MATH75.IR

مبتکران

ریاضیات ۲

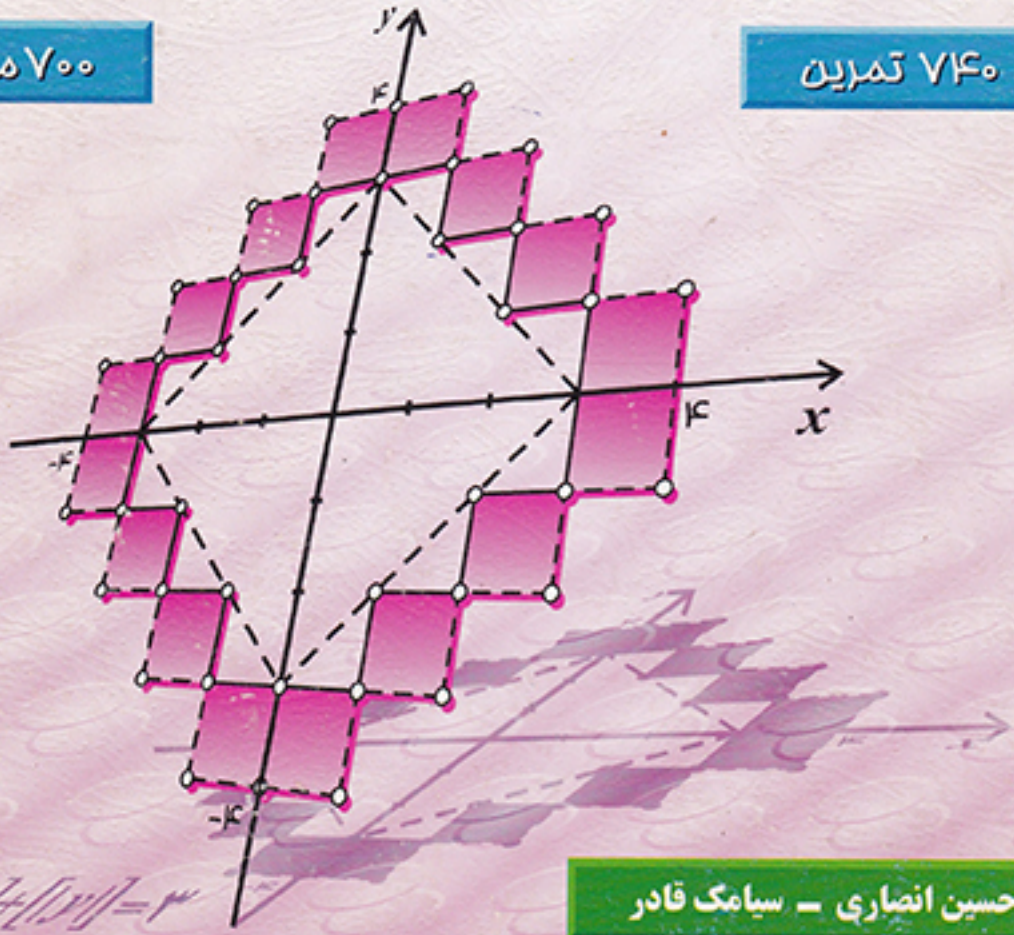
قابل استفاده‌ی:

دانش آموزان و دبیران مدارس ممتاز

و مراکز استعدادهای درخشان

۷۰۰ مثال

۷۴۰ تمرین



حسین انصاری ـ سیامک قادر

MATH75.IR

ریاضیات ۲

قابل استفاده دانش‌آموزان و دبیران مدارس ممتاز
و مراکز استعدادهای درخشان
شامل بیش از ۷۴۰ تمرین و ۷۰۰ مثال

حسین انصاری ـ سیامک قادر

MATH75.IR

سرشناسه : انصاری، حسین
عنوان و پدیدآور : ریاضیات ۲ قابل استفاده دانش آموزان و دبیران مدارس ممتازو مراکز استعدادهای درخشان شامل بیش از ۳۵۰ تمرین و ۴۰۰مثال.
تألیف/حسین انصاری- سیامک قادر
مشخصات نشر : تهران؛ مبتکران، پیشروان، ۱۳۸۹.
مشخصات ظاهری : ۵۵۲ص؛ مصور، جدول، نمودار.
فروست : انتشارات مبتکران : ۴۱۴
شابک : ۹۷۸ - ۹۶۴ - ۴۸۶ - ۵۱۳ - ۸
یادداشت : فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
موضوع : ریاضیات - - کتاب‌های درسی - - راهنمای آموزشی (متوسطه).
موضوع : ریاضیات - - پرسش‌ها و پاسخ‌ها (متوسطه).
موضوع : ریاضیات - - آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه).
رده‌بندی کنگره : LB ۹۵۶ / ۵ پ / ج ۸۱۳۸۶
رده‌بندی دیویی : ۵۱۰/۷۶
شماره کتابخانه ملی : ۱۶۹۵۱ – ۸۸ م

ناشر: انتشارات مبتکران (پروانه نشر: ۱۶۷/۱۰۲) **انتشارات پیشروان** (پروانه نشر: ۲۶۲۳)
تهران: میدان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان نظری، پلاک ۵۹، کدپستی ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱
تلفن: ۶۶۴۸۵۲۰۰ دورنگار ۶۶۹۵۴۳۹۲ www.mobtakeran.com

نام کتاب: ریاضیات (۲)
مؤلفان: حسین انصاری - سیامک قادر
چاپ چهل و پنجم: ۱۳۸۹ (چاپ اول: پاییز ۱۳۷۸)
شمارگان: ۲۰۰۰ جلد
حروف‌نگاری: مبتکران
لیتوگرافی: صبا
چاپ: مروی بها: ۷۸۰۰ تومان

حقوق چاپ و نشر، محفوظ و مخصوص ناشر است و هرگونه کپی‌برداری و نقل مطالب بدون اجازه ناشر پیگرد قانونی دارد.

MATH75.IR

فهرست مطالب

فصل اول (معادلات گویا و اصم، نامعادلات) ۹
بخش اول: تعیین علامت چند جمله‌ای‌ها ۹
تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول ۱۵
روش جدول خلاصه در تعیین علامت ۲۲
تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $P = ax^2 + bx + c$ ۲۴
نامعادله ۳۳
دستگاه نامعادلات ۳۷
قدرمطلق ۴۴
معادلات شامل قدرمطلق و تعبیر هندسی ریشه‌های آن ۶۸
نامعادلات شامل قدرمطلق و تعبیر هندسی ریشه‌های آن ۷۴
حل و بحث معادلات قدر مطلق‌دار ۸۰
حل و بحث نامعادلات قدر مطلق‌دار ۸۸
دامنهٔ تعریف عبارات گویا ۱۰۶
دامنهٔ تعریف عبارات گنگ ۱۰۸
حل معادله‌های شامل عبارات گویا ۱۱۲
معادلات اصم ۱۱۵
نامعادلات اصم ۱۱۸
تمرین‌های فصل اول ۱۲۳

فصل دوم (رابطه ـ تابع ـ انتقال محورها ـ تقارن) ۱۳۳
بخش اول: رابطه ـ تابع ۱۳۳
ضرب دکارتی دو مجموعه ۱۳۳
رابطه ۱۳۶
تابع ۱۳۹
دامنه و برد تابع ۱۴۳
توابع چند ضابطه‌ای ۱۴۶
اعمال جبری روی توابع ۱۵۹

MATH75.IR

ترکیب توابع ۱۶۲
توابع یک به یک ۱۶۶
توابع پوشا (پِرو) ۱۷۲
تابع معکوس و معکوس یک تابع ۱۷۶
توابع یکنوا ۱۸۵
تمرینهای فصل دوم (بخش اول) ۱۸۷
بخش دوم: قرینه‌یابی، انتقال محورها، محور و مرکز تقارن: ۲۰۲
مرکز تقارن ۲۰۳
قرینه یک نقطه نسبت به یک خط ۲۰۴
قرینه یک نقطه نسبت به محور طول ۲۰۵
محور تقارن یک نمودار ۲۰۵
قرینه یک نقطه نسبت به محور عرض ۲۰۶
قرینه یک نقطه نسبت به یک خط ۲۰۷
قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم ۲۰۹
قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم ۲۱۰
انتقال محورهای مختصات ۲۱۱
تغییرات و انتقال نمودار یک تابع ۲۱۳
تمرینهای فصل دوم (بخش دوم) ۲۱۹

فصل سوم (ماتریس‌ها و دستگاههای معادلات) ۲۲۳
ماتریس یک شبکه مستقیم ۲۲۴
تساوی دو ماتریس ۲۲۵
انواع ماتریس ۲۲۶
ترانهادهٔ یک ماتریس ۲۳۱
ماتریس متقارن ۲۳۳
ماتریس پادمتقارن ۲۳۵
بخش دوم: اعمال بر ماتریس‌ها ۲۳۷
جمع ماتریس‌ها و خواص آن ۲۳۷
ضرب ماتریس‌ها ۲۴۰
ماتریس خود توان ۲۵۰
بخش سوم: تبدیل در صفحه ۲۵۳
بخش چهارم: دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول خطی درجه اوّل ۲۶۳

MATH75.IR

دترمینان ۲۶۶
تعریف ماتریس وارون‌پذیر ۲۶۷
حل دستگاه به کمک ماتریس وارون ۲۷۲
تمرین‌های فصل سوم ۲۷۹

فصل چهارم (تابع جزء صحیح) ۲۹۱
معادلات جزء صحیح ۲۹۳
نمودار تابع جزء صحیح ۲۹۶
دامنه و برد توابع جزء صحیح ۳۰۱
تمرینهای فصل چهارم ۳۰۳

فصل پنجم (تابع نمایی و لگاریتم) ۳۰۷
نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ ۳۰۷
توابع لگاریتمی ۳۱۲
خواص لگاریتم ۳۱۶
معادلات لگاریتمی ۳۲۱
نامعادلات لگاریتمی ۳۲۶
تمرینهای فصل پنجم ۳۳۱

فصل ششم (دنباله و تصاعد) ۳۳۷
رابطهٔ بازگشتی ۳۴۰
دنبالهٔ فیبوناتچی ۳۴۰
تصاعد حسابی (عددی) ۳۴۲
جملهٔ n ام یک تصاعد حسابی ۳۴۲
مجموع جملات یک تصاعد حسابی متناهی ۳۴۶
تصاعد هندسی ۳۵۰
جملهٔ nام یک تصاعد هندسی ۳۵۰
مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی ۳۵۵
مجموع جمله‌های تصاعد هندسی نزولی نامتناهی ۳۶۰
دنبالهٔ توافقی ۳۶۵
دنبالهٔ تفاضلات متناهی ۳۶۵
تمرینهای فصل ششم ۳۶۸

MATH75.IR

فصل هفتم (مثلثات) ۳۷۹
توابع مثلثاتی ۳۸۱
دایرهٔ مثلثاتی ۳۸۲
تابعهای متناوب ۳۸۴
رسم توابع مثلثاتی ۳۸۷
توابع معکوس مثلثاتی ۳۹۲
رابطهٔ بین توابع مثلثاتی که نسبت به هم رابطهٔ خاصی دارند ۳۹۸
نسبتهای مثلثاتی مجموع دو زاویه ۴۰۲
محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی تفاضل دو زاویه ۴۰۴
محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ ۲a ۴۰۶
محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ ۳a ۴۰۸
قابل محاسبه کردن عبارتهای مثلثاتی به وسیلهٔ لگاریتم ۴۱۸
معادلهٔ مثلثاتی ۴۲۵
معادلات کلاسیک ۴۳۲
نامساویها و ماکزیمم و مینیمم عبارات مثلثاتی ۴۴۱
فرمولهای مثلثات ۴۴۵
تمرینهای فصل هفتم ۴۵۱

فصل هشتم (بردار) ۴۶۶
بردار مکان ۴۶۸
ویژگیهای ضرب عدد در بردار ۴۶۹
جمع بردارها ۴۷۰
ضرب داخلی (اسکالر) دو بردار ۴۸۲
تمرینهای فصل هشتم ۴۸۹

فصل نهم ۴۹۹
بخش اول (آنالیز ترکیبی) ۴۹۹
فاکتوریل ۴۹۹
قضیه چبیشف ۵۰۱
اصل ضرب (اصل شمارش) ۵۰۳
جایگشت ۵۰۴
تبدیل r شئی از n شئی ۵۰۵

MATH75.IR

جایگشت‌های با تکرار ۵۱۰
ترکیب r شئی دوبدو و متمایز ۵۱۱
جایگشت‌های دوری ۵۲۵
تمرینهای بخش اول (آنالیز ترکیبی) ۵۲۷
بخش دوم: (احتمال) ۵۳۴
پیشامدهای ناسازگار ۵۴۰
متمم یک پیشامد ۵۴۱
پیشامدهای مستقل ۵۴۲
تمرینهای بخش دوم (احتمال) ۵۴۸

MATH75.IR

«به نام حضرت دوست که هر چه داریم از اوست»

مقدمه

خداوند منّان را سپاسگزاریم که توانایی گردآوری کتب سودمند ریاضی را که مشتاقان زیادی پیدا کرده به ما عطا فرمود تا با نشر این کتابها، کمکی به آموزش ریاضی این مرز و بوم کرده باشیم.

پویایی علمی و ذهن خلاق دانش‌آموزان هوشمند، ناخواسته آنان را به سوی کتابهایی می‌کشاند که از بار علمی قابل توجهی برخوردار بوده، موجبات ارتقای بنیهٔ علمی این عزیزان را فراهم کند و این محرک خوبی است که به درخواست خیل عظیم دانش‌آموزان مستعد پاسخ بگوییم و پس از انتشار کتب پیشرفته ریاضی در دورهٔ راهنمایی و همچنین ریاضیات اول دبیرستان که از محتوای علمی قابل قبولی برخوردارند به عرضه ریاضیات دوم دبیرستان نیز همت گماریم تا بدین وسیله عزیزانی را که به کتابهای مبتکران عادت کرده‌اند بهره‌مند سازیم. در این کتاب هر مبحث به تفصیل و با استفاده از مثالهای متنوع شرح داده شده است ومثالها از آسان به مشکل طبقه‌بندی شده‌اند تا دانش‌آموزان ابتدا مفاهیم درسی را بطور عمیق فراگرفته سپس به دنبال مسایل دشوار بروند. در انتهای هر فصل نیز تمرینهای گوناگونی قرارداده‌ایم تا دانش‌آموزان با حل آنها یادگیری خود را کامل کنند. دشواری برخی از تمرینها نباید عزیزان دانش‌آموز را دچار یأس و نومیدی کند، چراکه کارکردن و درگیر شدن با مسائل دشوار، ورزیدگی بیشتر فراگیران را به دنبال خواهد داشت.

در پایان از مدیریت محترم مؤسسه انتشاراتی مبتکران جناب آقای یحیی دهقانی و از برادران بزرگوار آقایان جواد سپانلو و خدایار مبین و همچنین از خانمهای محترم، مریم شیروانی و کبریٰ مرادی، ارغوان کیمیا و رویا آقایی صدر که کار آماده‌سازی کتاب را برعهده داشته‌اند صمیمانه تشکر می‌نماییم.

و از دانش‌آموزان و همکاران محترم تقاضامندیم که ما را از نظرات و پیشنهادات خود توسط شماره تلفن ۴۲۳۶۲۴۲ مطلع سازند.

مؤلفان

پاییز ۱۳۸۰

MATH75.IR

فصل اول

معادلات گویا و اصم، نامعادلات

بخش اول: تعیین علامت چند جمله‌ای‌ها

در این بخش می‌خواهیم تعیین علامت عبارات درجه اول و دوم یک مجهولی را مورد توجه قرار داده و در ادامه کار به بحث نامعادله‌ها و یافتن مجموعه جواب آنها بپردازیم. چون در تمام این موارد لازم است که از نامساوی‌ها استفاده کنیم، ضروری است که ابتدا اصول و قضایای مربوط به نامساوی‌ها را که در ریاضیات (۱) بطور مفصل به آنها پرداخته شده یادآوری کنیم.

● اگر a و b دو عدد حقیقی بوده و بر روی محور a سمت چپ b واقع باشد می‌نویسیم $a < b$ و می‌خوانیم «a کوچکتر از b است.» همچنین در این حالت می‌توان نوشت $b > a$ و خواند «b بزرگتر از a است.» اگر a کمتر یا مساوی b باشد می‌نویسیم $a \leq b$، و اگر بخواهیم بگوییم b کمتر از a نیست می‌نویسیم $b \geq a$. به عبارتی:

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \text{ یا } a = b$$

$$b \geq a \Leftrightarrow b > a \text{ یا } b = a$$

● به ازاء هر عدد حقیقی مانند a فقط یکی از حالات زیر رخ می‌دهد.

$$a < 0 \text{ یا } a = 0 \text{ یا } a > 0$$

● مجموعه اعداد حقیقی مثبت را با $\mathbf{R}^+$ و مجموعه اعداد حقیقی منفی را با $\mathbf{R}^-$ نشان می‌دهیم.

الف) $\mathbf{R}^+$ نسبت به جمع و ضرب بسته است. $\forall a, b \in \mathbf{R}^+ \quad , \quad a + b \in \mathbf{R}^+ \quad , \quad a \times b \in \mathbf{R}^+$

ب) $\mathbf{R}^-$ فقط نسبت به جمع بسته است. $\forall a, b \in \mathbf{R}^- \quad , \quad a + b \in \mathbf{R}^-$

MATH75.IR

قرارداد می‌کنیم:

$\mathbf{R}^{\geq 0} = \mathbf{R}^{+} \cup \{0\} \qquad \mathbf{R}^{\leq 0} = \mathbf{R}^{-} \cup \{0\}$

● دو تعریف زیر را نیز می‌توان برای کوچکتری و بزرگتری بکار برد.

$$\forall a, b \in \mathbf{R} : \begin{array}{l} a < b \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{R}^{-} \\ a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{R}^{+} \end{array}$$

● به قضایا و نکات زیر بدون اثبات توجه کنید.

۱) $\forall a, b \in \mathbf{R} \qquad a = b$ یا $a < b$ یا $a > b$

۲) $\forall a, b, c \in \mathbf{R} \qquad (a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$

۳) $\forall a, b, c \in \mathbf{R} \qquad a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$

این خاصیت بیان می‌کند که به طرفین یک نامساوی می‌توان عددی را افزود یا از دو طرف آن عددی را کاست.

۴) $\forall a, b \in \mathbf{R} \;,\; \forall c \in \mathbf{R}^{+} \quad a < b \Leftrightarrow ac < bc$

این خاصیت بیان می‌کند که طرفین یک نامساوی را می‌توان بدون تغییر جهت علامت نامساوی در عددی مثبت ضرب یا بر عددی مثبت تقسیم کرد.

۵) $\forall a, b \in \mathbf{R} \;,\; \forall c \in \mathbf{R}^{-} \quad a < b \Leftrightarrow ac > bc$

این خاصیت بیان می‌کند که طرفین یک نامساوی را می‌توان در عددی منفی ضرب یا بر عددی منفی تقسیم کرد. ولی جهت نامساوی تغییر می‌کند.

۶) $\forall a \in \mathbf{R}^{+} \quad \forall b \in \mathbf{R}^{-} \quad ab \in \mathbf{R}^{-}$

یعنی حاصلضرب دو عدد مختلف العلامه عددی منفی است.

۷) $\forall a, b \in \mathbf{R}^{-} \quad ab \in \mathbf{R}^{+}$

یعنی حاصلضرب دو عدد منفی عددی مثبت است.

۸) $\forall a \in \mathbf{R}^{-} \quad \forall n \in \mathbf{Z} - \{0\} \Rightarrow \begin{cases} a^n \in \mathbf{R}^{+} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ a^n \in \mathbf{R}^{-} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$

یعنی اگر عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت است و اگر عددی منفی به توان فرد برسد حاصل عددی منفی است. در حالت خاص اگر $a \in \mathbf{R}^{-}$ باشد آنگاه $a^2 \in \mathbf{R}^{+}$.

۹) $\forall a \in \mathbf{R}^{+} \;;\; \frac{1}{a} \in \mathbf{R}^{+} \qquad \forall a \in \mathbf{R}^{-} \;;\; \frac{1}{a} \in \mathbf{R}^{-}$

یعنی وارون هر عدد مثبت عددی مثبت و وارون هر عدد منفی عددی منفی است.

MATH75.IR

۱۰) $\forall a , b \in R^{+} \quad a < b \Leftrightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$

$\forall a , b \in R^{-} \quad a < b \Leftrightarrow \frac{۱}{a} > \frac{۱}{b}$

این دو نامساوی بیان می‌کنند که اگر طرفین یک نامساوی هم علامت (و غیر صفر) باشند با وارون کردن طرفین نامساوی جهت آن عوض می‌شود. مثلاً:

$$۲ < ۵ \Leftrightarrow \frac{۱}{۲} > \frac{۱}{۵}$$

$$-۳ < -\frac{۱}{۲} \Leftrightarrow -\frac{۱}{۳} > -۲$$

دقت کنید که اگر طرفین نامساوی هم علامت نباشند، با وارون کردن دو طرف نامساوی جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. مثلاً:

$$-۳ < ۵ \Leftrightarrow -\frac{۱}{۳} < \frac{۱}{۵}$$

۱۱) $\frac{a}{b} > ۰ \Leftrightarrow (a > ۰ \ , \ b > ۰)$ یا $(a < ۰ , b < ۰)$

یعنی اگر کسری مثبت باشد باید صورت و مخرج آن هم علامت (متحد العلامه) باشند.

۱۲) $\frac{a}{b} < ۰ \Leftrightarrow (a > ۰ , b < ۰)$ یا $(a < ۰ , b > ۰)$

یعنی اگر کسری منفی باشد باید صورت و مخرج آن غیرهم علامت (مختلف العلامه) باشند.

۱۳) $a , c \neq ۰ \ , (b , d > ۰ \ \ b , d < ۰) ; \ \left[\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc\right]$

به این نامساوی بیشتر دقت کنید. زیرا اغلب دیده شده که دانش‌آموزان در مورد کسرهایی که در طرفین یک نامساوی شرکت کرده‌اند مبادرت به انجام عمل طرفین وسطین می‌کنند. این خاصیت بیان می‌کند که انجام این کار مشروط بر متحدالعلامه بودن مخرج‌ها می‌باشد. مثلاً:

$$\frac{۲}{۳} < \frac{۵}{۴} \Leftrightarrow ۲ \times ۴ < ۳ \times ۵$$

$$\frac{۳}{-۲} < \frac{۷}{-۵} \Leftrightarrow -۱۵ < -۱۴$$

۱۴) $a < b \Leftrightarrow a < \frac{a + b}{۲} < b$

$\frac{a + b}{۲}$ را میانگین حسابی (واسطهٔ حسابی) a و b گویند. این خاصیت بیان می‌کند که میانگین حسابی دو عدد متمایز بین آن دو عدد واقع است.

۱۵) $\forall b , d \in R^{+} \left(\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a + c}{b + d} < \frac{c}{d}\right)$

از این خاصیت برای یافتن کسر یا کسرهایی بین دو کسر داده شده می‌توان استفاده کرد. مثلاً

MATH75.IR

برای یافتن سه کسر دیگر بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۳}$ می‌توان از این نکته استفاده کرد.

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۳}{۵} < \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{۴}{۷} < \frac{۳}{۵} < \frac{۵}{۸} < \frac{۲}{۳}$$

مثال ۱: به ازاء هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$$

حل: می‌دانیم $(a - b)^۲ \geq ۰$. (چرا؟) بنابراین خواهیم داشت:

$$a^۲ + b^۲ - ۲ab \geq ۰ \xrightarrow{\text{خاصیت (۳)}} a^۲ + b^۲ \geq ۲ab$$

تساوی وقتی برقرار است که $a = b$.

مثال ۲: اگر کسر $\frac{x + ۱}{x^۲ + ۵}$ مثبت باشد در مورد x چه می‌توان گفت؟

حل: دقت کنید که مخرج این کسر مثبت است. (چرا؟) لذا بنابر خاصیت (۱۱) باید داشته باشیم $x + ۱ > ۰$. همچنین بنابر خاصیت (۳) می‌توان گفت $x > -۱$.

مثال ۳: اگر $۰ < x < ۱$ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید $۰ < x^n < ۱$.

حل: بنابر اتحادها: $x^n - ۱ = x^n - ۱^n = (x - ۱)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + ... + x + ۱)$

چون $x < ۱$ لذا $x - ۱ < ۰$. همچنین چون $x > ۰$، پس $x^{n-۱} + x^{n-۲} + ... + x + ۱ > ۰$

پس می‌توان گفت طرف دوم تساوی بالا بنابر خاصیت (۶) عددی منفی است. یعنی داریم:

$$x^n - ۱ < ۰ \Rightarrow x^n < ۱$$

همچنین چون $x \in \mathbf{R}^+$ لذا $x^n \in \mathbf{R}^+$، یعنی $x^n > ۰$. در نتیجه حکم برقرار است. این مثال نشان می‌دهد که اعداد حقیقی بین صفر و یک اگر به توان اعداد طبیعی برسند حاصل نیز بین صفر و یک خواهد بود.

مثال ۴: اگر $۰ < x < ۱$ و m و n اعداد طبیعی باشند بطوریکه $m > n$، ثابت کنید:

$$۰ < x^m < x^n < ۱$$

حل: برای حل این مثال با توجه به مثال قبل داریم:

$$m , n \in \mathbf{N} \ , \ m > n \Rightarrow m - n \in \mathbf{N}$$

$$۰ < x < ۱ \Rightarrow ۰ < x^{m-n} < ۱$$

$$۰ < x^{m-n} < ۱ \ , \ x^n \in \mathbf{R}^+ \xrightarrow{\text{خاصیت (۴)}} ۰ \times x^n < x^{m-n} \times x^n < ۱ \times x^n$$

$$\Rightarrow ۰ < x^m < x^n$$

از قبل نیز می‌دانستیم که $۰ < x < ۱ \ , \ n \in \mathbf{N} \Rightarrow ۰ < x^n < ۱$

MATH75.IR

پس می‌توان گفت:

$$0 < x^m < x^n < 1$$

این مثال کاربرد زیادی دارد و بهتر است خوب آن را به خاطر بسپارید. این مثال بیان می‌کند که اعداد بین صفر و یک اگر به توان اعداد طبیعی برسند، با زیاد شدن توان، مقدار آنها کوچکتر می‌شود.

مثال ۵: اگر $-1 < x < 0$ باشد نشان دهید:

الف ـ اگر $n \in N$ فرد باشد $-1 < x^n < 0$.

ب ـ اگر $n \in N$ زوج باشد $0 < x^n < 1$.

حل:

الف ـ

$$-1 < x < 0 \xrightarrow{\text{خاصیت (۵)}} 1 > -x > 0 \Rightarrow 0 < -x < 1$$

$$\xrightarrow{\text{مثال (۳)}} 0 < (-x)^n < 1 \xrightarrow{n \text{ فرد است}} 0 < -x^n < 1 \xrightarrow{\text{خاصیت (۵)}}$$

$$0 \times (-1) > (-1) \times (-x^n) > (-1) \times 1 \Rightarrow -1 < x^n < 0$$

ب ـ

$$-1 < x < 0 \xrightarrow{\text{خاصیت (۵)}} 1 > -x > 0 \Rightarrow 0 < -x < 1 \xrightarrow{\text{مثال (۳)}}$$

$$0 < (-x)^n < 1 \xrightarrow{n \text{ زوج است}} 0 < x^n < 1$$

این مثال بیان می‌کند که اعداد حقیقی بین ۱− و صفر اگر به توان عدد طبیعی فرد برسند حاصل نیز بین ۱− و ۰ باقی می‌ماند ولی اگر به توان عدد طبیعی زوج برسند حاصل بین ۰ و ۱ قرار می‌گیرد.

مثال ۶: اگر $0 < x < y$ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید: $0 < x^n < y^n$.

حل:

$$0 < x < y \xrightarrow{\text{خاصیت (۴)}} 0 < \frac{x}{y} < 1 \xrightarrow{\text{مثال (۳)}} 0 < \frac{x^n}{y^n} < 1$$

$$\xrightarrow{\text{خاصیت (۴)}} 0 < x^n < y^n$$

مثال ۷: اگر $x < y < 0$ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

MATH75.IR

الف ـ اگر n فرد باشد: $x^n < y^n < 0$.

ب ـ اگر n زوج باشد: $0 < y^n < x^n$.

حل: چون $x < 0$ است لذا: $-x > 0$ (بنابر خاصیت (۵))

الف ـ

$$x < y < 0 \xrightarrow[\text{بنابرخاصیت (۴)}]{\div(-x)} -1 < \frac{y}{-x} < 0 \xrightarrow{\text{مثال (۵)}} -1 < \frac{y^n}{-x^n} < 0$$

با توجه به اینکه $x < 0$ و n فرد است، $x^n < 0$ و لذا $-x^n > 0$. طرفین نامساوی اخیر را در $-x^n$ ضرب می‌کنیم و بنابر خاصیت (۴) جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

$$x^n < y^n < 0$$

ب ـ چون $x \in \mathbf{R}^-$

$$x < y < 0 \xrightarrow[\text{خاصیت (۵)}]{\div x} 1 > \frac{y}{x} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{y}{x} < 1$$

$$\xrightarrow[\text{n زوج}]{\text{بنابر مثال (۳)}} 0 < \frac{y^n}{x^n} < 1 \xrightarrow{\text{خاصیت (۴)}} 0 < y^n < x^n$$

بازه

فرض می‌کنیم a و b دو عدد حقیقی متمایز و $a < b$ باشد.

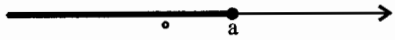
$\{x|x \in R , a < x < b\} = (a , b) =]a , b[$

$\{x|x \in R , a \le x < b\} = [a , b) = [a , b[$

$\{x|x \in R , a < x \le b\} = (a , b] =]a , b]$

$\{x|x \in R , a \le x \le b\} = [a , b]$

$\{x|x \in R , x \le a\} = (-\infty , a) =]-\infty , a]$



MATH75.IR

$\{x|x \in R , x > a\} = (a , +\infty) =]a , +\infty[$

$R = (-\infty , +\infty)$

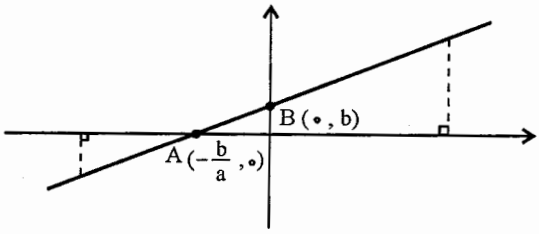
بازهٔ $]a , b[$ را بازهٔ باز و بازهٔ $[a , b]$ را یک بازهٔ بسته می‌نامند. بازه‌های $[a , b]$ و $]a , b]$ و $[a , b[$ و $]-\infty , a]$ بازه‌های نیم باز می‌باشند.

