(1)(3)(5)\dots(2n-5)}{[(2)(4)(6)\dots(2n)][(3)(5)(7)\dots(2n+1)]}A_0$$

توجه می‌کنیم که $(2)(4)(6)\dots(2n)=2^n(1.2\dots n)=2^n n!$ و پس از ساده‌کردن کسر بالا به دست می‌آوریم.

$$A_n=\frac{3(-1)^n A_n}{2^n n!(2n-3)(2n-1)(2n+1)}$$

با انتخاب $A_0=1$ و قرار دادن A_n ها و $s=s_1=\frac{1}{2}$ در (۶) یک جواب خصوصی به صورت

$$y_1(x)=x^{1/2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3x^n}{2^n n!(2n-3)(2n-1)(2n+1)}\right] \qquad (8)$$

به دست می‌آید.

وقتی $s=s_2=0$، رابطه بازگشتی (۷) به

$$n(2n-1)A_n+(n-3)A_{n-1}=0 \qquad n\ge 1$$

یا

$$A_n=-\frac{(n-3)}{n(2n-1)}A_{n-1} \qquad n\ge 1$$

با قرار دادن مقادیر $n\ge 1$ در رابطه‌ی بالا، به دست می‌آوریم

$$n=1 \qquad A_1=\frac{2A_0}{1}=2A$$

$$n=2 \qquad A_2=\frac{1}{(2)(3)}A_1=\frac{1}{3}A_0$$

$$n=۳ \qquad A_۳=-\frac{۰}{(۳)(۵)}A_۲=۰$$

$$A_n=۰ \qquad n\geq ۳$$

با انتخاب $A_۰=۱$ و قرار دادن A_n ها و $s=s_۲=۰$ در (٦) جواب خصوصی دوم به صورت

$$y_۲(x)=۱+۲x+\frac{۱}{۳}x^۲ \tag{۹}$$

به دست می‌آید. با بکار بردن آزمون نسبت در مورد سری جواب (۸)، خواهیم داشت:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+۱}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-۱)^n ۳}{۲^n n!(۲n-۳)(۲n-۱)(۲n+۱)}}{\dfrac{(-۱)^{n+۱}۳}{۲^{n+۱}(n+۱)!(۲n-۱)(۲n+۱)(۲n+۳)}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{۲(۲n+۳)(n+۱)}{(۲n-۳)}=\infty$$

پس بازه همگرایی سری جواب (۸) برابر است با $-\infty<x<\infty$ و چون $y_۲(x)$ یک چند جمله‌ای، پس سری‌های جواب (۸) و (۹) همه جا همگرا هستند. در نتیجه توابع $y_۱$ و $y_۲$ در بازه‌ی $(۰,\infty)$ جواب هستند. این جواب‌ها مستقل خطی می‌باشند. زیرا اگر به ازای $x>۰$، قرار دهیم

$$c_۱y_۱(x)+c_۲y_۲(x)=۰$$

آنگاه با حد گرفتن از دو طرف تساوی بالا وقتی $x\to ۰$، مشاهده می‌کنیم که $y_۱(x)\to ۰$ و $y_۲(x)\to ۱$. پس $c_۲=۰$.

در نتیجه به ازای $x>۰$، داریم

$$c_1 y_1(x) = 0$$

ولی y_1 تابع صفر نیست. در نتیجه $c_1 = 0$. از این رو y_2, y_1 مستقل خطی می‌باشند. بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$y(x) = c_1 x^{\frac{1}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3 x^n}{2^n n!(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \right] + c_2 \left(1 + 2x + \frac{1}{3}x^2\right)$$

۴-۳-۶ تذکر: در ادامه بحث خود معادلاتی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که دارای یک نقطه منفرد منظم در $x = 0$ است. در این حالت معادله به صورت

$$x^2 y'' + xP(x) y' + Q(x) y = 0$$

در می‌آید، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ در $x = 0$ تحلیلی هستند. همانگونه که قبلاً مشاهده کردیم. این محدودیت از کلیت بحث نمی‌کاهد، زیرا تغییر متغیر $t = x - x_0$ نقطه منفرد منظم x_0 را به ۰(صفر) تبدیل می‌کند.

۴-۳-۷ بررسی حالت کلی: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$Ly = x^2 y'' + xP(x) y' + Q(x) y = 0 \tag{10}$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $x = 0$ یک نقطه منفرد منظم برای معادله (۱۰) باشد. در این صورت $P(x)$ و $Q(x)$ در $x = 0$ تحلیلی هستند. در نتیجه به ازای $|x| < R$ داریم

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n x^n \quad , \quad Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n$$

اگر y تابعی به صورت

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+s} \tag{11}$$

باشد، آنگاه

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+s) A_n x^{n+s-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)A_n x^{n+s-2}$$

همچنین با استفاده از قضیه ٤-١-١١، به دست می‌آوریم

$$xP(x)y'(x)=x^s\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}P_n x^n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+s)A_k P_{n-k}\right)x^{n+s}$$
$$Q(x)y(x)=x^s\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}Q_n x^n\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_k Q_{n-k}\right)x^{n+s}$$

با قرار دادن مقادیر بالا در معادله دیفرانسیل (١٠)، به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)A_n x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+s)A_k P_{n-k}\right)x^{n+s}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}A_k Q_{n-k}\right)x^{n+s}=0$$

با گردآوری جمله‌های متشابه، معادله‌ی

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+s)(n+s-1)A_n+\sum_{k=0}^{n}\left[(k+s)P_{n-k}+Q_{n-k}\right]A_k\right\}x^{n+s}=0$$

به دست می‌آید. در اینجا ضریب کوچک‌ترین توان x (که متناظر با $n=0$ برای اندیس جمع است) عبارت است از

$$f(s)=s(s-1)+sP_0+Q_0$$
$$=s^2+(P_0-1)s+Q_0$$

چون $A_0\neq 0$، مقادیر ممکن s ریشه‌های معادله‌ی شاخص $f(x)=0$ هستند. این ریشه‌ها را که با s_1 و s_2 نشان می‌دهیم، توان‌های معادله دیفرانسیل در نقطه‌ی منفرد منظم می‌نامیم.

ضرایب: در سری مربوط به y باید به ازای $n \geq 1$ در رابطه بازگشتی

$$(n+s)(n+s-1)A_n + \sum_{k=0}^{n} [(k+s)P_{n-k} + Q_{n-k}]A_k = 0$$

صدق کند. با قرار دادن $k=n$ در سری رابطه بالا و گردآوری جمله‌های شامل A_n، به دست می‌آوریم

$$[(n+s)(n+s-1)+(n+s)P_0 + Q_0]A_n = -\sum_{k=0}^{n-1} [(k+s)P_{n-k} + Q_{n-k}]A_k$$

یا

$$\left[(n+s)^2 + (P_0 - 1)(n+s) + Q_0\right]A_n = -\sum_{k=0}^{n-1} [(k+s)P_{n-k} + Q_{n-k}]A_k$$

به ازای $n \geq 1$، به اختصار می‌توان نوشت

$$f(n+s)A_n = \sum_{k=0}^{n-1} g_n(k,s)A_k \qquad (12)$$

که در آن

$$g_n(k,s) = -[(k+s)P_{n-k} + Q_{n-k}]$$

در اینجا

$$f(s) = (s-s_1)(s-s_2)$$

و

$$f(n+s) = (s+n-s_1)(s+n-s_2)$$

مقادیر $g_n(k,s)$ به ضرایب P_i و Q_i بستگی دارند، اما به ضرایب بستگی ندارند. اگر به ازای مقدار مفروض s_1 و s_2 برای s مقادیر $f(n+s)$ به ازای $n \geq 1$ صفر نشوند، آنگاه ضرایب $A_2, A_3, \ldots$ برحسب A_0 توسط رابطه‌ی بازگشتی (۱۲) به طور یکتایی محاسبه می‌شوند. نخست حالتی را که توان‌های s_1 و s_2 حقیقی و متمایز هستند، مطالعه می‌کنیم. توان بزرگتر را با s_1 نمایش می‌دهیم. چون

$$f(s_1+n) = (s_1+n-s_1)(s_1+n-s_2) = n[n+(s_1-s_2)]$$

مشاهده می‌کنیم که به ازای $n \geq ۱$ ، $f(s_۱+n) \neq ۰$. بنابراین معادله دیفرانسیل همواره دارای یک جواب سری y_i متناظر با توان بزرگتر $s_۱$ به صورت $y_۱(x) = x^{s_۱} \sum_{n=۰}^{\infty} A_n x^n$ است. در اینجا می‌پذیریم که سری توانی این فرمول، لااقل به ازای $|x| < R$ همگرا است و تابع $y_۱$ لااقل بر بازه $(۰,R)$ جوابی از معادله دیفرانسیل است.

با این وجود، اگر $s_۱ - s_۲ = N$، که در آن N عددی صحیح مثبت است آنگاه $f(s_۲+n)$ صفر است اگر و تنها اگر $n = s_۱ - s_۲ = N$ در این حالت رابطه بازگشتی (۱۲) به صورت $۰.A_N = \sum_{k=۰}^{N-۱} g_N(k_۱, s_۲) A_k$ در می‌آید. مادامی که طرف راست معادله فوق صفر نشود، پید اکردن عدد A_N که در این رابطه صدق کند، غیرممکن است و جوابی به صورت (۱۱) وجود ندارد.

ولی اگر طرف راست رابطه‌ی صفر گردد، آنگاه داریم:

$$۰.A_N = ۰$$

و در این صورت A_N اختیاری خواهد بود (به ویژه می‌توان $A_N = ۰$ انتخاب کرد).

در این حالت نیز مجدداً یک جواب سری به صورت (۱۱) به دست می‌آید. روشن است که وقتی توان‌ها برابر باشند تنها یک جواب به صورت (۱۱) وجود دارد. این حالت را در بخش بعدی بررسی می‌کنیم.

۴-۳-۸ مثال: تحقیق کنید که $x = ۰$ یک نقطه‌ی منفرد منظم معادله دیفرانسیل زیر است. جواب عمومی را برحسب سری به صورت (۴) بیان کنید.

$$۲x(x+۱)y'' + ۳(x+۱)y' - y = ۰$$

حل: با ضرب کردن معادله در x، به دست می‌آوریم

$$۲x^۲(x+۱)y'' + ۳x(x+۱)y' - xy = ۰ \qquad (۱۳)$$

با تقسیم دو طرف این معادله بر $۲(x+۱)$، معادله

$$x^{2}y''+\frac{3}{2}xy'-\frac{x}{2(x+1)}y=0$$

به دست می‌آید. با مقایسه این معادله با معادله (۲) مشاهده می‌کنیم که:

$$Q(x)=-\frac{x}{2(x+1)}\,,\ P(x)=\frac{3}{2}$$

که هر دو در $x=0$ تحلیلی هستند، در نتیجه بنا به تعریف ٤-۳-۱، $x=0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم از معادله دیفرانسیل است. از طرفی بنا به بسط سری هندسی، داریم

$$-\frac{x}{2(1+x)}=-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2}x^{n+1}\qquad |x|<1$$

و $P(x)=\frac{3}{2}$ که یک چند جمله‌ای است به ازای هر x همگراست، پس بنا به ٤-۳-۷ سری توانی جواب‌ها حداقل به ازای $|x|<1$ همگرا هستند. فرض می‌کنیم که معادله دارای جوابی به صورت

$$y(x)=x^{s}\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}x^{n+s}$$

باشد. در این صورت

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_{n}x^{n+s-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)A_{n}x^{n+s-2}$$

با قرار دادن سری‌های بالا در معادله (۱۳)، به دست می‌آوریم

$$(2x^{3}+2x^{2})\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)(n+s-1)A_{n}x^{n+s-2}+$$

$$+(3x^{2}+3x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+s)A_{n}x^{n+s+1}-\sum_{n=0}^{\infty}A_{n}x^{n+s+1}=0$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty}2(n+s)(n+s-1)A_{n}x^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty}2(n+s)(n+s-1)A_{n}x^{n+s}+$$

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۳(n+s)A_n\, x^{n+s+۱} \sum_{n=۰}^{\infty} ۳(n+s)A_n x^{n+s} + \sum_{n=۰}^{\infty} -A_n\, x^{n+s+۱} = ۰$$

در اینجا سری‌های اول، سوم و پنجم با $x^{s+۱}$ شروع می‌شوند. در حالی که سری‌های دیگر با x^s شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌ی اول سری‌های دوم و چهارم، می‌نویسیم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} ۲(n+s)(n+s-۱)A_n\, x^{n+s+۱} + ۲s(s-۱)A_۰\, x^s +$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۲(n+s)(n+s-۱)A_n\, x^{n+s} + \sum_{n=۰}^{\infty} ۳(n+s)A_۰\, x^{n+s+۱} + ۳sA_۰\, x^s +$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۳(n+s)A_n\, x^{n+s} + \sum_{n=۰}^{\infty} -A_n\, x^{n+s+۱} = ۰$$

اینک همه سری‌ها با $x^{s+۱}$ شروع می‌شوند، برای ترکیب سری‌ها با تغییر اندیس جمع در سری‌های اول، سوم و پنجم به $n=۱$، خواهیم داشت:

$$\left[۲s(s-۱)+۳s\right]A_۰x^s + \sum_{n=۱}^{\infty} ۲(n+s-۱)(n+s-۲)A_{n-۱}\, x^{n-s}$$

$$+\sum_{n=۱}^{\infty} ۲(n+s)(n+s-۱)A_n\, x^{n+s} + \sum_{n=۱}^{\infty} ۳(n+s-۱)A_{n-۱}\, x^{n+s} +$$

$$\sum_{n=۱}^{\infty} ۳(n+s)A_n x^{n+s} + \sum_{n=۱}^{\infty} -A_{n-۱}\, x^{n+s} = ۰$$

با گردآوری توان‌های مشابه x، به دست می‌آوریم:

$$(۲s^۲+s)A_۰\, x^s + \sum_{n=۱}^{\infty} \Big\{\left[۲(n+s)(n+s-۱)+۳(n+s)\right] A_n$$
$$+\left[۲(n+s-۱)(n+s-۲)+۳(n+s-۱)-۱\right]A_{n-۱}\Big\} x^{n+s} = ۰$$

یا

$$s(۲s+۱)A_۰\, x^s + \sum_{n=۱}^{\infty} \left\{(n+s)\left[۲(n+s)+۱\right]A_n + (n+s)\left[۲(n+s)-۳\right]A_{n-۱}\right\} x^{n+s} = ۰$$

چون $A_0 \neq 0$، مشاهده می‌کنیم که s باید ریشه‌های معادله زیر باشد.

$$f(s) = s(2s+1) = 0$$

در هر حالت ضرایب A_n ها باید در رابطه بازگشتی

$$(n+s)[2(n+s)+1]A_n + (n+s)[2(n+s)-3]A_{n-1} = 0 \qquad n \geq 1$$

یا

$$A_n = -\frac{2(n+s)-3}{2(n+s)+1}A_{n-1}$$

صدق کنند. با قرار دادن $s = s_1 = 0$ در رابطه‌ی بالا، به دست می‌آوریم

$$A_n = -\frac{2n-3}{2n+1}A_{n-1}$$

$$n=1 \qquad A_1 = \frac{1}{3}A_0$$

$$n=2 \qquad A_2 = -\frac{1}{5}A_1 = -\frac{1}{(3)(5)}A_0 = -\frac{1}{15}A_0$$

$$n=3 \qquad A_3 = -\frac{3}{7}A_2 = \frac{1}{(5)(7)}A_0 = \frac{1}{35}A_0$$

$$n=4 \qquad A_4 = -\frac{5}{9}A_3 = -\frac{1}{(7)(9)}A_0 = -\frac{1}{63}A_0$$

$$\vdots$$

$$A_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{4n^2-1}A_0$$

با انتخاب $A_0 = 1$ و قرار دادن A_n ها و $s = s_1 = 0$ در فرمول مربوط به y به دست می‌آوریم:

$$y_1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^n$$

با قرار دادن $s = s_2 = -\frac{1}{2}$ در رابطه بازگشتی (۱۴)، خواهیم داشت:

$$A_n = -\frac{۲n-٤}{۲n} A_{n-۱} \qquad n \geq ۱$$

با قرار دادن مقادیر $n \geq ۱$ در رابطه بالا، به دست می‌آوریم

$$n = ۱ \quad , \quad A_۱ = A_۰$$

$$n = ۲ \quad , \quad A_۲ = ۰$$

$$\vdots$$

$$A_n = ۰$$

با انتخاب $A_۰ = ۱$ و قرار دادن A_n ها و $s = s_۲ = -\frac{۱}{۲}$ در فرمول مربوط به y به دست می‌آوریم

$$y_۲ = x^{-\frac{۱}{۲}}(۱+x)$$
$$= x^{-\frac{۱}{۲}} + x^{\frac{۱}{۲}}$$

از این رو، بنا به ٤-۳-۷ سری‌های جواب حداقل بر بازه‌ی $-۱ < x < ۱$ همگرا هستند و بر بازه‌ی $(۰,۱)$ جواب معادله می‌باشند. در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل اصلی بر بازه $(۰,۱)$ عبارت است از:

$$y(x) = c_۱\left(۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{٤n^۲-۱} x^n\right) + c_۲\left(x^{-\frac{۱}{۲}} + x^{\frac{۱}{۲}}\right)$$

٤-۳-۹ تمرین‌های بخش ٤-۳

نشان دهید که $x = ۰$ یک نقطه‌ی منفرد منظم معادلات دیفرانسیل داده شده است. جواب عمومی را برحسب سری به صورت (٤) بیان کرد:

۱. $٤xy'' + ۳y' + ۳y = ۰$

۲. $۲x^۲(۱-x)y'' - x(۱-۷x)y' + y = ۰$

۳. $۲xy'' + ۵(۱-۲x)y' - ۵y = ۰$

٤. جواب عمومی معادله دیفرانسیل بسل $x^۲y'' + xy' + (x^۲ - \alpha^۲)y = ۰$ را، وقتی α یک عدد صحیح نیست، در نزدیکی نقطه $x = ۰$ پیدا کنید.

۵. جواب عمومی معادله فوق هندسی گوس

$$x(1-x)y''+[c-(a+b+1)x]y'-aby=0$$

را در نزدیکی نقطه $x=0$ پیدا کنید. در اینجا a، b و c اعداد ثابت بوده و c یک عدد صحیح نیست.

٤-٤- معادله شاخص با ریشه‌های برابر

٤-٤-١ تعریف: وقتی توان‌های s_1 و s_2 برابرند، با روش بخش ٤-٣، تنها می‌توان یک جواب به صورت (۱۱) از بخش (٤-۳) پیدا کرد. برای آشنایی با چگونگی پیدا کردن جواب دوم، یک معادله $Ly=x^2y''+b_1xy'+b_2y=0$ **که توان‌های آن برابرند و** b_1 و b_2 **ثابت هستند، را در نظر می‌گیریم و جوابی از آن به صورت** $y(x,s)=x^s$ **را جستجو می‌کنیم. با مشتق‌گیری از این جواب و قرار دادن مشتقات در معادله دیفرانسیل به دست می‌آوریم:**

$$y'(x,s)=sx^{s-1}$$
$$y''(x,s)=s(s-1)x^{s-2}$$

بنابراین

$$Ly(x,s)=s(s-1)x^s+b_1sx^s+b_2x^s=0$$

یا

$$Ly(x,s)=[s(s-1)+b_1s+b_2]x^s=0$$

توان‌های این معادله، ریشه‌های معادله شاخص

$$f(s)=(s-s_1)(s-s_2)=s(s-1)+b_1s+b_2=0$$

هستند. اگر $s_1=s_2$ آنگاه

$$Ly(x,s)=(s-s_1)^2x^s \qquad (1)$$

به وضوح $Ly(x,s_1)=0$. بنابراین یک جواب معادله عبارت است از:

$$y_1(x)=y(x,s_1)=x^{s_1}$$

برای به دست آوردن جواب دوم، از دو طرف معادله (۱) نسبت به s مشتق می‌گیریم و تغییر ترتیب مشتق‌گیری نسبت به s و x، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s}Ly(x,s)&=L\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\\&=\frac{\partial}{\partial s}\left[(s-s_1)^2x^s\right]\\&=\left[2(s-s_1)x^s+(s-s_1)^2x^s\operatorname{Ln}x\right]\\&=\left[2(s-s_1)+(s-s_1)^2\operatorname{Ln}x\right]x^s\end{aligned}$$

با قرار دادن $s=s_1$ در رابطه‌ی بالا، مشاهده می‌کنیم که

$$L\frac{\partial y}{\partial s}(x,s)\Big|_{s=s_1}=0$$

بنابراین، جواب دوم عبارت است از:

$$y_2(x)=\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\Big|_{s=s_1}=\frac{\partial}{\partial s}(x^s)\Big|_{s=s_1}=x^s\operatorname{Ln}x\Big|_{s=s_1}=x^{s_1}\operatorname{Ln}x$$

۴-۴-۲ مثال: در حالتی که ریشه‌های معادله شاخص معادله دیفرانسیل

$$Ly=x^2y+xP(x)y'+Q(x)y=0$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند، برابرند. برای یافتن جواب دوم معادله دیفرانسیل روش ۴-۴-۱ را به کار می‌بریم.

از بخش قبل می‌دانیم که معادله دارای یک جواب به صورت

$$y(x,s)=x^s\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^{n+s} \tag{۲}$$

است، که در آن ضرایب A_i باید تعیین شوند. مانند بخش قبل [فرمول (۱۲) بخش ٤-۳]، خواهیم داشت

$$Ly(x,s) = f(s)A_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty}\left[f(s+n)A_n(s) - \sum_{k=0}^{n-1} g_n(k,s)A_k\right]x^{n+s}$$

از این رو، به ازای $n \geq 1$ و $|s-s_1|<1$ داریم $f(s+n)\neq 0$. ضرایب A_n را می‌توان برحسب A_0 (که آن را یک ثابت غیرصفر مستقل از s در نظر می‌گیریم) از رابطه‌ی بازگشتی

$$A_n(s) = \frac{1}{(s+n-s_1)^2}\sum_{k=0}^{n-1} g_n(k,s)A_k \quad , \qquad n \geq 1$$

به دست آورد. توابع A_n که بدین‌گونه تعریف می‌شود، توابع گویایی از s هستند و از این رو دارای مشتق از همه‌ی مراتب به ازای $|s-s_1|<1$ می‌باشند.

فرض می‌کنیم که ضرایب $A_n(s)$ در سری (۲) به این روش انتخاب شوند. در این صورت از معادله (۳) نتیجه می‌شود که

$$Ly(x,s) = A_0(s-s_1)^2 x^s \qquad (٤)$$

روشن است که $Ly(x,s_1)=0$ بنابراین توابع

$$y_1(x) = y(x,s_1) = x^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s_1)x^n \qquad (۵)$$

یک جواب است. با مشتق‌گیری از دو طرف معادله (٤) نسبت به s و قرار دادن $s=s_1$ مشاهده می‌کنیم که

$$\left.\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right|_{s=s_1} = L\left.\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right|_{s=s_1}$$
$$= 2A_0(s-s_1)x^s + A_0(s-s_0)^2 x^s \operatorname{Ln} x\Big|_{s=s_1} = 0$$

از این رو جواب دوم عبارت می‌شود از

$$y_2(x)=\left.\frac{\partial y(x,s)}{\partial s}\right|_{s=s_1}=x^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s_1)x^n \operatorname{Ln} x+x^{s_1}\sum_{n=1}^{\infty} A'_n(s_1)x^n$$

یا

$$y_2(x)=y_1(x)\operatorname{Ln} x+x^{s_1}\sum_{n=1}^{\infty} A'_n(s_1)x^n \qquad (6)$$

که در آن y_1 جواب (۵) است. بدون اثبات می‌پذیریم که سری توانی فرمول y_2 دست کم به ازای $|x|<R$ (در اینجا R شعاع همگرایی مربوط به سری‌های توانی $P(x)$ و $Q(x)$ می‌باشد) همگراست و y_2 دست کم بر بازه‌ی $(0,R)$ یک جواب معادله است.

۴-۴-۳ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$Ly=x^2y''+3xy'+(1-2x)y=0 \qquad (7)$$

را به ازای $x>0$، پیدا کنید.

حل: با مقایسه این معادله (۲) از بخش ۴-۳، مشاهده می‌کنیم که

$$P(x)=3 \qquad , \qquad Q(x)=1-2x$$

از این رو، $Q(x),P(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند. بنا به تعریف [۴-۳-۱]، $x=0$ یک نقطه منفرد منظم از معادله دیفرانسیل است. از طرفی چون $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای می‌باشند، پس بنا به بحث بالا سری‌های جواب‌های معادله دیفرانسیل بر بازه $(-\infty,\infty)$ معتبر هستند. فرض می‌کنیم که معادله دیفرانسیل دارای جوابی به صورت

$$y(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^{n+s} \qquad (8)$$

باشد در این صورت

$$y'(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s-1}$$

$$y''(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}$$

با قرار دادن سری‌های بالا در (۷) به دست می‌آوریم.

$$Ly(x,s)=x^{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}+$$

$$3x\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s-1}+(1-2x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^{n+s}=0$$

یا

$$Ly(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty} 3A_n(s)(n+s)x^{n+s}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty} -2A_n(s)x^{n+s+1}=0$$

در اینجا سری چهارم با x^{s+1} شروع می‌شود، در حالی که سری‌های دیگر با x^{s} شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌های اول سری‌های اول، دوم و سوم می‌نویسیم

$$Ly(x,s)=s(s-1)A_0x^{s}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s}+3A_0sx^{s}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 3A_n(s)(n+s)x^{n+s}+A_0x^{s}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty} -2A_n(s)x^{n+s+1}=0$$

اینک همه سری‌ها با x^{s+1} شروع می‌شوند.برای ترکیب سری‌ها با تغییر اندیس جمع در سری چهارم به $n=1$، خواهیم داشت

$$\left[s(s-1)+3s+1\right]A_0x^{s}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3A_n(s)(n+s)x^{n+s}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)x^{n+s}+\sum_{n=1}^{\infty} -2A_{n-1}(s)x^{n+s}=0$$

با گردآوری توان‌های مشابه x، به دست می‌آوریم

$$(s+1)^{2}A_0x^{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\{[(n+s)(n+s-1)+3(n+s)+1]A_n(x)-$$

$$2A_{n-1}(s)\}x^{n+s}=0$$

یا

$$(s+1)^2A_0x^s+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+s+1)^2A_n(s)-2A_{n-1}(s)\right]x^{n+s}=0$$

چون $A_0 \neq 0$، مشاهده می‌کنیم که s باید ریشه‌های معادله شاخص

$$f(s)=(s+1)^2=0$$

باشد در نتیجه

$$s_1=s_2=-1$$

ضرایب $A_n(s)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که در رابطه بازگشتی

$$(n+s+1)^2A_n(s)=2A_{n-1}(s) \quad , \quad n\geq 1$$

یا

$$A_n(s)=\frac{2A_{n-1}(s)}{(n+s+1)^2} \quad , \quad n\geq 1$$

صدق نمایند. در این صورت

$$n=1 \quad , \quad A_1(s)=\frac{2A_0}{(s+2)^2}$$

$$n=2 \quad , \quad A_2(s)=\frac{2A_1}{(s+3)^2}=\frac{2^2A_0}{(s+2)^2(s+3)^2}$$

$$\vdots$$

$$A_n(s)=\frac{2^nA_0}{(s+2)^2(s+3)^2\dots(s+n+1)^2} \quad , \quad n\geq 1 \tag{9}$$

با قرار دادن $s=s_1=-1$ در رابطه‌ی بالا، خواهیم داشت

$$A_n(-1)=\frac{2^nA_0}{(1)^2(2)^2\dots.(n)^2}=\frac{2^nA_0}{(n!)^2} \tag{10}$$

با انتخاب $A_0=1$ و قرار دادن $s=s_1=-1$ و $A_n(-1)$ در (۸) به دست می‌آوریم:

$$y_1(x)=x^{-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)^2}x^n\right]$$

برای به دست آوردن جواب دوم از فرمول (٦) استفاده می‌کنیم و به محاسبه $A'_n(-1)$ نیازمندیم. برای محاسبه این مشتقات از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم. با لگاریتم‌گیری از دو طرف فرمول (۹) به دست می‌آوریم

$$\operatorname{Ln} A_n(s)=\operatorname{Ln}(2^n A_0)-2\left[\operatorname{Ln}(s+2)+\operatorname{Ln}(s+3)+\ldots+\operatorname{Ln}(s+n+1)\right]$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه بالا نسبت به s، خواهیم داشت

$$\frac{A'_n(s)}{A_n(s)}=-2\left[\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}+\ldots+\frac{1}{s+n+1}\right]$$

با قرار دادن $s=s_1=-1$ در رابطه‌ی بالا، به دست می‌آوریم

$$\frac{A'_n(-1)}{A_n(-1)}=-2\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right] \qquad (11)$$

با توجه به فرمول (۱۰) و با فرض $A_0=1$، خواهیم داشت:

$$A_n(-1)=\frac{2^n}{(n!)^2}$$

و با معرفی نماد

$$\phi(n)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$$

از (۱۱) نتیجه می‌شود که

$$A'_n(-1)=-\frac{2^{n+1}}{(n!)^2}\phi(n)$$

با قرار دادن مقادیر بالا در فرمول کلی (٦) جواب دوم به صورت

$$y_2(x)=y_1(x)\operatorname{Ln}x-x^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\phi(n)}{(n!)^2}x^n$$

به دست می‌آید. بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل که به ازای $x>0$ معتبر است، عبارت است از

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$$

۴-۴-۴ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل لاگر

$$xy''+(1-x)y'+py=0$$

را که در آن p ثابت است، به ازای $x>0$، پیدا کنید.

حل: با ضرب کردن دو طرف معادله در x، به دست می‌آوریم

$$Ly=x^2y''+x(1-x)y'+pxy=0 \qquad (۱۲)$$

با مقایسه این معادله با معادله (۲) از بخش ۴-۳ در می‌یابیم که

$$p(x)=1-x \qquad\qquad Q(x)=px$$

از این رو، $P(x)$ و $Q(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند. بنا به تعریف ۴-۳-۱، $x=0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم از معادله دیفرانسیل است. از طرفی، چون $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای می‌باشند، پس بنا به بحث مربوط به این بخش جواب‌های معادله دیفرانسیل بر بازه‌ی $(-\infty,\infty)$ معتبر هستند. فرض می‌کنیم که معادله دیفرانسیل دارای جوابی به صورت

$$y(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^{n+s} \qquad (۱۳)$$

باشد، در این صورت

$$y'(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s-1}$$

$$y''(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}$$

با قرار دادن سری‌های بالا در (۱۲)، به دست می‌آوریم

$$Ly(x,s)=x^{2}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}+$$

$$+x(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s-1}+px\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^{n+s}=0$$

یا

$$Ly(x,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} -A_n(n+s)x^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty} pA_n(s)x^{n+s+1}=0$$

در اینجا سری‌های سوم و چهارم با x^{s+1} شروع می‌شوند. در حالی که سری‌های دیگر با x^{s} شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌های اول سری‌های اول و دوم، می‌نویسیم

$$Ly(x,s)=s(s-1)A_0x^{s}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s}+sA_0x^{s}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty} -A_n(s)(n+s)x^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty} pA_n(s)x^{n+s+1}=0$$

اینک همه‌ی سری‌ها با x^{s+1} شروع می‌شوند. برای ترکیب سری‌ها با تغییر اندیس جمع در سری‌های سوم و چهارم به $n=1$، خواهیم داشت:

$$Ly(x,s)=\left[s(s-1)+s\right]A_0x^{s}+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s}+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s}+\sum_{n=1}^{\infty} -A_{n-1}(s)(n+s-1)x^{n+s}+\sum_{n=1}^{\infty} pA_{n=1}(s)x^{n+s}=0$$

با گردآوری توان‌های مشابه‌ی x. به دست می‌آوریم

$$s^{2}A_0x^{s}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n+s)(n+s-1)+(n+s)\right]A_n(s)-\left[(n+s-1)-p\right]A_{n-1}\right\}x^{n+s}=0$$

یا

$$s^2 A_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{(n+s)^2 A_n(s) - [(n+s-1)-p] A_{n-1}\right\} x^{n+s} = 0$$

چون $A_0 \neq 0$، مشاهده می‌کنیم که s باید ریشه‌های معادله‌ی شاخص

$$f(s) = s^2 = 0$$

باشد. در نتیجه

$$s_1 = s_2 = 0$$

ضرایب $A_n(s)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که در رابطه‌ی بازگشتی

$$(n+s)^2 A_n(s) = [(n+s-1)-p] A_{n-1} \quad , \quad n \geq 1$$

یا

$$A_n(s) = \frac{[(n+s-1)-p]}{(n+s)^2} A_{n-1} \quad , \quad n \geq 1 \qquad (14)$$

صدق نمایند. در این صورت

$$n=1 \quad , \quad A_1(s) = \frac{s-p}{(s+1)^2} A_0$$

$$n=2 \quad , \quad A_2(s) = \frac{(s+1)-p}{(s+2)^2} A_1$$

$$= \frac{(s+1)-p}{(s+2)^2} \cdot \frac{s-p}{(s+1)^2} A_0$$

$$n=3 \quad , \quad A_3(s) = \frac{(s+2)-p}{(s+3)^2} A_2$$

$$= \frac{(s+2)-p}{(s+3)^2} \cdot \frac{(s+1)-p}{(s+2)^2} \cdot \frac{s-p}{(s+1)^2} A_0$$

$$\vdots$$

$$A_n(s) = \frac{(s+n-1-p)(s+n-2-p)\ldots(s+1-p)(s-p)}{(s+n)^2 (s+n-1)^2 \ldots (s+2)^2 (s+1)^2} A_0 \qquad n \geq 1 \quad (15)$$

با قرار دادن $s = s_1 = 0$ در رابطه‌ی (۱۵) خواهیم داشت

$$A_n(0) = \frac{(n-1-p)(n-2-p)\dots(1-p)(-p)}{n^2(n-1)^2\dots(2)^2(1)^2} A_0 \qquad n \ge 1$$

یا

$$A_n(0) = \frac{(-p)(-p+1)\dots(-p+n-2)(-p+n-1)}{(n!)^2} A_0 \qquad n \ge 1 \qquad (16)$$

با انتخاب $A_0 = 1$ و قرار دادن $s = s_1 = 0$ در (۱۳) یک جواب از معادله دیفرانسیل لاگر به صورت

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-p)(-p+1)\dots(-p+n-2)(-p+n-1)}{(n!)^2} x^n \qquad (17)$$

در می‌آید. از (۱۶) مشاهده می‌کنیم که اگر p یک عدد صحیح مثبت و $n > p$ باشد، آنگاه

$$A_n(0) = \frac{(-p)(-p+1)\dots(-p+(p-1))(-p+p)\dots(-p+n-1)}{(n!)^2} = 0$$

بنابراین، جواب (۱۷) با فرض $p = k$ به صورت زیر در می‌آید:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{(-k)\dots(-k+n-2)(-k+n-1)}{(n!)^2} x^n$$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n(k)(k-1)\dots(k-n+2)(k-n+1)}{(n!)^2} x^n$$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n(k-n)k(k-1)\dots(k-n+2)(k-n+1)}{(n!)^2(k-n)} x^n$$

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^n k}{(n!)^2(k-n)} x^k$$

این جواب را چند جمله‌ای لاگرمی نامیم و آن را با $Ln(x)$ نمایش می‌دهیم.

چون به دست آوردن فرمول کلی برای جواب دوم مشکل است، تنها $A_1'(0)$ و $A_2'(0)$ را محاسبه می‌کنیم و در فرمول (۶) قرار می‌دهیم.

اینک با مشتق‌گیری از

$$A_1(s)=\frac{s-p}{(s+1)^2}A_0$$

نسبت به s، خواهیم داشت

$$A_1'(s)=\frac{(s+1)^2-2(s+1)(s-p)}{(s+1)^4}A_0$$

بنابراین،

$$A_1'(0)=(1+2p)A_0$$

به همین نحو، با مشتق‌گیری از

$$A_2(s)=\frac{[(s+1)-p][s-p]}{(s+1)^2(s+2)^2}A_0$$

نسبت به s، به دست می‌آوریم

$$A_2'(s)=\frac{((s-p)+[(s+1)-p])(s+1)^2(s+2)^2-\left[2(s+1)(s+2)^2+\right.}{(s+1)^4(s+2)^4}$$

$$\frac{\left.+2(s+1)^2(s+2)\right]([(s+1)-p][s-p])}{(s+1)^4(s+2)^4}A_0$$

بنابراین:

$$A_2'(s)=\frac{(1-2p)(2)^2-\left[2(2)^2+2(2)\right](1-p)(-p)}{(1)(2)^4}A_0$$

$$A_2'(s)=\frac{4(1-2p)+12(1-p)(p)}{16}A_0$$

$$A'_2(s)=\frac{-12p^2+4p+4}{16}A_0$$

$$A'_2(s)=\frac{3p^2+p+1}{4}A_0$$

با قرار دادن $s=s_2=0$ و مقادیر بالا در فرمول (۶) جواب دوم به صورت

$$y_2(x)=y_1(x)\operatorname{Ln}x+(1+2p)x-\frac{3p^2+p+1}{4}x^2+\dots$$

به دست می‌آید. بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل لاگر که به ازای $x>0$ معتبر است، عبارت است از

$$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$$

۴-۴-۵ تمرین‌های بخش ۴-۴

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را به ازای $x>0$ پیدا کنید.

۱. $Ly(x,s)=x^2y''-x(1+x)y'+y=0$

۲. $Ly(x,s)=4x^2y''+(1-2x)y=0$

۳. $Ly(x,s)=x^2y''+x(x-3)y'+4y=0$

۴. معادله دیفرانسیل $xy''+y'+xy=0$ را که به معادله دیفرانسیل بل از مرتبه‌ی صفر معروف است، حل کنید.

۵. معادله دیفرانسیل $Ly(x,s)=x(x-2)y''+2(x-1)y'-2y=0$ را در نزدیکی نقطه‌ی $x=2$ حل کنید.

۴-۵ حالتی که اختلاف توان‌ها عددی صحیح و مثبت است.

۴-۵-۱ تعریف: در صورتی که $s_1-s_2=N$ یک عدد صحیح و مثبت باشد، معادله‌ی

$$Ly=x^2y''+xP(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ در $x=0$ تحلیلی هستند، ممکن است یک یا دو جواب به صورت $y(x)=x^s\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n x^n$ داشته باشد. بنا به بحث ارائه شده در ٤-۳-۷ در هر حالت معادله‌ی (۱) همیشه به ازای توان بزرگتر یک جواب به صورت $y_1(x)=x^{s_1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n x^n$ دارد.

اینک حالتی را که معادله تنها یک جواب به صورت بالا دارد، بررسی می‌کنیم. بنا به بحث ارائه شده در ٤-۳-۷ و معادله‌ی (۱۲) بخش ٤-۳، با قرار دادن سری

$$y(x,s)=x^s\sum_{n=0}^{\infty}A_n(s)x^n \tag{۲}$$

در معادله‌ی (۱) به دست می‌آوریم

$$Ly(x,s)=f(s)A_0x^s+\sum_{n=1}^{\infty}\left[f(n+s)A_n-\sum_{k=0}^{n-1}g_n(k,s)A_k\right]x^{n+s}=0 \tag{۳}$$

در اینجا به ازای $n\geq 1$ و $s_1-s_2=N$ داریم

$$f(s)=(s-s_1)(s-s_2)=(s-s_2-N)(s-s_2)$$

و

$$f(n+s)=(s+n-s_2-N)(n+s-s_2)$$

به ویژه، مشاهده می‌کنیم که وقتی $s=s_2$، $f(s+N)$ صفر است، زیرا

$$f(s+N)=(s-s_2)(s+N-s_2)$$

این تنها مقداری از $f(s+n)$ است که به ازای $s=s_2$ صفر می‌شود.

حال توابع ضریب A_n را (که A_0 یک ثابت غیرصفر است) چنان انتخاب می‌کنیم که در رابطه بازگشتی

$$f(s+n)A_n(s)=\sum_{k=0}^{k-1}g_n(k,s)A_k \quad , \qquad n\geq 1 \tag{٤}$$

صدق کند. در این صورت توابع $A_1, A_2, \ldots, A_{N-1}$ و $s = s_2$ تحلیلی هستند. لیکن به ازای N، n مقادیر $A_n(s)$ عامل $s - s_2$ را در مخرج دارند. این توابع وقتی s به s_2 میل می‌کند بی نهایت می‌شوند. با وجود این، توابع

$$B_n(s) = (s - s_2) A_n(s)$$

در نقطه $s = s_2$ تحلیلی هستند و به ازای s های نزدیک به s_2، بلکه برای $s = s_2$ در رابطه‌ی بازگشتی (۴) صدق می‌کنند. برای مشاهده این مطلب دو طرف (۴) را در $s - s_2$ ضرب کنید.

قرار می‌دهیم

$$\tilde{y}(x,s) = (s - s_2) y(x,s) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) x^n$$

از ضرب کردن دو طرف معادله (۳) در $(s - s_2)$ مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} L\tilde{y}(x,s) &= (s - s_2) y(x,s) f(s) x^s \\ &= A_0 (s - s_1)(s - s_2)^2 x^s \end{aligned}$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه‌ی بالا نسبت به s و قرار دادن $s = s_2$ مشاهده می‌کنیم که

$$\left.\frac{\partial}{\partial s} L\tilde{y}(x,s)\right|_{s=s_2} = \left. L \frac{\partial \tilde{y}(x,s)}{\partial s}\right|_{s=s_2}$$

$$= A_0 (s - s_2)^2 x^s + 2A_0 (s - s_1)(s - s_2) x^s$$

$$\left. + A_0 (s - s_1)(s - s_2)^2 x^s . \operatorname{Ln} x \right|_{s=s_2} = 0$$

بنابراین،

$$y_1(x) = \tilde{y}(x, s_2) \quad , \quad y_2(s) = \left.\frac{\partial \tilde{y}(x,s)}{\partial s}\right|_{s=s_2}$$

حداقل به طور صوری در معادله دیفرانسیل صدق می‌کند.

اینک صورت‌های این دو جواب صوری را بررسی می‌کنیم. چون به ازای $0 \le n \le N-1$, $B_n(s_2)=0$. جواب $\tilde{y}_1$ به صورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{y}_1(x)=x^{s_2}\sum_{n=N}^{\infty} B_n(s_2)x^n$$

با تغییر اندیس، داریم:

$$=x^{s_2}\sum_{n=0}^{\infty} B_{n+N}(s_2)x^{n+N}$$

$$=x^{s_2+N}\sum_{n=0}^{\infty} B_{n+N}(s_2)x^{n}$$

$$=x^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty} B_{n+N}(s_2)x^{n}$$

در نتیجه با ضرب کردن دو طرف جواب $y_1(x)=x^{s_1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ در $\dfrac{B_N(s_2)}{A_0}$ خواهیم داشت

$$\tilde{y}_1=\frac{B_N(s_2)}{A_0}y_1$$

جواب y_2 را از قرار دادن $s=s_2$ در فرمول

$$\frac{\partial \tilde{y}(x,s)}{s}=\frac{\partial}{\partial s}\left[x^s\sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)x^n\right]$$

$$=x^s\sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)x^n \operatorname{Ln} x+x^s\sum_{n=0}^{\infty} B'_n(s)x^n$$

به دست می‌آید. داریم

$$y_2(x)=\tilde{y}_1 \operatorname{Ln} x+x^{s_2}\sum_{n=0}^{\infty} B'_n(s_2)x^n$$

یا

$$y_2(x)=\frac{B_N}{A_0}y_1(x)\operatorname{Ln} x+x^{s_2}\sum_{n=0}^{\infty} B'_n(s_2)x^n \qquad (5)$$

در اینجا واقعیت همگرایی سری‌های توانی فرمول‌های جواب‌ها را دست کم بر بازه‌ی $|x| < R$ (در اینجا R شعاع همگرایی سری‌های مربوط به $P(x)$ و $Q(x)$ است) می‌پذیریم و تابع $y_۲$ دست کم بر بازه‌ی $(۰, R)$ جوابی از معادله دیفرانسیل است.

اینک در مثال زیر حالتی را که معادله‌ی (۱) دارای دو جواب به صورت $y = x^s \sum\limits_{n=۰}^{\infty} A_n x^n$ است، بررسی می‌کنیم.

۴-۵-۲ مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $Ly(x,s) = xy'' - (۴ + x)y' + ۲y = ۰$ را در نزدیکی نقطه‌ی منفرد و منظم $x = ۰$ پیدا کنید.

حل: با ضرب کردن دو طرف معادله در x، معادله به معادله‌ی

$$Ly(x,s) = x^۲y'' - x(۴ + x)y' + ۲xy = ۰ \qquad (۶)$$

تبدیل می‌شود. می‌دانیم که معادله دارای جوابی به صورت

$$y(x,s) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n(s)x^{n+s}$$

است. در این صورت

$$y'(x,s) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s-۱}$$

$$y''(x,s) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-۱)x^{n+s-۲}$$

با قرار دادن سری‌های بالا در معادله‌ی (۶)، به دست می‌آوریم

$$Ly(x,s) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-۱)x^{n+s} + \sum_{n=۰}^{\infty} -$$

$$۴A_n(s)(n+s)x^{n+s} + \sum_{n=۰}^{\infty} -A_n(s)(n+s)x^{n+s+۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} ۲A_n(s)x^{n+s+۱} = ۰$$

در اینجا سری‌های چهارم و پنجم با x^{s+1} شروع می‌شوند. در حالی که سری‌های دیگر با x^s شروع می‌شوند.با گردآوری جمله‌های اول و دوم، می‌نویسیم

$$Ly(x,s)=s(s-1)A_0x^s+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s}-4sA_0x^s$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} -4A_n(s)(n+s)x^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty} -A_n(s)(n+s)x^{n+s+1}+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2A_n(s)x^{n+s+1}=0$$

اینک همه‌ی سری‌ها با x^{s+1} شروع می‌شوند. برای ترکیب سری‌ها با تغییر اندیس جمع در سری‌های سوم و چهارم به $n=1$، خواهیم داشت

$$Ly(x,s)=\left[s(s-1)-4s\right]A_0x^s+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} -4A_n(s)(n+s)x^{n+s}+\sum_{n=1}^{\infty} -A_{n-1}(s)(n+s-1)x^{n+s}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} 2A_{n-1}(s)x^{n+s}=0$$

یا

$$Ly(x,s)=\left[s^2-5s\right]A_0x^s+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n+s)^2-5(n+s)\right]A_n-(n+s-3)A_{n-1}\right\}$$

$$x^{n+s}=0$$

چون $A_0\neq 0$، مشاهده می‌کنیم که s باید ریشه‌های معادله‌ی شاخص $f(s)=s^2-5s=0$ باشند. بنابراین

$$s_1=5\quad,\quad s_2=0$$

ضرایب $A_n(s)$ را باید به قسمی انتخاب کرد که رابطه‌ی بازگشتی

$$\left[(n+s)^2-5(n+s)\right]A_n(s)-(n+s-3)A_{n-1}(s)=0\quad,\quad n\geq 1 \qquad (7)$$

یا

$$A_n(s)=\frac{(n+s-۳)}{(n+s)(n+s-۵)}A_{n-۱}(s) \qquad n\geq ۱ \qquad (۸)$$

برقرار باشد. با جایگذاری $s_۱=۵$ در رابطه بالا به دست می‌آوریم

$$A_n=\frac{n+۲}{(n+۵)(n)}A_{n-۱} \qquad , \qquad n\geq ۱$$

در این صورت

$$n=۱ \quad , \qquad A_۱=\frac{۳}{(۱)(٦)}A_٠$$

$$n=۲ \quad , \qquad A_۲=\frac{٤}{(۲)(۷)}A_۱$$

$$=\frac{(۳)(٤)}{(۱)(۲)(٦)(۷)}A_٠$$

$$n=۳ \quad , \qquad A_۳=\frac{۵}{(۳)(۸)}A_۲$$

$$=\frac{(۳)(٤)(۵)}{(۱)(۲)(۳)(٦)(۷)(۸)}A_٠$$

$$n=٤ \quad , \qquad A_٤=\frac{٦}{(٤)(۹)}A_۳$$

$$=\frac{(۳)(٤)(۵)}{(۱)(۲)(۳)(٤)(۷)(۸)(۹)}A_٠$$

$$n=۵ \quad , \qquad A_۵=\frac{۷}{(۵)(۱٠)}A_٤$$

$$=\frac{(۳)(٤)(۵)}{(۱)(۲)(۳)(٤)(۵)(۸)(۹)(۱٠)}A_٠$$

$$\vdots$$

$$A_n=\frac{٦٠}{n!\,(n+۳)(n+٤)(n+۵)}A_٠$$

با انتخاب $A_0 = 1$ و قرار دادن $s = s_1 = 5$ و A_n در فرمول مربوط به $y(x,s)$، جواب $y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{60x^{n+5}}{n!(n+3)(n+4)(n+5)}$ به دست می‌آید. اینک، برای به دست آوردن جواب دوم، با قرار دادن $s = s_2 = 0$ خواهیم داشت

$$n(n-5)A_n = (n-3)A_{n-1} \qquad , \qquad n \geq 1$$

از این رو،

$$n=1 \quad , \quad (1)(-4)A_1 = -2A_0$$
$$A_1 = \frac{1}{2}A_0$$

$$n=2 \quad , \quad (2)(-3)A_2 = (-1)A_1$$
$$A_2 = \frac{1}{12}A_0$$

بنابراین

$$n=3 \quad , \quad (3)(-2)A_3 = 0 \qquad A_3 = 0$$

$$n=4 \quad , \quad (4)(-1)A_4 = A_3 = 0$$
$$A_4 = 0$$

$$n=5 \quad , \quad 0A_5 = 2A_4 = 0$$

دراینجا A_5 اختیاری است و می‌توان آن را برابر با صفر انتخاب کرد. در نتیجه

$$A_n = 0 \qquad n \geq 3$$

با انتخاب $A_0 = 1$ و قرار دادن $s = s_2 = 0$ و مقادیر A_n در فرمول مربوط به $y(x,s)$، جواب

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2$$

به دست می‌آید. بنابراین به ازای x، جواب عمومی معادله برابر است با

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

۳-۵-٤ مثال: جواب عمومی معادله‌ی

$$x^2 y'' + x(1-x)y' - (1+3x)y = 0$$

را در نزدیکی نقطه منفرد منظم $x=0$ پیدا کنید.

حل: می‌دانیم که معادله حداقل دارای یک جواب به صورت

$$y(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) x^{n+s} \tag{9}$$

است. در این صورت داریم

$$y'(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s-1}$$

$$y''(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}$$

با قرار دادن سری‌های بالا در معادله‌ی داده شده، معادله

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s} + (x-x^2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s-1} -$$

$$-(1+3x)\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)x^{n+s} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} -$$

$$-A_n(s)(n+s)x^{n+s+1} + \sum_{n=0}^{\infty} -A_n(s)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} -3A_n(s)x^{n+s+1} = 0$$

به دست می‌آید. در اینجا سری‌های سوم و پنجم با x^{s+1} شروع می‌شوند، در حالی که سری‌های دیگر با x^s شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌های اول سری‌های اول، دوم و چهارم، می‌نویسیم

$$s(s-1)A_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s} + sA_0 x^s$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} -A_n(s)(n+s)x^{n+s-1} - A_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} -A_n(s)x^{n+s}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} -3A_n(s)x^{n+s+1} = 0$$

اینک همه‌ی سری‌ها با x^{s+1} شروع می‌شوند. برای ترکیب سری‌ها با تغییر اندیس جمع در سری‌های سوم و پنجم به $n=1$، خواهیم داشت

$$s(s-1)A_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)x^{n+s} + sA_0 x^s$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)x^{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty} -A_{n-1}(s)(n+s-1)x^{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty} -$$

$$A_n(s)x^{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty} -3A_{n-1}(s)x^{n+s} = 0$$

یا

$$(s^2-1)A_0 x^s + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\left[(n+s)^2-1\right]A_n(s) - (n+s+2)A_{n-1}(s)\right\}x^{n+s} = 0$$

چون $A_0 \neq 0$، مشاهده می‌کنیم که s باید ریشه‌های معادله‌ی شاخص

$$f(s) = s^2 - 1 = 0$$

باشند. بنابراین، $s_1 = 1 \,,\ s_2 = -1$. ضرایب $A_n(s)$ را باید به قسمی انتخاب کرد که رابطه‌ی بازگشتی

$$(n+s+1)(n+s-1)A_n(s) - (n+s+2)A_{n-1}(s) = 0 \,, \qquad n \geq 1$$

یا

$$A_n(s) = \frac{(n+s+2)}{(n+s+1)(n+s-1)}A_{n-1}(s) \qquad , \qquad n \geq 1$$

برقرار باشد. داریم

$$n=1 \quad , \qquad A_1(s)=\frac{(s+3)}{(s+2)s}A_0$$

$$n=2 \quad , \qquad A_2(s)=\frac{(s+4)}{(s+3)(s+1)}A_1$$

$$=\frac{(s+4)}{s(s+1)(s+2)}A_0$$

$$n=3 \quad , \qquad A_3(s)=\frac{(s+5)}{(s+4)(s+2)}A_2(s)$$

$$=\frac{(s+5)}{s(s+1)(s+2)^2}A_0$$

$$n=4 \quad , \qquad A_4(s)=\frac{(s+6)}{(s+5)(s+3)}A_3(s)$$

$$=\frac{(s+6)}{s(s+1)(s+2)^2(s+3)}A_0$$

$$n=5 \quad , \qquad A_5(s)=\frac{(s+7)}{(s+6)(s+4)}A_4(s)$$

$$A_5(s)=\frac{(s+7)}{s(s+1)(s+2)(s+2)(s+3)(s+4)}A_0$$

$$\vdots$$

$$A_n(s)=\frac{(s+n+2)}{(s+2)[s(s+1)(s+2)\ldots(s+n-1)]}A_0 \quad , \qquad n\geq 1 \qquad (10)$$

با قرار دادن $s=s_1=1$ در رابطه‌ی (۱۰)، به دست می‌آوریم

$$A_n(1)=\frac{(n+3)}{(3)[(1)(2)...(n)]}A_0$$

$$A_n(1)=\frac{n+3}{(3)(n!)}A_0$$

با انتخاب $A_0=1$، جایگذاری $s=s_1=1$ و $A_n(1)$ در فرمول مربوط به $y(x,s)$، جواب $y_1(x)=x\left[1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)}{3(n)}x^n\right]$ به دست می‌آید.

در اینجا $A_2(s)$ $(N=s_1-s_2=2)$، به ازای $s_2=-1$ به دلیل وجود عامل $s+1$ در مخرج رابطه‌ی (۱۰)، تعریف نشده است. بنابراین، معادله برای $s_2=-1$ جوابی به صورت (۹) ندارد. از این رو جواب دوم معادله لگاریتمی است.

قرار می‌دهیم $B_n(s)=(s+1)A_n(s)$. مشاهده می‌کنیم که توابع

$$B_0(s)=(s+1)A_0$$

$$B_1(s)=(s+1)A_1(s)=\frac{(s+1)(s+3)}{s(s+2)}A_0$$

$$\vdots$$

$$B_n(s)=\frac{(s+n+2)}{(s+2)s(s+2)...(s+n-1)}A_0 \qquad n\geq 2 \qquad (11)$$

در $s_2=-1$ تحلیلی هستند. با مشتق‌گیری از B_n ها نسبت به s به دست می‌آوریم

$$B_0'(s)=A_0 \quad\Rightarrow\quad B_0'(-1)=A_0$$

$$B_1'(s)=\frac{(s+3)s(s+2)+(s+1)s(s+2)-[(s+2)(s+1)(s+3)}{s^2(s+2)^2}$$

$$\frac{+s(s+1)(s+3)]}{s^2(s+2)^2}A_0 \qquad B_1'(-1)=-2A_0$$

برای محاسبه‌ی $B_n'(s)$ به ازای $n\geq 2$، با لگاریتم گیری از دو طرف رابطه‌ی (۱۱) و مشتق‌گیری نسبت به s به دست می‌آوریم:

$$\operatorname{Ln} B_n(s) = \operatorname{Ln} A_۰ + \operatorname{Ln}(s+n+۲) - [\operatorname{Ln} s + ۲\operatorname{Ln}(s+۲) + \operatorname{Ln}(s+۳) + \ldots + \operatorname{Ln}(s+n-۱)]$$

$$\frac{B_n'(s)}{B_n(s)} = \frac{۱}{s+n+۲} - \left[\frac{۱}{s} + \frac{۲}{s+۲} + \frac{۱}{s+۳} + \ldots + \frac{۱}{s+n-۱}\right]$$

با قرار دادن $s = s_۲ = -۱$ در رابطه بالا، خواهیم داشت

$$\frac{B_n'(-۱)}{B_n(-۱)} = \frac{۱}{n+۱} - \left[-\frac{۱}{۱} + \frac{۲}{۱} + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n-۲}\right]$$

$$= \frac{۱}{n+۱} - \left[۱ + \frac{۱}{۲} + \ldots + \frac{۱}{n-۲}\right]$$

$$= \frac{۱}{n+۱} - \phi(n-۲)$$

بنابراین

$$B_n'(-۱) = B_n(-۱)\left[\frac{۱}{n+۱} - \phi(n-۲)\right] \qquad n \geq ۲$$

$B_n(-۱)$ را می‌توان با قرار دادن $s = s_۲ = -۱$ در فرمول (۱۱) محاسبه کرد

$$B_n(-۱) = -\frac{(n+۱)}{(۱)(۲)\ldots(n-۲)} A_۰ = -\frac{n+۱}{(n-۲)!} A_۰$$

از این رو،

$$B_n'(-۱) = -\frac{n+۱}{(n-۲)!} A_۰ \left[\frac{۱-(n+۱)\phi(n-۲)}{n+۱}\right] = -\left[\frac{۱-(n+۱)\phi(n-۲)}{(n-۲)!}\right] A_۰$$

با انتخاب $A_۰ = ۱$ و قرار دادن $s = s_۲ = -۱$ و مقادیر $B_n'(-۱)$ در فرمول (۵) جواب دوم به صورت

$$y_۲(x) = y_۱(x) \operatorname{Ln} x + x^{-۱}\left[۱ - ۲x - \sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱-(n+۱)\phi(n-۲)}{(n-۲)!} x^n\right]$$

به دست می‌آید. بنابراین به ازای $x > ۰$ جواب عمومی دیفرانسیل برابر است با

$$y(x)=c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)$$

٤-٥-٤ تمرین‌های بخش ٤-٥

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را در نزدیکی نقطه‌ی منفرد منظم $x=0$ به ازای $x>0$، پیدا کنید.

۱. $x^2(1+2x)y''+2x(1+6x)y'-2y=0$

۲. $x^2y''+x(2+3x)y'-2y=0$

۳. $xy''+y=0$

٤. $x^2y''-3xy'+(3+4x)y=0$

٤-٦ نقطه در بینهایت

٤-٦-۱ تعریف: جواب‌های سری توانی یک معادله دیفرانسیل که تاکنون مورد بررسی قرار داده‌ایم در بازه‌ای حول نقطه‌ی $x=x_0$ همگرا می‌باشند. ولی در بعضی مسائل رفتار جواب‌های معادله دیفرانسیلی به صورت

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

وقتی متغیر مستقل x بی‌نهایت می‌شود، مورد نظر است. با به کار بردن تغییر متغیر

$$x=\frac{1}{t} \qquad (2)$$

متوجه می‌شویم که وقتی t روی مقادیر مثبت یا منفی به صفر میل می‌کند، x مثبت یا منفی بی‌نهایت می‌گردد. با قرار دادن $Y(t)=y(\frac{1}{t})=y(x)$ و با استفاده از قاعده‌ی زنجیری خواهیم داشت.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dt}\frac{dt}{dx} \qquad (3)$$

با نوشتن (۲) به صورت

$$t = \frac{1}{x}$$

و مشتق‌گیری از آن، به دست می‌آوریم

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

یا

$$\frac{dt}{dx} = -t^2$$

بنابراین، با جایگزینی مقدار در (۳) نتیجه می‌شود که

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2}\frac{dY}{dt} = -t^2\frac{dY}{dt} \qquad (4)$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی بالا نسبت به x خواهیم داشت

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}\frac{dY}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}(\frac{dY}{dt})$$

$$= \frac{2}{x^3}\frac{dY}{dt} - \frac{1}{x^2}\frac{d}{dt}(\frac{dY}{dt}).\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{2}{x^3}\frac{dY}{dt} + \frac{1}{x^4}\frac{d^2Y}{dt^2} = t^4\frac{d^2Y}{dt^2} + 2t^3\frac{dY}{dt} \qquad (5)$$

از این رو، با قرار دادن مشتقات بالا در (۱) این معادله‌ی به معادله

$$t^4\frac{d^2Y}{dt^2} + 2t^3\frac{dY}{dt} - t^2 P(\frac{1}{t})\frac{dY}{dt} + Q(\frac{1}{t})Y = 0$$

یا

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}P(\frac{1}{t})\right]\frac{dY}{dt} + \frac{1}{t^4}Q(\frac{1}{t})Y = 0$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + p(t)\frac{dY}{dt} + q(t)Y = 0 \qquad (6)$$

که در آن $P(t)=\frac{۲}{t}-\frac{۱}{t^{۲}}P(\frac{۱}{t})$, $q(t)=\frac{۱}{t^{٤}}Q(\frac{۱}{t})$ تبدیل می‌گردد.

اگر معادله‌ی (٦) دارای یک نقطه‌ی معمولی در $t=۰$ باشد، آنگاه می‌گوییم که معادله‌ی (۱) دارای یک نقطه‌ی معمولی در بی‌نهایت است. به همین نحو، اگر معادله‌ی (٦) دارای یک نقطه‌ی منفرد منظم در نقطه‌ی $t=۰$ باشد، آنگاه می‌گوییم که معادله‌ی (۱) دارای یک نقطه‌ی منفرد منظم در بی‌نهایت است.

٤-٦-۲ مثال: جواب‌های از معادله دیفرانسیل $x^{۲}y''+(۳x-۱)y'+y=۰$ را که به ازای مقادیر بزرگ x معتبر هستند، پیدا کنید.