تعیین علامت دو جمله‌ای درجه اول

عبارت درجه اول $P = ax + b$ که در آن a و b دو عدد حقیقی بوده و $a \neq 0$ است را در نظر بگیرید. می‌خواهیم وارد این بحث شویم که با تغییر x مقدار P از نظر علامت چگونه تغییر می‌کند؟ برای این منظور بهتر است این بحث در دستگاه محورهای مختصات دنبال شود. فرض کنیم $y = ax + b$ باشد، می‌دانید که این معادله یک خط است. محل برخورد این خط با محور xها را می‌یابیم.

$$y = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

همچنین عرض از مبدأ این خط برابر b است. پس این خط از دو نقطهٔ $A\left(\frac{-b}{a} , 0\right)$ و $B(0 , b)$ می‌گذرد. فرض کنید نمودار این خط بصورت زیر باشد.



نقطهٔ A محور طول‌ها را به سه قسمت: سمت چپ A، سمت راست A و خود A تقسیم کرده. عرض نقاطی که روی خط با معادلهٔ $y = ax + b$ واقع بوده و طول آنها کمتر از $-\frac{b}{a}$ (طول نقطهٔ A) است در این نمودار منفی است. عرض نقاطی که روی این خط واقع‌اند و طول آنها بیشتر از $-\frac{b}{a}$ است در این نمودار مثبت و عرض خود نقطهٔ A، صفر است.

پس اینطور استنباط می‌شود که نقطهٔ $A(-\frac{b}{a} , 0)$ تعیین کنندهٔ علامت $ax + b$ است. اینک بطور رسمی به توضیح علامت عبارت درجه اول یک مجهولی $P = ax + b$ می‌پردازیم. ابتدا

MATH75.IR

باید دید که P به ازاء چه مقداری از x صفر می‌شود؟ یعنی ریشهٔ $ax + b$ را بیابیم.

$$P = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

حالت اول: فرض کنیم $x < -\frac{b}{a}$ باشد.

الف) $a > 0$

$$x < -\frac{b}{a}\ ,\ a > 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow P < 0$$

در این جا ملاحظه می‌شود که علامت P با علامت a متفاوت است.

ب) $a < 0$

$$x < -\frac{b}{a}\ ,\ a < 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow P > 0$$

در اینجا نیز علامت P با علامت a متفاوت است.

حالت دوم: فرض کنیم $x > -\frac{b}{a}$ باشد.

الف) $a > 0$

$$x > -\frac{b}{a}\ ,\ a > 0 \Rightarrow ax > -b \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow P > 0$$

P و a در این حالت هم علامت‌اند.

ب) $a < 0$

$$x > -\frac{b}{a}\ ,\ a < 0 \Rightarrow ax < -b \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow P < 0$$

در این حالت نیز علامت P موافق علامت a است.

نتیجهٔ بحث فوق که در زیر بصورت یک جدول که به جدول تعیین علامت معروف است می‌آید چنین است که عبارت $P = ax + b$ به ازاء $x < -\frac{b}{a}$ مخالف علامت a است، به ازاء $x > -\frac{b}{a}$ موافق علامت a است و به ازاء $x = -\frac{b}{a}$ برابر صفر است.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$P = ax + b$		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

سطر اول این جدول مشخص کنندهٔ تغییرات x بر روی محور اعداد حقیقی است و سطر دوم وضعیت علامت P را مشخص می‌کند.

MATH75.IR

مثال ۸: عبارت $P = ۲x - ۶$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشهٔ P را می‌یابیم.

$$P = ۰ \Leftrightarrow ۲x - ۶ = ۰ \Leftrightarrow x = ۳$$

در اینجا $a = ۲$ عددی مثبت است. لذا جدول تعیین علامت بصورت زیر تنظیم می‌شود.

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
$P = ۲x - ۶$	−	۰	+

جدول فوق نشان می‌دهد که به ازاء هر x کمتر از ۳ مقدار P منفی و به ازاء هر x بیشتر از ۳ مقدار P مثبت و به ازاء $x = ۳$ مقدار P برابر صفر است.

مثال ۹: حدود x را چنان تعیین کنید که عبارت $P = -۳(۲x - ۱) + ۲(x + ۱)$ منفی باشد.

حل: ابتدا P را ساده می‌کنیم.

$$P = -۶x + ۳ + ۲x + ۲ = -۴x + ۵$$

ریشهٔ P را می‌یابیم.

$$P = ۰ \Leftrightarrow -۴x + ۵ = ۰ \Leftrightarrow x = \frac{۵}{۴}$$

در اینجا $a = -۴$ عددی منفی است. جدول را تنظیم کرده و آن قسمت از جدول را که شرط مسأله را تأمین نمی‌کند هاشور می‌زنیم.

x	$-\infty$	$\frac{۵}{۴}$	$+\infty$
$P = -۴x + ۵$	+	۰	−

از روی این جدول ملاحظه می‌شود که:

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad (x > \frac{۵}{۴} \Rightarrow P < ۰)$$

تعیین علامت عبارتهایی که به صورت حاصلضربی از دو جمله‌ای‌های درجه اول‌اند.

فرض کنیم $A_۱ , A_۲ , A_۳ , ... , A_n$ هر کدام دو جمله‌های درجه اول باشند و هدف تعیین علامت عبارت $P = A_۱ \times A_۲ \times A_۳ \times ... \times A_n$ باشد. برای این منظور ابتدا ریشه‌های P که عبارتند از ریشه‌های عبارات $A_۱ , A_۲ , A_۳ , ... , A_n$ را می‌یابیم. این ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کرده و در سطر اول جدول تعیین علامت از چپ به راست می‌نویسیم. بدیهی است که مقدار ریشه‌ها باعث تقسیم شدن محور اعداد حقیقی به چند پاره خط و دو نیم

MATH75.IR

خط (در ابتداء و انتها) می‌شوند.

برای هر یک از عبارات A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_n ، سطری را در جدول در نظر می‌گیریم و جداگانه هر یک از آنها را تعیین علامت می‌کنیم. در سطر آخر این جدول که باید P تعیین علامت شود کافی است در هر یک از خانه‌های این سطر علامت‌های مثبت و منفی‌ای که در ستون مربوطه قرار گرفته ضرب کنیم و حاصلضرب را که عددی مثبت یا منفی است در این قسمت قرار دهیم.

مثال ۱۰: عبارت $P = (x - 1)(2x + 1)(-x + 3)$ را تعیین علامت کنید.

حل:

$P = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ یا $2x + 1 = 0$ یا $-x + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ یا $x = -\frac{1}{2}$ یا $x = 3$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x + 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-x + 3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$P = (x - 1)(2x + 1)(-x + 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

مثال ۱۱: عبارت $P = (x - 3)^2$ را تعیین علامت کنید.

حل:

$P = (x - 3)^2 = (x - 3)(x - 3)$ $\qquad P = 0 \Leftrightarrow x = 3$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$x - 3$		$-$	0	$+$	
$x - 3$		$-$	0	$+$	
$P = (x - 3)^2$		$+$	0	$+$	

جدول نشان می‌دهد که P به ازاء $x = 3$ صفر می‌شود و به ازاء هر $x \neq 3$، علامت P مثبت است. البته این بدیهی است و بدون تشکیل جدول نیز می‌توانستیم چنین اظهار نظری کنیم. زیرا P یک عبارت باتوان زوج است.

به‌طور کلی می‌توانیم بگوییم که اگر f(x) یک چند جمله‌ای و n عددی طبیعی و زوج باشد

MATH75.IR

آنگاه $[f(x)]^n$ همواره بزرگتر یا مساوی صفر است. برای یافتن xهایی که $[f(x)]^n$ به ازاء آنها صفر می‌شود باید ریشه‌های f(x) را در صورت امکان بیابیم. در این مثال $x = ۳$ را ریشه تکراری مرتبهٔ زوج برای P می‌گویند.

مثال ۱۲: عبارت $P = (x + ۳)^{۱۲} \times (۴ - ۲x)$ را تعیین علامت کنید.

حل: P شامل ضرب یک عبارت با توان زوج و یک دو جمله‌ای درجه اول است. عبارت $(x + ۳)^{۱۲}$ نقشی در علامت P ندارد و فقط به ازاء $x = -۳$، P صفر می‌شود. لذا جدول تعیین علامت P بصورت زیر است.

$x + ۳ = ۰ \longrightarrow x = -۳$

$۴ - ۲x = ۰ \longrightarrow x = ۲$

x	$-\infty$		-۳		۲		$+\infty$
$(x + ۳)^{۱۲}$		+	۰	+		+	
$۴ - ۲x$		+		+	۰	−	
$P = (x + ۳)^{۱۲}(۴ - ۲x)$		+	۰	+	۰	−	

$x = -۳$ ریشهٔ تکراری مرتبهٔ زوج برای P و $x = ۲$ ریشهٔ ساده برای P نام دارند.

مثال ۱۳: عبارت $P = (x - ۵)^۳$ را تعیین علامت کنید.

حل: $P = (x - ۵)^۳ = (x - ۵)(x - ۵)(x - ۵)$

P فقط یک ریشه دارد و آن هم $x = ۵$ است. عدد ۵ را ریشهٔ تکراری مرتبهٔ فرد برای P می‌گویند. لذا تعیین علامت P دقیقاً مانند تعیین علامت عبارت $x - ۵$ است. یعنی هرجا $x - ۵$ مثبت باشد $(x - ۵)^۳$ نیز مثبت و هر جا $x - ۵$ منفی باشد $(x - ۵)^۳$ نیز منفی است. به عبارتی ریشهٔ تکراری مرتبهٔ فرد برای یک عبارت مانند ریشهٔ ساده عمل می‌کند. پس می‌توان در مورد ریشه‌های تکراری مرتبهٔ فرد از توان دو جمله‌ای درجه اول (همان عدد فرد) صرف نظر کرد.

$x - ۵ = ۰ \longrightarrow x = ۵$

x	$-\infty$		۵		$+\infty$
$P = (x - ۵)^۳$		−	۰	+	

مثال ۱۴: عبارت $P = (x - ۱)^{۱۴} \times (-۵x + ۱۰)^{۱۷}$ را تعیین علامت کنید.

MATH75.IR

حل:

$(x-1)^{14}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$(-5x+10)^{17}=0 \Rightarrow -5x+10=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$(x-1)^{14}$		+	0	+		+	
$(-5x+10)^{17}$		+		+	0	−	
P		+	0	+	0	+	

تعیین علامت عبارتهایی که بصورت $P=\frac{A_1\times A_2\times\dots\times A_n}{B_1\times B_2\times\dots\times B_m}$ می‌باشند.

در اینجا $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, B_m$ دو جمله‌ای‌های درجه اول‌اند. تعیین علامت P با تعیین علامت $q=A_1\times A_2\times\dots\times A_n\times B_1\times B_2\times\dots\times B_m$ هیچ تفاوتی ندارد الاّ آنکه باید قید گردد P به ازاء ریشه‌های $B_1, B_2, \dots, B_m$ نامعین است.

مثال ۱۵: عبارت $P=\frac{-2x+6}{5(x+1)}$ را تعیین علامت کنید.

حل: ابتدا ریشه‌های صورت و مخرج را می‌یابیم.

$-2x+6=0 \Rightarrow x=3 \quad , \quad 5(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$

P در $x=-1$ نامعین است. لذا جدول را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-2x+6$		+		+	0	−	
$5(x+1)$		−	0	+		+	
P		−	ن	+	0	−	

از جدول فوق چنین بر می‌آید که:

$\forall x\in \mathbf{R}\ (x<-1$ یا $x>3 \Rightarrow P<0)$

$\forall x\in \mathbf{R}\ (-1<x<3 \Rightarrow P>0)$

$x=-3 \Rightarrow P=0$

$x=-1 \Rightarrow$ P نامعین

مثال ۱۶: عبارت $P=\frac{(-2x+1)^{11}(3x+1)}{(x+2)(x-5)^7}$ را تعیین علامت کنید.

MATH75.IR

حل:

$-۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$ $\quad$ $۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$

$x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$ $\quad$ $x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۵$

x	$-\infty$		-۲		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		۵	
$(-۲x+۱)^{۱۱}$		+		+		+	۰	−	۰	−
$۳x + ۱$		−		−	۰	+		+		+
$x + ۲$		−	۰	+		+		+		+
$(x - ۵)^{۷}$		−		−		−		−	۰	+
P		−	ن	+	۰	−	۰	+	ن	−

ملاحظه می‌شود که:

$\forall x \in \mathbf{R}: (x < -۲$ یا $\frac{-۱}{۳} < x < \frac{۱}{۲}$ یا $x > ۵ \Rightarrow P < ۰)$

$\forall x \in \mathbf{R}: (-۲ < x < -\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۱}{۲} < x < ۵ \Rightarrow P > ۰)$

$x = -\frac{۱}{۳}$ یا $x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow P = ۰$

$x = -۲$ یا $x = ۵ \Rightarrow$ P نامعین

مثال ۱۷: عبارت $P = \frac{(x + ۱)^{۴}(۲x - ۱)^{۳}}{(۳x + ۱)^{۱۰۰}(x + ۷)^{۱۹}}$ را تعیین علامت کنید.

حل:

$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$ $\quad$ ریشه تکراری مرتبه زوج

$۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$ $\quad$ ریشه تکراری مرتبهٔ فرد

$۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۳}$ $\quad$ ریشه تکراری مرتبه زوج

$x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = -۷$ $\quad$ ریشهٔ تکراری مرتبه فرد

MATH75.IR

x	$-\infty$		-۷		-۱		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$(x+۱)^۴$		+		+	۰	+		+		+	
$(۲x-۱)^۳$		−		−		−		−	۰	+	
$(۳x+۱)^{۱۰۰}$		+		+		+	۰	+		+	
$(x+۷)^{۱۹}$		−	۰	+		+		+		+	
P		+	ن	−	۰	−	ن	−	۰	+	

روش جدول خلاصه (جدول یک سطری) در تعیین علامت

همانطور که از مثال‌های بالا متوجه شده‌اید، برای تشکیل جدول تعیین علامت عباراتی که از حاصل‌ضرب (یا حاصل تقسیم) دو جمله‌ای‌های درجه اول با توان‌های مختلف بدست می‌آیند، کافی است ابتدا نوع ریشه‌های هر یک از عبارات از نوع ساده یا تکراری بودن را مشخص کنیم. اگر ریشه تکراری است، مرتبه زوج یا فرد بودن آن را نیز باید تعیین کرد. سپس جدولی شامل یک سطر تشکیل داد که در سطر اول آن ریشه‌ها را از کوچک به بزرگ فهرست کنیم و در سطر دوم، علامت عبارت را مشخص می‌کنیم. در این مرحله کافی است ابتدا علامت یکی از تقسیم بندی‌ها را با دادن یک عدد مناسب (که از نظر محاسبه راحت‌تر باشد) در عبارت قرار داد و علامت عبارت کلی را در آن خانه تعیین کرد. سپس خانه‌های قبل و بعد از آن خانه را یک در میان مخالف و موافق علامت این خانه قرارداد. در این روند و در مرحله گذر از یک خانهٔ جدول (بصورت افقی) به خانه دیگر به نوع ریشه دقت کنید. اگر ریشه ساده یا تکراری مرتبهٔ فرد باشد علامت مخالف علامت قبلی خواهد شد (یعنی عبارت تغییر علامت خواهد داد) ولی اگر ریشه تکراری زوج بود علامت این خانه نیز مانند علامت خانهٔ قبلی خواهد بود. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۸: با روش استفاده از جدول خلاصه عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$P = \frac{(۲x+۱)^{۱۰۰}(x-۱)^{۹۹}(۳x+۱)^۲}{(x+۴)^{۵۰۰}(x-۳)^{۴۰}(x+۱)}$$

حل:

$۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$ P را صفر می کند و تکراری مرتبه زوج است

$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$ P را صفر می کند و تکراری مرتبه فرد است

MATH75.IR

P را صفر می کند و تکراری مرتبه زوج است $۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۳}$

P را نامعین می‌کند و تکراری مرتبه زوج است $x + ۴ = ۰ \Rightarrow x = -۴$

P را نامعین می کند و تکراری مرتبه زوج است $x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$

P را نامعین می کند و ریشه ساده است $x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

		ت ـ ز	س	ت ـ ز	ت ـ ز	ت ـ ف	ت ـ ز	
x	$-\infty$	-۴	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۱	۳	$+\infty$
P		ن	ن	۰	۰	۰	ن	

منظور از «ت ـ ز» تکراری مرتبه زوج و منظور از «ت ـ ف» تکراری مرتبهٔ فرد و منظور از «س» ساده است. ملاحظه می‌گردد که سطر دوم جدول هفت مکان خالی برای قراردادن علامت‌های «+» یا «−» دارد. خانهٔ پنجم از سمت چپ را در نظر بگیرید. (خانه بین $-\frac{۱}{۳}$ و ۱) می‌دانیم صفر در این خانه قرار دارد. مقدار P را به ازاء این مقدار تعیین می‌کنیم.

$$x = ۰ \Rightarrow P = \frac{(۰ + ۱)^{۱۰۰}(۰ - ۱)^{۹۹}(۰ + ۱)^{۲}}{(۰ + ۴)^{۵۰۰}(۰ - ۳)^{۴۰}(۰ + ۱)} = \frac{-۱}{۴^{۵۰۰} \times ۳^{۴۰}} < ۰$$

اینک با توضیحاتی که قبل از مثال داده شده جدول به صورت زیر کامل می‌شود.

		ت ـ ز	س	ت ـ ز	ت ـ ز	ت ـ ف	ت ـ ز	
x	$-\infty$	-۴	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۱	۳	$+\infty$
P	+	ن +	ن −	۰ −	۰ −	۰ +	ن +	

مثال ۱۹: با روش استفاده از جدول خلاصه عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$P = \frac{(x + ۱)^{۵۰}(۲x + ۷)}{(۴x - ۸)^{۱۶}(x + ۱)^{۲۵}}$$

حل: دقت کنید که $x = -۱$ عبارت P را نامعین می‌کند و از نظر اینکه مرتبهٔ آن زوج است یا فرد، باید پس از ساده کردن P تصمیم بگیریم.

$$P = \frac{(x + ۱)^{۵۰}(۲x + ۷)}{(۴x - ۸)^{۱۶}(x + ۱)^{۲۵}} = \frac{(x + ۱)^{۲۵}(۲x + ۷)}{(۴x - ۸)^{۱۶}}$$

P را صفر می‌کند و ساده است $۲x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۷}{۲}$

P را نامعین می کند و تکراری مرتبه فرد است $x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

P را نامعین می کند و تکراری مرتبه زوج است $۴x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

MATH75.IR

		س	ت ـ ف	ت ـ ز	
x	$-\infty$	$-\frac{۷}{۲}$	-۱	۲	$+\infty$
P		م	ن	ن	

در اینجا چهار مکان خالی وجود دارد که باید ابتدا با دادن مقدار مناسبی به x علامت یکی از خانه‌ها را تعیین کنیم. خانهٔ سوم از سمت چپ (بین -۱ و $\frac{۱}{۲}$) را در نظر بگیرید. صفر در این خانه است و داریم:

$$x = ۰ \Rightarrow P = \frac{(۰ + ۱)^{۲۵}(۰ + ۷)}{(۰ - ۸)^{۱۶}} = \frac{۷}{۸^{۱۶}} > ۰$$

پس جدول بصورت زیر کامل می‌شود.

			س		ت ـ ف		ت ـ ز		
x	$-\infty$		$-\frac{۷}{۲}$		-۱		۲		$+\infty$
P		+	م	−	ن	+	ن	+	

یعنی:

$\forall x \in \mathbf{R}\ (x < -\frac{۷}{۲}$ یا $x > -۱\ ,\ x \neq ۲ \Rightarrow P > ۰)$

$\forall x \in \mathbf{R}\ (-\frac{۷}{۲} < x < -۱ \Rightarrow P < ۰)$

$x = -\frac{۷}{۲} \Rightarrow P = ۰$

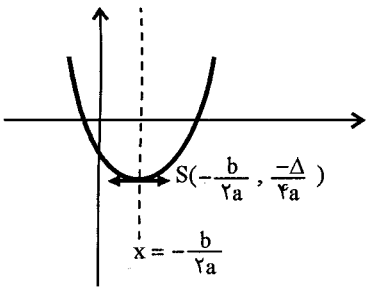
$x = -۱$ یا $x = ۲ \Rightarrow$ P نامعین

تعیین علامت سه جمله‌ای درجه دوم $P = ax^۲ + bx + c$

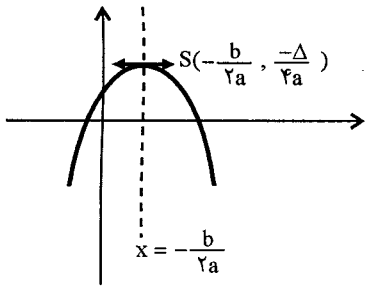
در ریاضیات (۱) با نمودار سهمی و چگونگی حل معادلهٔ درجه دوم آشنا شدیم. در آنجا ملاحظه گردید که هر معادله بصورت $y = ax^۲ + bx + c\ (a \neq ۰)$ نمودار یک سهمی را در دستگاه محورهای مختصات معرفی می‌کند. با اختیار $\Delta = b^۲ - ۴ac$ (مبیّن معادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$) مختصات رأس سهمی $S\left(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a}\right)$ و خط تقارن سهمی به معادلهٔ $x = \frac{-b}{۲a}$ می‌باشند. اگر $a > ۰$ باشد سهمی مینیممی به عرض $y = \frac{-\Delta}{۴a}$ و اگر $a < ۰$ باشد سهمی

MATH75.IR

ماکزیممی به عرض $y = \frac{-\Delta}{۴a}$ دارد.



$a > ۰$



$a < ۰$

مثال ۲۵: در مورد هر یک از سهمی‌های زیر، مختصات رأس سهمی، معادلهٔ محور تقارن و مقدار ماکزیمم یا مینیمم را تعیین کرده، سهمی را رسم کنید.

الف) $y = x^۲ + x + ۱$

ب) $y = x^۲ - x - ۶$

ج) $y = x^۲ - ۲x + ۱$

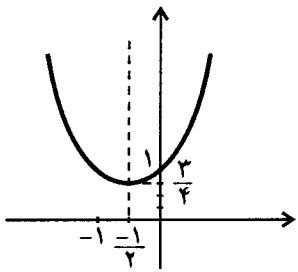
د) $y = -x^۲ + x - ۱$

هـ) $y = -۳x^۲ + ۵x - ۲$

و) $y = -۹x^۲ + ۱۲x - ۴$

حل:

الف)



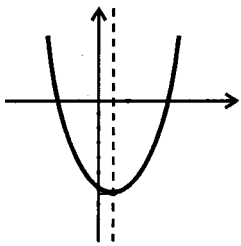
$y = x^۲ + x + ۱ \qquad \Delta = ۱^۲ - ۴(۱)(۱) = -۳$

$S(-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴})$ رأس سهمی

$x = -\frac{۱}{۲}$ محور تقارن

$a = ۱ > ۰ \Rightarrow$ سهمی مینیمم دارد

ب)



$y = x^۲ - x - ۶ \qquad \Delta = ۱^۲ - ۴(۱)(-۶) = ۲۵$

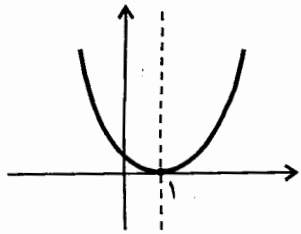
$S(\frac{۱}{۲}, \frac{-۲۵}{۴})$ رأس سهمی

$x = \frac{۱}{۲}$ محور تقارن

$a = ۱ > ۰ \Rightarrow$ سهمی مینیم دارد.

MATH75.IR

ج)



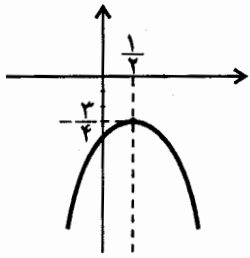
$y = x^{۲} - ۲x + ۱ = (x - ۱)^{۲}$

رأس سهمی $S(۱ , ۰)$

محور تقارن $x = ۱$

$a = ۱ > ۰ \Rightarrow$ سهمی مینیمم دارد

د)



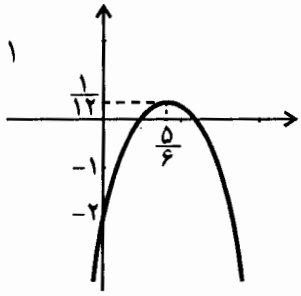
$y = -x^{۲} + x - ۱ \qquad \Delta = ۱^{۲} - ۴(-۱)(-۱) = -۳$

رأس سهمی $S\left(\frac{۱}{۲} , -\frac{۳}{۴}\right)$

محور تقارن $x = \frac{۱}{۲}$

$a = -۱ < ۰ \Rightarrow$ سهمی ماکزیمم دارد

ه)



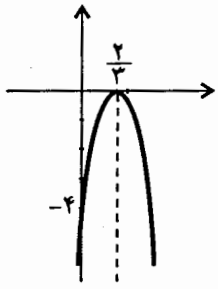
$y = -۳x^{۲} + ۵x - ۲ \qquad \Delta = ۲۵ - ۴(-۳)(-۲) = ۱$

رأس سهمی $S\left(\frac{۵}{۶} , \frac{۱}{۱۲}\right)$

محور تقارن $x = \frac{۵}{۶}$

$a = -۳ < ۰ \Rightarrow$ سهمی ماکزیمم دارد

و)



$y = -۹x^{۲} + ۱۲x - ۴ \qquad \Delta = ۱۴۴ - ۱۴۴ = ۰$

رأس سهمی $S(\frac{۲}{۳} , ۰)$

محور تقارن سهمی $x = \frac{۲}{۳}$

$a = -۳ > ۰ \Rightarrow$ سهمی ماکزیمم دارد

با دقت در مثال فوق موارد زیر را می‌توان حدس زد که متعاقباً آنها را اثبات می‌کنیم.

۱) با توجه به موارد (الف) و (د) که در آنها $\Delta < ۰$، ملاحظه می‌شود که کل نمودار

MATH75.IR

$y = ax^2 + bx + c$ بالای محور xها ($a > 0$) و یا پایین محور xها ($a < 0$) قرار گرفته. یعنی علامت عبارت $P = ax^2 + bx + c$ با فرض آنکه $\Delta < 0$ باشد موافق علامت a است.

۲) موارد (ج) و (و) نیز که در هر دو $\Delta = 0$ می‌باشد، نشان می‌دهند که فقط در $x = \frac{-b}{2a}$ (طول رأس سهمی) عبارت $P = ax^2 + bx + c$ برابر صفر و به ازاء بقیه مقادیر x، P هم علامت با a می‌باشد.

۳) موارد (ب) و (ه) که در آنها $\Delta > 0$ می‌باشد نشان می‌دهند که سهمی در دو نقطه محور xها را قطع کرده. (زیرا در این حالت معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه است.) که اگر طول آنها را x_1 و x_2 در نظر بگیریم ($x_1 < x_2$) در مورد (ب) که $a > 0$ بوده و به ازاء $x_1 < x < x_2$ سهمی پایین محور xها واقع شده که نشان می‌دهد علامت P منفی (یعنی مخالف علامت a) است و در $x < x_1$ یا $x > x_2$ سهمی بالای محور xها قرار گرفته که علامت P مثبت، (یعنی موافق علامت a) است. در مورد (ه) نیز که $a < 0$ بوده وضع به همین ترتیب است. یعنی به ازاء $x_1 < x < x_2$ سهمی بالای محور xها واقع شده و علامت P مثبت (مخالف علامت a) و به ازاء $x < x_1$ یا $x > x_2$ سهمی پایین محور xها واقع گردیده و علامت P منفی (موافق علامت a) است. یعنی به طور خلاصه در این حالت که $\Delta > 0$ است، جدول تعیین علامت $P = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P = ax^2 + bx + c$		موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

اینک سه جمله‌ای درجه دوم $P = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ را در نظر بگیرید.

$$P = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] =$$

$$= a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \quad (*)$$

برحسب حالت‌های مختلف Δ بحث زیر ایجاد می‌شود.

۱) $\Delta < 0$

در این حالت در رابطهٔ (*) عبارت داخل کروشه مثبت بوده و علامت P بستگی به علامت a خواهد داشت. یعنی در این حالت علامت P موافق علامت a است.

MATH75.IR

x	$-\infty$	$+\infty$
$P = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	

۲) $\Delta = 0$

در این حالت عبارت داخل کروشه و به تبع آن P به ازاء $x = \frac{-b}{2a}$ صفر شده و به ازاء $x \neq \frac{-b}{2a}$ ، عبارت داخل کروشه مثبت بوده و علامت P موافق علامت a خواهد شد. یعنی:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P = ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	0	موافق علامت a

۳) $\Delta > 0$

در این حالت با اختیار $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ عبارت (*) به صورت زیر در می‌آید:

$P = a(x - x_1)(x - x_2)$

که اگر فرض کنیم $x_1 < x_2$ ، با توجه به تعیین علامت حاصل‌ضرب دو جمله‌ای‌های درجه اول خواهیم داشت:

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x - x_1)(x - x_2)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P = a(x - x_1)(x - x_2)$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

این جدول نشان می‌دهد که در حالت $\Delta > 0$ که عبارت P به ازاء دو مقدار x_1 و x_2 صفر می‌شود، بین این دو ریشه $(x_1 < x < x_2)$ در جدول باید مخالف علامت عدد a و خارج این دو ریشه $(x < x_1$ یا $x > x_2)$ باید موافق علامت عدد a را قرار دهیم.