حل: به آسانی مشاهده می‌کنیم که این معادله دارای یک نقطه‌ی منفرد منظم در $x=۰$ است و نقطه‌ی منفرد دیگری ندارد. با تقسیم دو طرف معادله‌ی داده شده بر $x^{۲}$، معادله‌ی

$$y''+(\frac{۳}{x}-\frac{۱}{x^{۲}})y'+\frac{۱}{x^{۲}}y=۰ \tag{۷}$$

به دست می‌آید. با به کار بردن تغییر متغیر

$$x=\frac{۱}{t}$$

و با توجه به معادله‌ی (٦) معادله‌ی (۷) به معادله‌ی

$$\frac{d^{۲}Y}{dt^{۲}}+\left[\frac{۲}{t}-\frac{۱}{t^{۲}}(۳t-t^{۲})\right]\frac{dY}{dt}+\frac{۱}{t^{٤}}(t^{۲})Y=۰$$

یا

$$\frac{d^{۲}Y}{dt^{۲}}-(\frac{۱}{t}-۱)\frac{dY}{dt}+\frac{۱}{t^{۲}}Y=۰$$

یا

$$t^{۲}\frac{d^{۲}Y}{dt^{۲}}-t(۱-t)\frac{dY}{dt}+Y=۰ \tag{۸}$$

تبدیل می‌گردد که می‌خواهیم آن را در حول نقطه‌ی منفرد منظم $t=0$ حل کنیم. چون $t=0$ یک نقطه‌ی منفرد منظم از معادله‌ی (۸) است، پس نقطه در بینهایت یک نقطه‌ی منفرد منظم از معادله‌ی (۷) می‌باشد. می‌دانیم که معادله (۷) حداقل دارای یک جواب به صورت $Y(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)t^{n+s}$ است. بنابراین

$$Y'(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)t^{n+s-1}$$

$$Y''(t,s)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)t^{n+s-2}$$

با قرار دادن سری‌های بالا در معادله (۸) به دست می‌آوریم

$$t^2\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)t^{n+s-2}+(-t+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)t^{n+s-1}+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)t^{n+s}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)t^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty} -A_n(s)(n+s)t^{n+s}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)t^{n+s+1}+\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)t^{n+s}=0$$

در اینجا سری سوم با t^{s+1} شروع می‌شود، در حالی که سری‌های دیگر با t^s شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌های اول سری‌های اول، دوم و چهارم، می‌نویسیم

$$s(s-1)A_0t^s+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)t^{n+s}-sA_0t^s+\sum_{n=1}^{\infty} -$$
$$A_n(s)(n+s)t^{n+s}+\sum_{n=0}^{\infty} A_n(s)(n+s)t^{n+s+1}+A_0t^s+\sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)t^{n+s}=0$$

اینک همه سری‌ها با t^{s+1} شروع می‌شوند. برای ترکیب سری‌ها با تغییر اندیس جمع در سری سوم به $n=1$، خواهیم داشت

$$[s(s-1)-s+1]A_0 t^s + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)(n+s)(n+s-1)t^{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty} -$$

$$A_n(s)(n+s)t^{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{n-1}(s)(n+s-1)t^{n+s} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(s)t^{n+s} = 0$$

با گردآوری توان‌های مشابه‌ی t، به دست می‌آوریم

$$(s-1)^2 A_0 t^s + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{[(n+s)-1]^2 A_n(s) + (n+s-1)A_{n-1}(s)\right\} t^{n+s} = 0$$

چون $A_0 \neq 0$، مشاهده می‌کنیم که s باید ریشه‌های معادله‌ی شاخص

$$f(s) = (s-1)^2 = 0$$

باشد. در نتیجه

$$s_1 = s_2 = 1$$

ضرایب $A_n(s)$ را چنان انتخاب می‌کنیم که در رابطه بازگشتی

$$(n+s-1)^2 A_n(s) = -(n+s-1)A_{n-1}(s) \quad , \quad n \geq 1$$

یا

$$A_n(s) = -\frac{1}{(n+s-1)} A_{n-1}(s) \quad , \quad n \geq 1$$

صدق نمایند. بنابراین،

$$n=1 \quad , \quad A_1(s) = \frac{-A_0}{s}$$

$$n=2 \quad , \quad A_2(s) = -\frac{A_1(s)}{(s+1)} = \frac{A_0}{s(s+1)}$$

$$n=3 \quad , \quad A_3(s) = -\frac{A_2(s)}{(s+2)} = -\frac{A_0}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\vdots$$

$$A_n(s)=\frac{(-1)^n A_0}{s(s+1)\dots(s+n-1)} \quad , \quad n\geq 1 \tag{۹}$$

با قرار دادن $s=s_1=1$ در رابطه‌ی بالا، خواهیم داشت

$$A_n(1)=\frac{(-1)^n A_0}{(1)(2)\dots(n)}=\frac{(-1)^n A_0}{n!} \tag{۱۰}$$

بـا انتخـاب $A_0=1$ و قـرار دادن $s=s_1=1$ و $A_n(1)$ در فرمـول مربـوط بـه $y(x,s)$ به دست می‌آوریم

$$Y_1(t)=t\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n\right] \tag{۱۱}$$

برای به دست آوردن جواب دوم از فرمول (۶) بخش ٤-٤ استفاده می‌کنیم و به محاسبه $A_n'(1)$ نیازمندیم. برای محاسبه این مشتقات از مشتق‌گیری لگاریتمی استفاده می‌کنیم. با لگاریتم‌گیری از دو طرف (۹) رابطه‌ی

$$\operatorname{Ln} A_n(s)=\operatorname{Ln}\left|(-1)^n A_0\right|-[\operatorname{Ln} s+\operatorname{Ln}(s+1)+\dots+\operatorname{Ln}(s+n-1)]$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه‌ی بالا نسبت به s، خواهیم داشت

$$\frac{A_n'(s)}{A_n(s)}=-\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}+\dots+\frac{1}{s+n-1}\right]$$

با جایگزینی $s=s_1=1$ در رابطه بالا، رابطه‌ی

$$\frac{A_n'(1)}{A_n(1)}=-\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right]$$
$$=-\phi(n)$$

با توجه به فرمول (۱۰) و با فرض $A_0=1$، خواهیم داشت

$$A_n'(1)=\frac{(-1)^n}{n!}[-\phi(n)]$$
$$=(-1)^{n+1}\frac{\phi(n)}{n!}$$

با قرار دادن مقادیر بالا در فرمول (٦) بخش ٤-٤ جواب دوم به صورت

$$Y_{۲}(t)=Y_{۱}(t)\operatorname{Ln}t+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}\phi(n)}{n!}t^{n} \qquad (۱۲)$$

به دست می‌آید. بنابراین با قرار $\frac{۱}{x}$ به جای t در روابط (۱۱) و (۱۲) دو جواب مستقل خطی از معادله‌ی اصلی به صورت

$$y_{۱}(x)=x^{-۱}\left[۱+\sum_{n-۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n}}{n}x^{-n}\right]$$

و

$$y_{۲}(x)=y_{۱}(x)\operatorname{Ln}\frac{۱}{x}+\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^{n+۱}\phi(n)}{n!}x^{-n-۱}$$

به دست می‌آیند که به ازای $x>۰$ معتبر هستند. بنابراین به ازای $x>۰$ جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y(x)=c_{۱}y_{۱}(x)+c_{۲}y_{۲}(x)$$

٤-٦-۳ تمرین‌های بخش ٤-٦

۱. برای هر یک از معادلات زیر، تعیین کنید نقطه در بینهایت یک نقطه معمولی یا یک نقطه منفرد منظم است.

(الف) $x^{۳}(x-۱)y''+(x-۱)y''+٤xy=۰$

(ب) $x^{۲}(x^{۲}-٤)y''+۲x^{۳}y'+۳y=۰$

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را که به ازای x های بزرگ مثبت معتبر می‌باشد، به دست آورید.

۲. $x^{٤}y''+x(۱+۲x^{۲})y'+٥y=۰$

۳. $۲x^{۳}y''+۳x^{۲}y'-y=۰$

٤-٦-٤ تمرین‌های گوناگون فصل ٤

۱. پنج جمله‌ی اول مربوط به سری‌های توانی جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y' + (\sin x)y' + e^{x}y = 0$$

جمله مرتبه kام مربوط به جواب خصوصی هر یک از مسائل زیر را به دست آورید. همچنین بازه‌ی همگرایی هر سری جواب را تعیین کنید.

۲. $xy'' + x^{2}y' - 2y = 0$

۳. $y(1) = 1 \;,\; y'(1) = 0 \quad , \quad k = 4$

$$x^{2}y'' - 2xy' + (\ln x)\,y = 0$$

$$y(1) = 0 \qquad y'(1) = \frac{1}{2} \quad , \quad k = 5$$

٤. $(1 - x)\,y''' - 2xy' + 3y = 0$

$$y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = -1 \quad , \quad y''(0) = 2 \quad , \quad k = 6$$

در تمرین‌های ۵ تا ۷ همه‌ی نقاط منفرد منظم معادلات دیفرانسیل داده شده را پیدا کنید.

۵. $(x-1)^{3}x^{2}y'' - 2(x-1)xy' - 3y = 0$

٦. $(x-1)^{2}x^{4}y'' + 2(x-1)xy' - y = 0$

۷. $(x+1)^{2}y'' + xy' - (x-1)y = 0$

در تمرین‌های ۸ تا ۱۲ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را به صورت سری توانی حول نقطه معمولی $x = 0$ بنویسید. در مورد بازه همگرایی سری جواب بحث کنید.

۸. $(1 + x^{2})\,y'' - 8y = 0$

۹. $(1 + x^{2})\,y'' + 10xy' + 20y = 0$

۱۰. $(x^2+4)y''+6xy'+4y=0$

۱۱. $(1+2x^2)y''-5xy'+3y=0$

۱۲. $(x^2-9)y''+3xy'-3y=0$

در تمرین‌های ۱۳ و ۱٤ جواب عمومی معادله دیفرانسیل را برحسب سری توانی حول نقطه داده شده x_0 بنویسید. در مورد بازه‌ی همگرایی سری جواب بحث کنید.

۱۳. $y''+(x-2)y=0 \qquad x_0=2$

۱٤. $(x^2+2x)y''+(x+1)y'-4y=0 \qquad x_0=-1$

در تمرین‌های ۱۵ الی ۲۰ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را در نزدیکی نقطه منفرد منظم $x=0$ که به ازای x های مثبت همگرا می‌باشند، پیدا کنید.

۱۵. $4x^2y''+4xy'-(4x^2+1)y=0$

۱٦. $8x^2y''+10xy'-(1+x)y=0$

۱۷. $3xy''+(2-x)y'-2y=0$

۱۸. $2x(x+3)y''-3(x+1)y'+2y=0$

۱۹. $2xy''+(1-2x^2)y'-4xy=0$

۲۰. $x(4-x)y''+(2-x)y'+4y=0$

در تمرین‌های ۲۱ تا ۲۵، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل داده شده را در نزدیکی نقطه منفرد منظم $x=0$ که به ازای x های مثبت همگرا می‌باشند، پیدا کنید.

۲۱. $x^2y''+3xy'+(1+4x^2)y=0$

۲۲. $x(1+x)y''+(1+5x)y'+3y=0$

۲۳. $x^2y''-x(1+3x)y'+(1-6x)y=0$

۲٤. $x^2y''+x(3+2x)y'+(1+3x)y=0$

۲۵. $4x^2y''+8x(x+1)y'+y=0$

۲۶. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $4(x-4)^2y''+(x-4)(x-8)y'+xy=0$ را در نزدیکی نقطه منفرد منظم $x=4$ که به ازای $x>4$ همگرا می‌باشند، پیدا کنید.

در تمرین‌های ۲۷ تا ۳۶، جواب عمومی معادلات دیفرانسیل داده شده را در نزدیکی نقطه منفرد منظم $x=0$ که به ازای xهای مثبت همگرا می‌باشد، پیدا کنید.

۲۷. $xy''-(3+x)y'+2y=0$

۲۸. $x(x+1)y''+(x+5)y'-4y=0$

۲۹. $x^2y''+x^2y'-2y=0$

۳۰. $x(1-x)y''-3y'+2y=0$

۳۱. $xy''+(4+3x)y'+3y=0$

۳۲. $xy''-2(x+2)y'+4y=0$

۳۳. $2xy''+6y'+y=0$

۳۴. $4x^2y''+2x(2-x)y'-(1+3x)y=0$

۳۵. $x^2y''-x(6+x)y'+10y=0$

۳۶. $xy''+(3+2x)y'+8y=0$

۳۷. معادله دیفرانسیل $x(1+x)y''+(x+5)y'-4y=0$ را در نزدیکی نقطه $x=1$ حل کنید.

۳۸. معادله دیفرانسیل $x(1-x)y''-3y'+2y=0$ را در نزدیکی نقطه $x=1$ حل کنید.

۳۹. معادله دیفرانسیل

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$$

را در نزدیکی نقطه $x=0$ حل کنید.

۴۰. برای هر یک از معادلات دیفرانسیل داده شده، تعیین کنید نقطه در بینهایت یک نقطه معمولی یا یک نقطه منفرد منظم است.

(الف) $x^4y''+2x^3y'+4y=0$

(ب) $x^{2}y''+y=0$

(ج) $x^{4}y''+y=0$

در تمرین‌های ٤۱ تا ٤٤ جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را که به ازای x های بزرگ مثبت معتبر می‌باشد، به دست آورید.

٤۱. $x(1-x)y''-3y'+2y=0$

٤۲. $x^{3}y''+x(2-3x)y'-(5-4x)y=0$

٤۳. $2x^{2}(x-1)y''+x(5x-3)y'+(x+1)y=0$

٤٤. $2x^{2}(1-x)y''-5x(1+x)y'+(5-x)y=0$

فصل پنجم

توابع بسل

موضوع اصلی مورد بحث در این فصل توابع بسل است، که دارای کاربردهای فراوانی در علوم است. در درس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برخی از کاربردهای این توابع در فیزیک، بررسی خواهد شد.

۵-۱ تابع گاما

در بررسی توابع بسل دانستن برخی از خواص **تابع گاما** که به صورت

$$\Gamma(x)=\int_{0}^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \qquad x>0 \tag{1}$$

تعریف می‌شود، لازم است. این انتگرال به ازای همه xهای بزرگ‌تر از صفر همگراست.

اینک دو خاصیت مهم تابع گاما را بررسی می‌کنیم.

۵-۱-۱ تعریف: ثابت می‌کنیم که

$$\Gamma(1)=1 \tag{2}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{۳}$$

برای اثبات (۲) با جایگذاری x=۱ در فرمول (۱)، خواهیم داشت

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt$$

برای محاسبهٔ این انتگرال از تعریف انتگرال ناسره استفاده می‌کنیم. بنابراین،

$$\Gamma(1) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-t} dt = \lim_{T\to\infty} -e^{-t}\Big|_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left[-e^{-T} + 1\right] = 1$$

برای اثبات (۳) بنابه تعریف (۱)، خواهیم داشت

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_0^T t^x e^{-t} dt$$

برای محاسبهٔ انتگرال بالا از انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم. با انتخاب

$$u = t^x \qquad dv = e^{-t} dt$$

به دست می‌آوریم

$$du = xt^{x-1} dt \quad , \quad v = -e^{-t}$$

پس

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{ \left[-t^x e^{-t}\right]_0^T + x\int_0^T t^{x-1} e^{-t} dt \right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left\{ \left[-T^x e^{-T}\right] + x\int_0^T t^{x-1} e^{-t} dt \right\}$$

$$= x\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

۵-۱-۲ تعریف: اینک با استفاده از خواص (۲) و (۳) در ۵-۱-۱ می‌توان ثابت کرد که

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1$$
$$\Gamma(3)=2\cdot\Gamma(2)=2\times 1$$
$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3\times 2\times 1=3!$$

بنابراین، به طور کلی توسط استقرای ریاضی می‌توان تحقیق کرد که به ازای هر عدد صحیح نامنفی n

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (4)$$

۵-۱-۳ تمرین: ثابت کنید که

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

۵-۱-۴ تذکر: بنا به فرمول (۳) و به کمک استقراء ریاضی توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\Gamma(p+1)\big[(p+1)(p+2)\ldots(p+k)\big]&=\Gamma(p+2)\big[(p+2)\ldots(p+k)\big]\\ &\;\vdots\\ &=\Gamma(p+k+1)\end{aligned}$$

۵-۱-۵ حل: اینک، مشاهده می‌کنیم که وقتی (۳) را به‌صورت

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+1)}{x} \qquad (5)$$

بنویسیم می‌توان با استفاده از آن $\Gamma(x)$ را برای مقادیر **منفی و غیر صحیح** x تعریف کرد. در واقع با به کار بردن (۵-۱-۴) می‌توان $\Gamma(x)$ را به ازای $-1<x<0$ تعریف کرد، زیرا $\Gamma(x+1)$ بر آن بازه تعریف شده است. همچنین به ازای $x>-1$ می‌توان نوشت

$$\Gamma(x+1)=\frac{\Gamma(x+2)}{x+1}$$

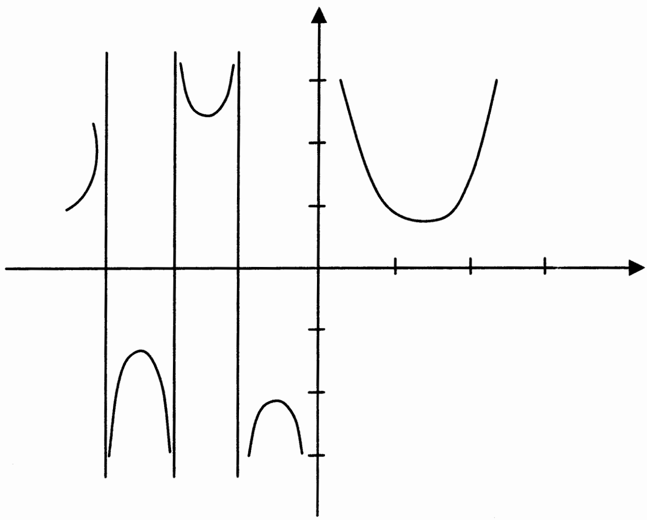
و به ازای $x>0$، خواهیم داشت

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)}$$

چون $\Gamma(x+۲)$ به ازای $x>-۲$ تعریف شده است، با به کار بردن این فرمول می‌توان $\Gamma(x)$ را به ازای $-۲<x<۰$، $x\neq -۱$ تعریف کرد. به همین نحو، به ازای هر عدد صحیح k و به ازای $x>۰$ خواهیم داشت.

$$\Gamma(x)=\frac{\Gamma(x+k)}{x(x+۱)(x+۲)...(x+k-۱)}$$

با به کار بردن این فرمول، می‌توان $\Gamma(x)$ را به ازای $-k<x<۰$ و $x\neq -۱,-۲,...,-k+۱$ تعریف کرد. با تعریف $\Gamma(x)$ به این روش، به ازای مقادیر منفی x، مشاهده می‌کنیم که فرمول (۳) به ازای هر مقدار x، به استثناء $x=۰,-۱,-۲,...$ برقرار است. سرانجام، $\Gamma(x)$ وقتی که x به صفر یا به یک عدد صحیح منفی میل کند بینهایت می‌شود. نمودار $\Gamma(x)$ در شکل (۱) نشان داده شده است.



شکل (۱)

۵-۱-۶ تمرین: انتگرال $\int_{\circ}^{\infty} e^{-x^{۲}} dx$ را به‌عنوان تابع گاما بیان کنید.

۵-۱-۷ تمرین: $\Gamma(-\frac{۱}{۲})$, $\Gamma(-\frac{۳}{۲})$, $\Gamma(\frac{۳}{۲})$ را پیدا کنید. سپس تعاریفی برای $(-\frac{۱}{۲})!,(-\frac{۳}{۲})!,(\frac{۳}{۲})!$ ارائه دهید.

۵-۱-۸ تذکر: مقدار $\frac{۱}{\Gamma(x)}$ در همه نقاط به استثناء نقاط $N = \circ,-۱,-۲,...$ تعریف شده است و هنگامی که $x \to N$، به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x \to N} \frac{۱}{\Gamma(x)} = \circ$$

بنابراین، تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{\Gamma(x)} & x \neq N \\ \circ & x = N \end{cases}$$

به‌ازای هر مقدار x تعریف نشده و پیوسته است. در نتیجه قرار می‌دهیم $\frac{۱}{\Gamma(x)} = \circ$.

۵-۱-۹ تمرین: (الف) تابع $\Psi(x)$ را به صورت

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x+۱)}{\Gamma(x+۱)} = \frac{d}{dx} Ln\Gamma(x+۱)$$

تعریف می‌کنیم. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، ثابت کنید که

$$\Psi(n) = \Psi(\circ) + ۱ + \frac{۱}{۲} + ... + \frac{۱}{n-۱} + \frac{۱}{n}$$

که در آن، عدد

$$\Psi(\circ) = \frac{\Gamma'(۱)}{\Gamma(۱)} = \Gamma'(۱) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-t} Lnt dt$$

یک ثابت منفی است که آن را با $-\gamma$ نمایش می‌دهیم و عدد مثبت ......$\gamma = ۰/۵۷۷۲۱$ کنترل شود که آیا اویل صحیح است یا اویلر معروف است.

۵-۱-۱۰ تمرین: نشان دهید که

$$\int_{۰}^{\infty} e^{-s^۳}\,ds = \frac{۱}{۳}\Gamma(\frac{۱}{۳})$$

۵-۱-۱۱ تمرین: $\lim\limits_{x\to\infty} x\Gamma(x)$ را پیدا کنید.

۵-۲ معادلهٔ بسل

معادله دیفرانسیل

$$x^۲y'' + xy' + (x^۲ - \alpha^۲)y = ۰ \qquad (۱)$$

که در آن α یک ثابت است، به **معادلهٔ بسل** (Bessel) از مرتبهٔ α معروف است. این معادله دیفرانسیل یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل در ریاضیات کاربردی می‌باشد. جواب‌های غیر بدیهی این معادله به توابع بسل معروف بوده و به دلیل اهمیت زیاد توابع بسل را به تفضیل مطالعه می‌کنیم. در ضمن برخی کاربردهای این توابع را در درس معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ملاحظه خواهیم کرد.

۵-۲-۱ حل معادله بسل: دارای یک نقطه منفرد منظم در $x = ۰$ است و جواب‌های سری آن را می‌توان توسط روش‌های ارائه شده در فصل ٤ به دست آورد. می‌دانیم که این معادله حداقل دارای یک جواب به‌صورت

$$y(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n x^{n+s}$$

است. با قرار دادن y و مشتقات

$$y'(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n (n+s) x^{n+s-۱}$$

$$y''(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} A_n (n+s)(n+s-۱) x^{n+s-۲}$$

در معادله (۱) به‌دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(n+s)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+s+2}$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty} -\alpha^2 A_n x^{n+s} = 0$$

در اینجا سری سوم با x^{s+2} شروع می‌شود، در حالی که سری‌های دیگر با x^s شروع می‌شوند. با گردآوری جمله‌های اول و دوم سری‌های اول، دوم و چهارم، خواهیم داشت

$$s(s-1)A_0x^s + (s+1)sA_1x^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s}$$
$$+sA_0x^s + (s+1)A_1x^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(n+s)x^{n+s} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+s+2}$$
$$-\alpha^2A_0x^s - \alpha^2A_1x^{s+1} + \sum_{n=2}^{\infty} -\alpha^2 A_n x^{n+s} = 0$$

بنابراین، s باید ریشهٔ معادلهٔ شاخص

$$f(s) = s^2 - \alpha^2 = 0 \tag{2}$$

باشد و ضرایب A_i ها باید در روابط زیر صدق کنند.

$$\left[(s+1)^2 - \alpha^2\right]A_1 = 0 \tag{3}$$

و

$$\left[(n+s)^2 - \alpha^2\right]A_n = -A_{n-2}\,, \quad n \geq 2 \tag{4}$$

از این رو، توان‌های معادلهٔ بسل که از معادلهٔ (۲) به دست می‌آیند، عبارتند از

$$s_1 = \alpha \qquad , \qquad s_2 = -\alpha$$

به ازای $s = s_1 = \alpha$ از روابط (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که

$$A_i = 0$$

و

$$n(n+2\alpha)A_n = -A_{n-2} \quad , \qquad n \geq 2$$

یا

$$A_n = -\frac{A_{n-2}}{n(n+2\alpha)} \quad , \qquad n \geq 2$$

بنابراین،

$$n=2 \quad , \qquad A_2 = -\frac{A_0}{2(2+2\alpha)}$$

$$n=3 \quad , \qquad A_3 = -\frac{A_1}{3(3+2\alpha)} = 0$$

$$n=4 \quad , \qquad A_4 = -\frac{A_2}{4(4+2\alpha)}$$

$$= \frac{A_0}{2\times 4(2+2\alpha)(4+2\alpha)}$$

$$n=5 \quad , \qquad A_5 = 0$$

$$\vdots$$

$$n=2m \qquad A_{2m} = \frac{(-1)^m}{(2)(4)\dots(2m)(2+2\alpha)(4+2\alpha)\dots(2m+2\alpha)} A_0$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(1+\alpha)(2+\alpha)\dots(m+\alpha)} A_0$$

و $A_1 = A_3 = A_5 = \dots = 0$. لذا یک جواب معادله (۱) عبارت است از

$$y_1(x) = A_0 x^{\alpha}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{x}{2})^{2m}}{m!(1+\alpha)(2+\alpha)\dots(m+\alpha)}\right]$$

این جواب را که با

$$J_{\alpha}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(\frac{x}{2})^{2m+\alpha}}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \qquad (5)$$

نمایش می‌دهیم **به تابع بسل نوع اول** از مرتبه اول معروف است.

در حالتی که α عدد صحیح است، یعنی $\alpha=n$، جواب به‌صورت

$$J_{n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(\frac{x}{2})^{2m+n}}{m!\Gamma(m+n+1)}$$

در می‌آید. با توجه به فرمول (۴) بخش ۵-۱ $J_n(x)$ به

$$J_{n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(\frac{x}{2})^{2m+n}}{m!(m+n)!}$$

تبدیل می‌شود. به‌ویژه، بسط سری‌های J_0, J_1 که مهم‌ترین سری‌ها از توابع بسل می‌باشند، عبارتند از

$$J_{0}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(\frac{x}{2})^{2m}}{(m!)^{2}}$$

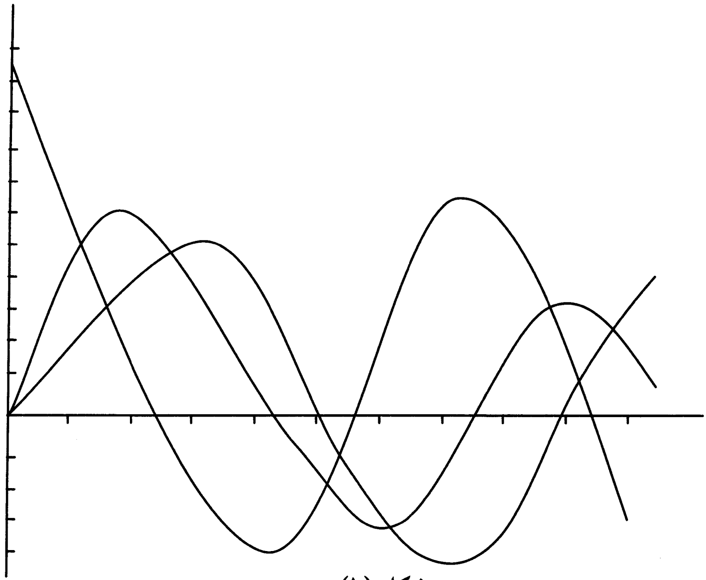
$$=1-\frac{x^{2}}{2^{2}}+\frac{1}{(2!)^{2}}.\frac{x^{4}}{2^{4}}-\frac{1}{(3!)^{2}}.\frac{x^{6}}{2^{6}}+\ldots+\frac{(-1)^{m}}{(m!)^{2}}\times\frac{x^{2m}}{2^{2m}}+\ldots$$

و

$$J_{1}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(\frac{x}{2})^{2m+1}}{m!(m+1)!}$$

$$J_{1}(x)=\frac{x}{2}(1-\frac{1}{2!}\frac{x^{2}}{2^{2}}+\frac{1}{(2!)(3!)}\frac{x^{4}}{2^{4}}+\ldots+\frac{(-1)^{m}}{m!(m+1)!}\frac{x^{2m}}{2^{2m}}+\ldots)$$

نمودار توابع J_0, J_1, J_2 در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل (۱)

۵-۲-۲ (حالتی که α یک صحیح نباشد): جواب دوم معادلهٔ بسل از مرتبه α (۱)، که در حالتی که یک عدد صحیح نباشد، به آسانی با جانشین کردن α با $-\alpha$ در (۵) به دست می‌آید.

$$J_{-\alpha}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\alpha}}{m!\,\Gamma(m-\alpha+1)} \qquad (6)$$

بنابراین، در حالتی که α یک عدد صحیح نیست جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y(x)=C_1J_{\alpha}(x)+C_2J_{-\alpha}(x) \qquad (7)$$

که در آن C_2, C_1 ثابت‌های دلخواه می‌باشند. توجه می‌کنیم که به دلیل وجود $x^{-\alpha}$ در (۶)، $J_{-\alpha}$ در نزدیکی مبدأ بی‌کران است و در $x=0$ تعریف نشده است. بنابراین (۷) تنها به ازای $x>0$ جواب معادله بسل است.

۵-۲-۳ (توابع بسل از نوع دوم): حال می‌کوشیم تا تعریفی برای $J_{-\alpha}$، در حالتی که α یک عدد صحیح است، به قسمی ارائه دهیم تا با جواب J_n از معادله بسل مستقل خطی باشد. همانگونه که در تمرین زیر می‌بینیم J_n, J_{-n} مستقل خطی نیستند.

۵-۲-٤ تمرین: به ازای هر عدد صحیح n، نشان دهید که

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

۵-۲-۵ تمرین: وقتی α یک عدد نیست، توابع $J_\alpha, J_{-\alpha}$ جواب‌های مستقل خطی معادله دیفرانسیل بسل بر بازهٔ $(0,\infty)$ هستند. از این رو

$$Y(x)=\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \tag{8}$$

به ازای هر $x>0$ جواب معادله بسل است، زیرا یک ترکیب خطی از $J_\alpha, J_{-\alpha}$ است. در واقع وقتی $\alpha\to n$، Y_α حد دارد و حد آن نیز یک جواب معادلهٔ بسل می‌باشد. بنابراین تابع

$$Y_n(x)=\lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x)\,,\quad n=0,1,2,\dots \tag{9}$$

جوابی از معادلهٔ بسل از مرتبهٔ n است. به علاوه، این جواب و J_n مستقل خطی هستند. تابع $Y_n(x)$ **به تابع بسل از نوع دوم** معروف است.

به‌دست آوردن بسط سری $Y_\alpha(x)$ بسیار پیچیده است.وقتی $\alpha=n$ تابع (۸) به صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید، از این رو حد (۹) را می‌توان با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال محاسبه کرد. بنابراین

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}J_\alpha(x)-(-1)^n\frac{\partial}{\partial\alpha}J_{-\alpha}(x)\right]_{\alpha=n} \tag{10}$$

با مشتق‌گیری از (۵) و (٦) نسبت به α و قرار دادن این مشتقات و $\alpha=n$ در رابطهٔ (۱۰)، خواهیم داشت.

$$Y_n(x)=\frac{۲}{\pi}J_n(x)\left(Ln\frac{x}{۲}+\gamma\right)-\frac{۱}{\pi}\sum_{m=۰}^{n-۱}\frac{(n-m-۱)!}{m!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲m-n}$$

$$-\frac{۱}{\pi(n!)}\phi(n)\left(\frac{x}{۲}\right)^n-\frac{۱}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^m(\phi(m)+\phi(m+n))}{m!(n+m)!}\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲m+n}$$

به ویژه وقتی $n=۰$

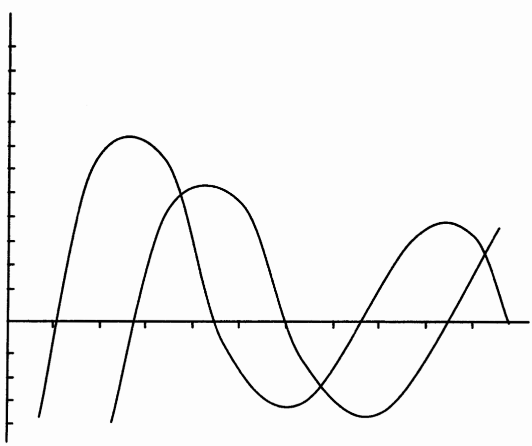
$$Y_۰(x)=\frac{۲}{\pi}J_۰(x)\left(Ln\frac{x}{۲}+\gamma\right)-\frac{۲}{\pi}\sum_{m=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^m}{(m!)^۲}(\phi(m))\left(\frac{x}{۲}\right)^{۲m}$$

در اینجا مجدداً متذکر می‌شویم که نشان دادن مطالب بالا بسیار پیچیده است. در ضمن وقتی $x\to ۰$، در این صورت $Y_N(x)$ بینهایت می‌شود. بنابراین وقتی $\alpha=n$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل بسل (۱) به‌صورت

$$Y(x)=C_۱y_b(x)+C_۲J_n(x)$$

در می‌آید.

نمودار توابع $Y_۰$، $Y_۱$ در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل (۲)

۵-۲-۶ تمرین‌های بخش ۵-۲

۱. جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را بر حسب توابع بسل بنویسید.

(الف) $$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

(ب) $$xy'' + y' + xy = 0$$

۲. (الف) تحقیق کنید که

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x\sin t)dt$$

(ب) از فرمول قسمت (الف) نتیجه بگیرید که به ازای $x \geq 0$، $|y_0(x)| \leq 1$

۳. ثابت کنید که جواب عمومی معادله بسل از مرتبهٔ α را می‌توان به‌صورت

$$C_1J_\alpha(x) + C_2J_\alpha(x)\int\frac{dx}{x\left[J_p(x)\right]^2}$$

نوشت.

۴. با به‌کار بردن تغییر متغیر $u = x^{\frac{1}{2}}y$ یک جواب معادله دیفرانسیل

$$u'' + (1 + \frac{1 - 4k^2}{4x^2})\, u = 0$$

را، که در آن k یک ثابت حقیقی است، پیدا کنید.

۵. با استفاده از تمرین ۴ جوابی از معادلهٔ

$$u'' + (1 - \frac{3}{4x^2}) \qquad u = 0$$

را پیدا کنید.

۶. جوابی از معادلهٔ $u''+x^{۲}u=۰$ را پیدا کنید. [راهنمایی: نخست از تغییر متغیر $u=x^{۱/۲}y$ استفاده کنید و سپس در معادلهٔ حاصل تغییر متغیر $w=\frac{x^{۲}}{۲}$ را به‌کار ببرید.]

۷. جوابی از معادله دیفرانسیل $u''+bx^{m}u=۰$ را پیدا کنید. [راهنمایی: نخست از تغییر متغیر $u=xy$ استفاده کنید و سپس در معادله حاصل تغییر متغیر $w=\frac{۲\sqrt{b}}{m+۲}\sqrt{x^{m+۲}}$ را به‌کار ببرید.]