مثال ۲۱: عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $p = 3x^2 + 5x + 3$

ب) $q = -x^2 + 6x - 9$

ج) $r = 6x^2 + x - 1$

د) $s = -3x^2 + 9x - 6$

هـ) $t = -2x^2 + 4x$

و) $u = 3x^2 - 12$

حل: الف)

$P = 3x^2 + 5x + 3 = 0 \qquad \Delta = 25 - 36 = -11 < 0$

MATH75.IR

$a = ۳ > ۰$

x	$-\infty$		$+\infty$
$P = ۳x^۲ + ۵x + ۳$		$+$	

ب)

$q = -x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \qquad \Delta = ۳۶ - ۳۶ = ۰$

$x = \frac{-۶}{-۲} = ۳$

$a = -۱ < ۰$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
$q = -x^۲ + ۶x - ۹$	$-$	۰	$-$

ج)

$r = ۶x^۲ + x - ۱ = ۰ \qquad \Delta = ۱ - ۴(۶)(-۱) = ۲۵$

$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۲۵}}{۱۲} = \frac{-۱ \pm ۵}{۱۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$ یا $x = \frac{-۱}{۲}$

$a = ۶ > ۰$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۲}$		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
$r = ۶x^۲ + x - ۱$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

د)

$S = -۳x^۲ + ۹x - ۶ = ۰ \qquad \Delta = ۸۱ - ۷۲ = ۹ \qquad a = -۳ < ۰$

$-۳x^۲ + ۹x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۱$ یا $x = ۲$

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$S = -۳x^۲ + ۹x - ۶$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

هـ)

$t = -۲x^۲ + ۴x = ۰ \Rightarrow x(-۲x + ۴) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۲$

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
$t = -۲x^۲ + ۴x$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	

و)

$u = ۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$u = ۳x^۲ - ۱۲$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

MATH75.IR

مثال ۲۲: عبارت زیر را تعیین علامت کنید.

$$P = \frac{(x^۲ - ۴)(-x^۲ + ۶x - ۹)(۶ - ۳x)^۷}{x(-۳x^۲ + ۵x - ۲)^{۱۱}(x^۲ + ۵x + ۲)}$$

حل:

$$۶ - ۳x = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

$$x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

$$-x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۹ - ۹}}{-۱} = ۳$$

$$-۳x^۲ + ۵x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۲۴}}{-۶} = \frac{-۵ \pm ۱}{-۶} \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } x = \frac{۲}{۳}$$

$$x^۲ + ۵x + ۷ = ۰ \qquad \Delta < ۰$$

x	$-\infty$		-۲		۰		$\frac{۲}{۳}$		۱		۲		۳		$+\infty$
$x^۲ - ۴$		+	۰	−		−		−		−	۰	+		+	
$-x^۲ + ۶x - ۹$		−		−		−		−		−		−	۰	−	
$(۶ - ۳x)^۷$		+		+		+		+		+	۰	−		−	
x		−		−	۰	+		+		+		+		+	
$(-۳x^۲ + ۵x - ۲)^{۱۱}$		−		−		−	۰	+	۰	−		−		−	
$x^۲ + ۵x + ۷$		+		+		+		+		+		+		+	
P		−	۰	+	ن	−	ن	+	ن	−	۰	−	۰	−	

مثال ۲۳: هر یک از عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $p = \frac{(x^۲ - ۵x)(x^۲ - ۲x - ۳)}{-۳(x + ۱)}$

ب) $q = \frac{x^۲ + ۱}{x^۲ - ۱}$

ج) $r = \frac{۶x^۲ - x - ۱}{۴x - ۲}$

د) $s = \frac{(x^۲ - x - ۶)^۵(x^۲ + ۷x + ۱۰)^۷}{(x^۲ + ۲x - ۱۵)^۲}$

حل: الف)

$$p = \frac{(x^۲ - ۵x)(x^۲ - ۲x - ۳)}{-۳(x + ۱)} = \frac{(x^۲ - ۵x)(x - ۳)(x + ۱)}{-۳(x + ۱)}$$

p به ازاء $x = -۱$ نامعین و به ازاء $x \neq -۱$ به صورت زیر در می‌آید.

$$p = \frac{(x^۲ - ۵x)(x - ۳)}{-۳}$$

MATH75.IR

$x^{۲} - ۵x = ۰ \Rightarrow x(x - ۵) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۵$

$x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$

x	$-\infty$		-۱		۰		۳		۵		$+\infty$
$x^{۲} - ۵x$		+		+	۰	−		−	۰	+	
$x - ۳$		−		−		−	۰	+		+	
P		+	ت ن	+	۰	−	۰	+	۰	−	

البته از جدول خلاصه (یک سطری) نیز می‌توانیم به همین نتیجه برسیم. فقط در تشکیل این جدول باید دقت کرد که $x = -۱$ ریشه تکراری مرتبهٔ زوج است (چرا؟) و بقیه ریشه‌ها ساده‌اند.

ب)

$$q = \frac{x^{۲} + ۱}{x^{۲} - ۱}$$

صورت این کسر همواره مثبت است. پس علامت کسر به علامت مخرج آن بستگی دارد.

$x^{۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = ۱ \Rightarrow x = \pm ۱$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x^{۲} - ۱$		+	۰	−	۰	+	
q		+	ت ن	−	ت ن	+	

$\forall x \in \mathbf{R} \ (x < -۱$ یا $x > ۱ \Rightarrow q > ۰)$

$\forall x \in \mathbf{R} \ (-۱ < x < ۱ \Rightarrow q < ۰)$

و q به ازاء -۱ و ۱ نامعین است.

ج)

$$r = \frac{۶x^{۲} - x - ۱}{۴x - ۲} = \frac{(۲x - ۱)(۳x + ۱)}{۲(۲x - ۱)}$$

پس از تجزیهٔ صورت عبارت r به صورت فوق در می‌آید. ملاحظه می‌شود که r به ازاء $x = \frac{۱}{۲}$ نامعین و به ازاء $x \neq \frac{۱}{۲}$ بصورت $r = \frac{۳x + ۱}{۲}$ در می‌آید که هم علامت $۳x + ۱$ است.

$۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۳}$

MATH75.IR

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۳x + ۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
r		$-$	۰	$+$	ت ن	$+$	

$\forall x \in \mathbf{R} \quad (x > -\frac{۱}{۳} \ , \ x \neq \frac{۱}{۲} \ \Rightarrow \ r > ۰)$

$\forall x \in \mathbf{R} \quad (x < -\frac{۱}{۳} \ \Rightarrow \ r < ۰)$

به ازاء $x = \frac{۱}{۲}$ ، p نامعین است و $x = -\frac{۱}{۳} \ \Rightarrow \ r = ۰$

د)

$$S = \frac{(x^۲ - x - ۶)^۵(x^۲ + ۷x + ۱۰)^۷}{(x^۲ + ۲x - ۱۵)^۲}$$

$$S = \frac{(x - ۳)^۵(x + ۲)^۵(x + ۲)^۷(x + ۵)^۷}{(x + ۵)^۲(x - ۳)^۲}$$

S به ازاء $x = ۳$ و $x = -۵$ نامعین است و به ازاء $x \neq ۳$ و $x \neq -۵$ داریم:

$$S = (x - ۳)^۳(x + ۲)^{۱۲}(x + ۵)^۵$$

$$x - ۳ = ۰ \ \Rightarrow \ x = ۳ \ , \ x + ۲ = ۰ \ \Rightarrow \ x = -۲ \ , \ x + ۵ = ۰ \ \Rightarrow \ x = -۵$$

x	$-\infty$		-۵		-۲		۳		$+\infty$
$(x - ۳)^۳$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
$(x + ۲)^{۱۲}$		$+$		$+$	۰	$+$		$+$	
$(x + ۵)^{۱۵}$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
S		$+$	ت ن	$-$	۰	$-$	ت ن	$+$	

تشکیل جدول یک سطری برای این قسمت از طرف دانش‌آموز آموزنده خواهد بود.

MATH75.IR

نامعادله

فرض کنیم $p(x)$ عبارتی جبری شامل متغیر x باشد. هر کدام از عبارات $p(x)<0$ ، $p(x)>0$ ، $p(x) \le 0$ یا $p(x) \ge 0$ را یک نامعادله می‌گویند.

هدف از حل یک نامعادله یافتن فواصلی روی محور اعداد حقیقی است که به ازاء هر x از این فواصل، نامساوی داده شده برقرار باشد. به عبارتی برای حل یک نامعادله ابتدا باید $p(x)$ را تعیین علامت کنیم و آن فواصلی را برای x در تعیین علامت قبول کنیم که نامعادله را به یک نامساوی درست تبدیل کنند. این فواصل مطلوب تشکیل مجموعه‌ای به نام مجموعهٔ جواب نامعادله را می‌دهند و معمولاً با A نشان داده می‌شوند. در روند حل نامعادله اگر هر دو طرف نامعادله شامل عبارت جبری یا عددی هستند باید آنها را به یک طرف منتقل کرد، کارهای جبری لازم را بر روی آنها انجام داده و سپس عبارت خلاصه شده را تعیین علامت کرد؟

مثال ۲۴: نامعادلات زیر را حل کرده و مجموعه جواب هر یک را مشخص کنید.

الف) $2x + 1 > 5$

ب) $2x - 1 \le 3 + x$

ج) $\frac{x+1}{x-1} < 2$

د) $\frac{1}{x} \ge 2$

هـ) $x^2 - 8x \le -15$

و) $x + \frac{1}{x} \ge 2$

ز) $\frac{(x+1)^5(x^2-1)^3}{(x-1)^2} > 0$

ح) $x^2 \le 1$

ط) $x^2 \ge 4$

ی) $\frac{x^2+3x+1}{x} < 1$

ک) $\frac{x+1}{x^2+x+1} < 0$

ل) $\frac{(x+3)^2(x-1)^3}{(x+5)^7} < 0$

حل: در حل این مثال هر جا لازم باشد از جدول تعیین علامت استفاده خواهیم کرد.

الف)

$$2x + 1 > 5 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x > 2\} = (2 , +\infty)$$

ب)

$$2x - 1 \le 3 + x \Rightarrow 2x - x \le 3 + 1 \Rightarrow x \le 4$$

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x \le 4\} = (-\infty , 4]$$

MATH75.IR

ج)

$$\frac{x+۱}{x-۱} < ۲ \Rightarrow \frac{x+۱}{x-۱} - ۲ < ۰ \Rightarrow \frac{-x+۳}{x-۱} < ۰$$

عبارت $p = \frac{-x+۳}{x-۱}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$-x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

$$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$-x+۳$		+		+	۰	−	
$x-۱$		−	۰	+		+	
$\frac{-x+۳}{x-۱}$		−	ت ن	+	۰	−	

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x < ۱ \text{ یا } x > ۳\} = (-\infty , ۱) \cup (۳ , +\infty)$$

د)

$$\frac{۱}{x} \geq ۲$$

در این نامعادله بدیهی است که x نمی‌تواند صفر یا منفی باشد. (چرا؟) چون هر دو طرف نامساوی هم علامت‌اند، می‌توان با استفاده از خواص نامساوی‌ها هر دو طرف را وارون کرد و جهت نامساوی را تغییر داد. خواهیم داشت:

$$x \leq \frac{۱}{۲}$$

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ ۰ < x \leq \frac{۱}{۲}\} = (۰ , \frac{۱}{۲}]$$

ه)

$$x^۲ - ۸x \leq -۱۵ \Rightarrow x^۲ - ۸x + ۱۵ \leq ۰ \Rightarrow$$

$$x^۲ - ۸x + ۱۵ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \pm \sqrt{۱۶ - ۱۵} = ۴ \pm ۱ \Rightarrow x = ۵ \text{ یا } x = ۳$$

x	$-\infty$		۳		۵		$+\infty$
$x^۲ - ۸x + ۱۵$		+	۰	−	۰	+	

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ ۳ \leq x \leq ۵\} = [۳ , ۵]$$

MATH75.IR

و)

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

ملاحظه می‌کنیم که $\frac{(x-1)^2}{x}$ به ازاء $x = 0$ نامعین است و به ازاء $x = 1$ صفر است. صورت کسر همواره غیر منفی است و علامت کسر به علامت مخرج آن بستگی دارد. با توجه به اینکه کل عبارت باید منفی نباشد، لذا باید $x > 0$ باشد. (چرا؟) نتیجه اینکه:

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x > 0\} = \mathbf{R}^+ = (0 \ , +\infty)$$

ز)

$$\frac{(x+1)^5(x^2-1)^3}{(x-1)^2} > 0$$

عبارت $p = \frac{(x+1)^5(x^2-1)^3}{(x-1)^2}$ را در نظر می‌گیریم. این عبارت به ازاء $x = 1$ نامعین است و به ازاء $x \neq 1$ داریم:

$$p = \frac{(x+1)^5(x^2-1)^3}{(x-1)^2} = (x+1)^5(x+1)^3(x-1) = (x+1)^8(x-1)$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x+1)^8$		$+$	0	$+$		$+$	
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
p		$-$	0	$-$	ن	$+$	

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x > 1\} = (1 \ , +\infty)$$

ح)

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \leq 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \qquad a = 1 > 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ -1 \leq x \leq 1\} = [-1 \ , 1]$$

MATH75.IR

ط)

$x^{۲} \geq ۴ \Rightarrow x^{۲} - ۴ \geq ۰$

$x^{۲} - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \qquad a = ۱ > ۰$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$x^{۲} - ۴$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x \leq -۲ \text{ یا } x \geq ۲\} = (-\infty , -۲] \cup [۲ , +\infty)$

ی)

$\frac{x^{۲} + ۳x + ۱}{x} < ۱ \Rightarrow \frac{x^{۲} + ۳x + ۱}{x} - ۱ < ۰ \Rightarrow$

$\frac{x^{۲} + ۲x + ۱}{x} < ۰ \Rightarrow \frac{(x + ۱)^{۲}}{x} < ۰$

عبارت $\frac{(x + ۱)^{۲}}{x}$ به ازاء $x = ۰$ نامعین و به ازاء $x = -۱$ صفر است. صورت کسر همواره غیرمنفی است و برای آنکه کل کسر منفی باشد لازم است که مخرج آن منفی باشد. با توجه به اینکه باید $x \neq -۱$ باشد (چرا؟) خواهیم داشت:

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x < ۰ \ , x \neq -۱| = \mathbf{R}^{-} - \{-۱\}$

ک)

$\frac{x + ۱}{x^{۲} + x + ۱} < ۰$

مخرج کسر $\frac{x + ۱}{x^{۲} + x + ۱}$ همواره مثبت است زیرا:

$\Delta = ۱^{۲} - ۴(۱)(۱) = ۱ - ۴ = -۳ < ۰ \ , \ a > ۰$

پس برای اینکه کل کسر منفی باشد لازم است که صورت آن منفی شود. داریم:

$x + ۱ < ۰ \Rightarrow x < -۱$

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , x < -۱\} = (-\infty , -۱)$

ل)

$\frac{(x + ۳)^{۲}(x - ۱)^{۳}}{(x + ۵)^{۷}} < ۰$

کسر $\frac{(x + ۳)^{۲}(x - ۱)^{۳}}{(x + ۵)^{۷}}$ به ازاء $x = -۵$ نامعین است.

$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳$ ریشه تکراری مرتبه زوج

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$ ریشه تکراری مرتبه فرد

MATH75.IR

$x + ۵ = ۰ \Rightarrow x = -۵$ ریشه تکراری مرتبه فرد

با روش تشکیل جدول یک سطری داریم:

	ت ـ ف	ت ـ ز	ت ـ ف
x	−۵	−۳	۱
p	ن	م	م

مقدار کسر به ازاء $x = ۰$ عددی منفی است. لذا خانهٔ سوم از سمت چپ در جدول با علامت منفی پر خواهد شد و خانه‌های دیگر با توجه به نوع ریشه‌ها به صورت زیر پر می‌شوند.

		ت ـ ف		ت ـ ز		ت ـ ف	
x	−∞	−۵		−۳		۱	+∞
p	+	ن	−	م	−	م	+

پس مجموعهٔ جواب نامعادله بصورت:

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ -۵ < x < ۱ \ , \ x \neq -۳\} = (-۵ , ۱) - \{-۳\}$

می‌باشد. تشکیل جدول تعیین علامت کامل و مقایسهٔ آن با جدول یک سطری تمرینی آموزنده خواهد بود.

دستگاه نامعادلات

گاهی اوقات می‌خواهیم یک دستگاه شامل چند نامعادله را به صورت توأم حل کنیم. در اینگونه موارد بهتر است هر نامعادله را جداگانه حل کرده، مجموعه جواب هر یک را بیابیم. اشتراک مجموعهٔ جوابهای هر یک از نامعادلات دستگاه مجموعه جواب دستگاه خواهد بود.

مثال ۲۵: دستگاههای زیر را حل کرده و مجموعهٔ جوابشان را تعیین کنید.

الف) $\begin{cases} ۲x - ۱ > ۳ \\ x + ۵ < ۹ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \dfrac{x + ۱}{x - ۱} \geq ۰ \\ x^۲ + x - ۶ < ۰ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x^۲ - ۱ \leq ۰ \\ x + ۲ > ۰ \\ \dfrac{۱}{۴} - x > ۰ \end{cases}$

د) $-۱ < \dfrac{۲x + ۱}{۳x - ۱} < ۲$

MATH75.IR

و) $-۳x + ۱ < \frac{x - ۱}{x + ۱} < \frac{x + ۲}{x + ۳}$

هـ) $\begin{cases} x^۲ - ۴x + ۳ \geq ۰ \\ x^۲ - ۴x < ۰ \end{cases}$

حل:

الف)

$$\begin{cases} ۲x - ۱ > ۳ \Rightarrow \quad ۲x > ۴ \Rightarrow x > ۲ \\ x + ۵ < ۹ \quad \Rightarrow x < ۴ \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A_۱ = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x > ۲\} = (۲ , +\infty) \\ A_۲ = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x < ۴\} = (-\infty , ۴) \end{array}$$

$A = A_۱ \cap A_۲ = \{x | x \in \mathbf{R} \ , ۲ < x < ۴\} = (۲ , ۴)$

ب)

$\frac{x + ۱}{x - ۱} \geq ۰ \qquad x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \qquad x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x + ۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x - ۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{x + ۱}{x - ۱}$		$+$	۰	$-$	ت	$+$	

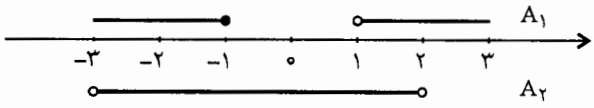
$A_۱ = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x \leq -۱$ یا $x > ۱\} = (-\infty , -۱] \cup (۱ , +\infty)$

$x^۲ + x - ۶ < ۰$

$x^۲ + x - ۶ = (x + ۳)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = -۳ \ , x = ۲$

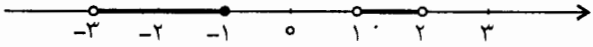
x	$-\infty$		-۳		۲		$+\infty$
$x^۲ + x - ۶$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$A_۲ = \{x | x \in \mathbf{R} \ , -۳ < x < ۲\} = (-۳ , ۲)$



$A = A_۱ \cap A_۲ = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ -۳ < x \leq -۱$ یا $۱ < x < ۲\} = (-۳ , -۱] \cup (۱ , ۲)$

نمایش این مجموعه بر روی محور چنین است:



MATH75.IR

ج)

$x^{۲} - ۱ \leq ۰$

$x^{۲} - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

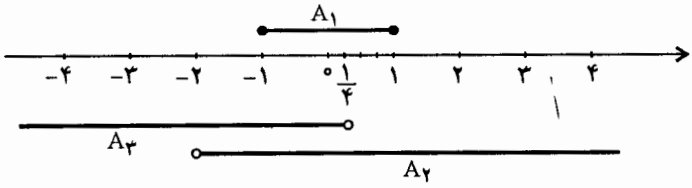
x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x^{۲} - ۱$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$A_{۱} = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ -۱ \leq x \leq ۱\} = [-۱ , ۱]$

$x + ۲ > ۰ \Rightarrow x > -۲$ $\qquad A_{۲} = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x > -۲\} = (-۲ , +\infty)$

$\frac{۱}{۴} - x > ۰ \Rightarrow -x > -\frac{۱}{۴} \Rightarrow x < \frac{۱}{۴}$

$A_{۳} = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x < \frac{۱}{۴}\} = (-\infty , \frac{۱}{۴})$



$A = A_{۱} \cap A_{۲} \cap A_{۳} = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ -۱ \leq x < \frac{۱}{۴}\} = [-۱ , \frac{۱}{۴})$

د) این نامعادله بصورت دستگاه مقابل قابل بیان است.

$$\begin{cases} \frac{۲x + ۱}{۳x - ۱} > -۱ \\ \frac{۲x + ۱}{۳x - ۱} < ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{۲x + ۱}{۳x - ۱} + ۱ > ۰ \\ \frac{۲x + ۱}{۳x - ۱} - ۲ < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲x + ۱ + ۳x - ۱}{۳x - ۱} > ۰ \\ \frac{۲x + ۱ - ۶x + ۲}{۳x - ۱} < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۵x}{۳x - ۱} > ۰ \\ \frac{-۴x + ۳}{۳x - ۱} < ۰ \end{cases}$$

$۵x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$

$-۴x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳}{۴} \ , \ ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۳}$

MATH75.IR

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$5x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$-4x+3$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{5x}{3x-1}$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	
$\frac{-4x+3}{3x-1}$		$-$		$-$		$+$	0	$-$	
نتیجه		جواب						جواب	

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \ , \ x < 0 \ \text{یا} \ x > \frac{3}{4}\} = (-\infty , 0) \cup (\frac{3}{4} , +\infty)$$

هـ)

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1 \ \text{یا} \ x = 3$$

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \ \text{یا} \ x = 4$$

x	$-\infty$		0		1		3		4		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2-4x		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
نتیجه				جواب				جواب			

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{R} \ , \ 0 < x \leq 1 \ \text{یا} \ 3 \leq x < 4\} = (0 , 1] \cup [3 , 4)$$

دقت کنید که اعداد ۰، ۱، ۳ و ۴ را در دو معادله قرار می‌دهیم و هر کدام که هر دو نامعادله را به نامساوی درست تبدیل کند قبول می‌کنیم. در این جا ۱ و ۳ در هر دو نامعادله صدق می‌کنند ولی ۰ و ۴ در یکی از نامعادلات صدق نمی‌کند.

و) این نامعادله با دستگاه مقابل معادل است.

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1} < \frac{x+2}{x+3} \\ \frac{x-1}{x+1} > -3x+1 \end{cases}$$

که پس از خلاصه نمودن به دستگاه زیر می‌رسیم.

MATH75.IR

$$\begin{cases} \dfrac{-x-۵}{(x+۱)(x+۳)} < ۰ \\ \dfrac{۳x^۲+۳x-۲}{x+۱} > ۰ \end{cases}$$

$-x-۵=۰ \Rightarrow x=-۵$ $\qquad (x+۱)(x+۳)=۰ \Rightarrow x=-۱$ یا $x=-۳$

$$۳x^۲+۳x-۲=۰ \Rightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹+۲۴}}{۶}=\frac{-۳\pm\sqrt{۳۳}}{۶}$$

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

این ریشه‌ها به ترتیب از کوچک به بزرگ عبارتند از:

$$-۵<-۳<\frac{-۳-\sqrt{۳۳}}{۶}<-۱<\frac{-۳+\sqrt{۳۳}}{۶}$$

باز هم برای هر دو نامعادله یک جدول تشکیل می‌دهیم.

x	$-\infty$	-۵	-۳	$\frac{-۳-\sqrt{۳۳}}{۶}$	-۱	$\frac{-۳+\sqrt{۳۳}}{۶}$	$+\infty$
$-x-۵$	+	۰ −	−	−	−	−	−
$x+۱$	−	−	−	−	۰ +	+	+
$x+۳$	−	−	۰ +	+	+	+	+
$A_۱$	+	۰ −	ن +	+	ن +	−	−
$۳x^۲+۳x-۲$	+	+	+	۰ −	−	۰ +	+
$A_۲$	−	−	−	۰ +	ن −	۰ +	+
نتیجه							جواب

ملاحظه می‌گردد که مجموعه جواب این نامعادلهٔ توأم عبارتست از:

$$A=\{x|x\in \mathbf{R}\ ,\ x>\frac{-۳+\sqrt{۳۳}}{۶}\}=\left(\frac{-۳+\sqrt{۳۳}}{۶}\ ,\ +\infty\right)$$

یادآوری: سه جمله‌ای درجه دوم $p=ax^۲+bx+c$ را در نظر بگیرید.

الف ـ برای آنکه p همواره منفی باشد لازم است که دو شرط زیر توأماً برقرار باشند.

$\Delta<۰\ ,\ a<۰$

ب ـ برای آنکه p همواره مثبت باشد لازم است که دو شرط زیر توأماً برقرار باشند.

$\Delta<۰\ ,\ a>۰$

مثال ۲۶: حدود m را چنان تعیین کنید که عبارت $p=(m+۱)x^۲-۲(m-۱)x+۲m+۱$

MATH75.IR

همواره مثبت باشد.

حل:

$$\begin{cases} \Delta' < ۰ \Rightarrow (m-۱)^۲-(m+۱)(۲m+۱) < ۰ \Rightarrow m^۲-۲m+۱-۲m^۲-m-۲m-۱ < ۰ \\ a > ۰ \Rightarrow m+۱ > ۰ \Rightarrow m > -۱ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -m^۲-۵m < ۰ \\ m > -۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m < -۵ \text{ یا } m > ۰ \\ m > -۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > -۱$$

مثال ۲۷: حدود m را چنان تعیین کنید که به ازاء جمیع مقادیر x داشته باشیم:

$$-۱ < \frac{x^۲-mx+۱}{x^۲+x+۱} < ۲$$

حل: این نامعادله را به یک دستگاه نامعادلات توأم تبدیل کرده و سپس در جهت یافتن حدود m تلاش می‌کنیم.

$$\begin{cases} \dfrac{x^۲-mx+۱}{x^۲+x+۱}-۲ < ۰ \\ \dfrac{x^۲-mx+۱}{x^۲+x+۱}+۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x^۲-(m+۲)x-۱}{x^۲+x+۱} < ۰ \\ \dfrac{۲x^۲+(۱-m)x+۲}{x^۲+x+۱} > ۰ \end{cases}$$

چون در دستگاه اخیر، مخرج هر دو کسر همواره مثبت است، (چرا؟) لذا کافیست صورت‌ها هر دو شرط را ایجاد کنند.

$$\begin{cases} -x^۲-(m+۲)x-۱ < ۰ \Rightarrow \begin{cases} \Delta_۱ < ۰ \\ a_۱ < ۰ \end{cases} \\ ۲x^۲+(-m+۱)x+۲ > ۰ \Rightarrow \begin{cases} \Delta_۲ < ۰ \\ a_۲ > ۰ \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m+۲)^۲-۴ < ۰ \\ -۱ < ۰ \\ (-m+۱)^۲-۱۶ > ۰ \\ ۲ > ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m+۲)^۲-۴ < ۰ \\ (-m+۱)^۲-۱۶ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^۲+۴m < ۰ \\ m^۲-۲m-۱۵ > ۰ \end{cases}$$

$m^۲+۴m = ۰ \Rightarrow m = ۰$ یا $m = -۴$

$m^۲-۲m-۱۵ = ۰ \Rightarrow m = ۵$ یا $m = -۳$

MATH75.IR

m	$-\infty$		-۴		-۳		۰		۵		$+\infty$
$m^۲ + ۴m$		+	۰	−		−	۰	+		+	
$m^۲ - ۲m - ۱۵$		+		+	۰	−		−	۰	+	
نتیجه				جواب							

بدین ترتیب به ازاء $-۴ < m < -۶$ نامعادله داده شده به ازاء جمیع مقادیر x برقرار است.

مثال ۲۸: به ازاء چه مقادیری از m مقدار عبارت $x^۲ - mx$ از مقدار عبارت $۲x + ۳m - ۱$ به ازاء جمیع مقادیر x بیشتر است؟

حل: می‌خواهیم نامعادلهٔ $x^۲ - mx < ۲x + ۳m - ۱$ به ازاء جمیع مقادیر x برقرار باشد. یعنی به ازاء هر x داشته باشیم:

$$x^۲ - (m + ۲)x - ۳m + ۱ > ۰$$

داریم:

$$\begin{cases} \Delta < ۰ \\ a > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m + ۲)^۲ - ۴(-۳m + ۱) < ۰ \\ ۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$m^۲ + ۱۶m < ۰ \Rightarrow m(m + ۱۶) < ۰$$

$$m = ۰ \qquad m + ۱۶ = ۰ \Rightarrow m = -۱۶$$

m	$-\infty$		-۱۶		۰		$+\infty$
$m^۲ + ۱۶m$		+	۰	−	۰	+	

با توجه به جدول ملاحظه می‌شود که بایدداشته باشیم $-۱۶ < m < ۰$

مثال ۲۹: تعداد اعداد اولی که در نامعادلهٔ $x^۲ - ۶x - ۲۷ \leq ۰$ صدق می‌کنند چند تاست؟

حل: ابتدا مجموعهٔ جواب نامعادله را در **R** می‌یابیم و سپس شرط خواسته شده را اعمال می‌کنیم.

$$P = x^۲ - ۶x - ۲۷ \qquad x^۲ - ۶x - ۲۷ = ۰ \Rightarrow$$

$$\Delta = ۳۶ + ۱۰۸ = ۱۴۴$$

$$x = \frac{۶ \pm \sqrt{۱۴۴}}{۲} = \frac{۶ \pm ۱۲}{۲} \Rightarrow x_۱ = -۳ \ , \ x_۲ = ۹$$

MATH75.IR

x	$-\infty$		-۳		۹		$+\infty$
$x^۲ - ۶x - ۲۷$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ داده شده در $\mathbf{R}$ عبارتست از $A = \{x | x \in \mathbf{R}\ ,\ -۳ \le x \le ۹\} = [-۳,۹]$ که اعداد اول متعلق به این مجموعه عبارتند از ۲ و ۳ و ۵ و ۷. یعنی ۴ عدد اول در این نامعادله صدق می‌کنند.

قدر مطلق: فرض کنیم a یک عدد حقیقی باشد. می‌دانیم $\sqrt{a}$ به ازاء $a \ge ۰$ قابل تعریف بوده و حاصلش عددی غیر منفی است.

$$\sqrt{۲۵} = ۵ \quad , \quad \sqrt{۰/۰۱} = ۰/۱ \quad , \quad \ldots$$

اینک فرض کنیم x عددی حقیقی و دلخواه باشد و بخواهیم $\sqrt{x^۲}$ را محاسبه کنیم.