۸. یک جواب معادلهٔ $u''+۹xu=۰$ را پیدا کنید.

۵-۳- خواص توابع بسل

اینک، تعدادی از خواص توابع بسل از نوع اول، یعنی $J_n(x)$، را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

۱. اگر $x_۱$, $x_۲$ دو صفر $J_n(x)$ باشند به‌طوری که $x_۱<x_۲$، آنگاه در بازهٔ $I=(x_۱,x_۲)$، صفری از $J_{n-۱}(x)$ و $J_{n+۱}(x)$ وجود دارد.

۲. تابع بسل $J_۰(x)$ بر هر بازه‌ای به طول π یک صفر دارد.

۳. هر یک از توابع $J_n(x)$، در بازهٔ $n=۱,۲,۳,...$ $I=(۰,\infty)$ بینهایت صفر مثبت حقیقی دارد.

۴. نخستین صفر $J_n(x)$ بزرگ‌تر از n است.

۵. تابع بسل $J_n(x)$ تنها صفرهای حقیقی دارد.

۵-۳-۱- روابط بازگشتی: توابع بسل از نوع اول در روابط بازگشتی گوناگونی صدق می‌کنند، از جمله

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\right]=x^{\alpha}J_{\alpha-۱}(x) \qquad (۱)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\right]=-x^{-\alpha}J_{\alpha+۱}(x) \qquad (۲)$$

برای اثبات (۱) دو طرف فرمول (۵) در بخش ۵-۲ را در x^{α} ضرب می‌کنیم و از آن نسبت به x مشتق می‌گیریم، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\right]=\frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}x^{2m+2\alpha}}{2^{2m+\alpha}m!\Gamma(m+\alpha+1)}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}2(m+\alpha)x^{2m+2\alpha-1}}{2^{2m+\alpha}m!\Gamma(m+\alpha+1)}$$

$$=x^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}x^{2m+\alpha-1}}{2^{2m+\alpha-1}m!\Gamma(m+\alpha)}$$

$$=x^{\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}(\frac{x}{2})^{2m+\alpha-1}}{m!\Gamma(m+\alpha)}$$

$$=x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$$

۵-۳-۲ تمرین: درستی فرمول (۲) را ثابت کنید.

۵-۳-۳ تمرین: با استفاده از روابط (۱) و (۲) روابط زیر را ثابت کنید.

(الف) $xJ'_{\alpha}+\alpha J_{\alpha}=xJ_{\alpha-1}$

(ب) $xJ'_{\alpha}-\alpha J_{\alpha}=-xJ_{\alpha+1}$

(ج) $J_{\alpha+1}=\frac{2\alpha}{x}J_{\alpha}-J_{\alpha-1}$

(د) $J'_{\alpha}=\frac{1}{2}\left(J_{\alpha-1}-J_{\alpha+1}\right)$

شبیه به روابط بازگشتی نشان داده شده در بالا برای J_{α}، می‌توان برای توابع بسل از نوع دوم، یعنی Y_{α}، نیز این روابط را ثابت کرد. در اینجا از اثبات این مطالب صرف‌نظر می‌کنیم.

۵-۳-٤ (توابع بسل از مرتبه نصف عدد صحیح): وقتی $\alpha = \frac{۱}{۲}$، رابطه (۵) به صورت

$$J_{\frac{۱}{۲}}(x) = \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m (\frac{x}{۲})^{۲m+\frac{۱}{۲}}}{m!\Gamma(m+\frac{۳}{۲})}$$

$$= \sqrt{\frac{x}{۲}} \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m}{۲^{۲m} m!\Gamma(m+\frac{۳}{۲})} x^{۲m} \qquad (۳)$$

در می‌آید. ولی بنا به تذکر ۵-۱-٤، می‌توانیم بنویسیم

$$r(\frac{۳}{۲}+m) = \Gamma(\frac{۳}{۲})\left[\frac{۳}{۲}.\frac{۵}{۲}...\frac{۲m+۱}{۲}\right]$$

$$= \Gamma(\frac{۳}{۲})\frac{(۳)(۵)...(۲m+۱)}{۲^m}$$

از طرفی، در تمرین ۵-۱-۷ نشان دادیم که $\Gamma(\frac{۳}{۲}) = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$، بنابراین رابطه بالا به‌صورت

$$\Gamma(\frac{۳}{۲}+m) = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}\left[\frac{(۳)(۵)...(۲m+۱)}{۲^m}\right]$$

در می‌آید. با قرار دادن این مقدار در فرمول (۳)، به‌دست می‌آوریم

$$J_{\frac{۱}{۲}}(x) = \sqrt{\frac{x}{۲}}.\frac{۲}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m}{۲^m m!(۳)(۵)...(۲m+۱)} x^{۲m}$$

توجه کنید که عبارت موجود در مخرج کسر بالا را می‌توان به صورت

$$۲^m (m!)(۳)(۵)...(۲m+۱)$$
$$= (۲)(۳)(٤)(۵)...(۲m)(۲m+۱)$$
$$= (۲m+۱)!$$

نوشت. بنابراین،

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}x^{2m}$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

به این ترتیب ثابت کردیم که

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

۵-۳-۵ تمرین: ثابت کنید

$$J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

۵-۳-۶ تمرین: ثابت کنید

(الف) $$J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{\sin x}{\pi x}-\cos x)$$

(ب) $$J_{\frac{5}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{3\sin x}{x^2}-\frac{3\cos x}{x}-\sin x)$$

۵-۳-۷ تمرین‌های بخش ۵-۳

۱. J_2, J_3 را بر حسب J_0, J_1 بسط دهید.

۲. ثابت کنید.

$$J_{-\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(\frac{1}{x}\cos x-\sin x)$$

۳. (الف) با استفاده از رابطهٔ بازگشتی

$$J_{\alpha+1}(x)=\frac{2}{x}J_{\alpha}(x)-J_{\alpha-1}(x)$$

نشان دهید

$$\frac{J_{\alpha-1}(x)}{J_\alpha(x)}=\frac{2\alpha}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{2\alpha+2}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{2\alpha+4}{x}-\ddots}}$$

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) ثابت کنید که

$$\tan x=-\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-}}}$$

۴. نشان دهید

(الف) $\int J_1(x)dx=-J_0(x)+C$

(ب) $\int xJ_0(x)dx=xJ_1(x)+C$

در اینجا C یک ثابت دلخواه است.

۵. نشان دهید

$$\int x^2J_0(x)dx=x_0^2J_1(x)+xJ_0(x_0)-\int J_0(x)dx$$

۶. نشان دهید

(الف) $J''_n=\frac{1}{4}(J_{n-2}-2J_n+J_{n+2})$

(ب) $J''_n=\frac{1}{8}(J_{n-3}-3J_{n-1}+3J_{n+1}-J_{n+3})$

۵-۳-۸ تمرین‌های گوناگون فصل ۵

۱. هریک از توابع گامای زیر را حساب کنید.

(الف) $\Gamma(6)$ (ب) $\Gamma(-\frac{5}{2})$ (ج) $\Gamma(\frac{7}{2})$

۲. مقدار هریک از توابع فاکتوریل زیررا حساب کنید.

(الف) $(-\frac{۵}{۲})!$ (ب) $(-\frac{۷}{۲})!$

۳. تابع بتا، $\beta(x,y)$ را به‌صورت

$$\beta(x,y)=\int_{۰}^{۱} t^{x-۱}(۱-x)^{y-۱}dt \qquad , x>۰ \ , \ \ y>۰$$

تعریف می‌کنیم. نشان دهید که

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad x>۰ \quad , \qquad y>۰$$

[راهنمایی: با عبارت

$$\Gamma(x)\Gamma(y)=(۲\int_{۰}^{\infty} e^{-u^۲} u^{۲x-۱}du)(۲\int_{۰}^{\infty} e^{-v^۲} v^{۲y-۱}dv)$$

شروع کنید و حاصلضرب دو انتگرال را به‌صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید و سپس از مختصات قطبی استفاده نمایید. سرانجام انتگرال دوگانه حاصل را به‌صورت حاصلضرب دو انتگرال بنویسید.]

٤. نشان دهید

$$\lim_{x\to ۰^+} \Gamma(x)=+\infty \qquad\qquad \lim_{x\to ۰^-} \Gamma(x)=-\infty$$

۵. (الف) ثابت کنید که رونسکین $J_{-\alpha}, J_\alpha$ در معادله دیفرانسیل

$$\frac{d}{dx}[xw(J_\alpha,J_{-\alpha})]=۰$$

صدق می‌کند، از این رو، می‌توان نتیجه گرفت $w(J_\alpha,J_{-\alpha})=\frac{C}{X}$ که در آن C یک ثابت است.

(ب) با استفاده از بسط‌های سری J_α و $J_{-\alpha}$ و مشتق‌های آنها نتیجه بگیرید، وقتی α یک عدد صحیح نباشد داریم

$$C=-\frac{۲}{\Gamma(۱-\alpha)\Gamma(\alpha)}$$

که در آن C همان ثابت قسمت (الف) است.

۶. معادله دیفرانسیل $x^2y'' + xy' - (x^2 + \alpha^2)y$

به معادله دیفرانسیل **بسل پیراسته** معروف است و جواب‌های آن به **توابع بسل پیراسته** مشهورند.

(الف) نشان دهید که $I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2.4^2} + \frac{x^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots$ جوابی از معادله بسل پیراسته از مرتبهٔ صفر است.

(ب) نشان دهید که جوابی از معادله بسل پیراسته از مرتبهٔ یک است.

۷. نشان دهید که وقتی α یک عدد صحیح نیست جواب عمومی معادله بسل پیراسته از مرتبه α برابر است با $y = C_1 I_\alpha + C_2 I_{-\alpha}$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌های دلخواه هستند و

$$I_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

$$I_{-\alpha}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(m-\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\alpha}$$

۸. (الف) ثابت کنید وقتی $x > 0$، جواب عمومی معادله $y'' + \frac{2\alpha - 1}{x} + \beta^2 y = 0$ برابر است با $y = x^\alpha z_\alpha(\beta x)$ که در آن z_α نمایش جواب عمومی معادله دیفرانسیل پس از مرتبه α است و $\beta \neq 0$ یک ثابت حقیقی می‌باشد.

(ب) با استفاده از نتیجه قسمت (الف) جواب عمومی معادله دیفرانسیل

$$y'' + \frac{a}{x}y' + by = 0 \qquad x > 0$$

را که در آن a و b ثابت‌های مثبت هستند، پیدا کنید.

۹. (الف) نشان دهید که جواب عمومی معادلهٔ $u'' + x^2 u = 0$ عبارت است از

$$u = \sqrt{x} z_{z_{1/4}}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

که در آن $z_{\frac{۱}{٤}}$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل بسل از مرتبه $\frac{۱}{٤}$ است.

(ب) با به کار بردن تغییر متغیر $y=-\frac{u'}{u}$ و نتیجه قسمت (الف) معادله دیفرانسیل ریکاتی $y'=x^{۲}+y^{۲}$ را حل کنید.

۱۰. نشان دهید که جواب عمومی **معادلهٔ ایری** (Airy) $y''+xy=۰$ عبارت است از

$$y=x^{\frac{۱}{۲}}\left[C_{۱}J_{\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۲}{۳}x^{۳/۲}\right)+C_{۲}J_{-\frac{۱}{۳}}\left(\frac{۲}{۳}x^{۳/۲}\right)\right]$$

۱۱. روابط بازگشتی زیر را در مورد $Y_{\alpha}(x)$، یعنی تابع بسل از نوع دوم ثابت کنید.

(الف)
$$\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha}Y_{\alpha}(x)\right]=x^{\alpha}Y_{\alpha-۱}$$

(ب)
$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\alpha}Y_{\alpha}(x)\right]=-x^{-\alpha}Y_{\alpha-۱}(x)$$

(ج)
$$۲\alpha Y_{\alpha}=xY_{\alpha-۱}+xY_{\alpha+۱}$$

(د)
$$Y'_{\alpha}=\frac{۱}{۲}\left[Y_{\alpha-۱}-Y_{\alpha+۱}\right]$$

۱۲. $Y_{۲}(x)$ را بر حسب $Y_{۰}(x)$ و $Y_{۱}(x)$ بیان کنید.

۱۳. اگر λ یک ثابت باشد، نشان دهید

$$\frac{d}{dx}J_{\alpha}(\lambda x)=\lambda J_{\alpha-۱}(\lambda x)-\frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(\lambda x)$$
$$=-\lambda J_{\alpha+۱}(\lambda x)+\frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(\lambda x)$$

۱٤- درستی فرمول‌های زیر را بررسی کنید.

(الف)
$$\int x^{\alpha+۱}J_{\alpha}(x)dx=x^{\alpha+۱}J_{\alpha+۱}(x)+C$$

(ب)

$$\int x^{1-\alpha} J_{\alpha}(x)dx = -x^{1-\alpha} J_{\alpha-1}(x) + C$$

۱۵. نشان دهید که

$$\int x^{3} J_{0}(x)dx = x^{3} J_{1}(x) - 2x^{2} J_{2}(x) + C$$

۱۶. معادله دیفرانسیل $x^2u'' + (1-2a)x\,u' + \left(b^2c^2\,x^{2c} + a^2 - k^2c^2\right)u = 0$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که تغییر متغیر $u = x^a y$ معادله داده شده را به معادله $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(b^2x^{2c} - k^2\right)c^2y = 0$ تبدیل می‌کند و تغییر متغیر دوم $w = bx^c$ معادله اخیر را به معادله بسل $w^2\dfrac{d^2y}{dw^2} + w\dfrac{dy}{dw} + \left(w^2 - k^2\right)y = 0$ تبدیل می‌کند.

(ب) نشان دهید که جوابی از معادله اصلی در قسمت (الف) عبارت است از

$$u = x^a\, J_k\left(bx^c\right)$$

۱۷. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2u'' + xu' + \left(x - \dfrac{k^2}{4}\right)u = 0$ را پیدا کنید. در اینجا k یک عدد صحیح مثبت نیست.

فصل ششم

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل

در این فصل با توجه به کاربردهای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل در مدارهای الکتریکی و دستگاه‌های مکانیکی و دیگر کاربردهای آن به بررسی و مطالعهٔ این دستگاه‌ها می‌پردازیم. در پایان این فصل چند کاربرد دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل را خواهیم دید.

یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل همزمان، متشکل از تعدادی تابع مجهول و مشتقات آن‌ها نسبت به یک متغیر مستقل را یک **دستگاه معادلات دیفرانسیل** می‌نامیم.

برای مثال دستگاه

$$\begin{aligned} & x\frac{dx_1}{dt}+x_2^2\ \frac{dx_2}{dt}+2x_1-3x_2=3t \\ & \frac{d^2x_1}{dt^2}+2x_2\ \frac{dx_1}{dt}+3\ \frac{dx_2}{dt}-3x_1=e^t \end{aligned} \qquad (1)$$

را، که در آن x_1 و x_2 متغیرهای وابسته و t متغیر مستقل هستند، در نظر می‌گیریم. یک زوج توابع $x_1(t)$ و $x_2(t)$ که بر بازه مشترک I تعریف شده‌اند، جوابی از دستگاه (۱) گفته می‌شود، اگر این توابع در هر دو معادله بر I صدق کنند، یعنی، وقتی در هر معادلهٔ (۱) x_1 را با $x_1(t)$ و x_2 را با $x_2(t)$ و مشتقات آن‌ها را به ترتیب با $x_1'(t)$ و $x_2'(t)$ و

غیره جایگزین می‌توان یک اتحاد به‌دست می‌آوریم. به همین نحو، می‌کنیم منظور از جواب یک دستگاه معادلات با سه متغیر یا بیشتر را تعمیم داد.

۶-۱ تعریف و جواب یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول

۶-۱-۱ تعریف: دستگاه دو معادله

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t_1, x_2, x_2)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \qquad (1)$$

را، که در آن f_1 , f_2 توابعی از x_2, x_1 و t بوده، و بر مجموعهٔ مشترک S تعریف شده‌اند، یک **دستگاه معادلات مرتبهٔ اول** نامیده می‌شود. منظور از یک جواب دستگاه (۱) زوجی از توابع است که هر یک بر بازهٔ مشترک I و IS تعریف شده باشند و در هر دو معادله (۱) صدق کنند.

تعمیمی از این نوع دستگاه را در زیر بیان می‌کنیم.

۶-۱-۲ تعریف: دستگاه n معادلهٔ

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

را که در آن $f_1, \dots, f_n$ هر یک تابعی از $x_1, x_2, \dots, x, t$ بوده و بر مجموعهٔ مشترک S تعریف شده‌اند، یک **دستگاه معادلات مرتبهٔ اول** نامیده می‌شود.

اینک قضیه‌ای در مورد وجود و یگانگی جواب برای دستگاه معادلات مرتبهٔ اول را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

۶-۱-۳ قضیه: فرض می‌کنیم که هر یک از توابع $f_1,\dots,f_n$ و مشتقات جزئی آن‌ها، یعنی $\frac{\partial f_n}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial f_n}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f_1}{\partial x_n},\dots,\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ در ناحیه‌ای از فضای-$t\,x_1\,x_2\,\dots\,x_n$ که شامل نقطهٔ $\left(t_0\,,\,k_1\,,\,k_2\,,\dots,k_n\right)$ است، پیوسته باشند. در این عدد مثبت h و بازه $(t_0-h\,,t_0+h)$، وجود دارد به قسمی که در آن دستگاه (۲) دارای جواب یگانه $x_1=x_1(t),\dots,x_n=x_n(t)$ است که در شرایط اولیه زیر صدق می‌کند.

$$x_1\left(t_0\right)=k_1\ ,\ x_2\left(t_0\right)=k_2,\dots,x_n\left(t_0\right)=k_n$$

۶-۱-۴ تذکر: رابطهٔ بسیار نزدیکی بین دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل از مرتبهٔ دلخواه وجود دارد. در واقع، معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ n ام

$$y^{(n)}=F\left(t,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right) \tag{۳}$$

را می‌توان به ترتیب زیر به صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول نوشت.

قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} u_1=y\\ u_2=y'\\ u_3=y''\\ \vdots\\ u_n=y^{(n-1)} \end{cases} \tag{٤}$$

در نتیجه،

$$\begin{cases} u'_1=y'=u_2\\ u'_2=y''=u_3\\ \quad\vdots\\ u'_{n-1}=y^{(n-1)}=u_n\\ u'_n=F(t,u_1,u_2,\dots,u_n \end{cases} \tag{۵}$$

آخرین معادله این دستگاه از معادلهٔ دیفرانسیل (۳) به‌دست آمده است. اگر y جواب معادلهٔ (۳) باشد، رابطه‌های (٤) یک جواب از دستگاه (٥) یعنی $(u_1,u_2,\dots,u_n)$، را معرفی می‌کند. از طرف دیگر، $(u_1,u_2,\dots,u_n)$ جواب معلومی از دستگاه (٥) باشد آن‌گاه با توجه به (٤) نتیجه می‌شود که u_1 جوابی از معادلهٔ (۳) است.

٦-١-٥ مثال: معادله دیفرانسیل $y'' \cos y+(\cos y-y'\sin y)\ y'-2xy=0$ را به صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول بنویسید.

حل: نخست با تقسیم دو طرف معادلهٔ داده شده بر $\cos y$ معادله به معادلهٔ

$$y''=-(1-y'\tan y)+2xy\sec y$$

تبدیل می‌شود. اینک قرار می‌دهیم

$$u_1=y \quad , \quad u_2=y'$$

بنابراین، با توجه به معادلهٔ بالا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} u_1' &= y' \\ u_2' &= y''=-(1-u_2\ \tan u_1)+2x\ u_1\sec u_1 \end{aligned}$$

که دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول خواسته شده است.

توجه می‌کنیم که شرایط اولیهٔ

$$y(x_0)=k_1 \qquad y'(x_0)=k_2$$

برای معادلهٔ اصلی متناظر با شرایط اولیهٔ

$$u_1(x_0)=k_1 \qquad u_0(x_0)=k_2$$

برای دستگاه مرتبهٔ اول به‌دست آمده می‌باشد.

٦-١-٦ تمرین: مسأله با مقدار اولیهٔ

$$x'''+p(t)x''+q(t)x'+r(t)\ x=g(t)$$
$$x(0)=k_1 \quad x'(0)=k_2 \quad x''(0)=k_3$$

را در نظر می‌گیریم. این مسأله را به‌صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول با شرایط اولیهٔ داده شده در $t=0$ بازنویسی کنید.

۶-۱-۷ حل: به‌طور کلی فرض می‌کنیم که یک دستگاه معادلات برای توابع مجهول x_1 و x_2 به‌صورت

$$F\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m)}\ ,\ x_2, x_2', \dots, x_2^{(n)}\right) = 0$$
$$G\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m)}\ ,\ x_2, x_2', \dots, x_2^{(n)}\right) = 0$$

داده شده باشد. در این‌جا n , m به ترتیب بالاترین مرتبهٔ مشتقات x_2, x_1 هستند که در معادله ظاهر شده‌اند. از طرف دیگر فرض می‌کنیم که حل جبری این دستگاه بر حسب $x_1(x)$ و $x_2(x)$ امکان‌پذیر باشد. بنابراین، این دستگاه را می‌توان با دستگاه هم‌ارز* آن، یعنی

$$x_1^{(m)} = f\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m-1)}, x_2, x_2', \dots, x_2^{(n-1)}\right) \qquad (*)$$
$$x_2^{(n)} = g\left(t, x_1, x_1', \dots, x_1^{(m-1)}, x_2, x_2', \dots, x_3^{(n-1)}\right) \qquad (**)$$

جایگزین کرد. قرار می‌دهیم

$$u_1 = x_1,\ u_2 = x_1',\ \dots,\ u_m = x_1^{(m-1)}$$
$$u_{m+1} = x_2,\ u_{m+2} = x_2',\ \dots,\ u_{m+n} = x_2^{(n-1)}$$

در این صورت، با توجه به (*) و (**)، خواهیم داشت

$$\begin{array}{ll} u_1' = u_2 & u_{m+1}' = u_{m+2} \\ u_2' = u_3 & u_{m+2}' = u_{m+3} \\ \vdots & \vdots \\ u_{m-1}' = u_m & u_{m+n-1}' = u_{m+n} \end{array}$$
$$u_m' = f\ \ (t, u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+n},$$
$$u_m' + n = g(t, u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+n})$$

این بحث را می‌توان به همین نحو به حالت کلی k معادله و k مجهول تعمیم داد.

۶-۱-۸ مثال: دستگاه معادلات زیر را به صورت یک دستگاه مرتبه اول بازنویسی کنید.

$$\begin{cases} x_1' - x_2' = e^t \\ x_1'' - x_1 - x_2 - x_2' = \sin t \end{cases}$$

حل: نخست دستگاه را بر حسب x_1'' , x_2' حل می‌کنیم. بدین منظور، برای حذف x_2' از معادلهٔ دوم، معادله اول را در ۱- ضرب می‌کنیم و حاصل را با معادلهٔ دوم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آوریم

$$x_1' - x_2' = e^t$$

$$x_1'' - x_1' - x_1 - x_2 = \sin t - e^t$$

در نتیجه

$$x_2' = x_1' - e^t$$

$$x_1'' = x_1' + x_1 + x_2 + \sin t - e^t$$

قرار می‌دهیم

$$u_1 = x_1 \quad , \quad u_2 = x_1' \quad , \quad u_3 = x_2$$

بنابراین با توجه به معادلات بالا، دستگاه مرتبه اول زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_2 + u_1 + u_3 + \sin t - e^t \\ u_3' = u_2 - e^t \end{cases}$$

۶-۱-۹- تمرین: دستگاه زیر را به‌صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول بنویسید.

$$\frac{d^{۲}x_{۱}}{dt^{۲}}-۲\frac{dx_{۱}}{dt}+۳x_{۱}+\frac{dx_{۲}}{dt}+x_{۲}+x_{۳}=۰$$

$$۳\frac{dx_{۱}}{dt}-x_{۱}-\frac{dx_{۳}}{dt}=۱$$

$$۳x_{۱}-۲\frac{d^{۲}x_{۲}}{dt^{۲}}-x_{۳}=-۴$$

۶-۱-۱۰ تمرین‌های بخش ۶-۱

در تمرین‌های زیر دستگاه داده شده را به‌صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول بازنویسی کنید.

.۱ $\begin{cases} x_{۱}'-۲x_{۲}'-x_{۲}=t^{۲} \\ x_{۱}'-۳x_{۲}'=\sin t \end{cases}$

.۲ $\begin{cases} x_{۱}''=t \\ x_{۲}''=۲t+\sin t \\ x_{۳}''=۱ \end{cases}$

در تمرین‌های زیر معادلهٔ داده شده را به‌صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول بازنویسی کنید.

.۳ $x'''-t^{۲}x''+x^{۲}=\cos t$

.۴ $x^{(۴)}+x''x'-(x')^{۲}=t$

۶-۲- دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

فرض می‌کنیم توابع $f_{۱}(t,x_{۱},x_{۲})$ و $f_{۲}(t,x_{۱},x_{۲})$ در دستگاه (۱) از بخش ۶-۱ بر حسب $x_{۱}$ و $x_{۲}$ **خطی** باشند. یعنی، این دستگاه به‌صورت

$$\begin{cases} \dfrac{dx_{۱}}{dt}=f_{۱}(t)x_{۱}+g_{۱}(t)x_{۲}+h_{۱}(t) \\ \dfrac{dx_{۲}}{dt}=f_{۲}(t)x_{۱}+g_{۲}(t)x_{۲}+h_{۲}(t) \end{cases}$$

باشد. در این صورت دستگاه را یک **دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی** می‌نامیم.

توجه می‌کنیم که توان‌های x_1 و x_2 در هر دو معادلهٔ دستگاه بالا یک می‌باشد، در حالی که هیچ‌گونه محدودیتی بر متغیر مستقل t وجود ندارد. تعمیمی از این نوع دستگاه‌ها را در تعریف زیر ارائه داده‌ایم.

۶-۲-۱ تعریف: دستگاه معادله‌ای

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_{11}(t)x_1 + f_{12}(t)x_2 + \dots + f_{1n}(t)x_n + Q_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_{21}(t)x_1 + f_{22}(t)x_2 + \dots + f_{2n}(t)x_n + Q_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_{n1}(t)x_1 + f_{n2}(t)x_2 + \dots + f_{nn}(t)x_n + Q_n(t) \end{cases} \qquad (1)$$

را یک دستگاه خطی مرتبهٔ اول می‌نامیم. اگر همهٔ توابع Q_i صفر باشند، دستگاه را همگن، در غیر این صورت دستگاه را غیرهمگن می‌گوییم. دستگاه را می‌توانیم به‌صورت خلاصه‌تر زیر نیز بنویسیم.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)x_j + Q_i(t) \qquad 1 \le i \le n$$

اینک قضیه‌ای را که در مورد وجود و یگانگی یک جواب دستگاه خطی (۱) است، بدون اثبات در زیر می‌آوریم.

۶-۲-۲ قضیه: فرض می‌کنیم که همهٔ توابع f_{ij} ، Q_i ، $i,j=1,2,\dots,n$، در دستگاه (۱) بر بازهٔ مشترک $I=[a,b]$ پیوسته باشند. آن‌گاه بر بازهٔ (a,b) یک و تنها یک مجموعه از توابع پیوسته $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ با مشتقات پیوسته وجود دارد که در دستگاه (۱) و شرایط اولیهٔ $x_1(t_0)=k_1, \dots, x_n(t_0)=k_n$ برای $t_0 \in (a,b)$ صدق می‌کند.

۶-۲-۳ تذکر: روش کلی حل برای یافتن یک جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول (۱) در حالت کلی برحسب توابع مقدماتی وجود ندارد. ولی، اگر همهٔ ضرایب $f_{ij}(t)$ ، $i,j=1,\dots,n$ ثابت باشند، آنگاه روش حل کلی موجود است. در این

بخش روش‌های حلی را مورد بحث قرار می‌دهیم که دستهٔ بزرگ‌تری از دستگاه‌های معادلات خطی با ضرایب ثابت را دربر می‌گیرد.

در مثال زیر، دستگاهی با ضرایب غیرثابت را حل می‌کنیم. متذکر می‌شویم که این دستگاه به قسمی انتخاب شده است که دارای جواب‌هایی به‌صورت توابع مقدماتی باشد.

۶-۲-۴ مثال: دستگاه مرتبهٔ اول

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 t - x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_2 t + x_1 \end{cases}$$

را حل کنید. (توجه می‌کنیم که در معادلهٔ اول متغیر x_2 ظاهر نشده است).

حل: معادله اول در دستگاه بالا از نوع معادلات جداشدنی است که در فصل اول مورد بحث قرار گرفت.

با جدا کردن متغیرها، خواهیم داشت

$$\frac{dx_1}{x_1} = (2t-1)dt$$

با انتگرال‌گیری به‌دست می‌آوریم

$$x_1 = c_1 e^{t^2 - t} \tag{2}$$

با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ دوم دستگاه داده شده به‌دست می‌آوریم

$$\frac{dx_2}{dt} - 2x_2 t = c_1 e^{t^2 - t}$$

که یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول نسبت به x_2 است. با ضرب کردن دو طرف این معادله در e^{-t^2}، به‌دست می‌آوریم

$$e^{-t^2} \frac{dx_2}{dt} - 2t e^{-t^2} x_2 = c_1 e^{-t}$$

یا

$$\frac{d}{dt}\left(x_2 e^{-t^2}\right) = c_1 e^{-t}$$

بنابراین،

$$x_2 e^{-t^2} = c_1 \int e^{-t}\,dt$$
$$= -c_1 e^{-t} + c_2$$

از این‌رو،

$$x_2 = e^{t^2}\left(c_2 - c_1 e^{-t}\right) \qquad (۳)$$

به آسانی می‌توانید تحقیق کنید که زوج توابع تعریف شده توسط (۲) و (۳) در هر دو معادلهٔ دستگاه داده شده صدق می‌کنند و از این‌رو این زوج توابع جواب دستگاه است.

۶-۲-۵ تمرین: دستگاه خطی مرتبهٔ اول

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2e^{2t} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{x_1 - x_2}{t} \end{cases}$$

را حل کنید.

۶-۲-۶ حل یک دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت با استفاده از عملگردها

دو معادلهٔ

$$\begin{cases} f_1(D)x_1 + g_1(D)x_2 = h_1(t) \\ f_2(D)x_1 + g_2(D)x_2 = h_2(t) \end{cases} \qquad (٤)$$

را که در آن D عملگر $\frac{d}{dt}$ و ضرایب x_1 و x_2 عملگرهای چند جمله‌ای می‌باشند، یک **دستگاه دو معادله دیفرانسیل خطی** می‌نامیم. تعمیمی از این‌گونه دستگاه‌ها را در تعریف زیر ارائه می‌دهیم.

۶-۲-۷ تعریف: معادلات

$$\begin{cases} p_{11}(D)x_1 + p_{12}(D)x_2 + \ldots + p_{1n}(D)x_n = h_1(t) \\ p_{21}(D)x_1 + p_{22}(D)x_2 + \ldots + p_{2n}(D)x_n = h_2(t) \\ \vdots \\ p_{n1}(D)x_1 + p_{n2}(D)x_2 + \ldots + p_{nn}(D)x_n = h_n(t) \end{cases} \qquad (۵)$$

را که در آن D عملگر $\frac{d}{dt}$ و ضرایب $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عملگرهای چند جمله‌ای می‌باشند، یک **دستگاه n معادله دیفرانسیل خطی** می‌نامیم.

۶-۲-۸ تعریف: یک جواب دستگاه خطی (۵) مجموعه‌ای از توابع به‌صورت $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ است، که هر یک بر بازهٔ مشترک I تعریف شده و در همهٔ معادلات دستگاه (۵) صدق می‌کنند. جواب را **جواب عمومی** می‌گوییم، اگر، علاوه بر این، مجموعه توابع $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ شامل تعداد صحیحی ثابت‌های دلخواه باشد. در این مورد قضیهٔ ۶-۲-۹ را، که بدون اثبات بیان شده است، ببینید.

در اینجا توجه خود را به دستگاه‌هایی با دو معادله یا سه معادله دیفرانسیل خطی معطوف می‌داریم. ولی روش‌های ارائه شده در این مورد را می‌توان به دستگاه‌هایی با معادلات دیفرانسیل خطی بیشتر نیز تعمیم داد.