آیا می‌توان گفت $\sqrt{x^۲} = x$؟

برای پاسخ به این سؤال فرض کنید $x = -۴$.

$$\sqrt{x^۲} = \sqrt{(-۴)^۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

ملاحظه می‌کنید حاصل $\sqrt{x^۲}$ برابر -۴ (یعنی x) نشده بلکه قرینه آن (یعنی $-(-۴) = ۴$) بدست آمده. لذا:

$$\sqrt{x^۲} = \begin{cases} x & \text{اگر } x \ge ۰ \\ -x & \text{اگر } x < ۰ \end{cases}$$

پس برای محاسبهٔ $\sqrt{x^۲}$ اگر x مثبت یا صفر باشد حاصل رادیکال خود x و اگر x منفی باشد حاصل رادیکال قرینهٔ x (که اینک عددی مثبت است) بدست می‌آید. $\sqrt{x^۲}$ را با نماد $|x|$ نشان می‌دهیم و آن را قدر مطلق x می‌نامیم.

$$|x| = \sqrt{x^۲} = \begin{cases} x & x \ge ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

مثال ۳۰:

الف) $|۷| = ۷$

ب) $|-۲| = -(-۲) = ۲$

ج) $|۰| = ۰$

د) $|۱ - \sqrt{۲}| = -(۱ - \sqrt{۲}) = \sqrt{۲} - ۱$

MATH75.IR

مثال ۳۱: اگر $a < b$ باشد حاصل $|a - b|$ چیست؟

حل:

$$a < b \Rightarrow a - b < ۰ \Rightarrow |a - b| = -(a - b) = b - a$$

مثال ۳۲: حاصل عبارت $\Big|\,|-|۳ - |-۴| - ۹| + ۱| - ۱۰\Big|$ چیست؟

حل: از داخل شروع می‌کنیم.

$$\big|۳ - |-۴| - ۹\big| = |۳ - ۴ - ۹| = |-۱۰| = ۱۰$$

$$\big|-|۳ - |-۴| - ۹| + ۱\big| = |-۱۰ + ۱| = |-۹| = ۹$$

$$\Big|\,|-|۳ - |-۴| - ۹| + ۱| - ۱۰\Big| = |۹ - ۱۰| = |-۱| = ۱$$

مثال ۳۳: آیا درست است بنویسیم: $|x + y| = |x| + |y|$ ؟

حل: خیر. زیرا با اختیار $x = -۲$ و $y = ۳$ داریم:

$$|x + y| = |-۲ + ۳| = |۱| = ۱$$

اما:

$$|x| + |y| = |-۲| + |۳| = ۲ + ۳ = ۵$$

که این دو عدد مساوی نیستند.

مثال ۳۴: آیا درست است بنویسیم: $|x - y| = |x| - |y|$ ؟

حل: خیر. زیرا با همان x و y مثال قبل داریم:

$$|x - y| = |-۲ - ۳| = |-۵| = ۵$$

$$|x| - |y| = |-۲| - |۳| = ۲ - ۳ = -۱$$

که با هم مساوی نیستند.

مثال ۳۵: به ازاء مقادیر مختلف x، عبارت $p = |x^۲ - ۱|$ را طوری بنویسید که فاقد قدر مطلق باشد.

حل: بنابر تعریف قدر مطلق داریم:

$$p = |x^۲ - ۱| = \begin{cases} x^۲ - ۱ & \text{اگر } x^۲ - ۱ \geq ۰ \\ -x^۲ + ۱ & \text{اگر } x^۲ - ۱ < ۰ \end{cases}$$

پس باید عبارت $x^۲ - ۱$ تعیین علامت گردد.

$$x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x^۲ - ۱$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

از روی جدول می‌توان گفت:

MATH75.IR

$$p = |x^2-1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{اگر } x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{اگر } -1 < x < 1 \end{cases}$$

چند خاصیت قدرمطلق

۱-

$$\forall x \in \mathbf{R} \ ; \ |x| \geq 0$$

بنابر تعریف قدرمطلق، این خاصیت بدیهی به نظر می‌رسد، زیرا:

$$|x| = \sqrt{x^2} \in \mathbf{R}^{\geq 0}$$

۲-

$$\forall x \in \mathbf{R} \ ; \ -|x| \leq x \leq |x|$$

اگر $x \geq 0$ باشد این نامساوی‌ها بصورت زیر در می‌آید:

$$-x \leq x \leq x$$

که بدیهی است. اگر $x < 0$ باشد نیز این نامساوی‌ها بصورت زیر در می‌آیند:

$$-(-x) \leq x \leq -x$$

که ساده شدهٔ آن بصورت:

$$x \leq x \leq -x$$

است که باز هم بدیهی است. پس به ازاء هر x نامساوی‌های داده شده برقراراند.

۳-

$$\forall x \in \mathbf{R} \ (|x| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0)$$

بدیهی است زیرا:

$$x = 0 \ \Rightarrow \ |x| = |0| = 0$$

و همچنین چون $\forall x \in \mathbf{R} \ \ |x| \geq 0$ ، لذا تنها حالتی که تساوی ایجاد می‌گردد زمانی است که $x = 0$ باشد. پس شرط لازم و کافی برای آنکه قدر مطلق عددی صفر باشد آنستکه خود آن عدد صفر باشد.

۴-

$$\forall x , y \in \mathbf{R} : \ |x| = |y| \ \Leftrightarrow \ x = \pm y$$

زیرا:

$$|x| = |y| \ \Leftrightarrow \ \sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} \ \Leftrightarrow \ x^2 = y^2 \ \Leftrightarrow \ (x - y)(x + y) = 0 \ \Leftrightarrow$$

MATH75.IR

$x - y = 0$ یا $x + y = 0 \Leftrightarrow x = y$ یا $x = -y$

یعنی شرط لازم و کافی برای آنکه قدر مطلق دو عدد برابر باشند آنستکه آن دو عدد یا برابر باشند و یا قرینه.

۵-

$$\forall x \in \mathbf{R} : \ |-x| = |x|$$

زیرا: (روش اول)

$$|-x| = \sqrt{(-x)^2} = \sqrt{x^2} = |x|$$

۶-

$$\forall x , y \in \mathbf{R} : |xy| = |x| . |y|$$

زیرا:

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{y^2} = |x| . |y|$$

۷-

$$\forall x , y \in \mathbf{R} \ (y \neq 0 \ \Rightarrow \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|})$$

زیرا:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

۸-

$$\forall x , y \in \mathbf{R} \ : \ |x + y| \leq |x| + |y|$$

زیرا: اولاً دقت کنید که همواره $xy \leq |xy|$ (چرا؟)

ثانیاً: به ازاء هر x ، $x^2 = |x|^2$ (چرا؟)

با توجه به این دو نکته داریم:

$$|x + y| = \sqrt{(x + y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2xy} \leq$$

$$\sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|xy|} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y|} = \sqrt{(|x| + |y|)^2}$$

$$= ||x| + |y|| = |x| + |y|$$

در اینجا تساوی زمانی رخ می‌دهد که $|xy| = xy$ باشد، و این مشروط بر آن است که $xy \geq 0$ بوده یعنی x و y هم علامت باشند.

MATH75.IR

۹-

$$\forall x, y, z \in R \quad : \quad |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

زیرا:

$$|x - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|$$

این نامساوی به نامساوی مثلثی معروف است و کاربرد زیادی دارد. آیا می‌توانید بگویید که در اینجا حالت تساوی تحت چه شرطی رخ می‌دهد؟

مثال ۳۶: اگر a عدد غیرمنفی باشد، حدود x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$|x| \leq a$$

حل: چون a نامنفی است، طرفین نامساوی نامنفی بوده و می‌توانیم هر دو طرف را به توان ۲ برسانیم.

$$|x| \leq a \Rightarrow |x|^{۲} \leq a^{۲} \Rightarrow x^{۲} \leq a^{۲} \Rightarrow (x - a)(x + a) \leq ۰$$

$$x - a = ۰ \Rightarrow x = a \qquad x + a = ۰ \Rightarrow x = -a$$

طبیعی است که با شرایط فوق $-a \leq a$ است.

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
$(x - a)(x + a)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

لذا مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ فوق $A = \{x | x \in \mathbf{R} \ ; \ -a \leq x \leq a\}$ است. یعنی:

$$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

مثال ۳۷: اگر a عددی حقیقی و نامنفی بوده و داشته باشیم $-a \leq x \leq a$، ثابت کنید $|x| \leq a$.

حل: اگر $x \geq ۰$ باشد با توجه به $x \leq a$ ملاحظه می‌شود که $|x| = x \leq a$ و نامساوی برقرار است. اگر $x < ۰$ باشد چون $-a \leq x$ لذا $-x \leq a$ یعنی $a \geq -x$. پس:

$$|x| = -x \leq a$$

که باز هم نامساوی برقرار است.

نتیجه:

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R} \ \ \forall a \in \mathbf{R}^{\geq ۰} \ \ (|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a)}$$

MATH75.IR

این گزاره در حل نامعادله‌های قدر مطلق کاربرد فراوان دارد.

مثال ۳۸: نامساوی $a < x < b$ را به صورتی بنویسید که در آن قدرمطلق به کار رفته باشد.

حل: از طرفین نامساوی عدد $\frac{a+b}{۲}$ (میانگین a و b را) کم می‌کنیم. داریم:

$$a < x < b \Rightarrow a - \frac{a+b}{۲} < x - \frac{a+b}{۲} < b - \frac{a+b}{۲} \Rightarrow$$

$$\frac{a-b}{۲} < x - \frac{a+b}{۲} < \frac{b-a}{۲} \Rightarrow -\frac{b-a}{۲} < x - \frac{a+b}{۲} < \frac{b-a}{۲}$$

با توجه به نتیجه گرفته شده در بالا این نامساوی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\left| x - \frac{a+b}{۲} \right| < \frac{b-a}{۲}$$

مثال ۳۹: هر یک از نامساوی‌های زیر را بصورت یک نامساوی قدرمطلق‌دار بنویسید.

الف) $-۳ < x < ۷$ ب) $۱ < ۲x - ۳ < ۵$

ج) $۴ < |x| - ۱ < ۱۰$ د) $۲ < x^۲ + x + ۱ < ۴$

حل: الف ـ

$$\frac{-۳+۷}{۲} = ۲$$

$$-۳ - ۲ < x - ۲ < ۷ - ۲ \Rightarrow -۵ < x - ۲ < ۵ \Rightarrow$$

$$|x - ۲| < ۵$$

ب ـ

$$\frac{۱+۵}{۲} = ۳$$

$$۱ - ۳ < ۲x - ۳ - ۳ < ۵ - ۳ \Rightarrow -۲ < ۲x - ۶ < ۲ \Rightarrow$$

$$|۲x - ۶| < ۲$$

البته می‌توان هر دو طرف را بر ۲ تقسیم کرده و بصورت ساده شدهٔ زیر نیز نوشت.

$$|x - ۳| < ۱$$

ج ـ

$$\frac{۴+۱۰}{۲} = ۷$$

$$۴ - ۷ < |x| - ۱ - ۷ < ۱۰ - ۷ \Rightarrow -۳ < |x| - ۸ < ۳$$

$$\Rightarrow \big| |x| - ۸ \big| < ۳$$

د ـ

$$\frac{۲+۴}{۲} = ۲$$

MATH75.IR

$$۲ - ۳ < x^۲ + x + ۱ - ۳ < ۴ - ۳ \quad \Rightarrow \quad -۱ < x^۲ + x - ۲ < ۱$$

$$\Rightarrow \quad |x^۲ + x - ۲| < ۱$$

مثال ۴۵: به ازاء چه مقادیری از x تساوی $|x^۲ + x + ۱| = x^۲ + |x + ۱|$ برقرار است؟

حل: بنابر خاصیت ۸:

$$|x^۲ + x + ۱| = |x^۲ + (x + ۱)| \leq |x^۲| + |x + ۱|$$

که تساوی زمانی برقرار است که $x^۲$ و $x + ۱$ هم علامت باشند. چون $x^۲$ نامنفی است لذا $x + ۱$ نیز باید نامنفی باشد. یعنی:

$$x + ۱ \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x \geq -۱$$

پس شرط برقراری تساوی فوق آنستکه داشته باشیم $x \geq -۱$.

مثال ۴۱: اگر $۳ - \frac{۱}{۳} < x < ۳ + \frac{۱}{۳}$ باشد و $x \neq ۳$، آنگاه حداکثر مقدار ε در نامساوی زیر چیست؟

$$\left|\frac{x^۲ - ۳x}{۲x - ۶} - \frac{۳}{۲}\right| < \varepsilon$$

(ε را بخوانید اپسیلون).

حل:

$$۳ - \frac{۱}{۳} < x < ۳ + \frac{۱}{۳} \overset{-۳}{\Rightarrow} -\frac{۱}{۳} < x - ۳ < \frac{۱}{۳} \quad \Rightarrow$$

$$|x - ۳| < \frac{۱}{۳} \qquad (۱)$$

همچنین:

$$\left|\frac{x^۲ - ۳x}{۲x - ۶} - \frac{۳}{۲}\right| = \left|\frac{x(x - ۳)}{۲(x - ۳)} - \frac{۳}{۲}\right| = \left|\frac{x}{۲} - \frac{۳}{۲}\right| = \left|\frac{x - ۳}{۲}\right|$$

$$= \frac{|x - ۳|}{۲} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |x - ۳| < ۲\varepsilon \qquad (۲)$$

پس حداکثر مقدار ۲ε باید $\frac{۱}{۳}$ باشد. یعنی حداکثر مقدار ε برابر $\frac{۱}{۶}$ است.

$$۲\varepsilon \leq \frac{۱}{۳} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \leq \frac{۱}{۶}$$

مثال ۴۲: اگر داشته باشیم $|x| \geq a$ حدود x چیست؟ برحسب مقادیر مختلف a بحث کنید.

حل: اولاً اگر $a \leq ۰$ باشد آنگاه به ازاء هر x این نامساوی برقرار است و مجموعهٔ جواب در این حالت **R** است.

MATH75.IR

ثانیاً: فرض کنیم $a > ۰$ باشد و داشته باشیم $|x| \geq a$. با به توان دو رساندن دو طرف نامساوی داریم:

$$|x| \geq a \Rightarrow |x|^۲ \geq a^۲ \Rightarrow x^۲ \geq a^۲ \Rightarrow (x-a)(x+a) \geq ۰$$

$$x - a = ۰ \Rightarrow x = a \qquad x + a = ۰ \Rightarrow x = -a$$

با توجه به $a > ۰$ داریم $-a < a$.

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
$x^۲ - a^۲$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

و مجموعه جواب بصورت: $A = \{x | x \in \mathbf{R} ; x \leq -a$ یا $x \geq a\}$ بدست می‌آید.

مثال ۴۳: اگر $x \geq a$ یا $x \leq -a$ باشد، ثابت کنید $|x| \geq a$.

حل: اگر $x \geq a$ ، چون $|x| \geq x$ لذا خواهیم داشت: $|x| \geq a$. همچنین اگر $x \leq -a$ ، آنگاه $-x \geq a$ و چون $|-x| \geq -x$ لذا $|-x| \geq a$ خواهد بود و با توجه به اینکه $|-x| = |x|$ در این حالت خواهیم داشت $|x| \geq a$ و باز هم نامساوی برقرار است.

دو مثال فوق را می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد.

$$\boxed{\forall x , a \in \mathbf{R} \ (|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ یا } x \leq -a)}$$

این گزاره نیز در حل نامعادلات شامل قدر مطلق کاربرد فراوان دارد.

مثال ۴۴: حدود x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم

$$|۲x - ۳| < ۵$$

حل:

$$|۲x - ۳| < ۵ \Leftrightarrow -۵ < ۲x - ۳ < ۵ \Leftrightarrow -۲ < ۲x < ۸ \Leftrightarrow -۱ < x < ۴$$

$$x \in (-۱ , ۴)$$

مثال ۴۵: حدود x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $\left|\frac{x+۱}{۳} - ۲\right| \geq ۷$

حل:

$$\left|\frac{x+۱}{۳} - ۲\right| \geq ۷ \Leftrightarrow \frac{x+۱}{۳} - ۲ \geq ۷ \text{ یا } \frac{x+۱}{۳} - ۲ \leq -۷$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+۱}{۳} \geq ۹ \text{ یا } \frac{x+۱}{۳} \leq -۵ \Leftrightarrow x \geq ۲۶ \text{ یا } x \leq -۱۶$$

MATH75.IR

پس مجموعهٔ جواب بصورت زیر است:

$$A = \{x | x \in \mathbf{R},\ x \geq ۲۶ \text{ یا } x \leq -۱۶\} = (-\infty, -۱۶] \cup [۲۶, +\infty)$$

مثال ۴۶: مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ زیر را مشخص کنید.

$$|۲x - ۱| \leq |۳x - ۲|$$

حل: چون دو طرف نامساوی نامنفی‌اند، می‌توان طرفین را به توان ۲ رساند.

$$۴x^۲ - ۴x + ۱ \leq ۹x^۲ + ۴ - ۱۲x \Rightarrow ۰ \leq ۵x^۲ - ۸x + ۳$$

ریشه‌های معادلهٔ $۵x^۲ - ۸x + ۳ = ۰$ را می‌یابیم.

$$x = \frac{۸ \pm \sqrt{۶۴ - ۶۰}}{۱۰} = \frac{۸ \pm ۲}{۱۰} \Rightarrow x_۱ = \frac{۳}{۵},\ x_۲ = ۱$$

x	$-\infty$		$\frac{۳}{۵}$		۱		$+\infty$
$۵x^۲ - ۸x + ۳$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$A = \{x | x \in \mathbf{R};\ x \leq \frac{۳}{۵} \text{ یا } x \geq ۱\} = (-\infty, \frac{۳}{۵}] \cup [۱, +\infty)$$

مثال ۴۷: حدود x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$|x^۲ + x - ۱| \leq ۲x + ۱$$

حل: با توجه به اینکه $۲x + ۱$ از قدرمطلق یک عدد بیشتر است پس نامنفی است.

$$۲x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq \frac{-۱}{۲} \qquad (۱)$$

$$|x^۲ + x - ۱| \leq ۲x + ۱ \Rightarrow -۲x - ۱ \leq x^۲ + x - ۱ \leq ۲x + ۱$$

$$\begin{cases} x^۲ + x - ۱ \leq ۲x + ۱ \\ x^۲ + x - ۱ \geq -۲x - ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ - x - ۲ \leq ۰ \\ x^۲ + ۳x \geq ۰ \end{cases}$$

$$x^۲ - x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۸}}{۲} = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow x_۱ = -۱,\ x_۲ = ۲$$

$$x^۲ + ۳x = ۰ \Rightarrow x(x + ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = -۳$$

x	$-\infty$		-۳		-۱		۰		۲		$+\infty$
$x^۲ - x - ۲$		$+$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
$x^۲ + ۳x$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
نتیجه								جواب			

MATH75.IR

از جدول فوق حدود x بصورت $۰ \le x \le ۲$ (۲) بدست می‌آید.

$$(۱) , (۲) \Rightarrow A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ ۰ \le x \le ۲\} = [۰ , ۲]$$

مثال ۴۸: حدود x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $|۱ - x^۲| \ge ۳(x + ۱)$

حل:

$$۱ - x^۲ \ge ۳x + ۳ \quad \text{یا} \quad ۱ - x^۲ \le -۳x - ۳ \Rightarrow$$

$$x^۲ + ۳x + ۲ \le ۰ \quad \text{یا} \quad x^۲ - ۳x - ۴ \ge ۰$$

$$x^۲ + ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۹ - ۸}}{۲} = \frac{-۳ \pm ۱}{۲} \Rightarrow x_۱ = -۲ \ , \ x_۲ = -۱$$

$$x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ + ۱۶}}{۲} = \frac{۳ \pm ۵}{۲} \Rightarrow x'_۱ = -۱ \ , \ x''_۲ = ۴$$

x		−۲		−۱		۴	
$x^۲ + ۳x + ۲$	+	۰	−	۰	+		+
$x^۲ - ۳x - ۴$	+		+	۰	−	۰	+
نتیجه	جواب		جواب				جواب

دقت کنید که مجموعه جواب نامعادله اجتماع دو مجموعه جواب می‌باشد. (چرا؟) یعنی:

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , x \le -۱ \quad \text{یا} \quad x \ge ۴\} = (-\infty , -۱] \cup [۴ , +\infty)$$

مثال ۴۹: حدود m را چنان تعیین کنید که عبارت $x^۲ - ۴x + |m - ۱|$ همواره مثبت باشد.

حل: اولاً $a = ۱ > ۰$ است. پس باید کاری کنیم که $\Delta' < ۰$ باشد. برای این منظور:

$$\Delta' < ۰ \Leftrightarrow ۴ - ۱|m - ۱| < ۰ \Leftrightarrow |m - ۱| > ۴ \Leftrightarrow m - ۱ > ۴ \quad \text{یا} \quad m - ۱ < -۴$$

$$\Leftrightarrow m > ۵ \quad \text{یا} \quad m < -۳$$

برای اینکه در ادامه می‌خواهیم فرم‌های دیگری از نامعادلات و معادلات قدرمطلق‌دار را بررسی کنیم، لازم است تا حدودی با نمودارهای ساده قدرمطلق آشنا شویم. بهتر است روش رسم و نکاتی که پیرامون هر رسم می‌آید را به خوبی فرابگیرید.

مثال ۵۰: نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x|$

ب) $y = |x - ۱|$

ج) $y = |x + ۲|$

د) $y = |x| + ۱$

هـ) $y = |x + ۲| - ۱$

و) $y = |۲x + ۳| + ۱$

MATH75.IR

ح) $y = |x + ۱| + |x - ۲|$

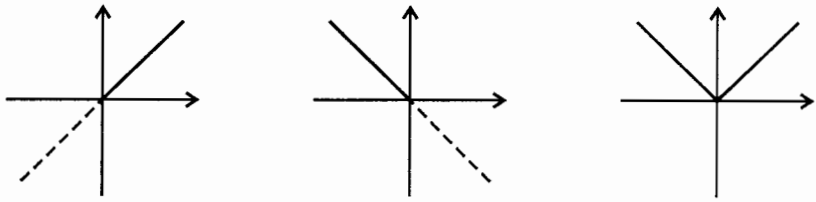
ی) $y = |x - ۳| - |x - ۲|$

ز) $y = |-۲x + ۳| + ۱$

ط) $y = |x - ۱| - |x - ۳|$

حل: الف ـ

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x \geq ۰ \\ -x & \text{اگر } x < ۰ \end{cases}$$



$y = x \quad (x \geqslant ۰)$ $\qquad$ $y = -x \quad (x < ۰)$ $\qquad$ $y = |x|$

با اطلاعاتی که از رسم خطوط داریم $y = |x|$ اجتماع دو نیم خط بصورت بالا می‌باشد.

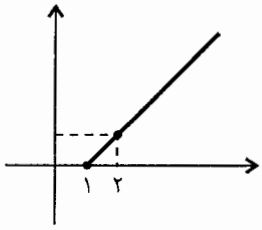
ب ـ

$$y = |x - ۱| = \begin{cases} x - ۱ & \text{اگر } x - ۱ \geq ۰ \\ -x + ۱ & \text{اگر } x - ۱ < ۰ \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x - ۱ & \text{اگر } x \geq ۱ \\ -x + ۱ & \text{اگر } x < ۱ \end{cases}$$

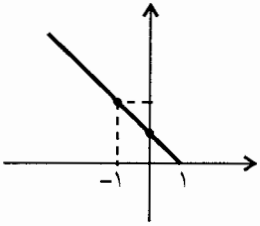
$y = x - ۱ \qquad (x \geq ۱)$

$A(۱ , ۰) \qquad B(۲ , ۱)$



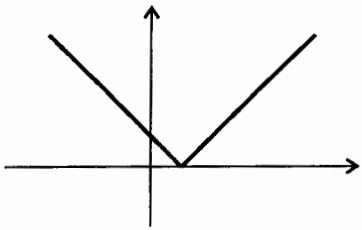
$y = -x + ۱ \qquad (x < ۱)$

$C(۰ , ۱) \qquad D(-۱ , ۲)$



MATH75.IR

$y = |x - ۱|$



این نمودار همان نمودار $y = |x|$ است که یک واحد به سمت راست منتقل شده. رأس زاویه‌ای که تشکیل شده $A(۱ , ۰)$ است.

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ , \quad y = ۰$

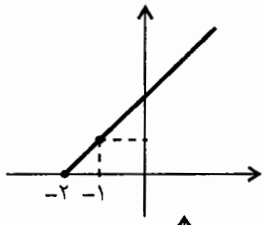
ج -

$$y = |x + ۲| = \begin{cases} x + ۲ & \text{اگر } x + ۲ \geq ۰ \\ -x - ۲ & \text{اگر } x + ۲ < ۰ \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x + ۲ & \text{اگر } x \geq -۲ \\ -x - ۲ & \text{اگر } x < -۲ \end{cases}$$

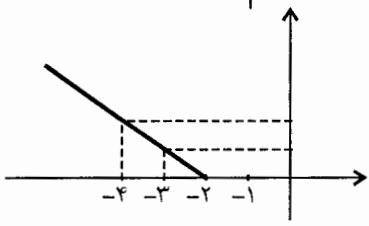
$y = x + ۲ \qquad (x \geq -۲)$

$A(-۲ , ۰) \qquad B(-۱ , ۱)$

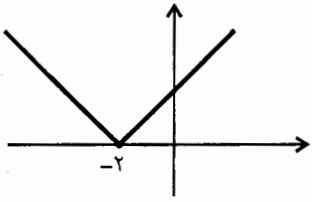


$y = -x - ۲ \qquad (x < -۲)$

$C(-۳ , ۱) \qquad D(-۴ , ۲)$



$y = |x + ۲|$



MATH75.IR

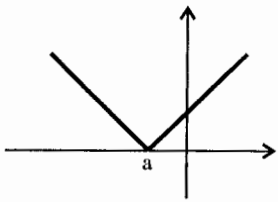
این نمودار نیز همان نمودار $y = |x|$ است که دو واحد به سمت چپ منتقل شده. رأس زاویه‌ای که تشکیل شده $A(-۲ , ۰)$ است.

$x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \quad , \quad y = ۰$

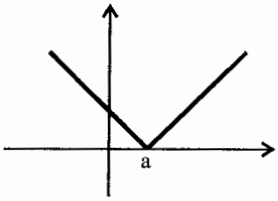
نکته: برای رسم $y = |x - a|$ ، کافیست قرار دهیم:

$x - a = ۰ \Rightarrow x = a$

رأس زاویه $A(a , ۰)$ خواهد بود. اگر $a > ۰$ باشد زاویه در سمت راست محور yها و اگر $a < ۰$ باشد زاویه در سمت چپ محور yها تشکیل می‌گردد.



$y = |x - a| \quad , \quad a < ۰$

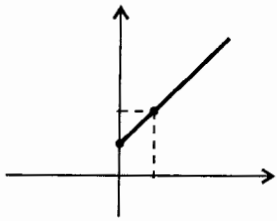


$y = |x - a| \quad , \quad a > ۰$

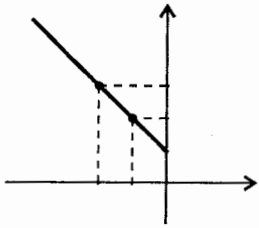
د ـ

$$y = |x| + ۱ = \begin{cases} x + ۱ & \text{اگر } x \geq ۰ \\ -x + ۱ & \text{اگر } x < ۰ \end{cases}$$

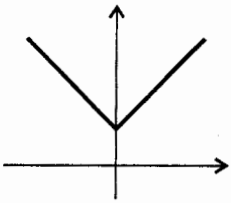
$y = x + ۱ \quad (x \geq ۰) \quad A(۰ , ۱) \quad B(۱ , ۲)$



$y = -x + ۱ \quad (x < ۰) \quad C(-۱ , ۲) \quad D(-۲ , ۳)$



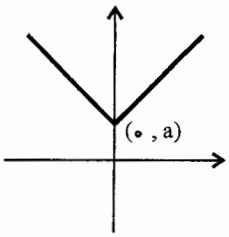
$y = |x| + ۱$



MATH75.IR

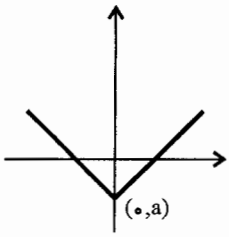
این همان نمودار $y = |x|$ است که یک واحد به بالا منتقل شده است.

نکته: برای رسم نمودار با معادلهٔ $y = |x| + a$ کافیست نمودار $y = |x|$ را به اندازهٔ a واحد به سمت بالا (اگر a مثبت باشد) و یا a واحد به سمت پایین (اگر a منفی است) منتقل کنیم.



$y = |x| + a$

$(a > ۰)$



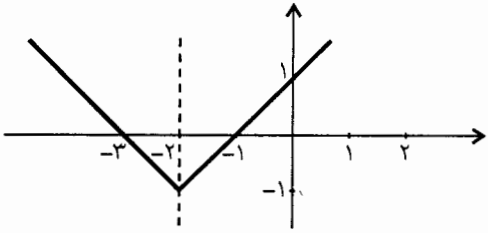
$y = |x| + a$

$(a < ۰)$

هـ-

$$y = |x+۲| - ۱ = \begin{cases} x + ۲ - ۱ & x + ۲ \geq ۰ \\ -x - ۲ - ۱ & x + ۲ < ۰ \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x + ۱ & x \geq -۲ \\ -x - ۳ & x < -۲ \end{cases}$$



برای رسم نمودار $y = |x + ۲| - ۱$ می‌توان ابتدا نمودار $y = |x|$ را رسم کرد و آنرا دو واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین انتقال داد.