۶-۲-۹ قضیه: تعداد ثابت‌های اختیاری در جواب عمومی $x_1(t), x_2(t)$ دستگاه (۴) برابر با مرتبهٔ

$$f_1(D)g_2(D) - g_1(D)f_2(D) \qquad (۶)$$

است، مشروط بر این‌که

$$f_1(D)g_2(D) - g_1(D)f_2(D) \neq 0$$

۶-۲-۱۰ تذکر: حالتی را که تفاضل (۶) برابر صفر باشد، بعداً بررسی می‌کنیم. از طرف دیگر با توجه به دترمینان‌های 2×2 می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix} = f_1(D)g_2(D) - g_1(D)f_2(D)$$

این دترمینان را دترمینان دستگاه (۴) می‌نامیم.

۶-۲-۱۱ تذکر: معمولاً برای حل دستگاه جبری

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

به‌صورت زیر عمل می‌کنیم. معادلهٔ اول را در ۳ و معادلهٔ دوم را در ۲- ضرب می‌کنیم و سپس دو معادلهٔ حاصل را با هم جمع می‌کنیم. بدین ترتیب x حذف می‌شود. بنابراین به‌دست می‌آوریم

$$۱۳y = ۱۳ \quad , \quad y = ۱$$

برای یافتن x، می‌توان مجدداً در دستگاه داده شده y را حذف کرد، یا می‌توان $y=۱$ را در یکی از دو معادله قرارداد. به این ترتیب، مشاهده می‌کنیم که $x=۲$. بنابراین $x=۲$، $y=۱$ در هر دو معادله صدق می‌کند و از این رو یک جواب دستگاه داده شده است.

برای حل دستگاه (٤) به روش کاملاً مشابهی عمل می‌کنیم. با ضرب کردن معادلهٔ اول در $f_۲(D)$ و معادلهٔ دوم در $-f_۱(D)$ و جمع کردن معادلات حاصل $x_۱$ حذف می‌شود و یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت نسبت به $x_۲$ به‌دست می‌آید که می‌توان آن را توسط روش‌های قبلی حل کرد. با جایگذاری این مقدار $x_۲$ در یکی از دو معادله معادله‌ای نسبت به $x_۱$ به‌دست می‌آید که می‌توان آن را برای $x_۱(t)$ حل کرد. متأسفانه این روش حل، یعنی ضرب کردن یک معادله توسط یک عملگر چند جمله‌ای، معمولاً مرتبهٔ معادله دیفرانسیل داده شده را بالا می‌برد و در نتیجه باعث می‌شود تا ثابت‌های اضافی در زوج توابع $x_۱(t)$, $x_۲(t)$ پدید آید. بنابراین، برای تعیین جواب عمومی لازم است که ارتباط بین ثابت‌ها را مشخص کنیم. بعداً روشی را ارائه می‌دهیم که تعداد درست ثابت‌ها در زوج توابع $x_۱(t)$, $x_۲(t)$ را به‌دست می‌دهد و به این ترتیب جواب عمومی (٤) حاصل می‌شود. حال به مثال توجه کنید.

٦-۲-۱۲ مثال: دستگاه

$$\begin{cases} ۲\dfrac{dx_۱}{dt} - x_۱ + \dfrac{dx_۲}{dt} + ٤x_۲ = ۱ \\ \dfrac{dx_۱}{dt} - \dfrac{dx_۲}{dt} = t - ۱ \end{cases}$$

را حل کنید.

حل: با به‌کار بردن نماد عملگر $D = \dfrac{d}{dt}$، دستگاه داده شده را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} (۲D-۱)x_۱ + (D+٤)x_۲ &= ۱ \\ Dx_۱ - \quad Dx_۲ &= t-۱ \end{aligned}$$

نوشت. با توجه به تذکر ٦-۲-۱۱، با ضرب کردن معادله اول در D و معادله دوم در $(D+٤)$ و جمع کردن دو معادلهٔ حاصل به‌دست می‌آوریم.

$$\left(3D^2+3D\right)(x_1)=D(1)+(D+4)(t-1)=4t-3$$

این معادله یک معادله دیفرانسیل خطی غیرهمگن مرتبهٔ دوم است که می‌توان آن را با روش‌های بیان شده در فصل ۳ حل کرد. این معادله را می‌توان به‌صورت

$$3x''_1+3x'_1=4t-3 \tag{7}$$

نوشت. معادلهٔ همگن وابسته به این معادله دارای معادلهٔ کمکی به‌صورت

$$P(r)=3r^2+3r=0$$

است که دارای ریشه‌های $r_1=0$, $r_2=-1$ می‌باشند. بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ همگن عبارت است از

$$(x_1)h=c_1+c_2e^{-t}$$

با استفاده از روش ضرایب نامعین، می‌دانیم که معادله دیفرانسیل (۷) دارای جواب خصوصی‌ای به‌صورت

$$(x_1)_p=t(At+B) \tag{8}$$

است. حال A, B را به قسمی پیدا می‌کنیم که $(x_1)_p$ جوابی از معادلهٔ (۷) باشد، با محاسبهٔ مشتقات اول و دوم $(x_1)_p$، یعنی

* دو دستگاه را **هم‌ارز** می‌گوییم در صورتی که دارای جواب‌های یکسان باشند.

$$(x_1)'_p=2At+B$$

$$(x_1)''_p=2A$$

و قرار دادن این مقادیر در (۷) به دست می‌آوریم

$$6A+6At+3B=4t-3$$

در نتیجه

$$6A=4$$

$$6A+3B=-3$$

با حل این دستگاه معادلات، خواهیم داشت

$$A=\frac{۲}{۳} \qquad B=-\frac{۷}{۳}$$

با قرار دادن این مقادیر در (۸) یک جواب خصوصی به صورت

$$(x_۱)_P=\frac{۲}{۳}t^۲-\frac{۷}{۳}t$$

به‌دست می‌آید. بنابراین، جواب عمومی معادلهٔ (۷) عبارت است از

$$x_۱(t)=c_۱+c_۲e^{-t}+\frac{۲}{۳}t^۲-\frac{۷}{۳}t$$

با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ دوم دستگاه داده شده، به‌دست می‌آوریم

$$D\left(c_۱+c_۲e^{-t}+\frac{۲}{۳}t^۲-\frac{۷}{۳}t\right)-Dx_۲=t-۱$$

که به

$$Dx_۲=-c_۲e^{-t}+\frac{t}{۳}-\frac{٤}{۳}$$

ساده می‌شود. با انتگرال‌گیری جواب عمومی این معادله عبارت می‌شود از

$$x_۲(t)=c_۲e^{-t}+\frac{t^۲}{٦}-\frac{٤}{۳}t+c_۳$$

بنابه تذکر ٦-۲-۱۰ دترمینان دستگاه عبارت می‌شود از

$$\begin{vmatrix} ۲D-۱ & D+٤ \\ D & -D \end{vmatrix} \begin{aligned} &=-(۲D-۱)D-D(D+٤) \\ &=-۳D^۲-۳D \end{aligned}$$

که از مرتبهٔ دوم است. از این‌رو، بنابه قضیهٔ ٦-۲-۹ جواب عمومی باید شامل دو ثابت اختیاری باشد. ولی زوج توابع $x_۲(t)$, $x_۱(t)$ که در بالا به‌دست آورده‌ایم شامل سه ثابت اختیاری می‌باشد. برای به‌دست آوردن رابطه‌ای بین سه ثابت از این واقعیت که جواب دستگاه مجموعه‌ای از توابع است که در هر معادلهٔ دیفرانسیل دستگاه صدق می‌کند، استفاده می‌کنیم. با قرار دادن $x_۲(t)$, $x_۱(t)$ در معادلهٔ اول دستگاه داده شده به‌دست می‌آوریم

$$(۲D-۱)\left(c_۱+c_۲e^{-t}+\frac{۲}{۳}t^۲-\frac{۷}{۳}t\right)+(D+٤)\left(c_۲e^{-t}+\frac{t^۲}{٦}-\frac{٤}{۳}t+c_۳\right)=۱$$

بنابراین،

$$-۲c_۲ e^{-t}+\frac{۸}{۳}t-\frac{۱٤}{۳}-c_۱-c_۲ e^{-t}-\frac{۲}{۳}t^۲+\frac{۷}{۳}t-c_۲ e^{-t}$$
$$+\frac{t}{۳}-\frac{٤}{۳}+٤c_۲e^{-t}+\frac{۲}{۳}t^۲-\frac{۱٦}{۳}t+٤c_۳=۱$$

با ساده کردن و مرتب کردن طرف چپ رابطهٔ اخیر، خواهیم داشت

$$-٦-c_۱+٤c_۳=۱$$
$$٤c_۳=c_۱+۷$$
$$c_۳=\frac{c_۱+۷}{٤}$$

با جایگذاری این مقدار در جواب $x_۲(t)$ تابع درست شدهٔ

$$x_۲(t)=c_۲e^{-t}+\frac{t^۲}{٦}-\frac{٤}{۳}t+\frac{c_۱+۷}{٤}$$

به‌دست می‌آید. از این‌رو، توابع

$$x_۱(t)=c_۱+c_۲ e^{-t}+\frac{۲}{۳}t^۲-\frac{۷}{۳}t$$
$$x_۲(t)=c_۲e^{-t}+\frac{t^۲}{٦}-\frac{٤}{۳}t+\frac{c_۱+۷}{٤}$$

که شامل دو ثابت اختیاری است، جواب عمومی دستگاه داده شده است.

٦-۲-۱۳ تمرین: دستگاه
$$\begin{cases}\dfrac{dx_۱}{dt}-x_۱+\dfrac{dx_۲}{dt}+x_۲=۰\\[2mm] ۲\dfrac{dx_۱}{dt}+۲x_۱+\dfrac{dx_۲}{dt}-۲x_۲=t\end{cases}$$
را حل کنید.

٦-۲-۱٤ تمرین: دستگاه

$$\begin{cases}\dfrac{d^۲x_۱}{dt^۲}-٤x_۱+\dfrac{dx_۲}{dt}=۰\\[2mm] -٤\dfrac{dx_۱}{dt}+\dfrac{d^۲x_۲}{dt^۲}+۲x_۲=۰\end{cases}$$

را حل کنید.

۶-۲-۱۵ یک دستگاه مثلثی هم‌ارز

اینک روشی را بیان می‌کنیم که توسط آن می‌توان یک زوج تابع جواب را به قسمی به‌دست آورد که شامل تعداد درست ثابت‌های اختیاری باشد.

دستگاه

$$\begin{cases} f_1(D)x_1 + g_1(D)x_2 = h_1(t) \\ f_2(D)x_1 + g_2(D)x_2 = h_1(t) \end{cases} \qquad (۹)$$

را در نظر می‌گیریم. این دستگاه را می‌توان به صورت زیر با دستگاهی که هم‌ارز این دستگاه است جانشین کرد. دستگاه جدیدی که از ضرب کردن دو طرف معادلهٔ اول در عملگر چند جمله‌ای دلخواه $k(D)$ و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ دوم دستگاه به‌دست می‌آید، یعنی

$$\begin{aligned} & f_1(D)x_1 + g_1(D)x_2 = h_1(t) \\ & \left[f_1(D)k(D)+f_2(D)\right]x_1 + \left[g_1(D)k(D)+g_2(D)\right]k_2 = k(D)h_1(t)+h_2(t) \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

با دستگاه (۹) هم‌ارز است. (در اینجا متذکر می‌شویم که همین عمل را می‌توان در مورد دستگاه کلی (۵) نیز به‌کار برد). با توجه به تذکر ۶-۲-۱۰ دترمینان‌های دستگاه‌های (۹) و (۱۰) عبارتند از

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \end{vmatrix} = f_1 g_2 - g_1 f_2$$

و

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 \\ f_1 k + f_2 & g_1 k + g_2 \end{vmatrix} = f_1 g_2 - g_1 f_2$$

از این‌رو، مشاهده می‌کنیم که دترمینان‌های هر دو دستگاه یکی هستند. بنابراین مرتبهٔ دستگاه اصلی (۹) باید با دستگاه هم‌ارز آن، یعنی (۱۰) یکی باشد. با انجام عملی که در بالا توضیح دادیم و جابجا کردن دو معادله دستگاه و ضرب کردن دو طرف یک معادلهٔ دستگاه در یک ثابت غیر صفر دستگاه (۹) را می‌توان به صورت دستگاه هم‌ارز

$$\begin{aligned} F_1(D)x_1 \qquad\qquad &= H_1(t) \\ F_2(D)x_1 + G_2(D)x_2 &= H_2(t) \end{aligned}$$

نوشت، در حالت کلی با انجام سه عمل بالا در مورد دستگاه (۵) می‌توان آن را به صورت دستگاه هم‌ارز

$$\begin{aligned} Q_{11}(D)x_1+Q_{12}(D)x_2+\dots+Q_{1n}(D)x_n&=H_1(t)\\ Q_{22}(D)x_2+\dots+Q_{2n}(D)x_n&=H_2(t)\\ &\vdots\\ Q_{(n-1)(n-1)}(D)x_{n-1}+Q_{(n-1)n}(D)x_n&=H_{n-1}(t)\\ Q_{nn}(D)x_n&=H_n(t)\end{aligned} \qquad (11)$$

که در آن هیچ یک از $Q_{ii}(D)$ ها $1\le i\le n$، صفر نیستند. در این صورت می‌توان معادلهٔ n ام را بر حسب x_n حل کرده و سپس x_{n-1} را از معادلهٔ $(n-1)$ام پیدا کرد و الی آخر.

۶-۲-۱۶ مثال: دستگاه $\begin{cases}(3D-1)x_1+4x_2=t\\ Dx_1-Dx_2=t-1\end{cases}$ را حل کنید.

حل: معادلهٔ اول دستگاه را در $\frac{D}{4}$ ضرب کرده و نتیجه را با معادلهٔ دوم جمع می‌کنیم و آن را به جای معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}&(3D-1)x_1+4x_2=t\\ &\frac{1}{4}\left(3D^2+3D\right)x_1=\frac{D}{4}(t)+t-1=t-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

با حل معادلهٔ دوم دستگاه اخیر با روش‌های فصل۲، به دست می‌آوریم

$$x_1(t)=c_1+c_2e^{-t}+\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t$$

با جایگذاری مقدار $x_1(t)$ در معادلهٔ اول دستگاه بالا خواهیم داشت

$$(3D-1)\left[c_1+c_2e^{-t}+\frac{2}{3}t^2-\frac{7}{3}t\right]+4x_2=t$$

که با ساده کردن این عبارت به‌دست می‌آوریم

$$x_2(t)=\frac{c_1+7}{4}+c_2e^{-t}+\frac{1}{6}t^2-\frac{4}{3}t$$

با توجه به تذکر ۶-۲-۱۰ دترمینان دستگاه اصلی، عبارت است از

$$\begin{vmatrix} ۳D-۱ & ٤ \\ D & -D \end{vmatrix} = -۳D^۲ - ۳D$$

که مرتبهٔ آن دو است. از طرف دیگر توجه می‌کنیم که زوج توابع $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ شامل دو ثابت اختیاری است و بنابراین $x_۱(t)$, $x_۲(t)$ جواب عمومی دستگاه داده شده است.

۶-۲-۱۷ تمرین: دستگاه

$$(D+٤)x_۱ + Dx_۲ = ۱$$
$$(D-۲)x_۱ + x_۲ = t^۲$$

را حل کنید.

۶-۲-۱۸ حل: اینک توسط یک مثال روشی را ارائه می‌دهیم که توسط آن می‌توان یک دستگاه کمی را به یک دستگاه مثلثی هم‌ارز تبدیل کرد.

دستگاه

$$\begin{cases} (D^۳ - D^۲ + ۲D + ۱)x_۱ + (D^٤ + ۳D^۲ + ۱)x_۲ = ۰ \\ (D-۲)x_۱ + (D^۳ - ۳)x_۲ = ۰ \end{cases} \qquad (۱۲)$$

را در نظر می‌گیریم. در بین چهار عملگر چندجمله‌ای که در ضرایب ظاهر شده است، ضریبی را که مرتبهٔ آن از مرتبهٔ ضرایب دیگر کمتر است، در نظر می‌گیریم. در مثال بالا مرتبهٔ $(D-۲)$کمترین است. با ضرب کردن معادلهٔ دوم دستگاه (۱۲) در $-D^۲$ و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ اول این دستگاه، دستگاه هم‌ارز

$$(D^۲ + ۲D + ۱)x_۱ + (-D^۵ + D^٤ + ٦D^۲ + ۱)x_۲ = ۰$$
$$(D-۲)x_۱ + (D^۳ - ۳)x_۲ = ۰$$

به‌دست می‌آید. توجه می‌کنیم که به این ترتیب، توانستیم که مرتبهٔ ضریب $x_۱$ در معادلهٔ اول دستگاه را یک مرتبه کاهش دهیم. در دستگاه جدید چند جمله‌ای عملگر با

کمترینِ مرتبه نیز $(D-2)$ است. مجدداً با ضرب کردن معادلهٔ دوم دستگاه اخیر در $-D$ و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ اول این دستگاه به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}(4D+1)x_1 + \left(-D^5+6D^2+3D+1\right)x_2 &= 0\\ (D-2)x_1 + \left(D^3-3\right)x_2 &= 0\end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که مرتبهٔ ضریب x_1 در معادلهٔ اول از دو به یک کاهش یافته است. اینک با ضرب کردن دو طرف معادلهٔ اخیر در -4 و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ اول دستگاه هم‌ارز

$$\begin{aligned}9x_1 + \left(-D^5-4D^3+6D^2+3D+13\right)x_2 &= 0\\ (D-2)x_1 + \left(D^3-3\right)x_2 &= 0\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید. حال با ضرب کردن معادلهٔ اول در $-\dfrac{(D-2)}{9}$ و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ دوم این دستگاه به‌دست می‌آوریم.

$$9x_1 + \left(-D^5-4D^3+6D^2+3D+13\right)x_2 = 0$$
$$\left[\left(D^5+4D^3-6D^2-3D-13\right)\frac{D-2}{9}+D^3-3\right]x_2 = 0$$

همان‌گونه که در بالا توضیح داده شد، همیشه می‌توان مرتبهٔ ضریب یکی از عملگرهای چندجمله‌ای را به صفر تحویل کرد.

۶-۲-۱۹ مثال: دستگاه

$$\begin{aligned}(D+1)x_1 + (D+1)x_2 &= 1\\ D^2x_1 - Dx_2 &= t-1\end{aligned}$$

را حل کنید.

حل: در اینجا سه عملگر چندجمله‌ای از پایین‌ترین مرتبه وجود دارد. با کمی دقت مشاهده می‌کنیم راحت‌تر است که معادلهٔ دوم و معادلهٔ اول را جمع کرده و معادلهٔ حاصل را به جای معادلهٔ اول قرار دهیم. بنابراین،

$$\left(D^{2}+D+1\right)x_{1}+x_{2}=t$$

$$D^{2}x_{1}-Dx_{2}=t-1$$

با ضرب کردن معادلهٔ اول در D و جمع کردن معادلهٔ حاصل با معادلهٔ دوم به دست می‌آوریم

$$\left(D^{2}+D+1\right)x_{1}+x_{2}=t$$

$$\left(D^{3}+2D^{2}+D\right)x_{1}=t$$

جواب عمومی معادلهٔ دوم عبارت است از

$$x_{1}(t)=c_{1}+c_{2}e^{-t}+c_{3}t\ e^{-t}+\frac{t^{2}}{2}-2t$$

با جایگذاری مقدار $x_1(t)$ در معادلهٔ اول دستگاه اخیر، خواهیم داشت

$$x_{2}(t)=t-\left(D^{2}+D+1\right)\left[c_{1}+c_{2}e^{-t}+c_{3}t\ e^{-t}+\frac{t^{2}}{2}-2t\right]$$

پس از ساده کردن این عبارت، به دست می‌آوریم

$$x_{2}(t)=-c_{1}-c_{2}e^{-t}-c_{3}\left(-e^{-t}+te^{-t}\right)-\frac{t^{2}}{2}+2t+1$$

دترمینان دستگاه اصلی عبارت است از

$$\begin{vmatrix} D+1 & D+1 \\ D^{2} & -D \end{vmatrix}=-D(D+1)-D^{2}(D+1)$$

که از مرتبهٔ سوم است. توجه می‌کنیم که توابع $x_1(t)$ و $x_2(t)$ شامل سه ثابت اختیاری می‌باشد. بنابراین $x_1(t)$ و $x_2(t)$ جواب عمومی دستگاه داده شده است.

۶-۲-۲۰ تمرین: دستگاه

$$(2D-1)x_{1}+(D-4)x_{2}=1$$

$$Dx_{1}-\quad Dx_{2}=t-1$$

را حل کنید.

۶-۲-۲۱ تمرین: دستگاه

$$(D-1)x_1+(D+1)x_2=0$$
$$(D+1)x_1+(D-1)x_2=\frac{t}{2}$$

را حل کنید.

۶-۲-۲۲ حالت $f_1(D)g_2(D)-g_1(D)f_2(D)=0$

اگر در یک دستگاه جبری دترمینان ضرایب صفر باشد، آن‌گاه دستگاه جبری جواب ندارد یا دارای بینهایت جواب است. برای مثال، دستگاه‌های

(الف)
$$2x+3y=5$$
$$2x+3y=7$$

(ب)
$$2x+3y=5$$
$$4x+6y=7$$

دارای جواب نیستند. در حالی که هر یک از دستگاه‌های

(ج)
$$2x+3y=5$$
$$4x+6y=10$$

(د)
$$2x+3y=0$$
$$6x+9y=0$$

دارای بینهایت جواب هستند. توجه می‌کنیم که در همهٔ این مثال‌ها دترمینانی که از ضرایب x,y تشکیل می‌شود صفر است. اگر با حذف x و y طرف راست دستگاه به صفر تبدیل نشود، دستگاه دارای جواب نیست و وقتی طرف راست دستگاه به صفر تبدیل شود دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است.

به همین نحو، فرض کنید دترمینان دستگاه (۹)، یعنی

$$\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix} = f_1(D)g_2(D)-g_1(D)f_2(D)$$

صفر شود. اگر با حذف x_1 و x_2 طرف راست دستگاه به صفر تبدیل نشود، دستگاه جواب ندارد و در غیر این‌صورت دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

۶-۲-۲۳ مثال: تعداد جواب‌های دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ Dx_1 - Dx_2 = t^2 \end{cases}$$

را پیدا کنید.

حل: دترمینان دستگاه داده شده عبارت است از

$$\begin{vmatrix} D & -D \\ D & -D \end{vmatrix} = -D^2 - \left(-D^2\right) = 0$$

چون طرف راست دستگاه داده شده با حذف x_1 و x_2 به صفر تبدیل نمی‌شوند یا بنابراین دستگاه جواب ندارد.

۶-۲-۲۴ مثال: تعداد جواب‌های دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = t \\ 4Dx_1 - 4Dx_2 = 4t \end{cases}$$

را پیدا کنید.

حل: دترمینان دستگاه داده شده عبارت است از

$$\begin{vmatrix} D & -D \\ 4D & -4D \end{vmatrix} = -4D^2 - \left(-4D^2\right) = 0$$

چون طرف راست دستگاه داده شده با حذف x_1 و x_2 به صفر تبدیل می‌شود، پس دستگاه بی‌نهایت جواب دارد. از جمله زوج توابع $x_1 = \frac{t^2}{2} + c$، $x_2 = 5c$ یک جواب است. زوج توابع $x_1 = \frac{t}{2} + c_1$, $x_2 = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{2} + c_2$ یک جواب است. [در هر کدام از جواب‌ها $x_1(t)$ را به دلخواه انتخاب کرده و دستگاه را برحسب $x_2(t)$ حل می‌کنیم. این زوج توابع در معادلهٔ دیگر دستگاه صدق می‌کنند.]

۶-۲-۲۵ تمرین: دستگاه

$$\begin{cases} (D+1)x_1 + (D+1)x_2 = 0 \\ (D-1)x_1 + (D-1)x_2 = 0 \end{cases}$$

را حل کنید.

اینک چند دستگاه با سه معادله را بررسی می‌کنیم.

۶-۲-۲۶ مثال: دستگاه

$$\begin{cases}(D-2)x_1 + x_2 - x_3 = t\\ -x_1 + (2D-1)x_2 + 2x_3 = 1\\ 2x_1 + 6x_2 + Dx_3 = 0\end{cases}$$

را به‌صورت دستگاه (۱۱) تحویل نمایید.

حل: با ضرب کردن معادلهٔ اول در ۲ و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ دوم و ضرب کردن معادلهٔ اول در D و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ سوم دستگاه زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}&(D-2)x_1 + x_2 - x_3 = t\\ &(2D-5)x_1 + (2D+1)x_2 = 2t+1\\ &(D^2-2D+2)x_1 + (D+6)x_2 = 1\end{aligned}$$

با ضرب کردن معادلهٔ سوم در ۲- و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ دوم دستگاه

$$\begin{aligned}&(D-2)x_1 + x_2 - x_3 = t\\ &(-2D^2+6D-9)x_1 - 11x_2 = 2t-1\\ &(D^2-2D+2)x_1 + (D+6)x_2 = 1\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید. اینک با ضرب کردن معادلهٔ دوم در $\frac{D+6}{11}$ و جمع کردن نتیجهٔ حاصل با معادلهٔ سوم دستگاه هم‌ارز

$$\begin{aligned}&(D-2)x_1 + x_2 - x_3 = t\\ &(-2D^2+6D-9)x_1 - 11x_2 = 2t-1\\ &(-2D^3+5D^2+5D-32)\,x_1 = 12t+7\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید. با حل دستگاه سوم برحسب x_1 یک جواب با سه ثابت اختیاری به‌دست می‌آوریم. با جایگذاری این مقدار $x_1(t)$ در معادلهٔ دوم یک معادله برحسب x_2 با مرتبهٔ صفر عاید می‌شود و سرانجام جایگذاری $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در معادلهٔ اول این

دستگاه یک معادلهٔ برحسب x_3 با مرتبهٔ صفر به‌دست می‌آید. به این ترتیب سه ثابت اختیاری در مجموع توابع $x_3(t)$, $x_2(t)$, $x_1(t)$ داریم که با مرتبهٔ دترمینان دستگاه یعنی

$$\begin{vmatrix} D-2 & 1 & -1 \\ -1 & 2D-1 & 2 \\ 2 & 6 & D \end{vmatrix}$$

برابر است.

۶-۲-۲۷ مثال: جواب عمومی دستگاه

$$\begin{cases} \left(D^2-2D+3\right)x_1 + (D-1)x_2 + Dx_3 = 0 \\ (3D+1)x_1 - 3Dx_2 - Dx_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases} \qquad (13)$$

را (با $D=\frac{d}{dt}$) پیدا کنید.

حل: در اینجا با حل معادله سوم دستگاه (۱۳) نسبت به x_3 به‌دست می‌آوریم

$$x_3 = 2x_1 - 2x_2 + 4$$

با جایگذاری مقدار x_3 در معادله اول و دوم دستگاه (۱۳) دستگاه با معادلهٔ

$$\left(D^2-2D+3\right)x_1 + (D-1)x_2 + 2Dx_1 - 2Dx_2 = 0$$

$$(3D+1)x_1 - 3Dx_2 - 2Dx_1 + 2Dx_2 = 1$$

یا

$$\left(D^2+3\right)x_1 - (D+1)x_2 = 0$$

$$(D+1)x_1 - Dx_2 = 1$$

با ضرب کردن معادلهٔ دوم دستگاه اخیر در ۱- و جمع کردن معادلهٔ حاصل با معادلهٔ اول این دستگاه خواهیم داشت

$$\left(D^2-D+2\right)x_1 - x_2 = -1$$

$$(D+1)x_1 - Dx_2 = 1$$

اینک با ضرب کردن معادلهٔ اول این دستگاه در $-D$ و جمع کردن معادلهٔ حاصل با معادلهٔ دوم به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}&(D^2-D+2)x_1-\ \ x_2=-1\\&(-D^3+D^2-D+1)x_1=1\end{aligned}\qquad(14)$$

معادلهٔ دوم این دستگاه را که یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبهٔ سوم با ضرایب ثابت است حل می‌کنیم. معادله کمکی این معادله عبارت است از

$$p(r)=-(r-1)\left(r^2+1\right)=0$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از

$$r_1=1\quad,\quad r_2=i\quad,\quad r_3=-i$$

بنابراین، جواب عمومی معادله همگن وابسته به این معادله برابر است با

$$c_1e^t+c_2\sin t+c_3\cos t$$

و یک جواب خصوصی این معادله، ۱ می‌باشد، از این‌رو، جواب عمومی این معادله برابر است با

$$x_1(t)=c_1e^t+c_2\sin t+c_3\ \cos t+1$$

با جایگذاری مقدار $x_1(t)$ در معادلهٔ اول دستگاه (۱٤)، به‌دست می‌آوریم.

$$\left(D^2-D+2\right)\ \left(c_1e^t+c_2\sin t+c_3\ \cos t+1\right)-x_2=-1$$

از این‌رو،

$$\begin{aligned}&c_1e^t-c_2\sin t-c_3\cos t-c_1e^t-c_2\cos t+c_3\sin t\\&+2c_1e^t+2c_2\sin t+2c_3\cos t+2-x_2=-1\end{aligned}$$

بنابراین،

$$x_2(t)=2c_1e^t+(c_2+c_3)\sin t+(c_3-c_2)\cos t+3$$

با قرار دادن مقادیر $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در معادلهٔ سوم دستگاه اصلی، یعنی

$$x_3=2x_1-2x_2+4$$

به‌دست می‌آوریم

$$x_2(t) = 2c_1e^t + 2c_2\sin t + 2c_3\cos t + 2 - 4c_1e^t - 2c_2\sin t$$
$$-2c_3\sin t - 2c_3\cos t + 2c_2\cos t - 6 + 4$$

بنابراین،

$$x_3(t) = -2c_1e^t - 2c_3\sin t + 2c_2\cos t$$

توجه می‌کنیم که مجموع توابع $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ شامل سه ثابت اختیاری است که برابر با مرتبهٔ دترمینان دستگاه اصلی می‌باشد. بنابراین مجموعهٔ $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ جواب عمومی دستگاه داده شده است.

۶-۲-۲۸ تمرین: جواب عمومی دستگاه زیر را پیدا کنید.

$$\begin{cases} D^2x_1 + (D-1)x_2 = 0 \\ (2D-1)x_1 + (D-1)x_3 = 0 \\ (D+3)x_1 + (D-4)x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

۶-۲-۲۹ تمرین: معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = 0$ را به‌صورت یک دستگاه خطی مرتبهٔ اول بازنویسی کنید و سپس با حل کردن این دستگاه جواب عمومی این معادله دیفرانسیل را به‌دست آورید.

۶-۲-۳۰ تمرین‌های بخش ۶-۲

جواب عمومی هر یک از دستگاه‌های زیر را پیدا کنید.

۱-
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 3e^{-t} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases}$$

۲-
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 3x_1 + 2t \end{cases}$$

۳-

$$\begin{cases} \dfrac{dx_3}{dt} = x_1 + 4x_2 + t \\ 3\dfrac{dx_1}{dt} + 3x_1 + 2x_2 = e^t \\ 4x_1 - 3\dfrac{dx_2}{dt} + 3x_2 = 3t \end{cases}$$

۴-

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} - 4x_1 - 2\dfrac{dx_2}{dt^2} + x_2 = t \\ 2\dfrac{dx_1}{dt} + x_1 + \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

۵-

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} + \dfrac{dx_2}{dt} + x_2 = t \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \dfrac{dx_2}{dt} + x_1 + x_2 = t^2 \end{cases}$$

در تمرین‌های زیر جواب‌های دستگاه داده شده را، در صورت وجود، پیدا کنید.

۶-

$$\begin{cases} Dx_1 - Dx_2 = e^t \\ 3Dx_1 - 3Dx_2 = 3e^t \end{cases}$$

۷-

$$\begin{cases} (D-2)x_1 + (D-2)x_2 = t \\ (D+3)x_1 + (D+3)x_2 = t \end{cases}$$

۸- دستگاه

$$\begin{cases} Dx_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + (D-1)x_2 = 0 \\ -x_1 + (D-1)x_3 = 0 \end{cases}$$

را حل کنید.

۶-۳ کاربرد دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل

در بخش پایانی این فصل چند مسأله در مورد کاربردهای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل را بررسی می‌کنیم.

به عنوان اولین مسأله یک مسأله مخلوط را مطرح می‌کنیم.