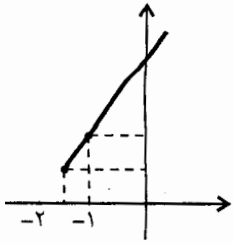
و-

$$y = |۲x + ۳| + ۱ = \begin{cases} ۲x + ۳ + ۱ & \text{اگر } ۲x + ۳ \geq ۰ \\ -۲x - ۳ + ۱ & \text{اگر } ۲x + ۳ < ۰ \end{cases}$$

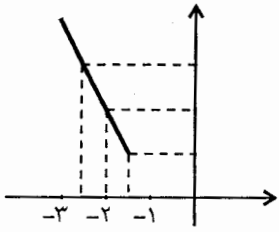
$$y = \begin{cases} ۲x + ۴ & \text{اگر } x \geq -\frac{۳}{۲} \\ -۲x - ۲ & \text{اگر } x < -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

MATH75.IR

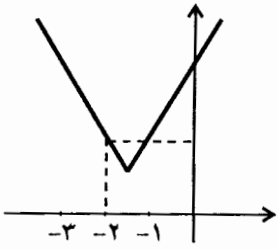
$y = ۲x + ۴ \quad (x \geq -\frac{۳}{۲}) \quad A(-\frac{۳}{۲}, ۱) \quad B(-۱, ۲)$



$y = -۲x - ۲ \quad (x < -\frac{۳}{۲}) \quad C(-۲, ۲) \quad D(-\frac{۵}{۲}, ۳)$



$y = |۲x + ۳| + ۱$

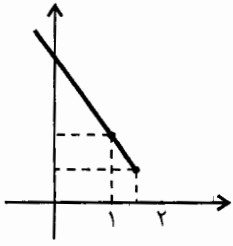


ز-

$$y = |-۲x+۳| + ۱ = \begin{cases} -۲x + ۳ + ۱ & \text{اگر } -۲x + ۳ \geq ۰ \\ ۲x - ۳ + ۱ & \text{اگر } -۲x + ۳ < ۰ \end{cases}$$

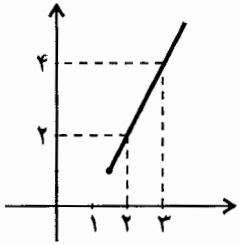
$$y = \begin{cases} -۲x + ۴ & \text{اگر } x \leq \frac{۳}{۲} \\ ۲x - ۲ & \text{اگر } x > \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$y = -۲x + ۴ \quad (x \leq \frac{۳}{۲}) \quad A(\frac{۳}{۲}, ۱) \quad B(۱, ۲)$

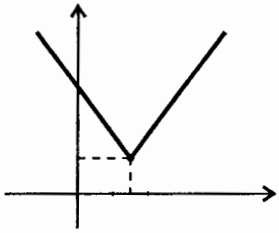


MATH75.IR

$y = ۲x - ۲ \qquad (x > \frac{۳}{۲}) \quad C(۲ , ۲) \quad D(۳ , ۴)$



$y = |-۲x + ۳| + ۱$



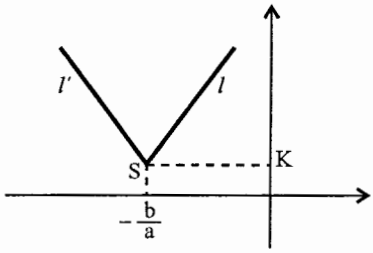
نکته: ۱ـ برای رسم نمودار با معادلهٔ $y = |ax + b| + k$ که در آن $b > ۰$ و $k > ۰$ و $a > ۰$ می‌باشد ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ نیم خط l که به ازاء $x \geq -\frac{b}{a}$ بدست می‌آید عبارتست از:

$l : y = ax + (b + k)$

و معادلهٔ نیم خط l' که به ازاء $x < -\frac{b}{a}$ بدست می‌آید عبارتست از:

$l' : y = -ax + (k - b)$

و نقطه $S(-\frac{b}{a} , k)$ مینیمم نمودار و خط $x = -\frac{b}{a}$ محور تقارن نمودار است.



۲ـ برای رسم نمودار با معادلهٔ $y = |ax + b| + k$ که در آن $b > ۰$ و $k > ۰$ و $a < ۰$ می‌باشد ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ نیم خط l که به ازاء $x \geq -\frac{b}{a}$ بدست می‌آید عبارتست از:

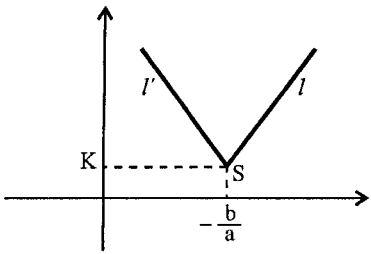
$l : y = ax + (b + k)$

و معادلهٔ نیم خط l' که به‌ازاء $x < -\frac{b}{a}$ بدست می‌آید عبارتست از:

$l' : y = -ax + (k - b)$

و نقطهٔ $S(-\frac{b}{a} , k)$ مینیمم نمودار و خط $x = -\frac{b}{a}$ محور تقارن نمودار است.

MATH75.IR



شباهت‌ها و تفاوت‌های این دو در چیست؟ اگر $a = ۱$ باشد در هر دو مورد وضعیت l و l' چگونه می‌شوند؟ اگر $k < ۰$ باشد نمودارها به چه صورت در می‌آیند؟

نمودارهای معادلات $y = -|۲x + ۳| + ۱$ و $y = -|-۲x + ۳| + ۱$ را رسم کنید و نکاتی مانند آنچه در بالا آمد برای آن استخراج کنید.

ح -

$y = |x + ۱| + |x - ۲|$

$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
$x + ۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x - ۲$		$-$		$-$	۰	$+$	

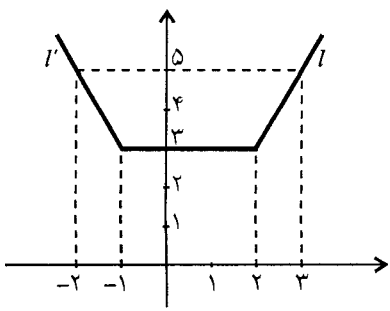
۱) $x < -۱ \Rightarrow x + ۱ < ۰ \ , x - ۲ < ۰ \Rightarrow y = -x - ۱ + (-x + ۲) = -۲x + ۱$

$A(-۱ , ۳) \quad B(-۲ , ۵)$

۲) $-۱ \le x < ۲ \Rightarrow x + ۱ \ge ۰ \ , \ x - ۲ < ۰ \Rightarrow y = x + ۱ + (-x + ۲) = ۳$

۳) $x \ge ۲ \Rightarrow x + ۱ > ۰ \ , \ x - ۲ \ge ۰ \Rightarrow y = x + ۱ + x - ۲ = ۲x - ۱$

$C(۲ , ۳) \quad D(۳ , ۵)$



MATH75.IR

نکته: در این مثال ملاحظه می‌گردد:

۱ـ اعداد ۱ − و ۲ (ریشه‌ها عبارات داخل قدرمطلق) محور xها را به سه قسمت تقسیم کرده‌اند.

$x > ۲ \ , \ -۱ \leq x \leq ۲ \ , \ x < -۱$

۲ـ مقدار y به ازاء $-۱ \leq x \leq ۲$ عددی ثابت و برابر $۲ - (-۱) = ۳$ است.

۳ـ عدد ۳ مینیمم مقدار y است. یعنی:

$\forall x \ , \ y = |x + ۱| + |x - ۲| \geq ۳$

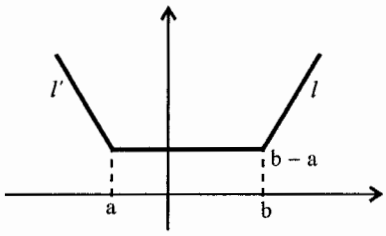
۴ـ معادله نیم خط l که به ازاء $x > ۲$ بدست آمده عبارتست از:

$l : y = ۲x - ۱$

۵ـ معادلهٔ نیم خط l' که به ازاء $x < -۱$ بدست آمده عبارتست از:

$l' : y = ۲x + ۱$

بطورکلی در مورد نمودار معادلهٔ $y = |x - a| + |x - b|$ با فرض $a < b$ نمودار چنین است.



و نکات زیر در اینجا برقرارند.

۱ـ اعداد a و b (ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلق) محور xها را به سه قسمت تقسیم کرده‌اند.

۲ـ مقدار y به ازاء xهای بین a و b عددی ثابت و برابر $b - a$ است.

۳ـ عدد $b - a$ مینیمم مقدار y است. یعنی:

$\forall x \quad y = |x - a| + |x - b| \geq b - a$

۴ـ معادلهٔ نیم خط l که به ازاء $x \geq b$ بدست آمده عبارتست از:

$l : y = ۲x - (a + b)$

۵ـ معادلهٔ نیم خط l' که به ازاء $x \leq a$ بدست آمده عبارتست از:

$l' : y = -۲x + (a + b)$

MATH75.IR

ط -

$y = |x - ۱| - |x - ۳|$

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

$x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$

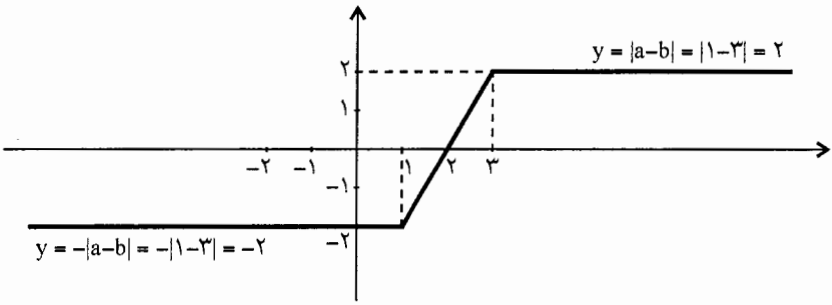
x	$-\infty$		۱		۳		$+\infty$
$x - ۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x - ۳$		$-$		$-$	۰	$+$	

۱) $x < ۱ \Rightarrow x - ۱ < ۰ \ , x - ۳ < ۰ \Rightarrow y = -x + ۱ + x - ۳ = -۲$

۲) $۱ \le x < ۳ \Rightarrow x - ۱ \ge ۰ \ , x - ۳ < ۰ \Rightarrow y = x - ۱ + x - ۳ = ۲x - ۴$

$A(۱ , -۲) \quad B(۳ , ۲)$

۳) $x \ge ۳ \Rightarrow x - ۱ > ۰ \ , \ x - ۳ \ge ۰ \Rightarrow y = x - ۱ - (x - ۳) = ۲$



با توجه به نمودار بالا داریم:

۱) به ازاء $x < ۱$ و $x > ۳$ (مقادیر ریشه‌های داخل قدرمطلق) y مینیممی برابر -۲ و ماکزیممی برابر ۲ دارد. یعنی y بین دو عدد -۲ و ۲ محصور است.

$-|۱ - ۳| \le y \le |۱ - ۳| \Leftrightarrow -۲ \le y \le ۲$

۲) به ازاء $۱ < x < ۳$ (مقادیر بین ریشه‌ها) یک پاره خط به معادلهٔ $y = ۲x - ۴$ بدست می‌آید.

ی -

$y = |x - ۳| - |x - ۲|$

ابتدا عبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
$x - ۳$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x - ۲$		$-$	۰	$+$		$+$	

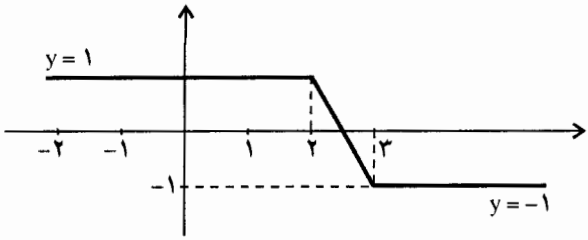
MATH75.IR

۱) $x < ۲ \Rightarrow x - ۳ < ۰ \ , \ x - ۲ < ۰ \Rightarrow y = -x + ۳ + x - ۲ = ۱$

۲) $۲ \le x < ۳ \Rightarrow x - ۳ < ۰ \ , \ x - ۲ \ge ۰ \Rightarrow y = -(x - ۳) - (x - ۲) = -۲x + ۵$

$A(۲ , ۱) \qquad B(۳ , -۱)$

۳) $x \ge ۳ \Rightarrow x - ۳ \ge ۰ \ , \ x - ۲ > ۰ \Rightarrow y = x - ۳ - (x - ۲) = -۱$



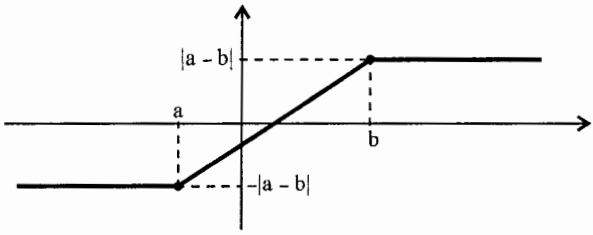
با دقت در نموار ملاحظه می‌گردد که:

۱) به ازاء $x \le ۲$ و $x \ge ۳$ (مقادیر ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلق) y ماکزیممی برابر ۱ و مینیممی برابر ۱− دارد. یعنی بین دو عدد ۳− و ۳ محصور است.

$-|۲ - ۳| \le y \le |۲ - ۳| \Leftrightarrow -۱ \le y \le ۱$

۲) به ازاء $۲ < x < ۳$ (مقادیر بین ریشه‌ها) یک پاره خط به معادلهٔ $y = -۲x + ۵$ بدست می‌آید.

نکته: نمودار معادلهٔ $y = |x - a| - |x - b|$ با شرط $a < b$ چنین است.



که در آن:

۱) به ازاء $x < a$ نیم خط $l : y = -|a - b|$ بدست می‌آید.

۲) به ازاء $a \le x \le b$ پاره خط به معادلهٔ $y = ۲x - (a + b)$ بدست می‌آید.

۳) به ازاء $x > b$ نیم خط $l' : y = |a - b|$ بدست می‌آید.

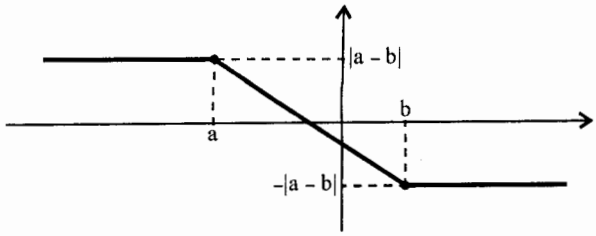
۴) y بین دو عدد محصور است.

$-|a - b| \le y \le |a - b|$

MATH75.IR

نکته:

نمودار معادلهٔ $y = |x - b| - |x - a|$ با شرط $a < b$ چنین است.



که در آن:

۱) به ازاء $x < a$ نیم خط $l : y = |a - b|$ بدست می‌آید.

۲) به ازاء $a \le x \le b$ پاره خط به معادلهٔ $y = -۲x + (a + b)$ بدست می‌آید.

۳) به ازاء $x > b$ نیم خط $l' : y = -|a - b|$ بدست می‌آید.

۴) y بین دو عدد محصور است. $-|a - b| \le y \le |a - b|$

مثال ۵۱: با استفاده از نکات بدست آمده در بالا نمودار هر یک از معادله‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = |x - ۳|$

ب) $y = -|x + ۴|$

ج) $y = |x| - ۲$

د) $y = -|x| + ۳$

ه) $y = |۳x + ۱| + ۲$

و) $y = |-۳x + ۱| + ۲$

ز) $y = -|۳x - ۱| + ۲$

ح) $y = |۳x - ۱| - ۲$

ط) $y = |-۳x + ۱| - ۲$

ی) $y = |x - ۲| + |x - ۳|$

ک) $y = |x - ۱| + |x + ۱|$

ل) $y = |x - ۵| - |x - ۷|$

م) $y = |x - ۳| - |x - ۱|$

حل: به عهدهٔ دانش‌آموز

مثال ۵۲: نمودار معادلهٔ $y = |x + ۱| - |۲x| + |x - ۲|$ را رسم کنید.

حل: ابتدا ریشه عبارات داخل قدر مطلق‌ها را می‌یابیم.

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \quad , \quad ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \quad , \quad x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم.

MATH75.IR

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		$+\infty$
$x+۱$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$۲x$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x-۲$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	

با توجه به جدول فوق حالات زیر اتفاق می‌افتد.

۱) $x < -۱$

$$y = -(x+۱) + ۲x - (x-۲) = ۱$$

۲) $-۱ \le x < ۰$

$$y = x + ۱ + ۲x - (x-۲) = ۲x + ۳$$

$A(-۱ , ۱)$ $\qquad$ $B(۰ , ۳)$

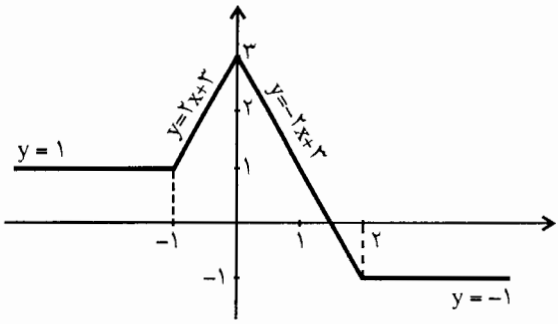
۳) $۰ \le x < ۲$

$$y = x + ۱ - ۲x - (x-۲) = -۲x + ۳$$

$(۰ , ۳)$ $\qquad$ $(۲ , -۱)$

۴) $x \ge ۲$

$$y = x + ۱ - ۲x + x - ۲ = -۱$$



نکته: برای رسم نمودارهایی که معادلهٔ آنها بصورت حاصل جمع (یا تفریق) چند عبارت قدرمطلق است کافیست دقت کنیم که این نمودارها (اگر عبارات داخل قدرمطلق درجه اول باشند) نهایتاً یک نمودار خط شکسته خواهند بود که لازم است مراحل زیر را برای رسم سریع آنها دنبال کنیم.

الف ـ ابتدا ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلق‌ها را بیابیم و مقدار y را به ازاء هر یک از این

MATH75.IR

ریشه‌ها بدست آوریم و نقاط بدست آمده را در دستگاه مختصات مشخص کنیم.

ب ـ مقدار y را به ازاء xای کوچکتر از کوچکترین ریشهٔ قدر مطلق‌ها بیابیم.

ج ـ مقدار y را به ازاء xای بزرگتر از بزرگترین ریشه قدرمطلق‌ها بیابیم.

د ـ نقاط بدست آمده در مراحل (ب) و (ج) را نیز در دستگاه مشخص کنیم.

هـ ـ نقاط بدست آمده را به طور متوالی از چپ به راست به هم وصل کنیم که نمودار حاصل نمودار معادله داده شده می‌باشد. اگر a کوچکترین ریشه و b بزرگترین ریشه باشد نمودار معادله به ازای $x \le a$ و $x \ge b$ نیم خط و در سایر فواصل پاره خط است.

مثال ۵۳: از روش سریع نمودار معادلهٔ $y = |x + ۲| - |x + ۱| + |x - ۲| - |x + ۳|$ را رسم کنید.

حل:

$x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow y = |-۲ + ۲| - |-۲ + ۱| + |-۲ - ۲| - |-۲ + ۳| = ۲$

$A(-۲ , ۲)$

$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow y = |-۱ + ۲| - |-۱ + ۱| + |-۱ - ۲| - |-۱ + ۳| = ۲$

$B(-۱ , ۲)$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow y = |۲ + ۲| - |۲ + ۱| + |۲ - ۲| - |۲ + ۳| = -۴$

$C(۲ , -۴)$

$x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -۳ \Rightarrow y = |-۳ + ۲| - |-۳ + ۱| + |-۳ - ۲| - |-۳ + ۳| = ۴$

$D(-۳ , ۴)$

کوچکترین مقدار ریشه‌ها ۳- و بزرگترین مقدار ریشه‌ها ۲ است. با اختیار $x = -۴$ و $x = ۳$ داریم:

$x = -۴ \Rightarrow y = |-۴ + ۲| - |-۴ + ۱| + |-۴ - ۲| - |-۴ + ۳| = ۴$

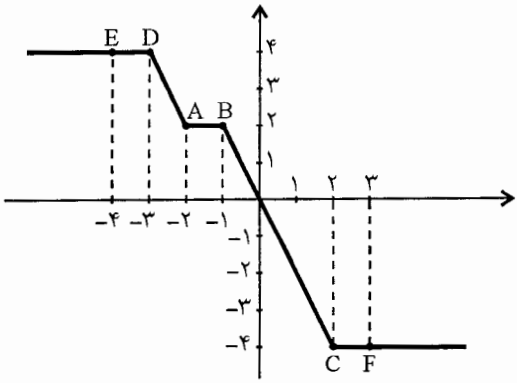
$E(-۴ , ۴)$

$x = ۳ \Rightarrow y = |۳ + ۲| - |۳ + ۱| + |۳ - ۲| - |۳ + ۳| = -۴$

$F(۳ , -۴)$

اینک نقاط را در دستگاه محورهای مختصات مشخص کرده و با ترتیبی که گفته شد آنها را به هم وصل می‌کنیم.

MATH75.IR

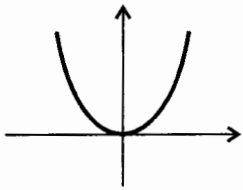


مثال ۵۴: نمودار معادلهٔ $y = x|x|$ را رسم کنید.

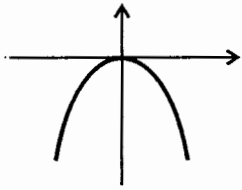
حل:

$$y = x|x| = \begin{cases} x \times x & \text{اگر } x \geq 0 \\ x \times (-x) & \text{اگر } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 & \text{اگر } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

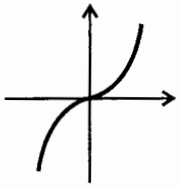
پس باید از نمودار $y = x^2$ آن قسمتی که $x \geq 0$ است انتخاب کنیم و از نمودار $y = -x^2$ آن قسمتی که $x < 0$ است انتخاب شود.



$y = x^2$



$y = -x^2$



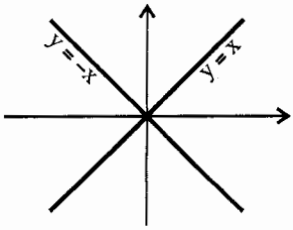
$y = x|x|$

مثال ۵۵: نمودار معادلهٔ $|y| = |x|$ را رسم کنید.

حل:

$$|y| = |x| \Rightarrow y = \pm x$$

نمودار معادلهٔ $|y| = |x|$ متشکل از نمودار دو خط $y = x$ و $y = -x$ است.



MATH75.IR

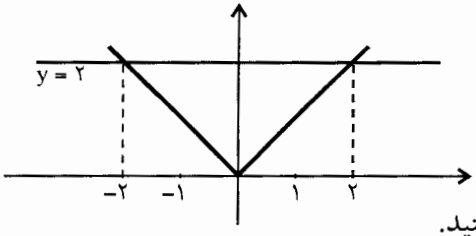
معادلات شامل قدرمطلق و تعبیر هندسی ریشه‌های آن

مثال ۵۶: معادلهٔ $|x| = ۲$ را حل کنید.

$$|x| = ۲ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ -x = ۲ \Rightarrow x = -۲ \end{cases}$$

ریشه‌های معادله ۲− و ۲ می‌باشند.

ریشه‌های معادله $|x| = ۲$ در واقع طول نقاط برخورد نمودارهای $y = |x|$ و $y = ۲$ می‌باشد.



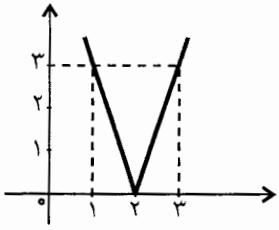
مثال ۵۷: معادلهٔ $|۳x - ۶| = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$|۳x - ۶| = ۰ \Rightarrow ۳x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

ریشه‌های معادلهٔ $|۳x - ۶| = ۰$ در واقع طول نقاط برخورد نمودار $y = |۳x - ۶|$ و خط $y = ۰$ (محور طول) می‌باشند.

x	۱	۲	۳
$y=\|۳x - ۶\|$	۳	۰	۳



مثال ۵۸: معادلهٔ $|۲x - ۱| = ۳$ را حل کنید.

حل:

$$۲x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

$$x < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x - ۱ < ۰ \Rightarrow |۲x - ۱| = -۲x + ۱$$

$$-۲x + ۱ = ۳ \Rightarrow x = -۱$$

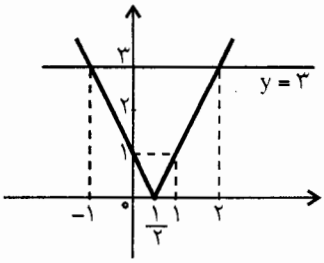
$$x \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow |۲x - ۱| = ۲x - ۱$$

MATH75.IR

$۲x - ۱ = ۳ \Rightarrow x = ۲$

ریشه‌های معادلهٔ $|۲x - ۱| = ۳$ طول نقاط برخورد نمودار $y = |۲x - ۱|$ و خط $y = ۳$ می‌باشد.

x	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱
$y=\|۲x - ۱\|$	۱	۰	۱



مثال ۵۹: معادلهٔ $|x - ۱| + |x + ۱| = ۳$ را حل کنید.

حل:

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x - ۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x + ۱$		$-$	۰	$+$		$+$	

$x < -۱ \Rightarrow -x + ۱ - x - ۱ = ۳ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$

با توجه به اینکه $\frac{-۳}{۲} < -۱$ جواب فوق قابل قبول است.

$-۱ \le x < ۱ \Rightarrow -x + ۱ + x + ۱ = ۳ \Rightarrow ۲ = ۳$ غیرممکن

$۱ \le x \Rightarrow x - ۱ + x + ۱ = ۳ \Rightarrow ۲x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲}$

با توجه به اینکه $۱ \le \frac{۳}{۲}$ جواب فوق قابل قبول است.

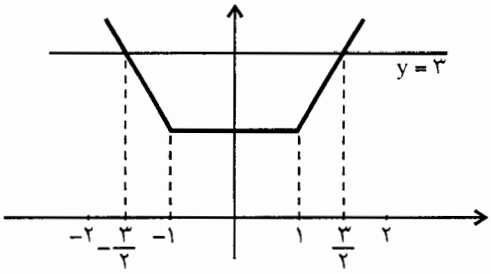
ریشه‌های معادله $|x - ۱| + |x + ۱| = ۳$ در واقع طول نقاط برخورد نمودار $y = |x - ۱| + |x + ۱|$ و خط $y = ۳$ می‌باشد.

$y = |x - ۱| + |x + ۱|$

$x < -۱ \Rightarrow y = -۲x$

$-۱ \le x < ۱ \Rightarrow y = ۲$

$۱ \le x \Rightarrow y = ۲x$



MATH75.IR

ملاحظه می‌شود که نمودار رابطهٔ $y = |x - ۱| + |x + ۱|$ و خط $y = ۳$ در نقاط $(\frac{-۳}{۲} , ۳)$ و $(\frac{۳}{۲} , ۳)$ متقاطع هستند که $-\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ جوابهای معادله $|x - ۱| + |x + ۱| = ۳$ می‌باشند.

مثال ۶۰: معادلهٔ $|x - ۱| - |x - ۲| = ۱$ را حل کنید.

حل:

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$x - ۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x - ۲$		$-$		$-$	۰	$+$	

$x < ۱ \Rightarrow -x + ۱ + x - ۲ = ۱ \Rightarrow -۱ = ۱$ غیرممکن

$۱ \le x < ۲ \Rightarrow x - ۱ + x - ۲ = ۱ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$ غ ق ق

$۲ \le x \Rightarrow x - ۱ - x + ۲ = ۱ \Rightarrow ۱ = ۱$

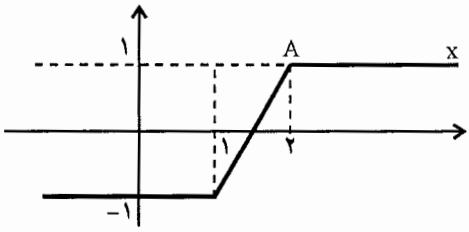
معادله بیشمار جواب دارد که باید در شرط $۲ \le x$ صدق کنند. بنابراین مجموعهٔ جواب معادله فوق $[۲ , +\infty[$ است.

جوابهای معادلهٔ $|x - ۱| - |x - ۲| = ۱$ طول نقاط برخورد نمودار رابطهٔ $y = |x - ۱| - |x - ۲|$ و خط $y = ۱$ می‌باشند.

$x < ۱ \Rightarrow y = -۱$

$۱ \le x < ۲ \Rightarrow y = ۲x - ۳$

$۲ \le x \Rightarrow y = ۱$



همانطور که ملاحظه می‌شود نقاط تلاقی خط $y = ۱$ و نمودار $y = |x - ۱| - |x - ۲|$ کلیهٔ نقاط واقع بر نیمخط Ax می‌باشند که طول این نقاط یعنی اعضای مجموعهٔ $[۲ , +\infty[$ جوابهای معادله‌اند.

مثال ۶۱: معادلهٔ $|۵x - ۲| = |۳x + ۲|$ را حل کنید.

حل: از این نکته استفاده می‌کنیم که اگر قدر مطلق دو عدد برابر باشند آنگاه آن دو عدد خودشان یا برابرند یا قرینه. لذا داریم:

MATH75.IR

$۵x - ۲ = ۳x + ۲$ یا $۵x - ۲ = -(۳x + ۲) \Rightarrow$

$۲x = ۴$ یا $۸x = ۰ \Rightarrow x = ۲$ یا $x = ۰$

$A = \{۰ , ۲\}$

(رسم نمودار به عهدهٔ خواننده)

مثال ۶۲: معادلهٔ $\left| |x| - ۷ \right| = ۵$ را حل کنید.

حل: عبارت داخل قدر مطلق یا ۵ است یا ۵− (چرا؟)

$|x| - ۷ = ۵$ یا $|x| - ۷ = -۵ \Rightarrow |x| = ۱۲$ یا $|x| = ۲$

$\Rightarrow x = \pm ۱۲$ یا $x = \pm ۲$

پس، مجموعه جواب این معادله عبارتست از:

$A = \{-۱۲ , -۲ , ۲ , ۱۲\}$

(رسم نمودار به عهدهٔ خواننده)

مثال ۶۳: معادلهٔ $x|x| = -۱۶$ را حل کنید.

حل: x باید منفی باشد (چرا؟) در این حالت $|x| = -x$ است و داریم:

$x \times (-x) = -۱۶ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = \pm ۴$

که با توجه به منفی بودن x، جواب $x = ۴$ قابل قبول نیست. یعنی:

$A = \{-۴\}$

(رسم نمودار به عهدهٔ خواننده)

مثال ۶۴: معادلهٔ $|x - ۲| + |x - ۱| + |x + ۱| + |x + ۲| = ۱۲$ را حل کنید.

حل:

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$ $\qquad$ $x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$ $\qquad$ $x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

اما این چهار مقدار محور اعداد حقیقی را به ۵ بخش تقسیم می‌کنند که هر حالت را جداگانه بررسی کرده و اگر جوابی در آن قسمت موجود باشد استخراج می‌کنیم.