۶-۳-۱ مثال: می‌کنیم دو مخزن هر کدام حاوی ۱۰۰ گالن از یک محلول شیمیایی باشند. در مخزن اول ۲۰ پوند و در مخزن دوم ۱۰ پوند از این ماده شیمیایی موجود است. در لحظهٔ $t=0$ آب با آهنگ ۲ گالن در دقیقه به مخزن اول وارد می‌شود و مخلوط (هم‌زده می‌شود) با آهنگ ۲ گالن در دقیقه به مخزن دوم وارد شده و مخلوط (هم‌زده می‌شود) از مخزن دوم با همان آهنگ خارج می‌شود. فرمولی برای مقدار ماده شیمیایی در هر مخزن در لحظهٔ t، پیدا کنید.

حل: فرض می‌کنیم که $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب مقدار مادهٔ شیمیایی در مخزن‌های اول و دوم باشند. پس، باید داشته باشیم

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{2}{100}x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{2}{100}x_1-\dfrac{2}{100}x_2 \end{cases} \qquad (1)$$

زیرا، آهنگ تغییر مقدار مادهٔ شیمیایی در یک مخزن باید برابر با آهنگ ورود به آن منهای آهنگ خروج از آن باشد. همچنین می‌دانیم که

$$x_1(0)=20 \qquad\qquad x_2(0)=10$$

در اینجا معادلهٔ اول دستگاه (۱) تنها شامل مجهول x_1 است. این معادلهٔ جداشدنی را با توجه به شرط اولیهٔ $x_1(0)=20$ حل می‌کنیم. با جدا کردن متغیرها، خواهیم داشت

$$\frac{dx_1}{x_1}=-\frac{1}{50}dt$$

با انتگرال‌گیری، به‌دست می‌آوریم

$$x_1 = c_1e^{-\frac{1}{50}t}$$

از شرط $x_1(0)=20$، نتیجه می‌شود که

$$x_1 = 20\, e^{-\frac{1}{50}t}$$

با جایگذاری مقدار $x_1(t)$ در معادلهٔ دوم دستگاه (۱) به معادلهٔ خطی

$$\frac{dx_2}{dt}+\frac{1}{50}x_2=\frac{2}{5}e^{-1/50\, t}$$

برحسب $x_۲$ می‌رسیم. با ضرب کردن دو طرف این معادله در $e^{\frac{۱}{۵۰}t}$ معادلهٔ

$$e^{\frac{۱}{۵۰}t}\frac{dx_۲}{dt}+\frac{۱}{۵۰}e^{\frac{۱}{۵۰}t}x_۲=\frac{۲}{۵}$$

یا

$$\frac{d}{dt}(e^{۱/۵۰\, t}x_۲)=\frac{۲}{۵}$$

به‌دست می‌آید. با ضرب کردن دو طرف این معادله در dt و انتگرال‌گیری، خواهیم داشت

$$e^{\frac{۱}{۵۰}t}x_۲=\frac{۲}{۵}t+c_۲$$

بنابراین،

$$x_۲(t)=\frac{۲}{۵}t\,e^{-\frac{۱}{۵۰}t}+c_۲\,e^{-\frac{۱}{۵۰}t}$$

از شرط $x_۲(۰)=۱۰$، نتیجه می‌شود که

$$x_۲(t)=\frac{۲}{۵}t\,e^{-\frac{۱}{۵۰}t}+۱۰e^{-\frac{۱}{۵۰}t}$$

۶-۳-۲ تمرین: دو مخزن که هر یک از آغاز حاوی ۵۰ گالن از یک محلول نمک هستند، در نظر می‌گیریم. در مخزن اول ۱۰ پوند و در مخزن دوم ۲۰ پوند نمک وجود دارد. محلول نمکی با ۲ پوند نمک در هر گالن با آهنگ ۱ گالن در دقیقه به مخزن اول وارد می‌شود. سپس مخلوط با آهنگ ۱ گالن در دقیقه به مخزن دوم وارد شده و با همان آهنگ از آن خارج می‌شود. فرمولی برای مقدار مادهٔ نمک در هر مخزن در لحظهٔ t، پیدا کنید.

۶-۳-۳: حال به بررسی مسأله‌ای در مورد دستگاه‌های مکانیکی می‌پردازیم. دو جسم به جرم‌های $m_۱$ و $m_۲$ به فنرهایی مطابق شکل (۱) به‌طور افقی متصل هستند.

تغییر مکان دو جسم، به سمت مثبت، را به ترتیب با $x_۱$ و $x_۲$ نشان می‌دهیم. (الف) و (ب) در شکل ۱ وضعیت دو جسم را قبل و پس از جابه‌جایی، نشان می‌دهند. می‌خواهیم معادله‌ای برای حرکت هر یک از اجسام پیدا کنیم. وقتی دستگاه در حالت تعادل است، وضعیت $m_۱$ را با $o_۱$ و وضعیت $m_۲$ را با $o_۲$ نشان می‌دهیم. فرض می‌کنیم $x_۱$ مقدار تغییر مکان $m_۱$ از حالت تعادل خود، یعنی $o_۱$ و $x_۲$ مقدار جابه‌جایی $m_۲$ از حالت تعادل خود یعنی $o_۲$، در لحظهٔ t، باشند. از این‌رو، وقتی $m_۱$ در $x_۱$ و $m_۲$ در $x_۲$

هستند (شکل ۱ (ب) را ببینید)، فنر s_1 به اندازهٔ x_1 از حالت تعادلش و فنر s_2 به اندازهٔ $x_2 - x_1$ از حالت تعادلش کشیده شده‌اند. برای مثال اگر $x_1 = 1$ فوت و $x_2 = \frac{3}{2}$ فوت باشد، آن‌گاه فنر s_2 تنها به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ فوت کشیده می‌شود. بنابراین، دو نیرو بر در جهت مثبت وارد می‌شود.

۱- نیروی فنر ناشی از s_1 که به طرف چپ وارد می‌شود توسط قانون هوک (کاربردهای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت فصل ۳ را ببینید.) برابراست با $-k_1 x_1$.

۲- نیروی فنر ناشی از s_2 که به طرف راست وارد می‌شود برابر است با $k_2(x_2 - x_1)$.

از این رو معادله دیفرانسیل حرکت m_1 عبارت است از

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1)$$

به همین نحو، دو نیرو بر m_2 وارد می‌شود و این نیروها عبارتند از

۱- نیروی فنر ناشی از s_2 که به طرف چپ وارد می‌شود. بنابه قانون هوک، این نیرو برابر است با $-k_2(x_2 - x_1)$.

۲- نیروی فنر ناشی از s_3 که به طرف چپ وارد می‌شود. بنابر قانون هوک، این نیرو برابر است با $-k_3 x_2$.

از این‌رو، معادله دیفرانسیل حرکت m_2 عبارت است از

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 \qquad (3)$$

جواب دستگاه متشکل از معادلات دیفرانسیل خطی (۲) و (۳) معادلات حرکت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ یک زوج فنر نشان داده شده در شکل ۱ را به‌دست می‌دهند.

اگر علاوه بر نیروهای فنر، یک تابع نیرو، مانند $F_1(t)$، به m_1 و یک تابع نیرو، مثل $F_2(t)$، به m_2 (مانند شکل ۲) متصل شوند، آن‌گاه زوج توابع (۲) و (۳) به

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= F_1(t) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + k_3 x_2 + k_2(x_2 - x_1) &= F_2(t) \end{aligned} \qquad (4)$$

تبدیل می‌شوند.

اگر فرض می‌کنیم به دلیل اصطکاک نیروی میرایی $r_1 \dfrac{dx_1}{dt}$ وجود دارد که بر m_1 و نیروی میرایی $r_2 \dfrac{dx_2}{dt}$ به m_2 وارد می‌شوند، آن‌گاه دستگاه (۴) به

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + r_1 \dfrac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 + k_2\left(x_1 - x_2\right) = F_1\left(t\right) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + r_2 \dfrac{dx_2}{dt} + k_3 x_2 + k_2\left(x_2 - x_1\right) = F_2\left(t\right) \end{cases} \qquad (۵)$$

تبدیل می‌شود. اگر همهٔ فنرها دارای ثابت یکسان k باشند، آن‌گاه دستگاه (۵) بـه دستگاه خطی

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + r_1 \dfrac{dx_1}{dt} + 2kx_1 - kx_2 = F_1\left(t\right) \\ m_2 \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + r_2 \dfrac{dx_2}{dt} + 2kx_2 - kx_1 = F_2\left(t\right) \end{cases} \qquad (۶)$$

تبدیل می‌شود. با استفاده از نماد عملگری، دستگاه (۶) را می‌توان به صورت

$$\begin{cases} \left(m_1D^2 + r_1D + 2k\right)x_1 - kx_2 = F_1\left(t\right) \\ -kx_1 + \left(m_2D^2 + r_2D + 2k\right)x_2 = F_2\left(t\right) \end{cases} \qquad (۷)$$

نوشت. با ضرب کردن معادلهٔ اول دستگاه (۷) در $\left(m_2D^2 + r_2D + 2k\right)$ و معادلهٔ دوم این دستگاه در k و جمع کردن دو معادلهٔ حاصل، معادلهٔ خطـی زیـر برحسـب x_1 به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} &\{m_1m_2D^4 + \left(m_1r_2 + m_2r_1\right)D^3 + \left[r_1r_2 + 2k\left(m_1 + m_2\right)\right]D^2 \\ &+\left[2k\left(r_1 + r_2\right)D + 3k^2\right] x_1 = \left(m_2D^2 + r_2D + 2K\right)F_1\left(t\right) + kF_2\left(t\right) \end{aligned}$$

جواب عمومی این معادله را می‌توان به راحتی با استفاده از روش‌هـای فصـل ۳ به‌دست آورد و سپس با قرار دادن این مقدار در معادلهٔ دوم دستگاه (۷) می‌تـوان مقـدار $x_2\left(t\right)$ را به‌دست آورد.

۶-۳-۴ تمرین: (الف) دستگاه (۶) را در حالتی که $m_1 = m_2 = m$ ؛ $F_1(t) = F_2(t) = 0$، حل کنید.

(ب) جوابی از این دستگاه را در حالتی پیدا کنید که در $t = 0$, m_2 ثابت نگه داشته شود و m_1 به اندازهٔ A واحد به طرف راست کشیده شده، رها گردد.

۶-۳-۵ تمرین: دستگاه داده شده توسط معادلات (۲) و (۳) را در حالتی که $m_1 = 1$، $m_2 = 2$ ، $k_1 = 1$، $k_2 = 2$، $k_3 = 3$، حل کنید.

۶-۳-۶ تمرین‌های گوناگون فصل ۶

در تمرین‌های زیر دستگاه داده شده را به صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول بازنویسی کنید.

۱-
$$\begin{cases} x_1' - x_2' - x_1 = \cos t \\ x_2' - 3x_1 = e^t \end{cases}$$

۲-
$$\begin{cases} x_1'' = x_1 \sin t + x_2 x_3 \\ x_2'' = x_1^2 x_2' + (x_1')^2 \\ x_3'' = x_1 x_2 x_3 \end{cases}$$

۳- معادلات دیفرانسیل داده شده را به صورت یک دستگاه مرتبهٔ اول بنویسید.

(الف) $y'' - 6y' + 8y = x + 2$

(ب) $y'' + py' + qy = f(x)$

(ج) $y''' + py'' + qy' + ry = f(x)$

در تمرین‌های زیر دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل را حل کنید.

۴-
$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 \\ x_2' = -4x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

۵-
$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = \quad + x_2 + x_3 \\ x_3' = \quad\quad + 2x_3 \end{cases}$$

۶-
$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 + \cos t \\ x_2' = -x_2 - x_3 + \sin t \\ x_3' = -2x_3 + \cos t + 2\sin t \end{cases}$$

۷-
$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ x_2' = -2x_2 + 2x_3 \\ x_3' = x_1 + 5x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

۸-
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 - \dfrac{d^2x_2}{dt^2} - x_2 = -\cos 2t \\ 2\dfrac{dx_1}{dt} - \dfrac{dx_2}{dt} - x_2 = 0 \end{cases}$$

۹-
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} - \dfrac{dx_2}{dt} = 1 - t \\ \dfrac{dx_1}{dt^2} + 2\dfrac{dx_2}{dt} = 4e^t + x_1 \end{cases}$$

۱۰-
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} - x_1 + \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + x_2 = 0 \\ \dfrac{dx_1}{dt} + 2x_1 + \dfrac{dx_2}{dt} + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

۱۱-
$$\begin{cases} \left(D^2 - 2D + 3\right)x_1 + \left(D - 1\right)x_2 + Dx_3 = 0 \\ \left(3D + 1\right)x_1 - 3Dx_2 - Dx_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

در تمرین‌های زیر، در صورت وجود، جواب‌های دستگاه‌های داده شده را پیدا کنید.

۱۲-
$$\begin{cases} \left(D^2 - 1\right)x_1 + \left(D^2 - D\right)x_2 = -2\sin t \\ \left(D^2 + D\right)x_1 + D^2x_2 = 0 \end{cases}$$

۱۳-
$$\begin{cases} \left(D^2 - 1\right)x_1 + \left(D^2 - 2\right)x_2 = -2\sin t \\ \left(D^2 + 1\right)x_1 + D^2x_2 = 0 \end{cases}$$

فصل هفتم

تبدیلات لاپلاس

در این فصل تبدیلات لاپلاس را که دارای کاربردهای فراوانی است، مورد بررسی قرار خواهیم داد. از تبدیلات لاپلاس می‌توان در حل مسائل با مقادیر اولیه‌ای استفاده کرد که در طرف راست معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت تابع پیوسته‌ای نداشته باشیم. توجه می‌کنیم که روش‌های ضرایب نامعین و تغییر پارامتر در مورد حل معادلات دیفرانسیل غیرهمگن را وقتی می‌توان به‌کار برد که تابع طرف راست معادله دیفرانسیل پیوسته باشد.

۷-۱ تعریف تبدیل لاپلاس

۷-۱-۱ تعریف: فرض می‌کنیم تابع f بر بازده $[0,\infty)$ تعریف شده باشد. انتگرال ناسرهٔ

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. در رابطهٔ بالا، s عددی حقیقی است. فرض می‌کنیم که انتگرال بالا به ازای sهای متعلق به یک مجموعه از اعداد حقیقی، مانند s همگرا باشد. متذکر می‌شویم که ممکن است این انتگرال به ازای هیچ مقداری از s همگرا نباشد. اگر انتگرال (۱) به ازای s متعلق به مجموعهٔ s همگرا باشد، تابع F را به صورت

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt \qquad s\in S \qquad (۲)$$

تعریف می‌کنیم. تابع F را **تبدیل لاپلاس** تابع f می‌نامیم. برای مشخص کردن رابطهٔ بین f و F می‌نویسیم

$$F=L[f] \quad \text{و} \quad F(s)=L[f](s)$$

(به‌طور کلی، از حروف بزرگ برای نمایش دادن تبدیلات لاپلاس توابعی که توسط حروف کوچک مشابه نشان داده می‌شوند، استفاده می‌کنیم. برای مثال، $G=L[g]$ و $L[h]=H$ و غیره.)

شرایط وجود تبدیلات لاپلاس توابع را در بخش بعد مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

اینک تبدیل لاپلاس چند تابع خاص را پیدا می‌کنیم.

۷-۱-۲ مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(x)=۱$ را پیدا کنید.

حل: بنا به (۲) با $f(x)=۱$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
L[۱]=F(s)&=\int_{0}^{\infty} e^{-st}dt \\
&=\lim_{T\to\infty}\int_{0}^{T} e^{-st}\,dt \\
&=\lim_{T\to\infty}\left[-\frac{۱}{s}\,e^{-st}\right]_{0}^{T} \\
&=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-e^{-sT}}{s}+\frac{۱}{s}\right]_{0}^{T}
\end{aligned}$$

به ازای $s>0$، به‌دست می‌آوریم

$$L[۱]=\frac{۱}{s}$$

۷-۱-۳ تمرین: تابع $f(t)=e^{at}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید به ازای

$$L\left[e^{at}\right]=\frac{۱}{s-a} \quad , s>a$$

به عنوان مثال از تمرین ۷-۱-۳، نتیجه می‌گیریم.

$$L\left[e^{-t}\right]=\frac{۱}{s+۱} \qquad , s>-۱$$
$$L\left[e^{۲t}\right]=\frac{۱}{s-۲} \qquad , s>۲$$

۷-۱-٤ مثال: نشان دهید که به ازای $s>۰$ ، $L[\cos at]=\frac{s}{s^۲+a^۲}$.

حل: بنابر تعریف تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L[\cos at] &= \int_۰^\infty e^{-st}\cos at\, dt \\ &= \lim_{T\to\infty}\int_۰^T e^{-st}\cos at\, dt \end{aligned} \qquad (۳)$$

نخست انتگرال $\int_۰^T e^{-st}\cos at\, dt$ را محاسبه می‌کنیم و سپس حد می‌گیریم وقتی $T\to\infty$. برای محاسبهٔ این انتگرال از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$u=e^{-st} \qquad dv=\cos at\ dt$$
$$du=-se^{-st}\,dt \qquad v=\frac{\sin at}{a}$$

بنابراین،

$$\int_۰^T e^{-st}\ \cos at\, dt=\frac{۱}{a}e^{-st}\sin at\Big|_۰^T+\frac{s}{a}\int_۰^T e^{-st}\sin at\, dt \qquad (٤)$$

اینک، برای محاسبهٔ $\int_۰^T e^{-st}\sin at\, dt$ مجدداً از روش انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$u=e^{-st} \qquad dv=\sin at\ dt$$
$$du=-se^{-st}\,dt \qquad v=-\frac{\cos at}{a}$$

از این رو،

$$\int_۰^T e^{-st}\ \sin at\, dt=-\frac{۱}{a}e^{-st}\cos at\Big|_۰^T-\frac{s}{a}\int_۰^T e^{-st}\cos at\, dt$$

با قرار دادن این مقدار در رابطه (٤) به دست می‌آوریم

$$\int_{\circ}^{T} e^{-st}\cos at\,dt=\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\Big|_{\circ}^{T}-\frac{s}{a^{2}}e^{-st}\cos at\Big|_{\circ}^{T}$$

$$-\frac{s^{2}}{a^{2}}\int_{\circ}^{T}e^{-st}\cos at\,dt$$

بنابراین،

$$\left(\frac{s^{2}+a^{2}}{a^{2}}\right)\int_{\circ}^{T}e^{-st}\cos at\,dt=\frac{1}{a}e^{-st}\sin at\Big|_{\circ}^{T}-\frac{s}{a^{2}}e^{-st}\cos at\Big|_{\circ}^{T}$$

$$\int_{\circ}^{T}e^{-st}\cos at\,dt=\frac{a}{s^{2}+a^{2}}\left[e^{-sT}\sin aT\right]-\frac{s}{s^{2}+a^{2}}\left[e^{-sT}\cos aT-1\right]$$

به ازای $s>\circ$، رابطهٔ (۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$L[\cos at]=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{a}{s^{2}+a^{2}}\left[e^{-sT}\sin aT\right]-\frac{s}{s^{2}+a^{2}}\left[e^{-sT}\cos aT\right]+\frac{s}{s^{2}+a^{2}}\right\}$$

بنابراین، $s>\circ$, $L[\cos at]=\dfrac{s}{s^{2}+a^{2}}$

۷-۱-۵ تمرین: نشان دهید که به ازای $s>\circ$, $L[\sin at]=\dfrac{a}{s^{2}+a^{2}}$.

۷-۱-۶ قضیه: اگر تبدیل لاپلاس توابع f_1 و f_2 به ازای $s>s_\circ$ موجود باشند، آنگاه به ازای ثابت‌های دلخواه c_1 و c_2، نشان دهید

$$L[c_1f_1+c_2f_2]=c_1L[f_1]+c_2L[f_2]\qquad s>s_\circ$$

اثبات: بنابر تعریف تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت

$$L[c_1f_1+c_2f_2]=\int_{\circ}^{\infty}e^{-st}\left[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\right]dt$$

$$=c_1\int_{\circ}^{\infty}e^{-st}f_1(t)dt+c_2\int_{\circ}^{\infty}e^{-st}f_2(t)dt$$

$$=c_1L[f_1]+c_2L[f_2]\quad,\quad s>s_\circ$$

۷-۱-۷ تذکر: قضیه بالا را می‌توان به یک تعداد متناهی تابع که دارای تبدیل لاپلاس هستند، تعمیم داد. اگر توابع f_1 ، $f_2,\ldots$ و f_n به ازای $s > s_0$ دارای تبدیل لاپلاس باشند، آن‌گاه

$$L[c_1f_1 + c_2f_2 + \ldots + c_nf_n] = c_1L[f_1] + c_2L[f_2] + \ldots + c_nL[f_n]$$

که در آن c_iها اعداد ثابت هستند.

۸-۱-۷ مثال: نشان دهید، به ازای $s > |a|$.

$$L[\sinh at] = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad \text{و} \quad L[\cosh at] = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

حل: بنابه تعریف لاپلاس، خواهیم داشت

$$L[\cosh at] = L\left[\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right]$$

با توجه به قضیهٔ ۷-۱-۶، می‌توان نوشت

$$L[\cosh at] = \frac{1}{2}L\left[e^{at}\right] + \frac{1}{2}L\left[e^{-at}\right]$$

از طرفی با توجه به تمرین ۷-۱-۳، می‌دانیم که

$$L\left[e^{at}\right] = \frac{1}{s-a} \quad , \quad s > 9$$

$$L\left[e^{-at}\right] = \frac{1}{s+a} \quad , \quad a > -a$$

با قراردادن این مقادیر در رابطهٔ بالا، به دست می‌آوریم

$$L[\cosh at] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > |a|$$

به همین نحو، می‌توان تبدیل لاپلاس تابع $\sinh\ at$ را پیدا کرد. بنابه تعریف تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت

$$L[\sinh at]=L\left[\frac{e^{at}-e^{-at}}{۲}\right]$$
$$=\frac{۱}{۲}L\left[e^{at}\right]-\frac{۱}{۲}L\left[e^{-at}\right]$$
$$=\frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{s-a}-\frac{۱}{s+a}\right]=\frac{a}{s^۲+a^۲}\ ,\quad s>|a|$$

۷-۱-۹ تمرین: (الف) اگر $f(t)=t^{\alpha}$ ، $\alpha>-۱,$ نشان دهید به ازای $s>۰$،

$$L[f](s)=\frac{\Gamma(\alpha+۱)}{s^{\alpha+۱}}$$

(ب) نشان دهید، به ازای

$$L\left[t^{-\frac{۱}{۲}}\right]=\sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

قبل از ارائه شرایط وجودی تبدیل لاپلاس، یک مسأله با مقدار اولیه را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل می‌کنیم. ولی برای انجام این کار به قضیهٔ زیر نیازمندیم، این قضیه را در بخش‌های آینده به مشتق مرتبهٔ nام تعمیم می‌دهیم.

۷-۱-۱۰ قضیه: فرض می‌کنیم که f و f' بر بازهٔ $[۰,\infty)$ پیوسته بوده و هر دو به ازای $s>s_۰$ دارای تبدیل لاپلاس باشند. (فرض می‌کنیم که $L[f](s)=F(s)$). در این صورت نشان دهید

$$L[f'](s)=sF(s)-f(۰)$$

اثبات: بنا به تعریف تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت

$$L[f'](s)=\int_۰^{\infty}e^{-st}f'(t)dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\int_۰^{T}e^{-st}f'(t)dt$$

اینک با به‌کار بردن انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء انتگرال

$$\int_۰^{T}e^{-st}f'(t)dt$$

را محاسبه می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$u=e^{-st}\qquad dv=f'(t)\ dt$$
$$du=-se^{-st}dt\qquad v=f(t)$$

بنابراین،

$$\int_{\cdot}^{T} e^{-st} f'(t)dt = \left[f(t)e^{-st}\right]_{\cdot}^{T} + s\int_{\cdot}^{T} e^{-st} f(t)dt \qquad (۵)$$

چون بنا به فرض تبدیلات لاپلاس f و f' وجود دارند، وقتی $T \to \infty$ هر دو انتگرال بالا نیز باید به ازای $s > s_{\cdot}$ به یک حد متناهی میل کنند. از این رو $f(T)e^{-sT}$ به ازای $s > s_{\cdot}$ نیز باید به یک حد متناهی میل کند. نشان می‌دهیم که این حد صفر است. به ازای عدد داده شدهٔ $s_۱$، با $s_۱ > s_{\cdot}$، فرض می‌کنیم عدد $s_۲$ چنان باشد که $s_{\cdot} < s_۲ < s_۱$. چون وقتی $T \to \infty$ حد $f(t)e^{-s_۲T}$ یک عدد متناهی است، پس

$$f(T)e^{-s_۱T} = f(T)e^{-s_۲T} \quad e^{-(s_۱-s_۲)T}$$

به صفر میل می‌کند. زیرا

$$\lim_{T\to\infty} f(T)e^{-s_۲T}$$

وجود دارد و

$$\lim_{T\to\infty} e^{-(s_۱-s_۲)T} = \cdot \qquad , \quad s_۱ > s_۲$$

از این رو،

$$\lim_{T\to\infty}\left[f(t)e^{-st}\right]_{\cdot}^{T} = \lim_{T\to\infty}\left[f(T)e^{-sT} - f(\cdot)\right] = -f(\cdot)$$

بنابراین، با حدگیری از دو طرف رابطهٔ (۵) وقتی $T \to \infty$، به دست می‌آوریم

$$L[f'](s) = sF(s) - f(\cdot)$$

۷-۱-۱۱ مثال: با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله با مقدار اولیهٔ

$$x'(t) + x(t) = e^t$$
$$x(\cdot) = ۱$$

را حل کنید.

حل: در اینجا فرض می‌کنیم که جواب این معادله x و مشتق آن، یعنی x'، دارای تبدیل لاپلاس باشند (درستی این مطلب را در بخش بعد مشاهده می‌کنیم). با استفاده از قضیهٔ ۷-۱-۱۰ و ۷-۱-۶ و تمرین ۷-۱-۳، خواهیم داشت

$$L[x'+x](s)=L\left[e^t\right]$$

$$L[x'](s)+L[x](s)=\frac{1}{s-1} \quad , \quad s>1$$

با قراردادن $L[x](s)=x(s)$ به دست می‌آوریم

$$s\,x(s)-x(0)+x(s)=\frac{1}{s-1}$$

با توجه به شرط $x(0)=1$، به‌دست می‌آوریم

$$sx(s)+x(s)=\frac{1}{s-1}+1$$

یا

$$(s+1)F(s)=\frac{s}{s-1} \tag{6}$$

بنابراین، مساله با مقدار اولیه مربوط به x، به یک معادلهٔ جبری برحسب x(s) تبدیل می‌شود. با حل معادلهٔ (۶) بر حسب x(s)، به‌دست می‌آوریم

$$x(s)=\frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

که با تجزیه طرف راست این رابطه به مجموع کسرهای جزئی، خواهیم داشت

$$x(s)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\right]$$

اینک با توجه به تمرین ۷-۱-۳، متوجه می‌شویم که x(s) تبدیل لاپلاس تابع $x(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{t}$ است.

در به‌کارگیری تبدیلات لاپلاس در مسأله با مقدار اولیه سه مرحلهٔ اساسی زیر را انجام داده‌ایم.

(۱) مساله با مقدار اولیه را به معادله‌ای جبری برحسب تبدیل لاپلاس $x(t)$ یعنی x(s) تبدیل کردیم.

(۲) آنگاه معادلهٔ جبری بر حسب x(s) را نسبت به x(s) حل کردیم.

(۳) معکوس گرفتیم، یعنی تابعی مانند $x(t)$ را به قسمی پیدا کردیم که $x(s)$ تبدیل لاپلاس آن باشد.

۷-۱-۱۲ تمرین: با استفاده از تبدیل لاپلاس مساله با مقدار اولیه را حل کنید.

$$x'(t)-۲x(t)=۲$$
$$x(۰)=-۳$$

را حل کنید.

۷-۱-۱۳ تمرین‌های بخش

۱- تبدیل لاپلاس تابع داده شدهٔ f را محاسبه کنید. مقادیری از s را تعیین کنید که به ازای آن‌ها F(s) وجود دارد.

(الف) $f(t)=t^۲$

(ب) $f(t)=۲t^۲-۳t+۴$

(ج) $f(t)=۲\sin t+۳\cos ۲t$

(د) $f(t)=۲\sinh t+۳\cos ۲t$

(هـ) $f(t)=\begin{cases} ۱ & ,۰\le t\le ۱ \\ ۰ & , t>۱ \end{cases}$

(د) $f(t)=\begin{cases} \sin t & ۰\le t\le \pi \\ ۰ & t>\pi \end{cases}$

۲- تابعی را پیدا کنید که تبدیل لاپلاس آن تابع داده شده F باشد.

(الف) $F(s)=\frac{۱}{s+۳}$

(ب) $F(s)=\frac{s}{s^۲+۴}$

(ج) $F(s)=\frac{۲}{s^۲+۱}+\frac{۳s}{s^۲+۴}$

(د) $F(s)=\frac{۳}{s+۲}-\frac{۲s}{s^۲+۱}$

۳- اگر $f(t)$ دارای تبدیل لاپلاس بوده و $f(t+T)=f(t)$ (f تابعی متناوب با دوره تناوب T است.) نشان دهید

$$L[f](s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

٤- تابع موج مربعی که به صورت

$$Q(t)=\begin{cases} 1 & 0<t<c \\ 1 & c<t<2c \end{cases}$$

تعریف می‌شود و $Q(t+2c)=Q(t)$ را در نظر می‌گیریم. تبدیل لاپلاس $Q(t)$ را پیدا کنید.

۵- تابع $G(t)$ توسط

$$G(t)=e^t \qquad 0\le t<c$$
$$G(t+c)=G(t)$$

تعریف شده است. تبدیل لاپلاس $G(t)$ را پیدا کنید.

۷-۲ شرایط وجودی تبدیل لاپلاس

در این بخش شرایطی را بیان می‌کنیم که یک تابع تحت آن شرایط دارای تبدیل لاپلاس می‌باشد.

۷-۲-۱ **تعریف:** تابع f را بر بازه $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته می‌گوییم اگر f بجزء احتمالاً در تعداد متناهی نقطه مثل $x_1<x_2<\ldots<x_n$، از $[a,b]$ پیوسته باشد و در هر نقطه ناپیوستگی، حدود چپ و راست آن وجود داشته باشد.

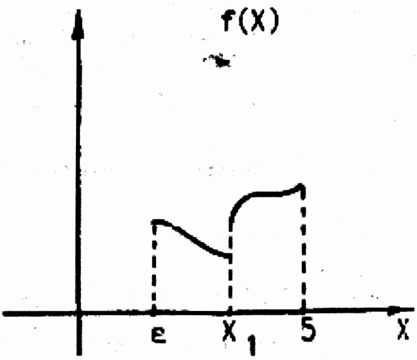
اگر $x_1=a$، f باید در نقطه x_1 حد راست و اگر $x_n=b$ ، f باید در نقطه x_n حد چپ داشته باشد.

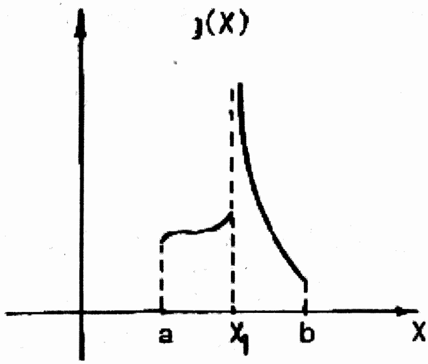
۷-۲-۲ **تذکر:** اگر f بر $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته باشد، آنگاه عدد مثبتی، مانند M وجود دارد به قسمی که

$$|f(x)|\le M \quad \forall x\in[a,b]$$

به عبارت دیگر f بر $[a,b]$ کراندار است.

۷-۲-۳ مثال: در دو شکل زیر تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ قطعه‌ای پیوسته است. در حالی که تابع g با اینکه تنها در یک نقطه مانند x_1 پیوسته نیست، قطعه‌ای پیوسته نمی‌باشد، زیرا حد راست g در x_1 وجود ندارد.





۷-۲-٤ تمرین: آیا تابع داده شده بر بازهٔ تعریف خود، قطعه‌ای پیوسته است؟

(الف) $f(x) = |x| \qquad |x| \leq 1$

(ب) $g(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

(ج) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & 0 \leq x \leq 2\ ,\ x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

۷-۲-۵ قضیه: فرض می‌کنیم توابع f , g بر هر بازه‌ای به صورت $[C, T]$ با C ثابت و $T>C$، قطعه‌ای پیوسته باشند. اگر به ازای هر $t>C$, $|f(t)| \leq g(t)$ و $\int_C^\infty g(t)dt$ همگرا باشد، آنگاه $\int_C^\infty f(t)dt$ نیز همگرا است.

۷-۲-٦ تعریف: دو تابع f و g را در نظر می‌گیریم. $f(t)$ را از **مرتبهٔ** $g(t)$ می‌گوییم و می‌نویسیم

$$f(t) = o[g(t)]$$

اگر اعداد مثبت M و t_0 وجود داشته باشند، به طوری که به ازای هر $t \geq t_0$ داشته باشیم

$$\left|f(t)\right| \leq Mg(t)$$

به ویژه، اگر به ازای عدد ثابتی چون a ، $f(t)=0\left[e^{at}\right]$، می‌گوییم f از مرتبه نمایی است.

۷-۲-۷ تمرین: نشان دهید $\frac{e^{-t}}{1+t}=o\left[e^{-t}\right]$.

قضیه زیر معمولاً در نشان دادن اینکه یک تابع از مرتبه‌نمایی است، مفید واقع می‌شود.

۷-۲-۸ قضیه: فرض می‌کنیم $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}$ وجود داشته (و متناهی) باشد. در این صورت نشان دهید که $f(t)=o\left[\left|g(t)\right|\right]$

اثبات: فرض می‌کنیم که مقدار حد بالا عدد L باشد، یعنی $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=L$.

بنا به تعریف حد در بی‌نهایت، به ازای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبتی، مانند N وجود دارد به‌طوری که به ازای هر $t>N$ داشته باشیم

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}-L\right|<\varepsilon$$

با استفاده از نامساوی مثلث نامساوی بالا به

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|-\left|L\right| \leq \left|\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|-\left|L\right|\right| \leq \left|\frac{f(t)}{g(t)}-L\right|<\varepsilon$$

یا

$$\left|\frac{f(t)}{g(t)}\right|<\varepsilon+\left|L\right|$$

تبدیل می‌شود. بنابراین

$$\left|f(t)\right|<\left(\varepsilon+\left|L\right|\right)\left|g(t)\right|$$

از این رو در تعریف ۷-۲-۶، $t_0=N, M=\varepsilon+\left|L\right|$ را انتخاب می‌کنیم. پس

$$f(t)=0[|g(t)|]$$

۷-۲-۹ تمرین: (الف) نشان دهید به ازای هر $\varepsilon>0$، $t^n=o\left[e^{\varepsilon t}\right]$، که در آن n عددی صحیح نامنفی است.

(ب) نشان دهید که

$$t^n e^{at}\cos bt=o\left[e^{(\varepsilon+a)t}\right]$$
$$t^n e^{at}\sin bt=o\left[e^{(\varepsilon+a)t}\right]$$

در اینجا n یک عدد صحیح نامنفی است.

۷-۲-۱۰ تذکر: از تمرین بالا نتیجه می‌شود که هر جواب و مشتقات آن از هر مرتبه‌ای از معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت $P(D)\ Y=0$ از مرتبه‌نمایی می‌باشند. در واقع از قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود که هر جواب معادله دیفرانسیل بالا و مشتقات جواب‌ها دارای تبدیل لاپلاس می‌باشند.

۷-۲-۱۰ قضیه: فرض می‌کنیم f، بر هر بازه‌ای به‌صورت $[0,T]$ به ازای هر $T>0$ قطعه‌ای پیوسته باشد و برای ثابتی چون a، $f(t)=o\left[e^{at}\right]$. در این صورت تبدیل لاپلاس f حداقل به ازای $s>a$ وجود دارد.

اثبات: چون $f(t)=o\left[e^{at}\right]$، پس بنا به تعریف ۷-۲-٦، ثابت‌های مثبتی مانند M,t_0 وجود دارند به قسمی که به ازای هر $t>t_0$، $f(t)\leq Me^{at}$.

پس،

$$\left|e^{-st}f(t)\right|\leq e^{-st}\left|f(t)\right|$$
$$\leq Me^{-st}e^{at}$$
$$=Me^{-(s-a)t}.$$
$$=M\int_{t_0}^{\infty}e^{-(s-a)t}$$

بنابراین، بنابه قضیه ۷-۲-۵، انتگرال $\int_{t_0}^{\infty}e^{-st}f(t)dt$ همگراست. از طرفی، بنا به تعریف تبدیل لاپلاس f، داریم

$$L[f](s)=\int_{\cdot}^{t_{\cdot}} e^{-st} f(t)dt+\int_{t_{\cdot}}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

چون، به ازای $s>a$، انتگرال ناسره در طرف راست رابطه بالا همگراست، پس $L[f](s)$ به ازای $s>a$ وجود دارد.

۷-۲-۱۲ تمرین: نشان دهید تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=\frac{e^{۳t}}{e^{t}+۱}$ به ازای $s>۲$ وجود دارد.

۷-۲-۱۳ تمرین بخش ۷-۲

۱- نشان دهید:

(الف) $te^{t}=o\left[e^{(۱+\varepsilon)t}\right]$.

(ب) $\sinh t=o\left[e^{t}\right]$.

۲- نشان دهید به ازای مقادیر داده شده s، تبدیل لاپلاس f وجود دارد.

(الف) $s>۱\quad,\quad f(t)=t\ln t$.

(ب) $s>۱\quad,\quad f(t)=e^{t}\sin\left(t^{۲}\right)$.

۳- فرض می‌کنیم f بر هر بازه‌ای به صورت $[۰,T]$ قطعه‌ای پیوسته باشد و به ازای عدد ثابت a، $f(t)=o\left[e^{at}\right]$. نشان دهید تابع h، با $h(t)=\int_{۰}^{t} f(u)du$ از مرتبه‌نمایی است. اگر $a>۰$، $h(t)=o\left[e^{at}\right]$ و اگر $a\leq ۰$، $h(t)=o[۱]$.

(منظور از $o[۱]$، از مرتبه‌نمایی صفر یعنی $o\left[e^{۰t}\right]$ است)

٤- اگر تابع f بر بازهٔ $[۰,\infty)$ مشتق‌پذیر بوده و f' از مرتبه‌نمایی باشد، نشان دهید f نیز از مرتبه‌نمایی است.

٥- اگر $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=\infty$، نشان دهید $f(t)\neq o\left[g(t)\right]$.

٦- نشان دهید که تابع $f(t)=e^{t^{۲}}$ از مرتبه‌نمایی نیست.

۷- تابع $f(t)=\sin\left(e^{t^{۲}}\right)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید f از مرتبه‌نمایی است ولی f' از مرتبه‌نمایی نیست.

۷-۳ خواص تبدیلات لاپلاس

در این بخش چند خاصیت مهم از تبدیلات لاپلاس را بیان می‌کنیم. در سراسر این بخش فرض می‌کنیم که دو تابع f و g بر هر بازه‌ای به صورت $[0, T]$ با $T>0$ قطعه‌ای پیوسته باشند و به ازای ثابت‌هایی مانند تابع a و b $f(t)=o\left[e^{at}\right]$ و $g(t)=o\left[e^{bt}\right]$.

در این صورت به ازای هر $s>b$، $L[P](s)=F(s)$ و به ازای هر $s>b$، $L[g](s)=G(s)$ فرض می‌شود.

۷-۳-۱ خاصیت: $L[c_1 f + c_2 g](s)=c_1 F(s)+c_2 G(s)\ ,\ s>\max(a,b)$

این خاصیت را قبلاً در قضیه ۷-۱-۶- ثابت کرده‌ایم.

۷-۳-۲ خاصیت: اگر $h(t)=e^{ct} f(t)$، آنگاه به ازای هر $H(s)=F(s-c), s>a+c$،

اثبات: بنا به تعریف تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت

$$H(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}e^{ct}f(t)dt$$
$$=\int_0^{\infty} e^{-(s-c)t}f(t)dt.$$

به ازای $s-c>a$ یا $s>a+c$، انتگرال طرف راست رابطه بالا تعریف $F(s-c)$ می‌باشد. بنابراین $S>a+c$، $H(s)=F(s-c)$.

۷-۳-۳ مثال: تابع $f(t)=te^{4t}$ را در نظر می‌گیریم. تبدیل لاپلاس **f** را پیدا کنید.

حل: می‌دانیم که $L[t]=\frac{1}{s^2}$. بنابراین، از خاصیت ۷-۳-۲ نتیجه می‌شود که $L\left[t\ e^{4t}\right]=\frac{1}{(s-4)^2}\ \ ,\ s>4$.

۷-۳-۴ تمرین: لاپلاس تابع $g(t)=e^{-2t}\sin 5t$ را پیدا کنید.

۷-۳-۵ خاصیت: اگر $k(t)=\int_{\cdot}^{t} f(u)du$، آنگاه $s>\max(a,\cdot)$ ، $K(s)=\frac{\text{۱}}{s}F(s)$.

اثبات: با مشتق‌گیری داریم $k'(t)=f(t)$. بنا به تمرین ۳ از ۷-۲-۱۲، می‌دانیم که $k(t)$ از مرتبه‌نمایی و پیوسته است. پس $k(t)$ دارای تبدیل لاپلاس می‌باشد و لذا $k'(t)$ نیز دارای تبدیل لاپلاس است. از این رو بنا به قضیه ۷-۱-۱۱ خواهیم داشت.

$$sK(s)-k(\cdot)=F(s) \qquad , \quad s>\max(s,\cdot)$$

از تعریف $k(t)$، می‌دانیم که $k(\cdot)=\cdot$. از این رو از رابطه اخیر نتیجه می‌شود که

$$K(s)=\frac{\text{۱}}{s}F(s) \qquad , \qquad s>\max(a,\cdot)$$

۷-۳-۶ تمرین: تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=\int_{\cdot}^{t}\sinh \text{۲}u\,du$ را پیدا کنید.

۷-۳-۷ خاصیت: اگر $p_n(t)=t^n f(t)$، آنگاه به ازای $s>a$ ، $p_n(s)=(-\text{۱})^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$

اثبات: از تعریف تبدیل لاپلاس، خواهیم داشت

$$F(s)=\int_{\cdot}^{\infty}e^{-st}f(t)dt \qquad , \qquad s>a$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطهٔ بالا نسبت به s (فرض‌های روی f، وجود $F'(s)$ را تضمین می‌کند و $F'(s)$ با مشتق‌گیری از زیر علامت انتگرال به‌دست می‌آید.) به‌دست می‌آوریم

$$F'(s)=-\int_{\cdot}^{\infty}e^{-st}t\,f(t)dt=-L[p_{\text{۱}}(t)](s)$$

با مشتق‌گیری مکرر از رابطهٔ بالا نسبت به s، خواهیم داشت

$$F^{(n)}(s)=(-\text{۱})^n L[p_n(t)](s) \ , \ s>a$$

۷-۳-۸ مثال: نشان دهید به ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$L[t^n]=\frac{n!}{s^{n+\text{۱}}} \qquad , \quad s>\cdot$$

حل: بنا به خاصیت ۷-۳-۷،

$$L\left[t^n\right]=(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L[1](s)$$
$$=(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) \quad , \quad s>0$$

با n بار مشتق‌گیری از $\frac{1}{s}$ نسبت به s، به دست می‌آوریم

$$\frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right)=(-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}}$$

با قرار دادن این مقدار در رابطهٔ بالا، خواهیم داشت

$$L\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \quad s>0$$

۷-۳-۹ تمرین:

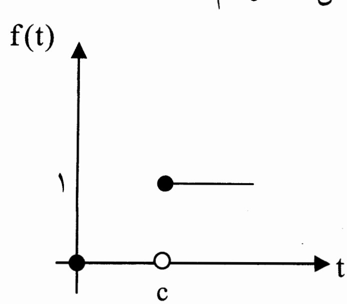
(الف) تبدیل لاپلاس تابع $t^{\frac{1}{2}}$ را پیدا کنید.

(ب) تبدیل لاپلاس تابع $t^{\frac{5}{2}}$ را پیدا کنید.

۷-۳-۱۰ تمرین: تبدیل لاپلاس تابع $t^2 \sin at$ را، که در آن a عددی ثابت است، پیدا کنید.

۷-۳-۱۱ تمرین: تبدیل لاپلاس تابع $te^{-t}\cos 2at$ را پیدا کنید.

۷-۳-۱۲ تعریف: تابع $u_c(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<c \\ 1 & t\ge c \end{cases}$، $c<0$، به تابع پله‌ای واحد معروف است. نمودار این تابع در شکل (۱) رسم شده است.



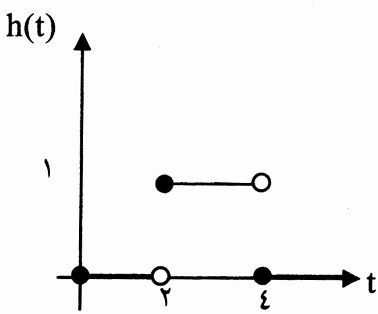
شکل (۱)

۷-۳-۱۳ مثال: نمودار تابع $h(t)=u_{۲}(t)-u_{۴}(t)$، برای $t>۰$، را رسم کنید.

حل: بنا به تعریف تابع پله‌ای، داریم

$$h(t)=\begin{cases} ۰-۰=۰ & ۰\le t<۲ \\ ۱-۰=۱ & ۲\le t<۴ \\ ۱-۱=۰ & t\ge ۴ \end{cases}$$

از این رو



۷-۳-۱۴ تمرین: نشان دهید $s>۰ \quad , \quad L\left[u_c(t)\right]=\dfrac{e^{-cs}}{s}$.

۷-۳-۱۵ تمرین: تابع زیر را بر حسب توابع پله‌ای واحد بنویسید.

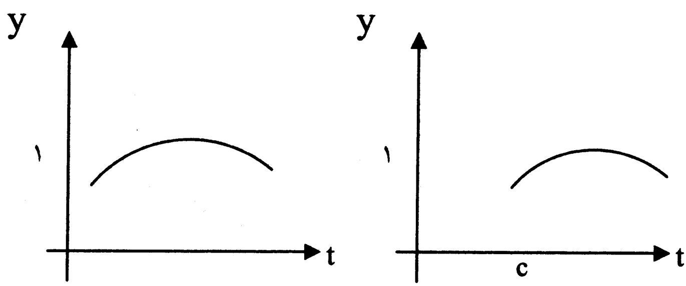
$$h(t)=\begin{cases} f_{۰}(t) & ۰\le t\le t_{۰} \\ f_{۱}(t) & t_{۰}\le t<t_{۱} \\ f_{۲}(t) & t_{۱}\le t<t_{۲} \\ f_{۳}(t) & t_{۲}\le t<t_{۳} \\ f_{۴}(t) & t\ge t_{۳} \end{cases}$$

۷-۳-۱۶ تمرین: تابع $f(t)=\begin{cases} t & 0\le t<4 \\ 5 & 4\le t<5 \\ t^2 & t\ge 5\end{cases}$ را بر حسب تابع پله‌ای واحد بنویسید.

۷-۳-۱۷ تذکر: از تابع پله‌ای واحد می‌توان برای انتقال تابع داده شده f، که دامنه تعریف آن $t\ge 0$، به اندازه c واحد در جهت راست استفاده کرد. برای مثال، تابع تعریف شده توسط

$$Y=u_c(t)f(t-c)=\begin{cases} 0 & 0\le t<c \\ f(t-c) & t\ge c\end{cases} \qquad (1)$$

نمایش انتقالی از تابع f به اندازه c واحد در جهت مثبت t می‌باشد. شکل ۲ را ببینید.



۷-۳-۱۸- خاصیت: داریم

$$L\left[u_c(t)f(t-c)\right]=e^{-cs}F(s) \quad , \quad s>a$$

حل: بنا به تعریف تبدیل لاپلاس و فرمول (۱)، خواهیم داشت

$$L\left[u_c(t)f(t-c)\right]=\int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt$$
$$=\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)dt$$

با به‌کار بردن تغییر متغیر $u=t-c$، به دست می‌آوریم.

$$L\left[u_c(t)f(t-c)\right]=\int_0^\infty e^{-s(u+c)}f(u)du$$
$$= e^{-cs}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du$$
$$= e^{-cs}F(s) \ , \quad s>a$$

۷-۳-۱۹- مثال: تابع $f(t)=\begin{cases}\sin t & 0\le t<2\pi\\ \sin t+\cos t & t\ge 2\pi\end{cases}$.

را در نظر می‌گیریم. تبدیل لاپلاس f را پیدا کنید.

حل: با استفاده از تمرین ۷-۳-۱۵، تابع f را می‌توان بر حسب تابع $u_{2\pi}(t)$ به صورت $f(t)=\sin t+u_{2\pi}(t)\cos t$ نوشت. چون $\cos t=\cos(t-2\pi)$، پس

$$f(t)=\sin t+u_{2\pi}(t)\cos t(t-2\pi)$$

از این رو، بنا به خاصیت ۷-۳-۱۸ و فرمول‌های مربوط به تبدیلات لاپلاس $\sin t$ و $\cos t$، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{1}{s^2+1}+e^{-2\pi s}\frac{s}{s^2+1}\quad , \quad s>0\\ &=\frac{1+se^{-2\pi s}}{s^2+1}\qquad\qquad s>0\end{aligned}$$

۷-۳-۲۰- مثال: تبدیل لاپلاس تابع داده شده در تمرین ۷-۳-۱۶ را پیدا کنید.

حل: در تمرین ۷-۳-۱۶ نشان دادیم که تابع f را می‌توان بر حسب توابع پله‌ای به صورت $f(t)=t+(5-t)u_4(t)+(t^2-5)u_5(t)$ یا

$$f(t)=t-(t-5)u_4(t)+(t^2-5)u_5\, t \tag{5}$$

نوشت. در اینجا می‌خواهیم از خاصیت ۷-۳-۱۸ استفاده کنیم. پس باید، ضرایب $u_4(t)$ را به صورت تابعی از $t-4$ و ضریب $u_5(t)$ را به صورت تابعی از $(t-5)$ بنویسیم. ضریب $u_4(t)$ را می‌توانیم به صورت $t-5=(t-4)-1$ بنویسیم. برای نوشتن ضریب $u_5(t)$ بر حسب تابعی از $t-5$ از بسط سری تیلور استفاده می‌کنیم، یعنی بسیط سری تیلور تابع t^2-5 را در نقطهٔ $t_0=5$ به دست می‌آوریم. داریم

$$a_0 = 20$$

$$a_1 = \frac{\left(t^2 - 5\right)'\big|_{t=5}}{1!} = 10$$

$$a_2 = \frac{\left(t^2 - 5\right)''\big|_{t=5}}{2!} = \frac{2}{2!} = 1$$

$$a_n = 0 \qquad , \qquad n \geq 3$$

بنابراین

$$t^2 - 5 = 20 + 10(t-5) + (t-5)^2$$

با قرار دادن این مقادیر در فرمول (۵)، خواهیم داشت

$$f(t) = t - \left[(t-4) - 1\right]u_4(t) + \left[(t-5)^2 + 10(t-5) + 20\right]u_5(t)$$

یا

$$f(t) = t - (t-4)u_4(t) + u_4(t) + (t-5)^2 u_5(t) + 10(t-5)u_5(t) + 20u_5(t)$$

بنابراین، بنابه خاصیت ۷-۳-۱۸ و تمرین ۷-۳-۱۴ و فرمول $t^2-5=20+10(t-5)+(t-5)^2$، به دست می‌آوریم

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-4s} + \frac{1}{s}e^{-4s} + \frac{2}{s^3}e^{-5s} + \frac{10}{s^2}e^{-5s} + \frac{20}{s}e^{-5s}$$

یا

$$F(s) = \frac{1}{s} - \left[\frac{s-1}{s^2}\right]e^{-4s} + \left[\frac{20s^2 + 10s + 2}{s^3}\right]e^{-5s}$$

۷-۳-۲۱ تمرین: تبدیل لاپلاس، تابع تعریف شده توسط

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ t-3 & 2 \leq t < 3 \\ -1 & t \geq 3 \end{cases}$$

را پیدا کنید.

۷-۳-۲۲ تمرین: تبدیل لاپلاس تابع

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ t^2 - 2t + 2 & t \geq 1 \end{cases}$$

را پیدا کنید.

۷-۳-۲۳ خاصیت: فرض می‌کنیم $f^{(n-1)}(t)=o\left[e^{at}\right]$. اگر $f,f',\dots,f^{(n-1)}$ بر $(0\,,\infty]$ پیوسته باشند و $f^{(n)}$ بر هر بازه به صورت $[0\,,T]$ قطعه‌ای پیوسته باشند، آنگاه $L\left[f^{n}\right](s)$ به ازای $s>\max(a,0)$ وجود دارد و

$$L\left[f^{(n)}\right]=s^{n}F(s)-\left[s^{n-1}f(0)+s^{n-2}f'(0)+\cdots+f^{(n-1)}(0)\right]$$

اثبات: این خاصیت را با استفاده از استقراء اثبات می‌کنیم. این خاصیت را به ازای $n=1$ در قضیهٔ ۷-۱-۱۰ ثابت کردیم. اینک فرض می‌کنیم این خاصیت به ازای $n=m$ که در آن m عددی صحیح و مثبت است، برقرار باشد. با بحثی مشابه حالت $n=1$ در قضیه ۷-۱-۱۰، با استفاده از انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء خواهیم داشت

$$\begin{aligned}L\left[f^{(m+1)}\right](s)&=\int_0^{\infty}e^{-st}\,f^{(m+1)}(t)dt\\&=\lim_{T\to\infty}\int_0^{T}e^{-st}\,f^{(m+1)}(t)dt\\&=\lim_{T\to\infty}\left\{\left[e^{-st}f^{(m)}(t)\right]_0^{T}+s\int_0^{T}e^{-st}\,f^{(m)}(t)dt\right\}\\&=\lim_{T\to\infty}\left[e^{-sT}f^{(m)}(T)\right]-f^{(m)}(0)+s\int_0^{\infty}e^{-st}\,f^{(m)}(t)dt\end{aligned}$$

چون بنا به فرض $f^{(m)}(t)=o\left[e^{at}\right]$، پس با استدلالی شبیه به آن‌چه که در اثبات قضیهٔ ۷-۱-۱۰ ارائه شده نتیجه می‌شود که

$$\lim_{T\to\infty}\left[e^{-sT}f^{(m)}(T)\right]=0$$

و چون بنا به فرض استقراء این خاصیت به ازای $n=m$ برقرار است، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}L\left[f^{(m+1)}\right](s)&=-f^{m}(0)+s\left[s^{m}F(s)-s^{m-1}f(0)-\dots-f^{(m-1)}(0)\right]\\&=s^{m+1}F(s)-\left[s^{m}f(0)+\cdots+f^{(m)}(0)\right]\end{aligned}$$

از این رو، اگر این خاصیت به ازای $n=m$ برقرار باشد، بـه ازای $n=m+۱$ نیـز برقرار خواهد بود. چون این خاصیت به ازای $n=۱$ برقرار است، پس به ازای هـر عـدد صحیح مثبت نیز برقرار است.

۷-۳-۲۴ تمرین: اگر $L[f](s)=F(s)$، تبدیل لاپلاس تابع $f^{(٤)}(t)$ را بر حسب F و با فرض $f(۰)=f'(۰)=۰$ و $f''(۰)=۱$ و $f'''(۰)=-۱$ به دست آورید.

۷-۳-۲۵ تمرین‌های بخش ۷-۳

۱- تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید

(الف) $f(t)=t^n e^{kt}$ (n عدد صحیح مثبت است)

(n عدد صحیح مثبت است).

(ب) $f(t)=t^۲\sin kt$

(ج) $f(t)=\dfrac{e^{۳t}}{\sqrt{t}}$

(د) $f(t)=\int_۰^t \sin ۲u\,du$

۲- تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

(الف)
$$f(t)=\begin{cases} ۰ & ۰\le t<۲ \\ (t-۲)^۲ & t\ge ۲ \end{cases}$$

(ب)
$$f(t)=\begin{cases} ۰ & ۰\le t<۱ \\ t^۲ & t\ge ۱ \end{cases}$$

۳- فرض می‌کنیم به ازای $s>a\ge ۰$ ، $F(s)=L[f]\,(s)$. نشان دهید که اگر c یک عدد مثبت باشد، آنگاه

$$L[f(ct)]=\frac{۱}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$$

٤- اگر انتگرال‌گیری جمله به جمله از یک سری نامتناهی مجاز باشد، تبـدیل لاپـلاس تابع زیر را به دست آورید.

$$f(t)=۱-u_۱(t)+\ldots+u_{۲n}(t)-u_{۲n+۱}(t)+\ldots$$
$$=۱+\sum_{k=۱}^{\infty}(-۱)^k u_k(t)$$

۷-۴ تبدیلات معکوس

در این بخش مسأله یافتن تابعی را (در صورت وجود) وقتی تبدیل لاپلاس معلوم است، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در اینجا تنها توابعی را که بر هر بازه‌ای به صورت $[۰, T]$ قطعه‌ای پیوسته بوده و از مرتبه‌نمایی می‌باشند، در نظر می‌گیریم.

۷-۴-۱ قضیه: فرض می‌کنیم تابع f بر هر بازه‌ای به صورت $[۰, T]$ قطعه‌ای پیوسته باشد و $f(t)=o\left[e^{at}\right]$. اگر $F(s)=L[f](s)$، آنگاه $\lim\limits_{s\to\infty}F(s)=۰$.

اثبات: چون $f(t)=o\left[e^{at}\right]$، پس بنا به تعریف ۷-۲-۶، ثابت‌های مثبتی مانند $t_۰$ و M وجود دارند به قسمی که به ازای $t>t_۰$، $|f(t)|\le Me^{at}$. پس

$$\left|\int_{t_۰}^{\infty}e^{-st}f(t)dt\right|\le\int_{t_۰}^{\infty}e^{-st}|f(t)|dt$$
$$\le M\int_{t_۰}^{\infty}e^{-st}e^{at}\,dt$$
$$=M\int_{t_۰}^{\infty}e^{-(s-a)t}\,dt$$
$$=M\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{۱}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_{t_۰}^{b}$$

از این رو، به ازای $s>a$، خواهیم داشت

$$\left|\int_{t_۰}^{\infty}e^{-st}f(t)dt\right|\le\frac{M}{s-a}e^{-(s-a)t_۰}\tag{۱}$$

اینک بنا به تعریف تبدیل لاپلاس، داریم

$$|F(s)|=\left|\int_۰^{\infty}e^{-st}f(t)dt\right|=\left|\int_۰^{t_۰}e^{-st}f(t)dt+\int_{t_۰}^{\infty}e^{-st}f(t)dt\right|$$
$$\le\left|\int_۰^{t_۰}e^{-st}f(t)dt\right|+\left|\int_{t_۰}^{\infty}e^{-st}f(t)dt\right|$$

بنا به (۱)، نامساوی بالا به صورت زیر درمی‌آید.

$$\left|F(s)\right| \le \left|\int_{\cdot}^{t_{\cdot}} e^{-st}\left|f(t)\right|dt + \frac{M}{s-a}e^{-(s-a)t_{\cdot}}\right. \qquad (۲)$$

از طرفی چون f بر $[\cdot, t_{\cdot}]$ قطعه‌ای پیوسته است، پس بنا به تذکر ۷-۲-۲ عدد مثبتی مانند $M_{۱}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $t \in [\cdot, t_{\cdot}]$، $\left|f(t)\right| \le M_{۱}$.

بنابراین، نامساوی (۲) به صورت

$$\left|F(s)\right| \le M_{۱}\int_{\cdot}^{t_{\cdot}} e^{-st}dt + \frac{M}{s-a}e^{-(s-a)t_{\cdot}}$$

$$\left|F(s)\right| \le \frac{M_{۱}}{-s}e^{-st}\Big|_{\cdot}^{t_{\cdot}} + \frac{M}{s-a}e^{-(s-a)t_{\cdot}}$$

یا

$$\left|F(s)\right| \le -\frac{M_{۱}}{s}\left(e^{-st_{\cdot}} - ۱\right) + \frac{M}{s-a}e^{-(s-a)t_{\cdot}} \quad s > a$$

درمی‌آید. چون حد طرف راست نامساوی بالا وقتی $s \to \infty$ برابر با صفر است. پس بنا بر قضیهٔ ساندویچ، $\lim\limits_{s\to\infty} \left|F(s)\right| = \cdot$. از این رو

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = \cdot$$

قضیهٔ زیر که آن را بدون اثبات می‌پذیریم، به این سوأل پاسخ می‌دهد که آیا دو تابع متفاوت متفاوت می‌توانند دارای تبدیل لاپلاس برابر باشند؟

۷-٤-۲ قضیه: فرض می‌کنیم دو تابع f و g بر هر بازه‌ای به صورت $[\cdot, T]$ قطعه‌ای پیوسته باشند و برای عددی چون $s_{\cdot}$، و به ازای $s > s_{\cdot}$، $L[f](s) = L[g](s)$. در این صورت در هر نقطهٔ $t_{\cdot}$ از بازهٔ $[\cdot, \infty)$ که f و g در آن پیوسته باشند، $f(t_{\cdot}) = g(t_{\cdot})$. به‌ویژه، اگر توابع f و g بر $[\cdot, \infty)$ پیوسته باشند، آنگاه به ازای هر $t \ge \cdot$، $f(t) = g(t)$.

۷-٤-۳ تذکر: فرض می‌کنیم تابع F بر $(\cdot, \infty)$ تعریف شده باشد و $F(s) \to \cdot$ وقتی $s \to \infty$. ممکن است این سوال مطرح شود که آیا تابع پیوسته‌ای مانند f بر $[\cdot, \infty)$ و

از مرتبه‌نمایی، که دارای تبدیل لاپلاس F باشد، وجود دارد؟ بنا به قضیهٔ ۷-٤-۲ می‌دانیم که حداکثر یک چنین تابعی وجود دارد. در صورت وجود تابعی مانند F آن را **تبدیل معکوس** می‌نامیم و می‌نویسیم

$$f = L^{-1}[F] \qquad \text{یا} \qquad f(t) = L^{-1}[F](t)$$

۷-٤-٤ مثال: تبدیل معکوس $F(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}$ را پیدا کنید.

حل: با کامل کردن مربع در مخرج تابع داده، به دست می‌آوریم

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1}$$

بنا به خاصیت ۷-۳-۲ و فرمول مربوط به تبدیل لاپلاس sinkt، نتیجه می‌شود که

$$L^{-1}[F](t) = f(t) = e^{2t} \sin t$$

۷-٤-۵ تمرین: تبدیل معکوس $F(s) = \frac{2s+1}{4s^2 + 4s + 5}$ را پیدا کنید.

۷-٤-٦ مثال: تبدیل معکوس تابع $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + s - 2}$ را پیدا کنید.

حل: مخرج کسر را به صورت $s^2 + s - 2 = (s+2)(s-1)$ تجزیه می‌کنیم. سپس کسر $\frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$ به صورت کسرهای جزئی می‌نویسیم، داریم

$$\frac{1}{(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = \frac{(A+B)s + 2B - A}{(s+2)(s-1)}$$

بنابراین

$$A + B = 0$$
$$-A + 2B = 1$$

با حل این دستگاه، به دست می‌آوریم $B=\frac{1}{3}$ و $A=-\frac{1}{3}$. از این رو، تابع داده شده را می‌توان به صورت $F(s)=-\frac{1}{3}\frac{e^{-2s}}{s+2}+\frac{1}{3}\frac{e^{-2s}}{s-1}$ نوشت. بنا به خاصیت ۷-۳-۱۸ و فرمول‌های $L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=e^{-2t}$ و $L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^{t}$ ، خواهیم داشت

$$f(t)=-\frac{1}{3}e^{-2(t-2)}u_2(t)+\frac{1}{3}e^{t-2}u_2(t)$$

یا

$$f(t)=\frac{1}{3}\left[e^{t-2}-e^{-2(t-2)}\right]u_2(t)$$

۷-٤-۷ **تمرین:** تبدیل معکوس $F(s)=\frac{1+e^{-2\pi s}s}{s^2+1}$ را پیدا کنید.