۱) $x < -۲ \Rightarrow -(x - ۲) - (x - ۱) - (x + ۱) - (x + ۲) = ۱۲ \Rightarrow x = -۳$

این جواب قابل قبول است. (زیرا $-۳ < -۲$) $A_۱ = \{-۳\}$

۲) $-۲ \le x < -۱ \Rightarrow -(x - ۲) - (x - ۱) - (x + ۱) + x + ۲ = ۱۲ \Rightarrow x = -۴$

که این جواب قابل قبول نیست. (زیرا $-۴ < -۲$)

MATH75.IR

$A_۲ = \phi$

۳) $-۱ \leq x < ۱ \Rightarrow -(x-۲) - (x-۱) + (x+۱) + (x+۲) = ۱۲ \Rightarrow ۶ = ۱۲$

که امکان ندارد. $A_۳ = \phi$

۴) $۱ \leq x < ۲ \Rightarrow -(x-۲) + x - ۱ + x + ۱ + x + ۲ = ۱۲ \Rightarrow x = ۴$

غیرقابل قبول است. $A_۴ = \phi$

۵) $x \geq ۲ \Rightarrow x - ۲ + x - ۱ + x + ۱ + x + ۲ = ۱۲ \Rightarrow x = ۳$

قابل قبول است. $A_۵ = \{۳\}$

پس مجموعه جواب این معادله عبارتست از $A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴ \cup A_۵ = \{-۳ , ۳\}$

(رسم نمودار به عهدهٔ خواننده)

مثال ۶۵: معادلهٔ $x^۲ + ۲|x| - ۳ = ۰$ را حل کنید.

حل: *روش اول:* می‌دانیم $|x|^۲ = x^۲$ با اختیار $y = |x|$ داریم:

$$y^۲ + ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow y = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۲}}{۲} = \frac{-۲ \pm ۴}{۲} \Rightarrow y = -۳ \text{ یا } y = ۱$$

$y = -۳$ قابل قبول نیست. (چرا؟) ولی اگر $y = ۱$ باشد داریم: $|x| = ۱$ که از آنجا $x = \pm ۱$.

یعنی مجموعهٔ جواب معادله عبارتست از: $A = \{-۱ , ۱\}$

روش دوم: دو حالت در نظر می‌گیریم.

اگر $x \geq ۰$:

$$x^۲ + ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۲}}{۲} = \frac{-۲ \pm ۴}{۲} \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } x = -۳$$

که با توجه به $x \geq ۰$، مقدار $x = ۱$ قابل قبول است.

اگر $x < ۰$:

$$x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲ \pm \sqrt{۴ + ۱۲}}{۲} = \frac{۲ \pm ۴}{۲} \Rightarrow x = ۳ \text{ یا } x = -۱$$

که با توجه به $x < ۰$، مقدار $x = -۱$ قابل قبول است.

بنابراین مجموعه جواب این معادله عبارتست از: $A = \{-۱ , ۱\}$. (رسم نمودار به عهدهٔ خواننده)

مثال ۶۶: معادلهٔ $(۲|x| - ۳)(|x - ۲| - ۵) = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$۲|x| - ۳ = ۰ \text{ یا } |x - ۲| - ۵ = ۰ \Rightarrow |x| = \frac{۳}{۲} \text{ یا } |x - ۲| = ۵$$

MATH75.IR

$\Rightarrow x = \pm\frac{۳}{۲}$ یا $x - ۲ = \pm ۵ \Rightarrow x = \pm\frac{۳}{۲}$ یا $x = ۷$ یا $x = -۳$

لذا مجموعه جواب این معادله عبارتست از:

$$A = \{-۳ , \frac{-۳}{۲} , \frac{۳}{۲} , ۷\}$$

(رسم نمودار به عهدهٔ خواننده)

مثال ۶۷: معادلهٔ $||x - ۲| - ۱۳| = ۵$ را حل کنید.

حل: با برداشتن قدرمطلق خواهیم داشت:

$$|x - ۲| - ۱۳ = \pm ۵$$

که اینک باید دو معادلهٔ $|x - ۲| - ۱۳ = ۵$ و $|x - ۲| - ۱۳ = -۵$ حل شوند.

$|x - ۲| - ۱۳ = ۵ \Rightarrow |x - ۲| = ۱۸ \Rightarrow x - ۲ = \pm ۱۸ \Rightarrow x = ۲۰$ یا $x = -۱۶$

$|x - ۲| - ۱۳ = -۵ \Rightarrow |x - ۲| = ۸ \Rightarrow x - ۲ = \pm ۸ \Rightarrow x = ۱۰$ یا $x = -۶$

(رسم نمودار بر عهدهٔ خواننده) $A = \{-۱۶ , -۶ , ۱۰ , ۲۰\}$

MATH75.IR

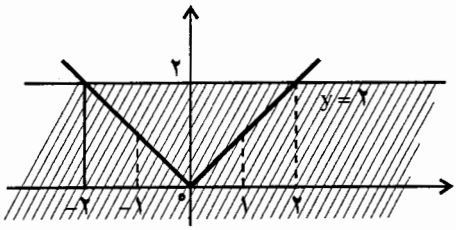
نامعادلات قدرمطلق و تعبیر هندسی ریشه‌های آن

مثال ۶۸: نامعادلهٔ $|x| < ۲$ را حل کنید.

حل:

$$|x| < ۲ \Rightarrow -۲ < x < ۲$$

برای تعبیر هندسی جوابهای نامعادله $|x| < ۲$ باید توجه داشته باشیم که جوابهای نامعادله xهایی هستند که به ازای آنها دستگاه $\begin{cases} y = |x| \\ y < ۲ \end{cases}$ برقرار باشد نمودار $y = |x|$ و $y < ۲$ را رسم می‌کنیم.



همانطور که ملاحظه می‌شود اگر $-۲ < x < ۲$ باشد عبارت $y = |x|$ کوچکتر از ۲ است.
بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادله برابر است با:

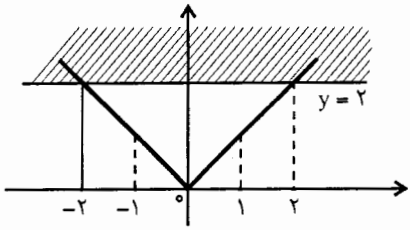
$$A = \{x | x \in R , -۲ < x < ۲\} = (-۲ , ۲)$$

مثال ۶۹: نامعادلهٔ $|x| > ۲$ را حل کنید.

حل:

$$|x| > ۲ \Rightarrow x < -۲ \text{ یا } x > -۲$$

برای تعبیر هندسی جوابهای نامعادله نمودار $y = |x|$ و $y > ۲$ را رسم می‌کنیم.



همانطور که از نمودار بر می‌آید اگر $x > ۲$ یا $x < -۲$ باشد $y = |x|$ بزرگتر از ۲ می‌شود.

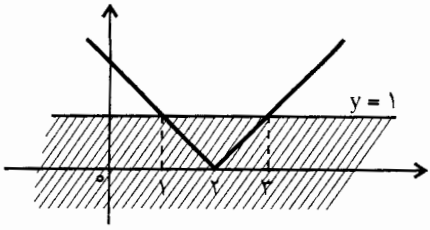
مثال ۷۰: نامعادلهٔ $|x - ۲| < ۱$ را حل کنید.

MATH75.IR

حل:

$$|x - ۲| < ۱ \Rightarrow -۱ < x - ۲ < ۱ \Rightarrow ۱ < x < ۳$$

نمودار $y = |x - ۲|$ و $y < ۱$ را رسم می‌کنیم.



ملاحظه می‌شود اگر $۱ < x < ۳$ باشد $y = |x - ۲|$ کوچکتر از یک می‌شود.

مثال ۷۱: نامعادلهٔ $||x + ۱| - ۲| < ۳$ را حل کنید.

حل:

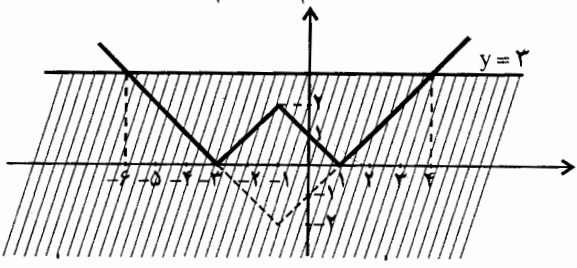
$$||x + ۱| - ۲| < ۳ \Rightarrow -۳ < |x + ۱| - ۲ < ۳$$

$$\Rightarrow -۱ < |x + ۱| < ۵$$

$$\begin{cases} |x + ۱| < ۵ \Rightarrow -۵ < x + ۱ < ۵ \Rightarrow -۶ < x < ۴ \\ |x - ۲| > -۱ \Rightarrow \text{مجموعهٔ جواب این نامعادله } R \text{ است} \end{cases}$$

اشتراک مجموعهٔ جوابهای دو نامعادلهٔ دستگاه بازهٔ $(-۶ , ۴)$ می‌باشد.

نمودار $y = ||x + ۱| - ۲|$ و $y < ۳$ را رسم می‌کنیم.



ملاحظه می‌شود در صورتیکه $-۶ < x < ۴$ باشد $y = ||x + ۱| - ۲|$ کوچکتر از ۳ خواهد بود.

مثال ۷۲: نامعادلهٔ $|x - ۱| + |x - ۲| < ۳$ را حل کنید.

حل:

$$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \qquad x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

MATH75.IR

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$x-۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x-۲$		$-$		$-$	۰	$+$	

$x < ۱ \Rightarrow -x + ۱ - x + ۲ < ۳ \Rightarrow -۲x < ۰ \Rightarrow x > ۰$

مجموعهٔ جواب در این حالت اشتراک بازه‌های $]۰ , +\infty[$ و $]-\infty , ۱[$ می‌باشد.

$A_۱ =]۰ , ۱[$

$۱ \le x < ۲ \Rightarrow x - ۱ - x + ۲ < ۳ \Rightarrow ۱ < ۳$

نامساوی اخیر همواره برقرار است. بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادله در این حالت اشتراک R و $[۱ , ۲[$ می‌باشد.

$A_۲ = [۱ , ۲[$

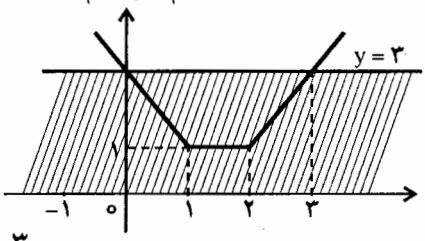
$۲ \le x \Rightarrow x - ۱ + x - ۲ < ۳ \Rightarrow ۲x < ۶ \Rightarrow x < ۳$

مجموعه جواب در این حالت اشتراک بازه‌های $]-\infty , ۳[$ و $[۲ , +\infty[$ است.

$A_۳ = [۲ , ۳[$

$A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ =]۰ , ۳[$

نمودار $y = |x - ۱| + |x - ۲|$ و $y < ۳$ را رسم می‌کنیم.



$x < ۱ \Rightarrow y = -۲x + ۳$

$۱ \le x < ۲ \Rightarrow y = ۱$

$۲ \le x \Rightarrow y = ۲x - ۳$

ملاحظه می‌شود در صورتیکه $۰ < x < ۳$ باشد مقدار $y = |x - ۱| + |x - ۲|$ کوچکتر از ۳ خواهد شد.

مثال ۷۳: نامعادلهٔ $|x - ۲| - ۲|x + ۱| > -۱$ را حل کنید.

حل:

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \qquad x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

MATH75.IR

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
$x-۲$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۱$		$-$	۰	$+$		$+$	

$x < -۱ \Rightarrow -x + ۲ + ۲x + ۲ > -۱ \Rightarrow x > -۵$

$A_۱ = \{x|x \in \mathbf{R}\ ,\ x < -۱\} \cap \{x|x \in \mathbf{R}\ , x > -۵\} = \{x|x \in \mathbf{R}\ ,\ -۵ < x < -۱\}$

$-۱ \le x < ۲ \Rightarrow -x + ۲ - ۲x - ۲ > -۱ \Rightarrow -۳x > -۱ \Rightarrow x < \frac{۱}{۳}$

$A_۲ = \{x|x \in \mathbf{R}\ ,\ -۱ \le x < ۲\} \cap \{x|x \in \mathbf{R}\ , x < \frac{۱}{۳}\} = \{x|x \in \mathbf{R}\ ,\ -۱ \le x < \frac{۱}{۳}\}$

$۲ \le x \Rightarrow x - ۲ - ۲x - ۲ > -۱ \Rightarrow -x > ۳ \Rightarrow x < -۳$

$A_۳ = \{x|x \in \mathbf{R}\ ,\ ۲ \le x\} \cap \{x|x \in \mathbf{R}\ , x < -۳\} = \varnothing$

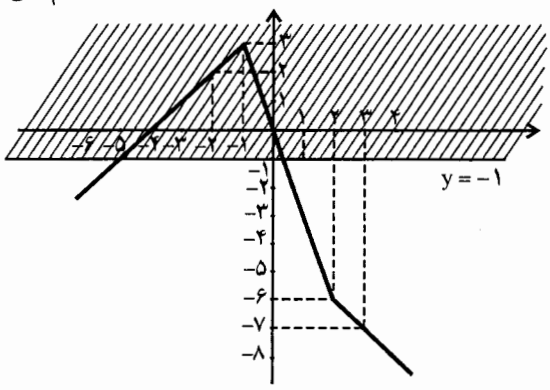
$A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ = \{x|x \in \mathbf{R}\ , -۵ < x < \frac{۱}{۳}\} =]-۵\ , \frac{۱}{۳}[$

نمودار $y = |x - ۲| - ۲|x + ۱|$ و $y > -۱$ را رسم می‌کنیم.

$x < -۱ \Rightarrow y = x + ۴$

$-۱ \le x < ۲ \Rightarrow y = -۳x$

$۲ \le x \Rightarrow y = -x - ۴$



ملاحظه می‌شود در صورتیکه $-۵ < x < \frac{۱}{۳}$ باشد مقدار $y = |x - ۲| - ۲|x + ۱|$ از -۱ بیشتر می‌شود.

مثال ۷۴: نامعادلهٔ $۲|x - ۱| - |۳x + ۶| + |۳ - x| \le ۳$ را حل کنید.

حل:

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

$۳x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

$۳ - x = ۰ \Rightarrow x = ۳$

MATH75.IR

x	$-\infty$		-۲		۱		۳		$+\infty$
$x-۱$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$۳x+۶$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$۳-x$		$+$		$+$		$+$	۰	$-$	

$x < -۲ \Rightarrow -۲x + ۲ + ۳x + ۶ + ۳ - x \leq ۳ \Rightarrow ۱۱ \leq ۳$ غیر ممکن

$A_۱ = \varnothing$

$-۲ \leq x < ۱ \Rightarrow -۲x + ۲ - ۳x - ۶ + ۳ - x \leq ۳ \Rightarrow -۶x \leq ۴ \Rightarrow x \geq -\frac{۲}{۳}$

$A_۲ = \left[-\frac{۲}{۳}, ۱\right[$

$۱ \leq x < ۳ \Rightarrow ۲x - ۲ - ۳x - ۶ + ۳ - x \leq ۳ \Rightarrow -۲x \leq ۸ \Rightarrow x \geq ۴$

در شرط اولیه صدق نمی‌کند. $A_۳ = \varnothing$

$۳ \leq x \Rightarrow ۲x - ۲ - ۳x - ۶ - ۳ + x \leq ۳ \Rightarrow -۱۱ \leq ۳$

این نامساوی همواره برقرار است. یعنی مجموعهٔ جواب نامعادله R است که اشتراکش با مجموعهٔ $[۳, +\infty[$ خود بازهٔ $[۳, +\infty[$ است.

$A_۴ = [۳, +\infty[$

$A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴ = \left[-\frac{۲}{۳}, ۱\right[\cup [۳, +\infty[$

(رسم نمودار به عهدهٔ خواننده)

مثال ۷۵: نامعادله $\frac{|x^۲ - ۲x| + ۴}{x^۲ + |x+۲|} \geq ۱$ را حل کنید.

حل:

$x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۲$

$x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

x	$-\infty$		-۲		۰		۲		$+\infty$
$x^۲-۲x$		$+$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
$x+۲$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	

با توجه به اینکه مخرج نامعادله همواره مثبت است دو طرف را در عبارت مخرج ضرب می‌کنیم.

MATH75.IR

$$|x^۲ - ۲x| + ۴ \geq x^۲ + |x + ۲|$$

$$x < -۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۴ \geq x^۲ - x - ۲ \Rightarrow -x \geq -۶ \Rightarrow x \leq ۶$$

$$A_۱ =]-\infty , -۲[\cap]-\infty , ۶] =]-\infty , -۲[$$

$$-۲ \leq x < ۰ \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۴ \geq x^۲ + x + ۲ \Rightarrow -۳x \geq -۲ \Rightarrow x \leq \frac{۲}{۳}$$

$$A_۲ = [-۲ , ۰[\cap]-\infty , \frac{۲}{۳}] = [-۲ , ۰[$$

$$۰ \leq x < ۲ \Rightarrow -x^۲ + ۲x + ۴ \geq x^۲ + x + ۲ \Rightarrow -۲x^۲ + x + ۲ \geq ۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱ - \sqrt{۱۷}}{۴} \leq x \leq \frac{۱ + \sqrt{۱۷}}{۴}$$

$$A_۳ = [۰ , ۲[\cap \left[\frac{۱ - \sqrt{۱۷}}{۴} , \frac{۱ + \sqrt{۱۷}}{۴}\right] = \left[۰ , \frac{۱ + \sqrt{۱۷}}{۴}\right]$$

$$۲ \leq x \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۴ \geq x^۲ + x + ۲ \Rightarrow -۳x \geq -۲ \Rightarrow x \leq \frac{۲}{۳}$$

$$A_۴ = [۲ , +\infty[\cap]-\infty , \frac{۲}{۳}] = \varnothing$$

$$A = A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳ \cup A_۴ = \left]-\infty , \frac{۱ + \sqrt{۱۷}}{۴}\right]$$

مثال ۷۶: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} |۲x - ۱| < ۵ \\ |x| + |۲x - ۴| > ۲ \end{cases}$$

حل:

$$|۲x - ۱| < ۵ \Rightarrow -۵ < ۲x - ۱ < ۵$$

$$\Rightarrow -۴ < ۲x < ۶ \Rightarrow -۲ < x < ۳$$

$$A_۱ = (-۲ , ۳)$$

$$x < ۰ \Rightarrow -x - ۲x + ۴ > ۲ \Rightarrow -۳x > -۲ \Rightarrow x < \frac{۲}{۳} \qquad (-\infty , ۰)$$

$$۰ \leq x < ۲ \Rightarrow x - ۲x + ۴ > ۲ \Rightarrow -x > -۲ \Rightarrow x < ۲ \qquad [۰ , ۲[$$

$$۲ \leq x \Rightarrow x + ۲x - ۴ > ۲ \Rightarrow ۳x > ۶ \Rightarrow x > ۲ \qquad (۲ , +\infty)$$

$$A_۲ = (-\infty , ۲) \cup (۲ , +\infty)$$

$$A = A_۱ \cap A_۲ = (-۲ , ۲) \cup (۲ , ۳)$$

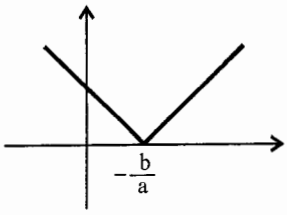
MATH75.IR

حل و بحث معادلات قدر مطلق‌دار

بحث در مورد جواب‌های معادله $|ax + b| = k$ $(a \neq 0)$

در اینجا نیز از نظر هندسی باید نقاط تقاطع خط با معادله $y = k$ و منحنی به معادلهٔ $y = |ax + b|$ را در صورت وجود بیابیم. می‌دانیم نمودار معادلهٔ $y = |ax + b|$ بصورت زیر است.

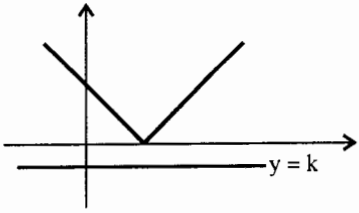
$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$



لذا عدد k را باید با صفر مقایسه کنیم (چرا؟) به یکی از حالات زیر بر می‌خوریم.

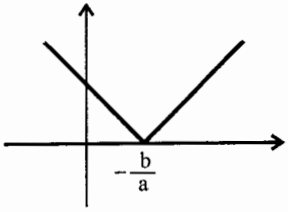
الف: $k < 0$

در این حالت معادلهٔ $|ax + b| = k$ جواب ندارد.



ب: $k = 0$

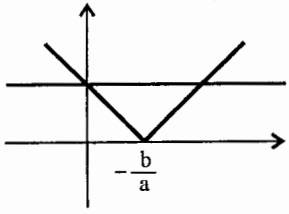
تنها جواب معادله $x = \frac{-b}{a}$ است.



ج: $k > 0$

معادله دارای دو ریشه است که یکی از آنها $x_1 < -\frac{b}{a}$ و دیگری $x_2 > -\frac{b}{a}$ است. مقدار ریشه‌ها عبارتند از:

$$|ax + b| = k \Rightarrow ax + b = \pm k \Rightarrow x = \frac{-k - b}{a} \text{ یا } x = \frac{k - b}{a}$$



MATH75.IR

پس بطور خلاصه معادلهٔ $|ax + b| = k$ یا جواب ندارد $(k < ۰)$، یا یک جواب دارد، $(k = ۰)$ و یا دو جواب $(k > ۰)$.

مثال ۷۷: جواب هر یک از معادلات زیر را در صورت امکان مشخص کنید.

الف) $|-۳(x - ۵) + ۱| = ۴$

ب) $|-۳x + ۱| = -۲$

ج) $|۲x - ۶| = ۰$

حل: الف ـ چون $k = ۴ > ۰$ معادله دو ریشه دارد. $|-۳x + ۱۶| = ۴$

$$x_۱ = \frac{k - b}{a} = \frac{۴ - ۱۶}{-۳} = \frac{-۱۲}{-۳} = ۴$$

$$x_۲ = \frac{-k - b}{a} = \frac{-۴ - ۱۶}{-۳} = \frac{۲۰}{۳}$$

ب ـ چون $k = -۲ < ۰$، معادله جواب ندارد.

ج ـ چون $k = ۰$ پس جواب معادله $x = ۳$ است.

مثال ۷۸: حدود k را چنان تعیین کنید که معادلهٔ $|۵ - ۳x| = ۹k - ۱۸$ بیش از یک جواب داشته باشد.

حل:

$$|۳x - ۵| = ۹k - ۱۸$$

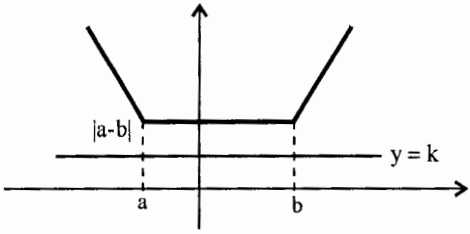
$$۹k - ۱۸ > ۰ \quad \Rightarrow \quad ۹k > ۱۸ \Rightarrow \quad k > ۲$$

بحث در مورد جواب‌های معادلهٔ $|x - a| + |x - b| = k$ $(a < b)$

از نظر هندسی جوابهای معادلهٔ $|x - a| + |x - b| = k$ طول نقاط برخورد خط $y = k$ و نمودار معادلهٔ $y = |x - a| + |x - b|$ می‌باشند. برای بحث دربارهٔ جوابهای معادلهٔ فوق سه حالت در نظر می‌گیریم:

الف ـ $k < |a - b|$

در این حالت خط $y = k$ و نمودار معادله نقطهٔ برخورد ندارند.



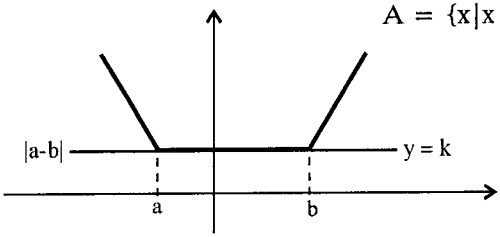
MATH75.IR

ب ـ $k = |a - b|$

در این حالت مجموعهٔ جواب معادله بصورت زیر است.

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} , a \le x \le b\}$$

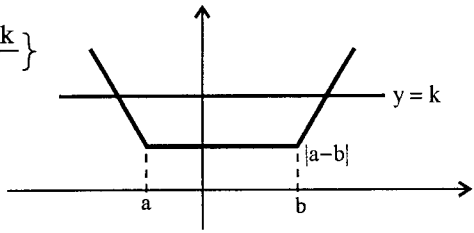
پس در این حالت معادله بیشمار جواب دارد.



ج ـ $k > |a - b|$

در این حالت خط $y = k$ نمودار معادلهٔ $y = |x - a| + |x - b|$ را در دو نقطه با طول‌های $x_1 = \frac{a + b - k}{2}$ و $x_2 = \frac{a + b + k}{2}$ قطع می‌کند و لذا معادله دو جواب دارد.

$$A = \left\{\frac{a + b - k}{2} , \frac{a + b + k}{2}\right\}$$



در نتیجه معادلهٔ $|x - a| + |x - b| = k$ یا جواب ندارد $(k < |a - b|)$، یا بیشمار جواب دارد، $(k = |a - b|)$، و یا اینکه دو جواب دارد. $(k > |a - b|)$

مثال ۷۹: معادله‌های زیر را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

الف) $|x - ۳| + |x - ۵| = ۶$

ب) $|x + ۲| + |x - ۳| = ۵$

ج) $|۳ - x| + |۵ + x| = ۲$

حل: الف ـ

$$a = ۳ , \ b = ۵ \ , k = ۶ \ , |a - b| = ۲$$

چون $۶ > ۲$، معادله دو جواب دارد.

$$\frac{a + b - k}{۲} = \frac{۳ + ۵ - ۶}{۲} = ۱ \ , \ \frac{a + b + k}{۲} = \frac{۳ + ۵ + ۶}{۲} = ۷$$

$$A = \{۱ , ۷\}$$

MATH75.IR

ب -

$$|x-(-۲)|+|x-۳|=۵$$

$$a=-۲\ ,\ b=۳\ ,\ k=۵\ ,\ |a-b|=|-۲-۳|=۵$$

چون $k=|a-b|$، معادله بیشمار جواب دارد و مجموعه جواب عبارتست از:

$$A=\{x|x\in \mathbf{R}\ ,\ -۲\le x\le ۳\}=[-۲\ ,\ ۳]$$

ج -

$$|۳-x|+|۵+x|=۲\ \Rightarrow\ |x-۳|+|x-(-۵)|=۲$$

$$\Rightarrow\ |x-(-۵)|+|x-۳|=۲$$

$$a=-۵\ ,\ b=۳\ ,\ k=۲\ ,\ |a-b|=۸$$

چون $k<|a-b|$ ، لذا معادله جواب ندارد.

مثال ۸۰: حدود k را چنان تعیین کنید که معادله زیر جواب نداشته باشد.

$$|x+۳|+|x-۶|=۴k-۳$$

حل:

$$a=-۳\ ,\ b=۶\ ,\ |a-b|=|-۳-۶|=۹$$

باید داشته باشیم $۴k-۳<|a-b|$ یعنی:

$$۴k-۳<۹\ \Rightarrow\ ۴k<۱۲\ \Rightarrow\ k<۳$$

مثال ۸۱: مقدار k را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر بیشمار جواب داشته باشد.

$$|۲+x|+|۵+x|=\frac{k-۱}{k+۱}$$

حل:

$$|x-(-۲)|+|x-(-۵)|=\frac{k-۱}{k+۱}$$

در اینجا:

$$a=-۵\ ,\ b=-۲\ ,\ |a-b|=۳$$

باید داشته باشیم $\frac{k-۱}{k+۱}=۳$، که با حل آن داریم:

$$۳k+۳=k-۱\ \Rightarrow\ ۲k=-۴\ \Rightarrow k=-۲$$

مثال ۸۲: حدود k را چنان تعیین کنید که معادله زیر دو ریشه داشته باشد.

$$\left|x-\frac{۱}{۲}\right|+\left|\frac{۳}{۴}+x\right|=\frac{k}{k+۱}$$

MATH75.IR

حل:

$$\left|x - \frac{۱}{۲}\right| + \left|x - \left(-\frac{۳}{۴}\right)\right| = \frac{k}{k+۱}$$

در اینجا:

$$a = \frac{-۳}{۴} \ , \ b = \frac{۱}{۲} \ , \ |a - b| = \frac{۵}{۴}$$

باید داشته باشیم $\frac{k}{k+۱} > |a - b|$ یعنی:

$$\frac{k}{k+۱} > \frac{۵}{۴} \Rightarrow \frac{-k-۵}{۴(k+۱)} > ۰$$

کسر $\frac{-k-۵}{۴(k+۱)}$ را باید تعیین علامت کنیم.

$$-k - ۵ = ۰ \Rightarrow k = -۵ \qquad ۴(k+۱) = ۰ \Rightarrow k = -۱$$

x		-۵		-۱	
$-k-۵$	+	۰	−		−
$۴(k+۱)$	−		−	۰	+
$\frac{-k-۵}{۴(k+۱)}$	−	۰	+	ت	−

با توجه به شرط داده شده کافیست k را بصورت زیر در نظر بگیریم.

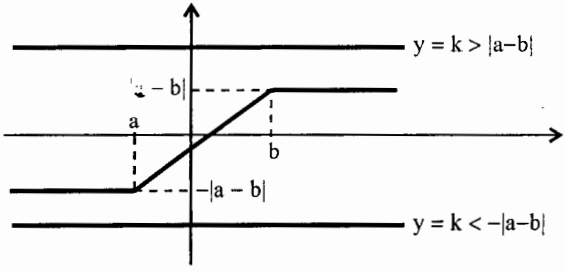
$$-۵ < k < -۱$$

بحث در مورد جواب‌های معادلهٔ $|x - a| - |x - b| = k \quad (a < b)$

برای حل و بحث معادلهٔ فوق باید وضعیت نمودار رابطهٔ $y = |x - a| - |x - b|$ و خط $y = k$ را بررسی کنیم. برای این منظور حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم.

***الف* ـ $k < |a - b|$ یا $k > |a - b|$**

در این حالت معادله جواب ندارد.

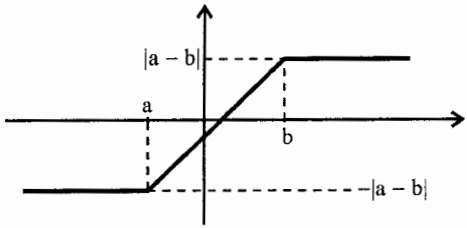


MATH75.IR

ب ـ $k = -|a - b|$

معادله بیشمار جواب دارد و مجموعه جواب عبارتست از:

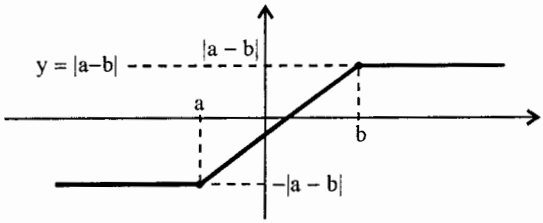
$A = \{x | x \in \mathbf{R}\ ,\ x \le a\} = (-\infty\ ,\ a]$



ج ـ $k = |a - b|$

معادله بیشمار جواب دارد و مجموعه جواب عبارتست از:

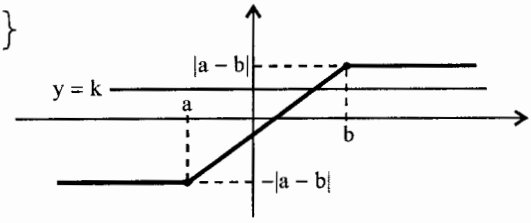
$A = \{x | x \in \mathbf{R}\ ,\ x \ge b\} = [b\ ,\ +\infty)$



د ـ $-|a - b| < k < |a - b|$

در این حالت معادله جواب منحصر بفرد (یکتا) دارد و مجموعه جواب عبارتست از:

$A = \left\{\frac{a + b + k}{۲}\right\}$



در نتیجه معادلهٔ $|x - a| - |x - b| = k$ یا اصلاً جواب ندارد ($k < -|a - b|$ یا $k > |a - b|$) یا بیشمار جواب دارد ($k = -|a - b|$ یا $k = |a - b|$) یا جواب منحصر بفرد دارد ($-|a - b| < k < |a - b|$)

مثال ۸۳: معادله‌های زیر را حل کرده و در هر مورد مجموعه جواب رامشخص کنید.

MATH75.IR

الف) $|x - ۳| - |x + ۴| = ۹$

ب) $|x + ۲| - |x + ۵| = -۳$

ج) $|x - ۵| - |x - ۷| = ۱$

حل: الف ـ

$$|x - ۳| - |x - (-۴)| = ۹ \longrightarrow |x - (-۴)| - |x - ۳| = -۹$$

$$a = -۴ \ , \ b = ۳ \ , \ |a - b| = ۷ \ , \ k = -۹$$

چون $k < -|a - b|$ ، لذا معادله جواب ندارد.

ب ـ

$$|x - (-۲)| - |x - (-۵)| = -۳ \longrightarrow$$

$$|x - (-۵)| - |x - (-۲)| = ۳$$

$$a = -۵ \ , \ b = -۲ \ , \ |a - b| = ۳ \ , \ k = ۳$$

چون $k = |a - b|$ ، معادله بیشمار جواب داشته و مجموعه جواب عبارتست از:

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x \geq b\} = \{x | x \in \mathbf{R} \ , x \geq -۲\} = [-۲ \ , +\infty)$$

ج ـ

$$|x - ۵| - |x - ۷| = ۱$$

$$a = ۵ \ , \ b = ۷ \ , |a - b| = ۲ \ , k = ۱$$

در اینجا $-|a - b| < k < |a - b|$ لذا معادله جواب منحصر بفرد دارد.

$$x_۱ = \frac{a + b + k}{۲} = \frac{۵ + ۷ + ۱}{۲} = \frac{۱۳}{۲} \qquad A = \left\{\frac{۱۳}{۲}\right\}$$

مثال ۸۴: حدود k را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر فاقد جواب باشد.

$$|x + ۳| - |x - ۵| = ۳k - ۷$$

حل:

$$a = -۳ \ , b = ۵ \ , |a - b| = ۸$$

باید حداقل یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد.

$$۳k - ۷ < -۸ \text{ یا } ۳k - ۷ > ۸ \Rightarrow$$

$$k < -\frac{۱}{۳} \text{ یا } k > ۵$$

مثال ۸۵: مقادیر k را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر بیشمار جواب داشته باشد.

$$|x + ۵| - |x + ۷| = \frac{۳k - ۱}{۲k + ۱}$$

MATH75.IR

حل:

$$|x+۵| - |x+۷| = \frac{۳k-۱}{۲k+۱} \Rightarrow |x-(-۵)| - |x-(-۷)| = \frac{۳k-۱}{۲k+۱}$$

$$\longrightarrow |x-(-۷)| - |x-(-۵)| = \frac{۱-۳k}{۲k+۱}$$

$$a = -۷ \ , \ b = -۵ \ , \ |a-b| = ۲$$

باید یکی از دو حالت زیر اتفاق بیفتد.

$$\frac{۱-۳k}{۲k+۱} = -۲ \Rightarrow ۱-۳k = -۴k-۲ \Rightarrow k = -۳$$

$$\frac{۱-۳k}{۲k+۱} = ۲ \Rightarrow ۱-۳k = ۴k+۲ \Rightarrow k = -\frac{۱}{۷}$$

مثال ۸۶: حدود k را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر جواب منحصر بفرد داشته باشد.

$$|x-۳| - |x-۵| = \frac{k+۳}{k-۲}$$

حل:

$$a = ۳ \ , \ b = ۵ \ , \ |a-b| = ۲$$

باید داشته باشیم $-۲ < \frac{k+۳}{k-۲} < ۲$ که دستگاه نامعادلات زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} \frac{k+۳}{k-۲} < ۲ \\ \frac{k+۳}{k-۲} > -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-k+۷}{k-۲} < ۰ \\ \frac{۳k-۱}{k-۲} > ۰ \end{cases}$$

$$-k+۷ = ۰ \Rightarrow k = ۷ \ , \ k-۲ = ۰ \Rightarrow k = ۲ \ , \ ۳k-۱ = ۰ \Rightarrow k = \frac{۱}{۳}$$

k		$\frac{۱}{۳}$		۲		۷	
$-k+۷$	+		+		+	۰	−
$k-۲$	−		−	۰	+		+
$۳k-۱$	−	۰	+		+		+
$\frac{-k+۷}{k-۲}$	−		−	ن	+	۰	−
$\frac{۳k-۱}{k-۲}$	+	۰	−	ن	+		+
R = نتیجه	جواب						جواب

$$k < \frac{۱}{۳} \text{ یا } k > ۷$$

MATH75.IR

حل و بحث نامعادلات قدر مطلق‌دار

در مورد نامعادله‌های بصورت $|u| \le k$ یا $|u| \ge k$ قبلاً صحبت کرده‌ایم که یادآوری می‌کنیم.

۱ـ اگر $k < ۰$ نامعادلهٔ $|u| \le k$ جواب ندارد و اگر $k \ge ۰$ باشد می‌توان این نامعادله را به دستگاه $\begin{cases} u \le k \\ -k \le u \end{cases}$ تبدیل کرد و مجموعه جواب را که نهایتاً اشتراک این دو مجموعه جواب خواهد بود تعیین کرد.

۲ـ برای حل نامعادله‌های بصورت $|u| \ge k$ ، اگر $k \le ۰$ باشد، این نامعادله همواره برقرار است. یعنی مجموعه جواب $\mathbf{R}$ است. و اگر $k > ۰$ باشد به دو طریق می‌توان عمل کرد یا اینکه هر دو طرف را به توان دو برسانیم و در جهت یافتن مجموعه جواب بکوشیم و یا از شرطی معادل، که به صورت

$$|u| \ge k \Leftrightarrow u \ge k \text{ یا } u \le -k$$

می‌باشد استفاده کرد. در این حالت مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های $u \ge k$ و $u \le -k$ را بدست می‌آوریم و اجتماع آنها را بعنوان مجموعه جواب نهایی در نظر می‌گیریم.

مثال ۸۷: مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را مشخص کنید.

الف ـ $|۲x - ۳| < ۵$ ب ـ $|۳x - ۱| \le |۲x + ۱|$

ج ـ $|-۳x + ۵| > ۷$ د ـ $|x^۲ + x + ۱| \ge |x + ۵|$

حل:

الف ـ

$$|۲x - ۳| < ۵ \Leftrightarrow -۵ < ۲x - ۳ < ۵ \Leftrightarrow$$

$$-۲ < ۲x < ۸ \Leftrightarrow -۱ < x < ۴$$

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ -۱ < x < ۴\} = (-۱ , ۴)$$

ب ـ چون هر دو طرف نامنفی‌اند می‌توان طرفین را به توان ۲ رساند. داریم:

$$(۳x - ۱)^۲ \le (۲x + ۱)^۲ \Leftrightarrow ۹x^۲ + ۱ - ۶x \le ۴x^۲ + ۱ + ۴x \Leftrightarrow$$

$$۵x^۲ - ۱۰x \le ۰ \Leftrightarrow ۵x(x - ۲) \le ۰$$

ریشه‌های عبارت $۵x(x - ۲)$ را می‌یابیم. داریم:

$$x = ۰ \text{ یا } x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

MATH75.IR

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$5x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

با ملاحظه در جدول مجموعه جواب نامعادله بصورت زیر در می‌آید.

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ 0 \le x \le 2\} = [0 \ , \ 2]$

ج -

$|-3x + 5| > 7 \Leftrightarrow -3x + 5 > 7$ یا $-3x + 5 < -7$

$\Leftrightarrow -3x > 2$ یا $-3x < -12 \Leftrightarrow x < \frac{-2}{3}$ یا $x > 4$

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ ; \ x < -\frac{2}{3}$ یا $x > 4\} = (-\infty \ , \ -\frac{2}{3}) \cup (4 \ , \ +\infty)$

د ـ ملاحظه می‌کنیم که همواره $x^2 + x + 1 > 0$ است. پس نامعادلهٔ $|x^2+x+1| \ge |x+5|$ بصورت $x^2 + x + 1 \ge |x + 5|$ یا $|x + 5| \le x^2 + x + 1$ در می‌آید. که به دستگاه زیر منجر می‌شود.

$$\begin{cases} x + 5 \le x^2 + x + 1 \\ -x^2 - x - 1 \le x + 5 \end{cases}$$

که بصورت زیر خلاصه می‌شود.

$$\begin{cases} x^2 - 4 \ge 0 \\ x^2 + 2x + 6 \ge 0 \end{cases}$$

نامعادلهٔ $x^2 + 2x + 6 \ge 0$ همواره برقرار است. زیرا $\Delta < 0$ و $a = 1 > 0$ است. پس فقط باید مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^2 - 4 \ge 0$ را مشخص کنید. برای این منظور داریم:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

x		-2		2	
$x^2 - 4$	$+$	0	$-$	0	$+$

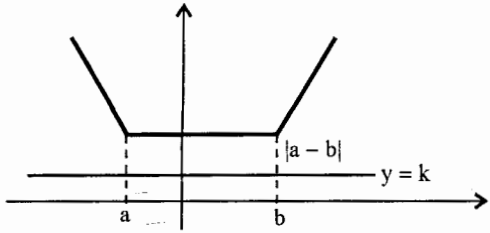
و مجموعهٔ جواب نامعادله بصورت زیر در می‌آید:

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x \le -2$ یا $x \ge 2\} = (-\infty \ , \ -2] \cup [2 \ , \ +\infty)$

۳ـ نامعادله‌های بصورت $|x - a| + |x - b| \le k$ $(a < b)$

قبلاً با نموداری که معادلهٔ آن بصورت $y = |x - a| + |x - b|$ می‌باشد آشنا شدیم.

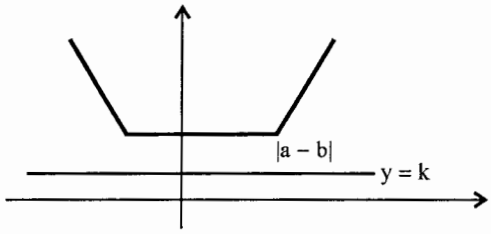
MATH75.IR



در اینجا برای بررسی نامعادله، باید عدد k را با عدد $|a - b|$ مقایسه کرد. لذا حالات زیر اتفاق می‌افتد.

الف ـ $k < |a - b|$

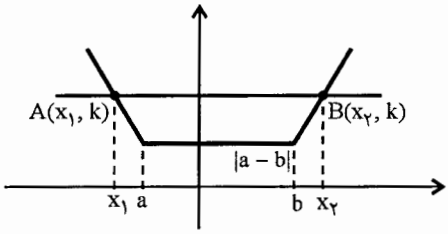
در این حالت خط $y = k$ با نمودار به معادلهٔ $y = |x - a| + |x - b|$ از نظر ترسیمی وضعیت زیر را دارد.



ملاحظه می‌شود که در این حالت نامعادله جواب ندارد.

ب ـ $k \geq |a - b|$

در این حالت خط $y = k$ با نمودار به معادلهٔ $y = |x - a| + |x - b|$ وضعیت زیر را از نظر ترسیمی داراست.



در این حالت خط $y = k$ حداقل در دو نقطه نمودار معادلهٔ $y = |x - a| + |x - b|$ را قطع می‌کند. (چرا حداقل دو نقطه؟) طبق شکل طول یکی از نقطه‌ها $x_1 \leq a$ و طول نقطهٔ دیگر $x_2 \geq b$ است. مقدار x_1 و x_2 را می‌توان برحسب a و b و k محاسبه کرد. کافیست در معادلهٔ

MATH75.IR

$y = |x - a| + |x - b|$ یک بار به جای x قرار دهیم x_1 و بار دیگر قرار دهیم x_2.

$$x_1 \le a \Rightarrow k = |x_1 - a| + |x_1 - b| = -(x_1 - a) + [-(x_1 - b)] = -2x_1 + a + b$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{a + b - k}{2}$$

$$x_2 \ge b \Rightarrow k = |x_2 - a| + |x_2 - b| = x_2 - a + x_2 - b = 2x_2 - a - b$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{a + b + k}{2}$$

به ازاء تمام نقاطی که بین x_1 و x_2 روی محور xها قرار گرفته‌اند مقدار $y = |x - a| + |x - b|$ از k بیشتر نیست. یعنی داریم:

$$\forall x: x_1 \le x \le x_2 \qquad |x - a| + |x - b| \le k$$

پس مجموعه جواب نامعادله در این حالت بصورت

$$A = \{x | x \in \mathbf{R}, \frac{a + b - k}{2} \le x \le \frac{a + b + k}{2}\}$$

می‌باشد.

در حالت خاصی که $k = |a - b|$ باشد مجموعهٔ جواب بصورت:

$$A = \{x | x \in \mathbf{R}, a \le x \le b\}$$

در می‌آید.

مثال ۸۸: مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $|x - 2| + |x - 5| \le 1$

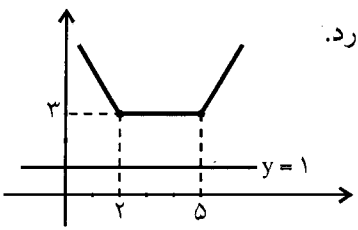
ب) $|x - 3| + |x - 2| \le 3$

ج) $|2 - x| + |3 + x| \le 5$

حل: الف ـ

$$a = 2, b = 5 \qquad |a - b| = |2 - 5| = 3$$

چون $k = 1 < 3$، نامعادله جواب ندارد.



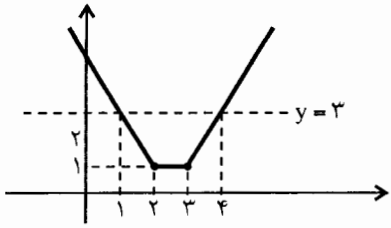
ب ـ

$$a = 2, b = 3 \qquad |2 - 3| = 1$$

MATH75.IR

چون $k = ۳ > ۱$ ، پس مجموعهٔ جواب بصورت

$$A = \{x|x \in \mathbf{R} \ , \ \frac{a+b-k}{۲} \le x \le \frac{a+b+k}{۲}\} = \{x|x \in \mathbf{R} \ , \ ۱ \le x \le ۴\}$$
$$= [۱ \ , \ ۴]$$



ج ـ این نامعادله را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

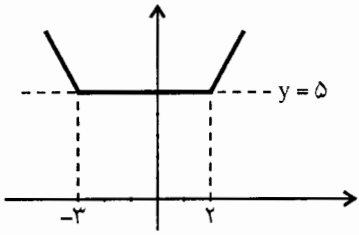
$$|-(۲-x)| + |x-(-۳)| \le ۵$$

که خلاصه شده آن عبارتست از:

$$|x-۲| + |x-(-۳)| \le ۵$$

در اینجا داریم: $a = -۳ \ , \ b = ۲ \ , \ k = ۵$ و چون $k = |a-b|$ پس باز هم نامعادله بیشمار جواب دارد (حالت خاص) و مجموعه جواب آن عبارتست از:

$$A = \{x|x \in \mathbf{R} \ , \ -۳ \le x \le ۲\} = [-۳ \ , \ ۲]$$



۴ـ نامعادله‌های بصورت $|x-a| + |x-b| < k \quad (a < b)$

فرق این نامعادله با نامعادلهٔ قبل در این است که آنجا حالت تساوی نیز موجود بود که در اینجا نیست. اگر $k \le |a-b|$ باشد این نامعادله جواب ندارد زیرا حداقل عبارت $|x-a| + |x-b|$ برابر $|a-b|$ است. ولی اگر $k > |a-b|$ باشد مجموعه جواب نامعادله بصورت

$$A = \{x|x \in \mathbf{R} \ , \ \frac{a+b-k}{۲} < x < \frac{a+b+k}{۲}\}$$

است.

MATH75.IR

مثال ۸۹: مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $|x + ۲| + |x - ۳| < ۱$

ب) $|۴ - x| + |x + ۳| < ۷$

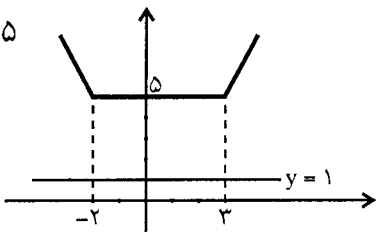
ج) $|۲ - x| + |۳ - x| < ۴$

حل: الف ـ

$|x + ۲| + |x - ۳| < ۱ \Rightarrow |x - (-۲)| + |x - ۳| < ۱$

$a = -۲ \ , \ b = ۳ \ , k = ۱$

$|a - b| = |-۲ - ۳| = ۵$



چون $k = ۱ < |a - b| = ۵$ لذا نامعادله جواب ندارد.

ب ـ

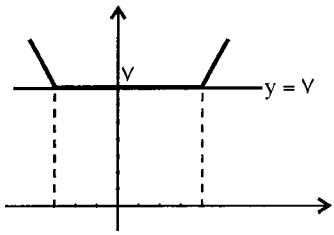
$|۴ - x| + |x + ۳| < ۷ \Rightarrow |x - ۴| + |x - (-۳)| < ۷$

$\Rightarrow |x - (-۳)| + |x - ۴| < ۷$

$a = -۳ \ , b = ۴ \ , k = ۷$

$|a - b| = |-۳ - ۴| = ۷$

در اینجا $k = |a - b|$ و لذا باز هم نامعادله جواب ندارد.



ج ـ

$|۲ - x| + |۳ - x| < ۴$

این نامعادله را می‌توان بصورت $|-(۲ - x)| + |-(۳ - x)| < ۴$ یا خلاصه شدهٔ

$|x - ۲| + |x - ۳| < ۴$

MATH75.IR

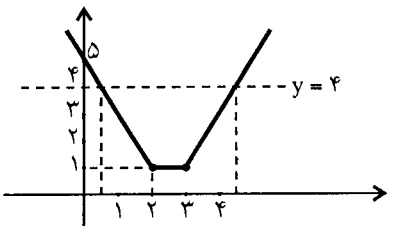
در نظر گرفت که در آن داریم:

$a = ۲ \ , \ b = ۳ \ , \ k = ۴ \ , \ |a - b| = |۲ - ۳| = ۱$

چون $k > |a - b|$ ، نامعادله بیشمار جواب دارد و مجموعه جواب آن بصورت:

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ \frac{a + b - k}{۲} < x < \frac{a + b + k}{۲}\} = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ \frac{۱}{۲} < x < \frac{۹}{۲}\}$$
$$= (\frac{۱}{۲} , \frac{۹}{۲})$$

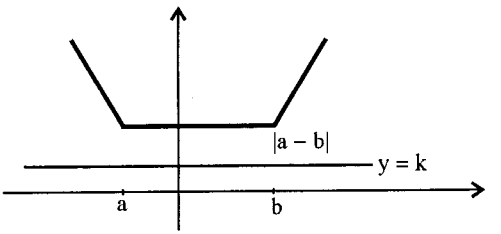
است.



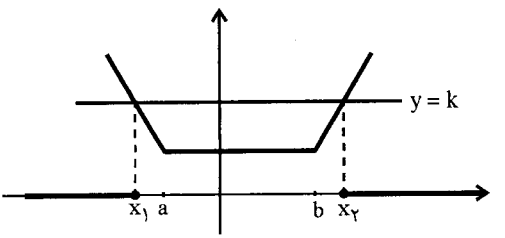
۵ـ نامعادله‌های بصورت $|x - a| + |x - b| \geq k$ $(a < b)$

بنابر توضیحاتی که در بالا آمد حداقل مقدار $|x - a| + |x - b|$ برابر است. با $|a - b|$ پس بهتر است k را با $|a - b|$ مقایسه کنیم.

الف ـ $k \leq |a - b|$. در این حالت نامعادله به ازاء هر عدد حقیقی x برقرار بوده و مجموعهٔ جواب آن **R** است.



ب ـ $k > |a - b|$. در این حالت خط $y = k$ در دو نقطه نمودار با معادله $y = |x-a|+|x-b|$ را قطع می‌کند.



MATH75.IR

و مقادیر $x_۱$ و $x_۲$ مانند آنچه در حالت قبل گفته شد عبارتند از:

$$x_۱ = \frac{a + b - k}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{a + b + k}{۲}$$

و مجموعهٔ جواب نامعادله عبارتست از:

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \quad , \quad x \leq \frac{a + b - k}{۲} \text{ یا } x \geq \frac{a + b + k}{۲}\}$$

مثال ۹۰: مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را بدست آورید.

الف) $|۳ - x| + |x + ۳| \geq ۲$

ب) $|x - ۱| + |x - ۵| \geq ۴$

ج) $|۲ - x| + |x - ۱| \geq ۵$

حل: الف ـ

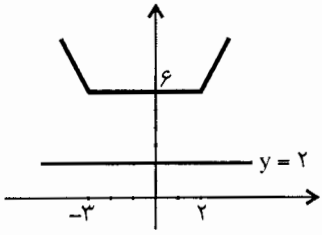
$$|۳ - x| + |x + ۳| \geq ۲ \Rightarrow |x - ۳| + |x - (-۳)| \geq ۲ \Rightarrow$$
$$|x - (-۳)| + |x - ۳| \geq ۲$$

در اینجا داریم:

$$a = -۳ \ , b = ۳ \ , k = ۲$$
$$|a - b| = |-۳ - ۳| = ۶$$

چون $k = ۲ < |a - b| = ۶$ ، یعنی مقدار k از مینیمم $|۳ - x| + |x + ۳|$ کمتر است، لذا این نامعادله بیشمار جواب داشته و به ازاء هر عدد حقیقی برقرار است. یعنی:

$A = \mathbf{R}$



ب ـ

$$|x - ۱| + |x - ۵| \geq ۴$$

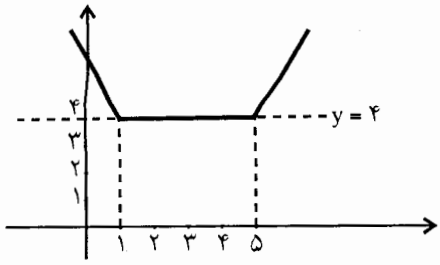
در اینجا داریم:

$$a = ۱ \ , \ b = ۵ \ , \ k = ۴ \ , |a - b| = |۱ - ۵| = ۴$$

یعنی: $k = |a - b|$ ، یعنی مقدار k با مینیمم مقدار عبارت $|x - ۱| + |x - ۵|$ برابر است و نامعادله باز هم به ازاء هر عدد حقیقی x برقرار بوده و داریم:

MATH75.IR

$A = \mathbf{R}$



ج -

$$|۲ - x| + |x - ۱| \geq ۵ \Rightarrow |-(۲ - x)| + |x - ۱| \geq ۵ \Rightarrow$$

$$|x - ۲| + |x - ۱| \geq ۵ \Rightarrow |x - ۱| + |x - ۲| \geq ۵$$

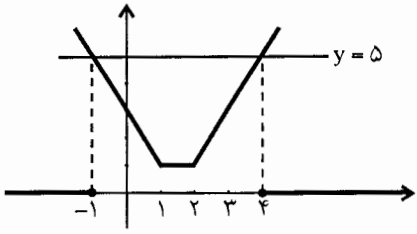
در اینجا داریم:

$$a = ۱ \ , \ b = ۲ \ , \ k = ۵ \ , \ |a - b| = ۱$$

و چون $k = ۵ > |a - b| = ۱$، لذا مجموعه جواب نامعادله از دو نیم خط تشکیل شده‌است.

$$x_۱ = \frac{a + b - k}{۲} = \frac{۱ + ۲ - ۵}{۲} = -۱$$

$$x_۲ = \frac{a + b + k}{۲} = \frac{۱ + ۲ + ۵}{۲} = ۴$$

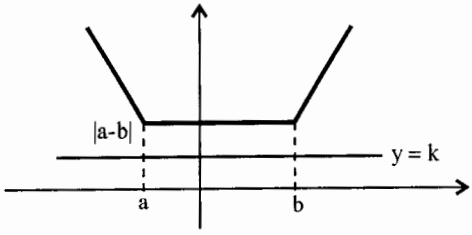


$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x \leq -۱ \text{ یا } x \geq ۴\} = (-\infty , -۱] \cup [۴ , +\infty)$$

۶ـ نامعادله‌های بصورت $|x - a| + |x - b| > k$ $(a < b)$

بحث این قسمت نیز مانند حالت ۵ است. با این تفاوت که گوییم:

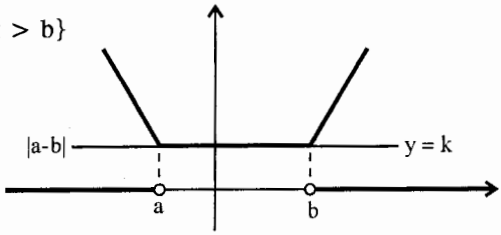
الف) اگر $k < |a - b|$ باشد مجموعهٔ جواب نامعادله $\mathbf{R}$ است.



ب) اگر $k = |a - b|$ باشد مجموعه جواب بصورت زیر است.

MATH75.IR

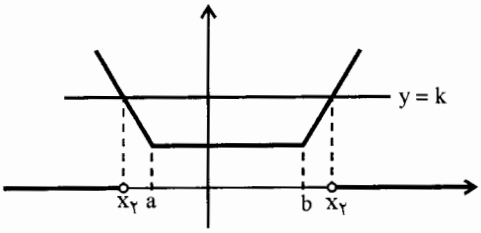
$A = \{x | x \in \mathbf{R} ;\ x < a$ یا $x > b\}$



ج) اگر $k > |a - b|$ باشد مجموعه جواب بصورت زیر است.

$A = \{x | x \in \mathbf{R} ,\ x < \frac{a + b - k}{۲}$ یا $x > \frac{a + b + k}{۲}\}$

در اینجا $x_۱ = \frac{a + b - k}{۲}$, $x_۲ = \frac{a + b + k}{۲}$



مثال ۹۱: مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $|x - ۳| + |x + ۲| > ۳$

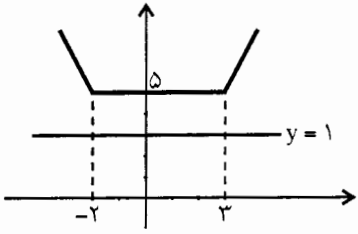
ب) $|x + ۳| + |x + ۴| > ۱$

ج) $|۲ - x| + |۵ - x| > ۶$

حل: الف)

$a = -۲$, $b = ۳$, $k = ۳$, $|a - b| = ۵$

در اینجا $k = ۳ < |a - b| = ۵$ و نامعادله به ازاء تمام مقادیر x برقرار است. زیرا k از مینیمم عبارت $|x - ۳| + |x + ۲|$ نیز کمتر است.



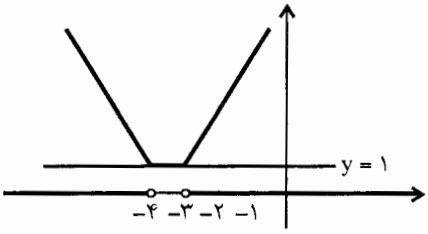
ب)

$|x - (-۳)| + |x - (-۴)| > ۱$

MATH75.IR

در اینجا $a = -۴ , b = -۳ , k = ۱ , |a - b| = ۱$

ملاحظه می‌شود که مقدار k با مقدار مینیمم عبارت $|x + ۳| + |x + ۴|$ یکسان است و لذا نامعادله به ازاء هر مقدار $x < -۴$ یا $x > -۳$ برقرار است.



$A = \{x | x \in \mathbf{R} , x < -۴ \text{ یا } x > -۳\} = (-\infty , -۴) \cup (-۳ , +\infty)$

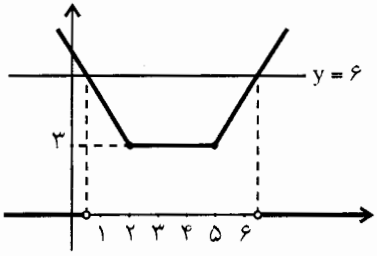
ج -

$|۲ - x| + |۵ - x| > ۶ \Rightarrow |x - ۲| + |x - ۵| > ۶$

در اینجا داریم: $a = ۲ , b = ۵ , k = ۶ , |a - b| = ۳ , k > |a - b|$

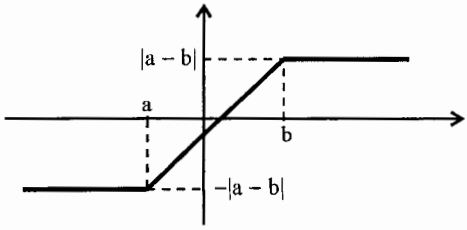
بااختیار $x_۱ = \frac{a + b - k}{۲} = \frac{۱}{۲}$ و $x_۲ = \frac{a + b + k}{۲} = \frac{۱۳}{۲}$ مجموعه جواب بصورت زیر درمی آید:

$A = \{x | x \in \mathbf{R} , x < \frac{۱}{۲} \text{ یا } x > \frac{۱۳}{۲}\} = (-\infty , \frac{۱}{۲}) \cup (\frac{۱۳}{۲} , +\infty)$



۷ـ نامعادله‌های بصورت $|x - a| - |x - b| \le k$ $(a < b)$

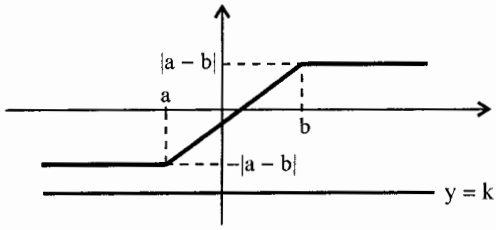
قبلاً دیدیم که نمودار معادلهٔ $y = |x - a| - |x - b|$ اگر $a < b$ باشد بصورت زیر است.