۷-٤-۸ **قضیه:** اگر $L[f(t)]=F(s)$ و تبدیل لاپلاس $\frac{f(t)}{t}$ وجود داشته باشد، ثابت کنید که

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=\int_s^\infty F(u)du$$

اثبات: فرض می‌کنیم که

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right]=G(s)$$

بنا به خاصیت ۷-۳-۷، خواهیم داشت

$$G'(s)=L\left[(-t)\frac{f(t)}{t}\right]=-L[f(t)]=-F(s)$$

بنابراین

$$G(s)=-\int_a^s F(u)du$$

از طرفی با توجه به قضیهٔ ۷-٤-۱، می‌خواهیم $G(s)\to 0$ وقتی $s\to\infty$. بدین منظور قرار می‌دهیم $a=\infty$. از این رو

$$G(s)=\int_s^\infty F(u)du \tag{۳}$$

۷-٤-۹ تذکر: با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس، فرمول (۳) را می‌توان به صورت

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt=\int_s^\infty F(u)du \tag{٤}$$

با حدگیری از دو طرف رابطهٔ (٤) وقتی $s\to 0$، به دست می‌آوریم

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt=\int_0^\infty F(s)ds \tag{۵}$$

۷-٤-۱۰ مثال: چون $L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$، پس بنا به فرمول (۵) خواهیم داشت

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt=\int_0^\infty \frac{ds}{s^2+1}=\tan^{-1}s\Big|_0^\infty=\frac{\pi}{2}$$

۷-٤-۱۱ تمرین: اگر $x>0$، نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

۷-٤-۱۲ قضیه: اگر $F(s)=L[f(t)]\ (s)$ و $G(s)=L[g(t)]\ (s)$ هر دو به ازای $s>a\geq 0$، موجود باشند، آنگاه

$$H(s)=F(s)\,G(s)=L[h(t)](s) \qquad s>a$$

که در آن

$$h(t)=\int_0^t f(t-u)g(u)du$$

تابع h به کنولوسیون f و g معروف است و آن را با $h=f*g$ نمایش می‌دهیم.

اثبات: بنا به تعریف تبدیل لاپلاس، می‌توان نوشت

$$H(s)=F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\int_0^\infty e^{-sy}g(y)dy$$

یا

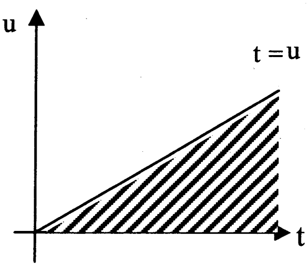
$$H(s)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(x+y)}f(x)\ g(y)\,dx\,dy \tag{٦}$$

در اینجا حاصلضرب دو انتگرال مکرر را می‌توان به صورت یک انتگرال دوگانه ناسره که ناحیهٔ انتگرال‌گیری آن ربع اول صفحه مختصات x و y است، تعبیر کرد.

اینک تغییر متغیرهای

$$x=t-y \quad , \quad u=y$$
$$y=u \quad , \quad t=x+y$$

را از صفحه (x , y) به (t , u) به‌کار می‌بریم. ربـع اول صـفحهٔ xy تحـت ایـن متغیر با ناحیه‌ای که توسط نامساوی‌های $u\geq 0$، $t-u\geq 0$ مشخص می‌شود، متناظر است. (شکل ۱ را ببینید.)



شکل (۱)

در اینجا ژاکوبین تبدیل مختصات برابر یک است، بنابراین انتگرال دوگانهٔ (٦) به صورت زیر درمی‌آید

$$H(s)=F(s)\ G(s)=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t-u)\ g(u)\,du\,dt$$
$$=\int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^{t} f(t-u)\ g(u)\,du\right] dt$$

اینک، با توجه به تعریف تبدیل لاپلاس نتیجه می‌شود که

$$h(t)=L^{-1}[FG]\ (t)=\int_0^{t} f(t-u)\,g(u)\,du$$

این تابع را کنولوسیون توابع f و g می‌نامیم و با f * g نشان می‌دهیم. بنابراین، می‌توان نوشت

$$f * g(t)=\int_0^{t} f(t-u)\,g(u)\,du \qquad (۷)$$

$$L[f * g]=FG$$

۷-٤-۱۳ تمرین: نشان دهید

$$f * g(t) = g * f(t)$$

۷-٤-۱٤ مثال: با به‌کار بردن کنولوسیون، تبدیل معکوس تابع $H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)}$ را پیدا کنید.

حل: تابع $H(s)$ را به عنوان حاصلضرب دو تابع $F(s) = \frac{1}{s^2}$ و $G(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$ در نظر می‌گیریم. بنابر فرمول‌های $L\left[t^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}}$، $L[\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2}$ و فرمول (۷) خواهیم داشت

$$f(t) = L^{-1}[F] = t \qquad g(t) = L^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin at$$

$$h(t) = f * g(t) = \int_0^t (t-u)\sin au \, du$$

با به‌کار بردن انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء و محاسبه انتگرال طرف راست رابطهٔ بالا به دست می‌آوریم

$$h(t) = \frac{at - \sin at}{a^2}$$

۷-٤-۱۵ تذکر: مثال بالا را می‌توان با به‌کار بردن کسرهای جزئی به صورت زیر محاسبه کرد

$$H(s) = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a}{s^2} - \frac{a}{s^2+a^2}\right]$$

بنابراین، $h(t) = \frac{1}{a^2}[at - \sin at]$

۷-٤-۱٦ تذکر: برخی معادلات انتگرال را می‌توان با به‌کار بردن کنولوسیون حل کرد. به مثال زیر توجه کنید.

۷-٤-۱۷ مثال: $f(t)$ را از معادلهٔ انتگرالی

$$f(t)=4t-3\int_0^t f(u)\sin(t-u)du \qquad (8)$$

به دست آورید.

حل: با کمی دقت متوجه می‌شویم که انتگرال در طرف راست معادلهٔ انتگرالی به ما امکان می‌دهد تا از قضیه کنولوسیون ۷-٤-۱۲ استفاده کنیم. فرض می‌کنیم $L[f(t)]=F(s)$.

چون $L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1}$، بنابراین با به‌کاربردن فرمول (۷)، خواهیم داشت

$$L\left[\int_0^t f(u)\sin(t-u)du\right]=\frac{f(s)}{s^2+1}$$

بنابراین، با لاپلاس‌گیری از دو طرف معادلهٔ (۸) این معادله به معادلهٔ

$$F(s)=\frac{4}{s^2}-3\frac{F(s)}{s^2+1} \qquad (9)$$

تبدیل می‌گردد. از (۹) به دست می‌آوریم

$$\left(1+\frac{3}{s^2+1}\right)F(s)=\frac{4}{s^2}$$

یا

$$F(s)=\frac{4(s^2+1)}{s^2(s^2+4)}=\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s^2+4}$$

$$=\frac{1}{s^2}+\frac{3}{2}\,\frac{2}{s^2+4}$$

بنابراین

$$f(t)=t+\frac{3}{2}\sin 2t$$

۷-٤-۱۸ تمرین: معادلهٔ $g(t)=\frac{۱}{۲}t^{۲}-\int_{۰}^{t}(t-u)g(u)du$ را حل کنید.

۷-٤-۱۹ تمرین: ۱- تبدیل معکوس هر یک از توابع داده شده را پیدا کنید.

(الف) $F(s)=\frac{۳}{s}-\frac{٤e^{-s}}{s^{۲}}+\frac{٤e^{-۳s}}{s^{۲}}$

(ب) $F(s)=\frac{٤}{s}-e^{-۲s}\left(\frac{s-۲}{s^{۲}}\right)$

(ج) $F(s)=\frac{۱-e^{(-۲s-۲)}}{s+۱}$

(د) $F(s)=\frac{e^{-٤s}}{(s+۲)^{۳}}$

(هـ) $F(s)=\frac{s-٤}{s^{۲}+۲s+۳}$

(و) $F(s)=\frac{۳s-۲}{s^{۲}-۲s+۱۰}$

۲- با استفاده از کنولوسیون تبدیل معکوس توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $H(s)=\frac{۱}{s^{٤}(s^{۲}+۱)}$

(ب) $H(s)=\frac{۱}{(s+۱)^{۲}(s^{۲}+٤)}$

(ج) $H(s)=\frac{G(s)}{s^{۲}+۱}$

(د) $H(s)=\frac{s}{(s-۲)^{\frac{۳}{۲}}(s^{۲}+۱)}$

(هـ) $H(s)=\frac{۱}{(s^{۲}+۱)^{۲}}$

۳- معادلات داده شده را حل کنید.

(الف) $f(t)=۱+۲\int_{۰}^{t}f(t-u)e^{-۲u}\,du$

(ب) $f(t)=1+\int_0^t f(u)\sin(t-u)\,du$

(ج) $f(t)=t+\int_0^t f(t-u)e^{-u}\,du$

۴- معادلهٔ $f'(t)=\sin t+\int_0^t f(t-u)\cos u\,du$ را با شرط $f(0)=0$ حل کنید.

۷-۵ کاربرد تبدیلات لاپلاس در حل مسأله با مقدار اولیه

در این بخش کاربرد تبدیل لاپلاس را در حل مسائل با مقدار اولیه، بررسی می‌کنیم. همان‌گونه که قبلاً در تذکر ۷-۲-۱۰ بیان کردیم. در واقع، هر جواب یک معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت و مشتقات آن از مرتبهٔ‌نمایی می‌باشند و در نتیجه دارای تبدیل لاپلاس می‌باشد. بنابراین، در معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت می‌توان از خاصیت ۷-۳-۲۳ برای محاسبهٔ تبدیل لاپلاس مشتق‌های جواب اینگونه معادلات استفاده کرد.

۷-۵-۱ مثال: مسأله با مقدار اولیه

$$x''(t)+2x'(t)+x(t)=3te^{-t} \qquad (1)$$
$$x(0)=4 \quad , \quad x'(0)=2$$

را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

حل: فرض می‌کنیم $L[x(t)]=X(s)$. با به‌کار بردن خاصیت ۷-۳-۲۳ و با لاپلاس‌گیری از معادله (۱) به دست می‌آوریم

$$s^2x(s)-\{sx(0)+x'(0)\}+2sx(s)-2\times(0)+X(s)=\frac{3}{(s+1)^2}$$

توجه می‌کنیم که در اینجا برای محاسبه تبدیل لاپلاس تابع te^{-t} از خاصیت ۷-۳-۷ استفاده شده است. با قرار دادن شرایط اولیهٔ $x(0)=4\,,\ x'(0)=2$ در معادلهٔ اخیر معادلهٔ

$$s^2x(s)-4s-2+2sx(s)-8+x(s)=\frac{3}{(s+1)^2}$$

به دست می‌آید. با حل این معادله نسبت به $x(s)$، مشاهده می‌کنیم

$$x(s)=\frac{4s+10}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

$$F(s)=\frac{4(s+1)+6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

$$=\frac{4}{(s+1)}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{3}{(s+1)^4}$$

یا

با به‌کار بردن فرمول $L\left[t^n\right]=\frac{n!}{s^{n+1}}$، خاصیت ۷-۳-۲ و با معکوس‌گیری از رابطهٔ اخیر به دست می‌آوریم

$$x(t)=4e^{-t}+6t\,e^{-t}+\frac{1}{2}t^3e^{-t}$$

$$=\left(4+6t+\frac{1}{2}t^3\right)e^{-t}$$

۷-۵-۲ تمرین: مسأله با مقدار اولیه

$$x''(t)+B^2x(t)=A\sin wt$$

$$x(0)=1\ ,\ \ x'(0)=0$$

را، که در آن A , B , ω اعداد ثابتی می‌باشند، با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنید.

۷-۵-۳- مثال: با استفاده از تبدیلات لاپلاس جواب مسأله

$$x''(t)+4x(t)=f(t)$$

$$x(0)=1\ ,\ x'(0)=0 \qquad (2)$$

را، که در آن

$$f(t)=\begin{cases}4t & 0\le t<1\\ 4 & t\ge 1\end{cases}$$

پیدا کنید.

حل: فرض می‌کنیم $L\left[x(t)\right]=x(s)$. برای پیدا کردن تبدیل لاپلاس تابع f، با توجه به تمرین ۷-۳-۱۵، می‌توانیم بنویسیم.

$$f(t) = ۴t + (۴ - ۴t)\, u_۱(t)$$
$$= ۴t - ۴(t - ۱)\, u_۱(t)$$

بنا به فرمول $L[t] = \frac{۱}{s^۲}$ و خاصیت ۷-۳-۱۸، خواهیم داشت

$$L[f(t)](s) = F(s) = \frac{۴}{s^۲} - \frac{۴}{s^۲}\, e^{-s}$$

با به‌کار بردن خاصیت ۷-۳-۲۳ و با لاپلاس‌گیری از معادلهٔ (۲) معادلهٔ

$$s^۲ x(s) - \{s x(۰) + x'(۰)\} + ۴ x(s) = F(s)$$

به دست می‌آید. با قرار دادن مقدار و شرایط اولیه داده شده در این معادله خواهیم داشت

$$s^۲ x(s) - s + ۴ x(s) = \frac{۴}{s^۲} - \frac{۴}{s^۲} e^{-s}$$

با حل این معادله نسبت به F(s) به دست می‌آوریم

$$x(s) = \frac{۴}{s^۲(s^۲ + ۴)} - \frac{۴}{s^۲(s^۲ + ۴)} e^{-s} + \frac{s}{s^۲ + ۴} \qquad (۳)$$

با استفاده از کسرهای جزئی، کسر $\frac{۴}{s^۲(s^۲ + ۴)}$ را می‌توان به صورت $\frac{۴}{s^۲(s^۲ + ۴)} = \frac{۱}{s^۲} - \frac{۱}{s^۲ + ۴}$ نوشت. بنابراین (۳) به صورت

$$x(s) = \frac{۱}{s^۲} - \frac{۱}{s^۲ + ۴} - \left(\frac{۱}{s^۲} - \frac{۱}{s^۲ + ۴}\right) e^{-s} + \frac{s}{s^۲ + ۴} \qquad (۴)$$

به دست می‌آید. با توجه به فرمول‌های

$$L[\cos ۲t] = \frac{s}{s^۲ + ۴}, \quad L[\sin ۲t] = \frac{۲}{s^۲ + ۴}, \quad L[t] = \frac{۱}{s^۲}$$

به‌کار بردن خاصیت ۷-۳-۱۸ و با معکوس‌گیری از (۴) جواب مسأله عبارت می‌شود از

$$x(t) = t - \frac{۱}{۲}\sin ۲t - (t - ۱) u_۱(t) + \frac{۱}{۲}\sin ۲(t - ۱)\, u_۱(t) + \cos ۲t$$

۷-۵-۴ تمرین: مسأله با مقدار اولیهٔ

$$x''(t)+2x'(t)+2x(t)=f(t)$$
$$x(0)=0 \qquad x'(0)=0$$

که در آن

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<\pi \\ 1 & t\ge\pi \end{cases}$$

حل کنید.

۷-۵-۵ تمرین: با استفاده از تبدیل لاپلاس مسأله با مقدار اولیهٔ

$$x''(t)-4x'(t)+4x(t)=4e^{2t}$$
$$x(0)=-1 \quad , x'(0)=-4$$

را حل کنید.

۷-۵-۶ تذکر: برای حل دستگاه خطی با ضرایب ثابت وقتی شرایط اولیـه در $t=0$ داده شده باشند، می‌توان از تبدیل لاپلاس استفاده کرد. (مثال زیر را ببینید.)

۷-۵-۷ مثال: مسأله با مقدار اولیهٔ

$$\begin{aligned}(D-6)x_1+3x_2&=8e^t\\ -2x_1+(D-1)x_2&=4e^t\\ x_1(0)=-1 \;,\; x_2(0)&=0\end{aligned} \tag{5}$$

را با استفاده از تبدیل لاپلاس پیدا کنید.

حل: فرض می‌کنیم $L[x_1(t)]=x_1(s)$ و $L[x_2(t)]=x_2(s)$. با به‌کار بردن خاصیت ۷-۳-۲۳ و لاپلاس‌گیری از دو معادله (۴) به دست می‌آوریم

$$sx_1(s)-x_1(0)-6x_1(s)+3x_2(s)=\frac{8}{s-1}$$

$$2x_1(s)+sx_2(s)-x_2(0)-x_2(s)=\frac{4}{s-1}$$

با قرار دادن شرایط اولیهٔ $x_1(0)=-1$ و $x_2(0)=0$ دستگاه بالا به صورت

$$(s-۶)x_۱(s)+۳x_۲(s)=\frac{۸}{s-۱}-۱$$
$$-۲x_۱(s)+(s-۱)x_۲(s)=\frac{۴}{s-۱}$$

یا

$$(s-۶)x_۱(s)+۳x_۲(s)=\frac{-s+۹}{s-۱}$$
$$-۲x_۱(s)+(s-۱)x_۲(s)=\frac{۴}{s-۱}$$

درمی‌آید. با حل دستگاه بالا نسبت به $x_۱(s)$ و $x_۲(s)$، خواهیم داشت

$$x_۱(s)=\frac{-s+۷}{(s-۱)(s-۴)}$$
$$x_۲(s)=\frac{۲}{(s-۱)(s-۴)}$$

برای پیدا کردن تبدیل معکوس $F_۱(s)$ و $F_۲(s)$ از کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم. داریم

$$x_۱(s)=\frac{-s+۷}{(s-۱)(s-۴)}=\frac{-۲}{s-۱}+\frac{۱}{s-۴}$$

و

$$x_۲(s)=\frac{۲}{(s-۱)(s-۴)}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{s-۱}+\frac{\frac{۲}{۳}}{s-۴}$$

بنابراین،

$$x_۱(t)=-۲e^{t}+e^{۴t}$$

و

$$x_۲(t)=-\frac{۲}{۳}e^{t}+\frac{۲}{۳}e^{۴t}$$

۷-۵-۸ تمرین: مسأله با مقدار اولیهٔ

$$x' + y = t$$
$$4x + 4y' = 0$$
$$x(0) = 1 \qquad y(0) = -1$$

را با استفاده از تبدیل لاپلاس، حل کنید.

۷-۵-۹ تمرین‌های بخش ۷-۵

۱- جواب مسأله با مقدار اولیهٔ داده شده را با استفاده از تبدیلات لاپلاس پیدا کنید.

(الف)
$$x''(t)+x(t)=6\sin 2t$$
$$x(0)=3 \ , \ x'(0)=0$$

(ب)
$$x''(t)+2x'(t)+x(t)=t$$
$$x(0)=-3 \ , \ x'(0)=-1$$

(ج)
$$x''(t)+x(t)=0$$
$$x(0)=0 \ , \ x'(0)=1$$

(د)
$$x'''(t)+x'(t)=e^t$$
$$x(0)=x'(0)=x''(0)=0$$

(هـ)
$$x'''(t)+4x''(t)+5x'(t)+2x(t)=10\cos t$$
$$x(0)=x'(0)=0 \ , \ x''(0)=3$$

(و)
$$x''(t)+x(t)=f(t)$$
$$x(0)=x'(0)=0$$

که در آن

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<6 \\ 2 & t\ge 6 \end{cases}$$

(ز)
$$x''(t)+3x'(t)+2x(t)=f(t)$$
$$x(0)=x'(0)=0$$

که در آن

$$f(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t<6 \\ 1 & t\ge 6 \end{cases}$$

ح)

$$x''(t)+x(t)=f(t)$$
$$x(0)=0 \quad , x'(0)=0$$

که در آن

$$f(t)=\begin{cases} 4 & 0\le t<2 \\ t+2 & t\ge 2 \end{cases}$$

ط)

$$x''(t)+x(t)=f(t)$$
$$x(0)=1 \quad , x'(0)=0$$

که در آن

$$f(t)=\begin{cases} 3 & 0\le t<4 \\ 2t-5 & t\ge 4 \end{cases}$$

۲- مسأله با مقدار اولیهٔ

$$x''(t)-k^2x(t)=f(t)$$
$$x(0)=0 \quad , x'(0)=0$$

را حل کنید.

۳- با استفاده از تبدیل لاپلاس مسأله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

(الف)

$$\begin{aligned} &x_1'(t)+x_2(t) = \sin t \\ &x_2'(t)-x_3(t)=e^t \\ &x_1(t)+x_2(t)+x_3'(t)=1 \\ &x_1(0)=0 \ , \ x_2(0)=1 , x_3'(0)=1 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} &x_1''(t)+x_2(t)=-2 \\ &x_1(t)+x_2''(t)=0 \\ &x_1(0)=x_1'(0)=x_2(0)=x_2'(0)=0 \end{aligned}$$

۷-۵-۱۰ جدول تبدیلات لاپلاس

فرض می‌کنیم $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد.

$F(s)$	$f(t)$	
$\frac{1}{s}$	1	۱-
$\frac{n!}{s^{n+1}}$	t^n	۲-
$\frac{k}{s^2+k^2}$	$\sin kt$	۳-
$\frac{s}{s^2+k^2}$	$\cos kt$	٤-
$\frac{k}{s^2-k^2}$	$\sinh kt$	۵-
$\frac{s}{s^2-k^2}$	$\cosh kt$	٦-
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$	۷-
$F(as+b)$	$\frac{1}{a}e^{\left(-\frac{bt}{a}\right)}f\left(\frac{t}{a}\right)$	۸-
$\frac{1}{s}e^{-cs}\ ,\ c>0$	$u_c(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<c\\ 1 & t\ge c\end{cases}$	۹-
$e^{-cs}F(s)$	$f(t-c)\ u_c(t)$	۱۰-
$F(s)\,G(s)$	$\int_0^t f(u)\,g(t-u)du$	۱۱-
$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \alpha>-1$	t^{α}	۱۲-
$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$t^{-\frac{1}{2}}$	۱۳-
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	۱٤-
$\frac{2k^3}{\left(s^2+k^2\right)^2}$	$\sin kt - kt\cos kt$	۱۵-

۱۶-	$\dfrac{1-e^{-t}}{t}$	$\operatorname{Ln}\left(1+\dfrac{1}{s}\right)$
۱۷-	$\dfrac{\sin kt}{t}$	$\tan^{-1}\dfrac{k}{s}$
۱۸-	$\dfrac{2\sinh kt}{t}$	$\operatorname{Ln}\dfrac{s+k}{s-k}$

۷-۵-۱۱ تمرین‌های گوناگون فصل ۷

۱- درستی فرمول‌های ۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ در جدول تبدیلات لاپلاس داده شده در ۷-۵-۱۰ را محقق کنید.

۲- تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

(الف) $f(t)=\begin{cases} t^2 & 0\le t<2 \\ 3 & t\ge 2\end{cases}$

(ب) $f(t)=\begin{cases} 4 & 0\le t<2 \\ 2t-1 & t\ge 2\end{cases}$

(ج) $f(t)=\begin{cases} t^2 & 0\le t<2 \\ t-1 & 2\le t<3 \\ 7 & t\ge 3\end{cases}$

(د) $f(t)=\begin{cases} e^{-t} & 0\le t<2 \\ 0 & t\ge 2\end{cases}$

۳- تابع متناوب

$$g(t)=\begin{cases} \sin\omega t & 0\le t\le \dfrac{\pi}{w} \\ 0 & \pi/w < t\le \dfrac{2\pi}{w}\end{cases}$$

$$g\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)=g(t)$$

را در نظر می‌گیریم. نمودار $g(t)$ را رسم کرده و تبدیل لاپلاس آن را پیدا کنید.

۴- نشان دهید که توابع زیر از مرتبهٔ‌نمایی می‌باشند.

(الف) $t^n \cosh kt$

(ب) $\dfrac{\cos t-\cosh t}{t}$

(ج) $t^n \quad e^{kt}$

(د) $\dfrac{\sin kt}{t}$

۵- تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

(الف) $\dfrac{1}{s^2+2s+10}$

(ب) $\dfrac{1}{s^2-4s+8}$

(ج) $\dfrac{2s+3}{(s+4)^3}$

(د) $\dfrac{s^2}{(s-1)^4}$

(هـ) $\dfrac{1}{(s+a)^{n+1}}$

(و) $\dfrac{1}{(s+a)^{m+1}}$ و به ازای هر $m>-1$

(ز) $5\dfrac{e^{-3s}}{s}-\dfrac{e^{-s}}{s}$

٦- با استفاده از کنولسیون تبدیل معکوس توابع زیر را پیدا کنید.

(الف) $\dfrac{1}{s(s^2+k^2)}$

(ب) $\dfrac{4}{s^2(s-2)}$

۷- معادلات داده شده را حل کنید.

(الف) $f(t)=6t+4\int_0^t (u-t)^2 f(u)du$

(ب) $f(t)=e^{-t}-2\int_0^t f(u)\cos(t-u)du$

ج) $f(t)=t^{۲}+\int_{۰}^{t} f(u)\sin(t-u)du$

۸- مسأله‌های با مقدار اولیهٔ زیر را با استفاده از تبدیلات لاپلاس حل کنید.

الف) $x''(t)-۲x'(t)=٤e^{t}$

$x(۰)=۱ \ , \ x'(۰)=۳$

ب) $x''(t)-٦x'(t)+۹x(t)=٦t^{۲}\ e^{۳t}$

$x(۰)=x'(۰)=۰$

ج) $x''(t)-٤x'(t)+٤x(t)=٤\cos ۲t$

$x(۰)=۲ \ , \ x'(۰)=۵$

د) $x''(t)+۳x'(t)+۲x(t)=٤t^{۲}$

$x(۰)=۰ \ , \ x'(۰)=۰$

هـ) $x''(t)+x(t)=f(t)$

$x(۰)=۰ \ , \ x'(۰)=۱$

که در آن

$$f(t)=\begin{cases} ۱ & ۰\le t<\frac{\pi}{۲} \\ ۰ & t\ge\frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

و) $x''(t)+٤x(t)=\sin t-\sin(t-۲\pi)\,u_{۲\pi}(t)$

$x(۰)=۰ \quad , \quad x'(۰)=۰$

ز) $x''(t)+٤x(t)=u_{\pi}(t)-u_{۲\pi}(t)$

$x(۰)=۰ \quad , \quad x'(۰)=۰$

ح) $x''(t)+x(t)=u_{\pi}(t)\cos t$

$x(۰)=۰ \quad , \quad x'(۰)=۱$

ط) $x''-٤x'(t)+٤x(t)=e^{۲t}$

$x(۰)=۱ \quad , \quad x'(۰)=۰$

۱۰- مسأله با مقدار اولیهٔ

$$x''(t)+6x'(t)+9x(t)=f(t)$$
$$x(0)=A \quad , \quad x'(0)=B$$

را حل کنید.

۱۱- (الف) با استفاده از روش تغییر پارامترها، نشان دهید که جواب مسأله با مقدار اولیهٔ

$$y''+2y'+2y=f(t)$$
$$y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$$

عبارت است از

$$y(t)=\int_0^t e^{-(t-u)}f(u)\sin(t-u)\,du$$

(ب) اگر $f(t)=u_\pi(t)$، آنگاه نشان دهید که جواب قسمت (الف) به $y(t)=\frac{1}{2}u_\pi(t)[1-e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi)-e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)]$ تحویل می‌یابد.

۱۲- تبدیل لاپلاس برخی توابع را می‌توان به راحتی با استفاده از بسط سری تیلور آن‌ها پیدا کرد.

(الف) با استفاده از بسط مک لورن تابع $\sin t$، یعنی

$$\sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

با این فرض که بتوان تبدیل لاپلاس سری را جمله‌به‌جمله محاسبه کرد، نشان دهید که

$$L[\sin t]=\frac{1}{s^2+1} \ , \ s>1$$

(ب) قرار می‌دهیم

$$f(t)\begin{cases}\dfrac{\sin\ t}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$$

بسط سری مک لورن تابع f را پیدا کنید. با فرض اینکه بتوان تبدیل لاپلاس سری را جمله‌به‌جمله حساب کرد، نشان دهید که

$$L[f(t)]=\tan^{-1}\frac{1}{s} \qquad , \quad s>1$$

(ج) تابع بسل نوع اول از مرتبهٔ صفر، یعنی J_0، دارای بسط مک لورن زیر است (فصل ۴ را ببینید).

$$J_0(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\ t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

با فرض اینکه بتوان تبدیل لاپلاس را جمله‌به‌جمله محاسبه کرد، نشان دهید که

$$L[J_0(t)]=(s^2+1)^{\frac{-1}{2}}\quad,\quad s>1$$

$$L[J_0(\sqrt{t})]=\frac{1}{s}\ e^{\frac{-1}{4s}}\quad,\quad s>1$$

۱۳- معادله دیفرانسیل بسل از مرتبهٔ صفر

$$ty''+y'+ty=0$$

را در نظر می‌گیریم. توجه می‌کنیم که $t=0$ یک نقطهٔ منفرد منظم معادله دیفرانسیل است. بنابراین ممکن است که جواب‌ها، وقتی $t\to 0$ متناهی نباشند. تحقیق کنید آیا وقتی $t\to 0$ معادله دارای جواب متناهی می‌باشد؟ با فرض اینکه چنین جوابی وجود داشته باشد و $y=\phi(t)$ ، فرض می‌کنیم $Y(s)=L[\phi(t)]$.

(الف) نشان دهید که $Y(s)$ در معادلهٔ $(1+s^2)Y'(s)+sY(s)=0$ صدق می‌کند.

(ب) نشان دهید که $Y(s)=c(1+s^2)^{\frac{-1}{2}}$، که در آن، ثابتی اختیاری است.

(ج) بسط سری دو جمله‌ای $(1+s^2)^{\frac{-1}{2}}$ را به ازای $s>1$ بنویسید و با فرض اینکه مجاز به تبدیل معکوس‌گیری جمله‌به‌جمله باشیم، نشان دهید که

$$y=c\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=eJ_0(t)$$

که در آن J_0 تابع بسل نوع اول از مرتبه صفر است. توجه می‌کنیم که $J_0(0)=1$.

۱۴- توابع

$$\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du\ ,\ \operatorname{erfc}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{\infty}e^{-u^2}du$$

به ترتیب به تابع **مکمل خطا** معروف می‌باشند. نشان دهید که

$$\operatorname{erf}(t)+\operatorname{erfc}(t)=1$$

با فرض اینکه مجاز به تعویض ترتیب انتگرال‌گیری باشیم، ثابت کنید که

$$L[\operatorname{erf}(t)]=\frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{4}}\operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2}\right)\quad,\quad s>0$$

مراجع

1. A. RABENSTEIN, Introduction to Ordinary Differential equations Academic Press, 1972.
2. E. RAINVILLE, P. BEDIENT, Elementary Differntial Equations, Mac Millan Publishing Co, 1974.
3. W. BOYCE, R. DIPRIMA, Elementary Differential Equations And Boundary Value Problems. John Wiley & Sons, 1969.
4. G. SIMMONS, Differntial Equations with Application and Historical Notes. McGraw-Hill, 1972.
5. M. TENENBAUM, H. POLLARD, Ordinary Differential equations. A haper International Student Reprint 1963.
6. W. KAPLAN, Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, Reading. Massachusetts, 1958.
7. W. T. MARTIN, E. REISSNER, Elementary Differential Equations, 2nd ed. Addison-Wesley, Reading. Massachusetts, 1961.
8. E. A. CODDINGTON, An Introduction to Ordinary Differential Equations. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961.
9. E. D. RAINVILLE, Intermediate Differntial Equations, 2nd ed. Macmillan, 1964.
10. R. V. CHURCHILL, Operational Mathematics, 2nd ed. McGraw-Hill, 1958.

دانشگاه پیام نور

ابو عبدالله محمد بن موسی خوارزمی(قرن دوم هجری)ریاضی‌دان و منجم و مورخ و جغرافی‌دان ایرانی است که آثار متعددی به خصوص در حوزه دانش ریاضی و نجوم نگارش کرده است. یکی از مهم‌ترین آثار اوکتاب «مختصر من حساب الجبر و المقابله» است. این اثر قدیمی‌ترین کتاب ریاضی است که از دوران اسلامی به‌دست ما رسیده است. درحقیقت،نخستین کتاب جبر با این نام است و خوارزمی را می‌توان از بنیان‌گذاران علم جبر، به‌صورت رشته‌ای متمایز از هندسه، به‌شمار آورد. این کتاب قرن‌ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تا زمان فرانسوا ویت، ریاضی‌دان فرانسوی قرن شانزدهم میلادی، مبنای مطالعات علمی آنان در این رشته بوده است. ترجمه‌ای لاتینی از این کتاب به یوهانس هیس‌چالنسین و گرار دوس کرمونسیس منسوب است؛ رابرت چستری نیز آن را به لاتینی ترجمه کرد. این ترجمه را می‌توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. فردریک رزن نیز در سال ۱۸۳۱ این کتاب را به انگلیسی ترجمه کرد.از کارهای متأخر در این باب می‌توان کتاب ترجمهٔ لاتینی جبر الخوارزمی (نیویورک، ۱۹۱۵)، اثر لوئی شارل کارپینسکی را نام برد که مشتمل بر مقدمه، حواشی و تعلیقات انتقادی، و ترجمه‌ای به زبان انگلیسی است.

متن عربی این کتاب از میان رفته است، ولی ترجمه‌ای لاتینی از آن از قرن دوازدهم میلادی به‌دست آمده است. اهمیت این کتاب در این است که مسلمین و اروپایی‌ها را با ریاضیات هندی آشنا کرد.

دانشگاه پیام‌نور ۱۹۰۱

گروه ریاضی (۱۲۷/آ)

ISBN:978-964-387-946-4

9789643879464