MATH75.IR

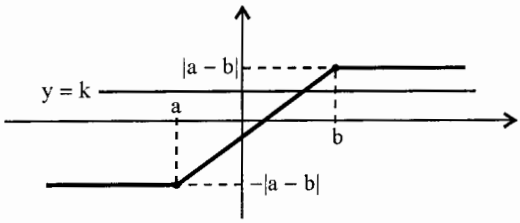
خط $y = k$ با این نمودار یکی از حالات زیر را داراست که بررسی می‌کنیم.

الف ـ $k < -|a - b|$



ملاحظه می‌شود که در این حالت نامعادله جواب ندارد، زیرا k از مینیمم عبارت $|x - a| - |x - b|$ نیز کمتر است. $(A = \varnothing)$

ب ـ $-|a - b| \leq k < |a - b|$



در این حالت نامعادله بیشمار جواب دارد و مجموعه جواب بصورت:

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \; ; \; x \leq \frac{a + b + k}{۲}\}$$

است.

ج ـ $k \geq |a - b|$

در این حالت چون بیشترین مقدار عبارت $|x - a| - |x - b|$ برابر $|a - b|$ است. نامعادلهٔ $|x - a| - |x - b| \leq k$ به ازاء جمیع مقادیر x برقرار است. یعنی $A = \mathbf{R}$

مثال ۹۲: مجموعهٔ جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $|x - ۲| - |x - ۳| \leq -۴$

ب) $|۳ + x| - |۲ - x| \leq ۵$

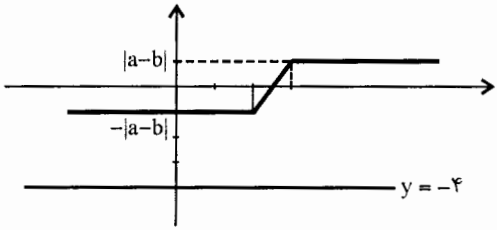
ج) $|x + ۴| - |x + ۲| \leq ۳$

حل: الف ـ

$a = ۲ \; , b = ۳ \; , \; k = -۴ \qquad |a - b| = |۲ - ۳| = ۱$

چون $k < -|a - b|$، لذا این نامعادله به ازاء هیچ مقدار از x برقرار نمی‌باشد. یعنی $A = \varnothing$

MATH75.IR



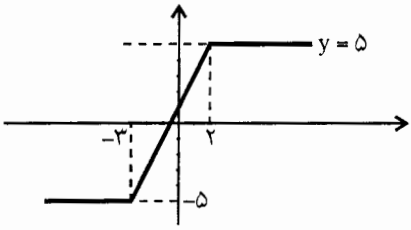
ب -

$$|۳ + x| - |۲ - x| \leq ۵ \Rightarrow |x - (-۳)| - |x - ۲| \leq ۵$$

در اینجا:

$$a = -۳ \ , b = ۲ \ , \ k = ۵ \ , \ |a - b| = |-۳ - ۲| = ۵$$

یعنی $k = |a - b|$ بدیهی است که به ازاء هر مقدار x عبارت $|x - (-۳)| - |x - ۲|$ از ۵ بیشتر نیست. یعنی این نامعادله به ازاء جمیع مقادیر x برقرار است. $A = \mathbf{R}$



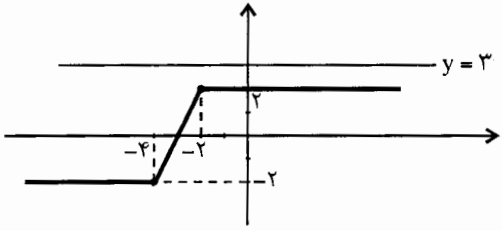
ج -

$$|x + ۴| - |x + ۲| \leq ۳ \Rightarrow |x - (-۴)| - |x - (-۲)| \leq ۳$$

در اینجا:

$$a = -۴ \ , b = -۲ \ , \ k = ۳ \ , \ |a - b| = ۲$$

چون $k > |a - b|$ می‌باشد، نامعادله به ازاء جمیع مقادیر x برقرار است. $A = \mathbf{R}$



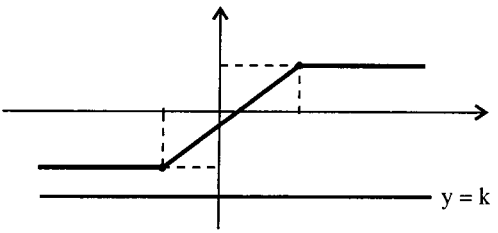
۸ـ نامعادله‌های بصورت $|x - a| - |x - b| < k$ $(a < b)$

در اینجا به علت طولانی شدن بحث فقط به بیان نتایج می‌پردازیم و استدلال هر مورد را به خواننده واگذار می‌کنیم.

MATH75.IR

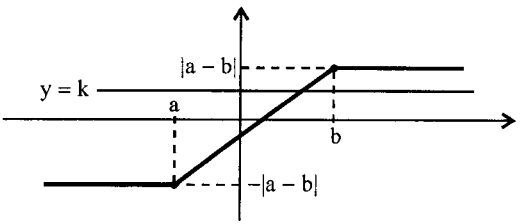
الف ـ $k \leq -|a-b|$

$A = \varnothing$



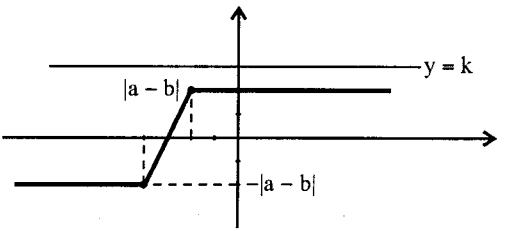
ب ـ $-|a-b| < k < |a-b|$

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \; ; \; x < \frac{a+b+k}{۲}\}$



ج ـ $k \geq |a-b|$

$A = \mathbf{R}$



مثال ۹۳: مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $|x+۱| - |x-۲| < -۴$

ب) $|x-۵| - |x-۳| > -۱$

ج) $|x+۴| - |x-۸| > ۱۳$

حل: الف ـ

$|x+۱| - |x-۲| < -۴ \Rightarrow |x-(-۱)| - |x-۲| < -۴$

$a = -۱ \; , b = ۲ \; , \; k = -۴ \; , |a-b| = ۳$

$k < -|a-b|$

نامعادله جواب ندارد.

MATH75.IR

ب -

$$|x-۵|-|x-۳|>-۱ \longrightarrow |x-۳|-|x-۵|<۱$$

$$a=۳\ ,\ b=۵\ ,\ k=۱\ ,\ |a-b|=۲$$

$$-|a-b|<k<|a-b|$$

$$A=\{x|x\in \mathbf{R}\ ;\ x<\frac{a+b+k}{۲}\}=\{x|x\in \mathbf{R}\ ;\ x<\frac{۹}{۲}\}$$

ج -

$$|x+۴|-|x-۸|<۱۳ \Rightarrow |x-(-۴)|-|x-۸|<۱۳$$

$$a=-۴\ ,\ b=۸\ ,\ k=۱۳\ ,\ |a-b|=۱۲$$

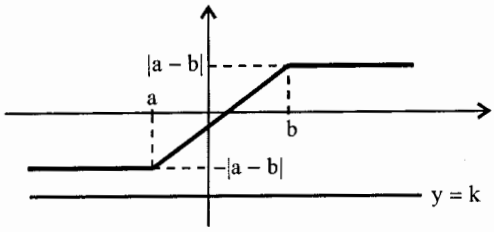
چون $k>|a-b|$؛ این نامعادله به ازاء هر x برقرار است. $A=\mathbf{R}$

۹ـ نامعادله‌های بصورت $|x-a|-|x-b|\geq k$ $(a<b)$

خلاصه بحث در این حالت چنین است.

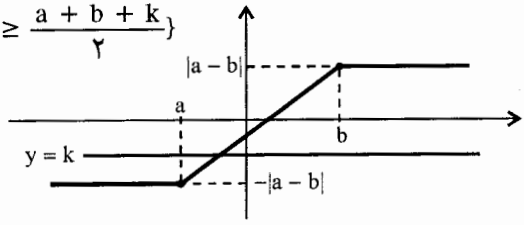
الف) $k\leq -|a-b|$

$A=\mathbf{R}$



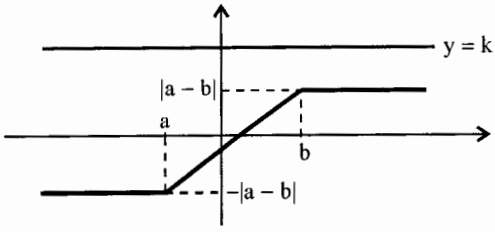
ب) $-|a-b|<k\leq |a-b|$

$$A=\{x|x\in \mathbf{R}\ ;\ x\geq \frac{a+b+k}{۲}\}$$



ج) $k>|a-b|$

$A=\varnothing$



MATH75.IR

مثال ۹۴: مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $|-x + ۲| - |۳ - x| \geq -۲$

ب) $|x + ۴| - |x + ۱| \geq ۲$

ج) $|۳ - x| - |۵ - x| \geq ۳$

حل:

الف ـ

$$|-x + ۲| - |۳ - x| \geq -۲ \Rightarrow |x - ۲| - |x - ۳| \geq -۲$$

$$a = ۲ \ , \ b = ۳ \ , \ k = -۲ \ , \ |a - b| = ۱$$

$$k < -|a - b| \Rightarrow A = \mathbf{R}$$

ب ـ

$$|x - (-۴)| - |x - (-۱)| \geq ۲$$

$$a = -۴ \ , \ b = -۱ \ , \ k = ۲ \ , \ |a - b| = ۳$$

$$-|a - b| < k < |a - b|$$

$$\frac{a + b + k}{۲} = \frac{-۴ - ۱ + ۲}{۲} = -\frac{۳}{۲}$$

$$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x \geq -\frac{۳}{۲}\} = [-\frac{۳}{۲} \ , \ +\infty)$$

ج -

$$|x - ۳| - |x - ۵| \geq ۳$$

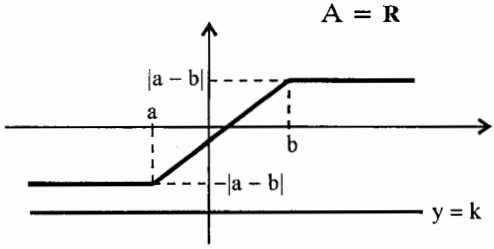
$$a = ۳ \ , \ b = ۵ \ , k = ۳ \ , \ |a - b| = ۲$$

$$k > |a - b| \Rightarrow A = \varnothing$$

۱۰ـ نامعادله‌های بصورت $|x - a| - |x - b| > k$ $(a < b)$

خلاصه بحث در این حالت چنین است.

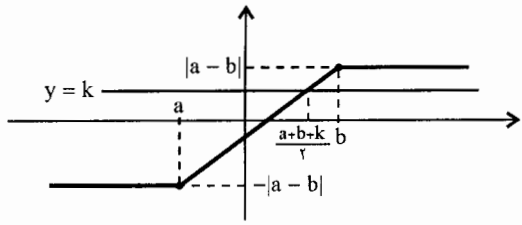
الف ـ $k < -|a - b|$ $\quad A = \mathbf{R}$



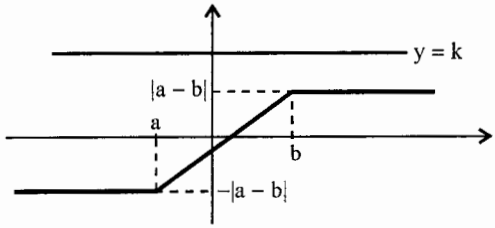
MATH75.IR

ب ـ $-|a-b| \le k < |a-b|$

$A = \{x | x \in \mathbf{R} ,\ x > \frac{a+b+k}{۲}\}$



ج ـ $k \ge |a-b|$ $\qquad A = \varnothing$



مثال ۹۵: مجموعه جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $|x+۳| - |x-۲| > -۶$

ب) $|x-۲| - |x+۵| < -۳$

ج) $|x-۱| - |x-۳| > ۴$

حل: الف ـ

$|x-(-۳)| - |x-۲| > -۶$

$a = -۳ \ ,\ b = ۲ \ ,\ k = -۶ \ ,\ |a-b| = |-۳-۲| = ۵$

در اینجا $k < -|a-b|$. و لذا بنابر آنچه گفته شد $A = \mathbf{R}$

ب ـ

$|x-۲| - |x+۵| < -۳ \longrightarrow |x+۵| - |x-۲| > ۳$

$\Rightarrow \ |x-(-۵)| - |x-۲| > ۳$

$a = -۵ \ ,\ b = ۲ \ ,\ k = ۳ \ ,\ |a-b| = ۷$

$-|a-b| < k < |a-b| \qquad \frac{a+b+k}{۲} = ۰$

$A = \{x | x \in \mathbf{R} ;\ x > ۰\} = (۰ , +\infty)$

MATH75.IR

ج -

$|x - ۱| - |x - ۳| > ۴$

$a = ۱ \ , \ b = ۳ \ , \ k = ۴ \ , \ |a - b| = ۲$

$k > |a - b|$

و مجموعهٔ جواب $A = \varnothing$ است.

مثال ۹۶: حدود m را چنان تعیین کنید که هر یک از نامعادله‌های زیر به ازاء جمیع مقادیر x برقرار باشند.

الف) $|x - ۱| + |x - ۳| \geq ۲m - ۱$

ب) $|x + ۲| + |x + ۳| > \frac{-m + ۱}{۳}$

ج) $|x - ۲| - |x - ۳| < \frac{۲ - m}{۵}$

د) $|x + ۲| - |x + ۳| \leq ۳(m - ۱)$

حل:

الف ـ مینیمم مقدار عبارت $|x - ۱| + |x - ۳|$ برابر است با $|a - b| = |۱ - ۳| = ۲$.
پس باید $۲m - ۱$ از این مقدار مینیمم بیشتر نباشد. پس $۲m - ۱ \leq ۲$ ، یعنی $m \leq \frac{۳}{۲}$.

ب ـ مینیمم مقدار عبارت $|x + ۲| + |x + ۳|$ برابر است با:

$a = -۳ \ , \ b = -۲ \quad |a - b| = |-۳ - (-۲)| = ۱$

پس $\frac{-m + ۱}{۳}$ باید از این مقدار مینیمم کمتر باشد. یعنی:

$\frac{-m + ۱}{۳} < ۱ \Rightarrow -m + ۱ < ۳ \Rightarrow -m < ۲ \Rightarrow m > -۲$

ج ـ ماکزیمم مقدار $|x - ۲| - |x - ۳|$ برابر است با:

$a = ۲ \ , \ b = ۳ \qquad |a - b| = |۲ - ۳| = ۱$

پس باید $\frac{۲ - m}{۵}$ از این مقدار ماکزیمم بیشتر باشد. یعنی:

$\frac{۲ - m}{۵} > ۱ \Rightarrow ۲ - m > ۵ \Rightarrow ۲ - ۵ > m \Rightarrow m < -۳$

د ـ

$|x + ۲| - |x + ۳| \leq ۳(m - ۱)$

$|x + ۳| - |x + ۲| \geq ۳(۱ - m)$

$|x - (-۳)| - |x - (-۲)| \geq ۳(۱ - m)$

چون مینیمم عبارت $|x - (-۳)| - |x - (-۲)|$ عبارتست از:

MATH75.IR

$-|a - b| = -|-۳ - (-۲)| = -۱$

پس $۳(۱ - m)$ از مینیمم این عبارت نباید بیشتر باشد، یعنی:

$۳(۱ - m) \leq -۱ \Rightarrow ۳ - ۳m \leq -۱ \Rightarrow ۴ \leq ۳m$

$\Rightarrow m \geq \frac{۴}{۳}$

مثال ۹۷: مقدار k چقدر باشد تا ماکزیمم عبارت $|x + k + ۲| - |x - k + ۳|$ برابر ۹ باشد؟ $(k > \frac{۱}{۲})$

حل:

$|x + k + ۲| - |x - k + ۳| = |x - (-k - ۲)| - |x - (k - ۳)|$

با اختیار $a = -k - ۲$ و $b = k - ۳$ داریم:

$a < b \Leftrightarrow -k - ۲ < k - ۳ \Leftrightarrow ۱ < ۲k \Leftrightarrow k > \frac{۱}{۲}$

که با شرط داده شده برای k سازگار است. می‌دانیم ماکزیمم عبارت $|x - a| - |x - b|$ با فرض $a < b$ برابر است با $|a - b|$. پس باید داشته باشیم:

$|a - b| = ۹ \Rightarrow |-k - ۲ - (k - ۳)| = ۹ \Rightarrow |-۲k + ۱| = ۹$

$\Rightarrow -۲k + ۱ = ۹$ یا $-۲k + ۱ = -۹ \Rightarrow k = -۴$ یا $k = ۵$

که با شرط $k > \frac{۱}{۲}$ فقط مقدار $k = ۵$ قابل قبول خواهد بود.

دامنهٔ تعریف عبارات گویا

فرض کنید $P(x)$ و $Q(x)$ دو عبارت جبری باشند و $\frac{P(x)}{Q(x)}$ خارج قسمت تقسیم $P(x)$ بر $Q(x)$ را نشان دهد. برای این که این کسر قابل تعریف باشد لازم است که داشته باشیم $Q(x) \neq ۰$. تمام xهایی از $\mathbf{R}$ که باعث شوند $Q(x)$ غیر صفر شود، مجموعه‌ای را به نام دامنهٔ تعریف $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را مشخص می‌کنند. اگر این مجموعه را با D نشان دهیم داریم:

$D = \{x | x \in \mathbf{R} ;\ Q(x) \neq ۰\}$

در این قسمت فرض براین است که $P(x)$ خودش شرطی را بر دامنه تحمیل نکند. اگر خود $P(x)$ نیز طوری بود که نیاز به تجدید نظر در دامنه احساس شد باید این کار انجام شود. به مثال‌های زیر دقت کنید.

مثال ۹۸: دامنهٔ تعریف هر یک از عبارات زیر را معین کنید.

الف) $\frac{x}{x - ۱}$

ب) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x^۴ + x^۲ + ۱}$

MATH75.IR

ج) $\frac{۲x + ۱}{x^۲ + x - ۶}$

د) $\frac{x + ۲}{x(x + ۱)(x + ۲)(x + ۳)}$

ه) $\frac{x}{x^۳ - x}$

و) $\frac{۲}{x} + \frac{x - ۱}{۲x + ۱}$

ز) $\frac{\frac{۲}{x} - ۱}{\frac{۳}{x} + ۱}$

ح) $\frac{\frac{۱}{x - ۱}}{\frac{۱}{x - ۱}}$

حل:

الف ـ $x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \qquad D = \mathbf{R} - \{۱\}$

ب ـ $x = ۰ \qquad D = \mathbf{R} - \{۰\}$

ج ـ $x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = -۳$ یا $x = ۲$

$D = \mathbf{R} - \{-۳ , ۲\}$

د ـ $x(x + ۱)(x + ۲)(x + ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا -۱ یا -۲ یا -۳

$D = \mathbf{R} - \{۰ , -۱ , -۲ , -۳\}$

دقت کنید که در اینجا قبل از تعیین دامنهٔ تعریف نمی‌توان $x + ۲$ را از صورت و مخرج حذف کرد و این کار پس از تعیین دامنهٔ تعریف امکان‌پذیر است.

ه ـ $x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا -۱ یا $+۱$

$D = \mathbf{R} - \{۰ , -۱ , ۱\}$

در اینجا نیز از ابتدا نمی‌توانیم xها را از صورت و مخرج حذف کنیم.

و ـ

$x = ۰ \quad , \quad ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$

$D = \mathbf{R} - \{۰ , -\frac{۱}{۲}\}$

ز ـ در اینجا صورت کسر نیز خودش عاملی دارد که باعث تعریف نشدن می‌باشد. لذا در مرحله اول ملاحظه می‌کنیم که باید $x \neq ۰$ (هم برای صورت و هم برای مخرج) باشد. پس از مخرج مشترک گرفتن و یک مرحله ساده کردن داریم:

$$\frac{\frac{۲ - x}{x}}{\frac{۳ + x}{x}} \overset{x \neq ۰}{=\!=} \frac{۲ - x}{۳ + x}$$

شرط $x \neq ۰$ را قبلاً اعمال کرده‌ایم و اینک شرط $۳ + x \neq ۰$ یعنی $x \neq -۳$ باید اعمال گردد. پس می‌توان گفت:

MATH75.IR

$D = \mathbf{R} - \{۰ , -۳\}$

ح)

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \qquad D = R - \{۱\}$

دامنهٔ تعریف عبارات گنگ

یک عبارت جبری به صورت $\sqrt[n]{P(x)}$ را یک عبارت اَصَم (گنگ) گویند. با اطلاعاتی که از رادیکال‌ها داریم، می‌دانیم که اگر n زوج باشد، عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد. ولی اگر n فرد باشد عبارت زیر رادیکال می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. به عبارتی دامنهٔ تعریف $\sqrt[n]{P(x)}$ اگر n زوج باشد بصورت زیر است:

$D = \{x | x \in \mathbf{R} \ ; \ P(x) \geq ۰\}$

و اگر n فرد باشد دامنهٔ تعریف $\sqrt[n]{P(x)}$ برابر $\mathbf{R}$ است. پس در تعیین دامنهٔ تعریف یک عبارت رادیکالی با فرجهٔ زوج معمولاً باید یک نامعادله را حل کرده و مجموعه جواب آن را به عنوان دامنهٔ تعریف بپذیریم. دقت کنید که اگر عبارت بصورت $\frac{q(x)}{\sqrt[n]{P(x)}}$ باشد در اینصورت اگر n زوج باشد $\{x | x \in \mathbf{R} \ ; \ P(x) > ۰\}$ دامنهٔ تعریف و اگر n فرد باشد $\{x | x \in \mathbf{R} \ ; \ P(x) \neq ۰\}$ دامنهٔ تعریف خواهد بود که در مثال‌های زیر بیشتر به این امر اشاره می‌شود.

مثال ۹۹: دامنهٔ تعریف عبارات زیر را مشخص کنید:

الف) $\sqrt{x}$

ب) $\sqrt{-x}$

ج) $\sqrt{|x|}$

د) $\sqrt{۲x - ۱}$

هـ) $\frac{۱}{\sqrt{x - |x|}}$

و) $\sqrt[۴]{\frac{x + ۱}{x - ۱}}$

ز) $\frac{\sqrt[۴]{x + ۱}}{\sqrt[۴]{x - ۱}}$

ح) $\frac{۲}{\sqrt{x}} - \frac{۳}{۲x - ۱}$

ط) $\sqrt[۵]{x^۳ + ۳x^۲ + ۲x - ۷}$

ی) $\frac{۵x + ۱}{\sqrt{۶x^۲ - x - ۱}}$

ک) $\frac{۵}{\sqrt{x + ۵}} - \frac{۲}{\sqrt{۲ - x}}$

ل) $\frac{۱}{\sqrt{x^۲ - x|x|}}$

MATH75.IR

م) $\sqrt{x^{۲} - x - ۶}$

ن) $\sqrt[۳]{۱ - \sqrt{-۲x + ۱}}$

س) $\sqrt{x - \sqrt{x}}$

ع) $\sqrt{x - \sqrt[۳]{x^{۳} - ۲x + ۱}}$

حل: الف ـ

$x \geq ۰ \Rightarrow D = [۰ , +\infty)$

ب ـ

$-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \Rightarrow D = (-\infty , ۰]$

ج ـ چون همواره $|x| \geq ۰$ لذا به ازاء هر مقدار از x ، $\sqrt{|x|}$ تعریف شده است و دامنه تعریف آن **R** است.

د ـ

$۲x - ۱ \geq ۰ \Rightarrow ۲x \geq ۱ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲}$

$D = \left[\frac{۱}{۲} , +\infty\right)$

هـ ـ در اینجا $x - |x|$ باید اکیداً مثبت باشد. (چرا؟)

$x - |x| > ۰ \Rightarrow x > |x|$

این نامساوی به ازاء هیچ مقدار از x برقرار نیست. (چرا؟) پس دامنهٔ تعریف عبارت داده شده تهی می‌باشد. یعنی: $D = \varnothing$

و ـ در اینجا باید دو شرط دنبال شود.

۱) $x - ۱ \neq ۰$

۲) $\frac{x + ۱}{x - ۱} \geq ۰$

شرط اول بیان می‌کند که $x \neq ۱$. اما برای شرط دوم تعیین علامت لازم است.

$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$

$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$x + ۱$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x - ۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$\frac{x + ۱}{x - ۱}$		$+$	۰	$-$	ن	$+$	

MATH75.IR

با توجه به شرط (۱) دامنهٔ تعریف عبارتست از:

$$D = \{x | x \in \mathbf{R} \ , \ x \leq -۱ \ \text{یا} \ x > ۱\} = (-\infty , -۱] \cup (۱ , +\infty)$$

ز ـ شاید تصور شود که عبارت اخیر همان عبارت قبلی است. اما اینطور نیست. وقتی فرجه رادیکال زوج باشد، تنها وقتی می‌توان $\sqrt[n]{\frac{p(x)}{Q(x)}}$ را به صورت $\frac{\sqrt[n]{p(x)}}{\sqrt[n]{q(x)}}$ نوشت که بدانیم هم $p(x)$ و هم $q(x)$ نامنفی‌اند. به عبارتی شرط تعیین دامنه در این مثال بصورت زیر است.

$$\begin{cases} x + ۱ \geq ۰ \\ x - ۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -۱ \\ x > ۱ \end{cases} \Rightarrow D = \{x | x \in \mathbf{R} , x > ۱\} = (۱ , +\infty)$$

ح ـ در اینجا دو شرط باید اعمال گردد.

$$\begin{cases} x > ۰ \\ ۲x - ۱ \neq ۰ \end{cases} \Rightarrow x \neq \frac{۱}{۲}$$

که با در نظر گرفتن این دو شرط دامنهٔ تعریف بصورت زیر در می‌آید:

$$D = \{x | x \in \mathbf{R} , x > ۰ \ , \ x \neq \frac{۱}{۲}\} = (۰ , +\infty) - \{\frac{۱}{۲}\}$$

ط ـ چون فرجه رادیکال فرد است و عبارت فاقد کسر است، لذا به ازاء هر x از $\mathbf{R}$ این عبارت تعریف شده است.

$$D = \mathbf{R}$$

ی ـ شرط تعریف این عبارت آنستکه:

$$۶x^۲ - x - ۱ > ۰$$

پس باید ریشه‌های معادله $۶x^۲ - x - ۱ = ۰$ را یافته و عبارت را تعیین علامت کنیم.

$$۶x^۲ - x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۲۴}}{۱۲} = \frac{۱ \pm ۵}{۱۲}$$

$$x_۱ = -\frac{۱}{۳} \ , \ x_۲ = \frac{۱}{۲}$$

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۶x^۲ - x - ۱$		+	۰	−	۰	+	
نتیجه		جواب				جواب	

$$D = (-\infty , -\frac{۱}{۳}) \cup (\frac{۱}{۲} , +\infty)$$

MATH75.IR

ک ـ در اینجا باید دو شرط بصورت مقابل اعمال گردد.

$$\begin{cases} x + ۵ > ۰ \\ ۲ - x > ۰ \end{cases}$$

که از حل آن بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x > -۵ \\ x < ۲ \end{cases}$$

و اشتراک آنها عبارتست از: $D = (-۵ , ۲)$

ل ـ

$$x^۲ - x|x| > ۰$$

اگر $x \geq ۰$ باشد بدست می‌آید $x^۲ - x^۲ > ۰$. یعنی $۰ > ۰$ که نادرست است. اگر $x < ۰$ باشد بدست می‌آید:

$$x^۲ - x(-x) > ۰ \Rightarrow x^۲ + x^۲ > ۰ \Rightarrow ۲x^۲ > ۰ \Rightarrow x^۲ > ۰$$

که این به ازاء هر $x \neq ۰$ برقرار است. ولی چون شرط $x < ۰$ را اعمال کنیم داریم:

$$D = (-\infty , ۰)$$

م ـ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - x - ۶ = ۰$ را می‌یابیم.

$$x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۲۴}}{۲} = \frac{۱ \pm ۵}{۲} \Rightarrow x_۱ = -۲ \quad , x_۲ = ۳$$

x	$-\infty$		-۲		۳		$+\infty$
$x^۲-x-۶$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$$D = (-\infty , -۲] \cup [۳ , +\infty)$$

ن ـ فرجهٔ رادیکال اصلی عددی فرد (۳) می‌باشد. لذا زیر رادیکال از نظر علامت هر چه باشد مهم نیست. ولی در زیر رادیکال اصلی یک رادیکال با فرجهٔ زوج ملاحظه می‌شود که باید عبارت تحت آن منفی نباشد.

$$-۲x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow -۲x \geq -۱ \Rightarrow x \leq \frac{۱}{۲}$$

$$D = (-\infty , \frac{۱}{۲}]$$

س ـ اولاً باید $x \geq ۰$ باشد. ثانیاً: $x - \sqrt{x} \geq ۰ \Rightarrow x \geq \sqrt{x}$ چون هر دو طرف نامساوی مثبت‌اند، طرفین را می‌توان به توان ۲ رساند.

MATH75.IR

$x^{۲} \geq x \Rightarrow x(x-۱) \geq ۰$

$x = ۰ \quad x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$x(x-۱)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

با توجه به اینکه باید $x \geq ۰$ باشد، دامنهٔ تعریف عبارت است از:

$D = [۱, +\infty) \cup \{۰\}$

ع ـ به ازاء هر مقدار از x عبارت $\sqrt[۳]{x^{۳} - ۲x + ۱}$ قابل تعریف است. فقط باید شرط $x - \sqrt[۳]{x^{۳} - ۲x + ۱} \geq ۰$ را اعمال کنیم. داریم:

$x \geq \sqrt[۳]{x^{۳} - ۲x + ۱} \longrightarrow x^{۳} \geq x^{۳} - ۲x + ۱ \Rightarrow$

$۲x \geq ۱ \Rightarrow x \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow D = [\frac{۱}{۲}, +\infty[$

مثال ۱۰۰: حدود k را چنان تعیین کنید که دامنهٔ تعریف عبارت $\frac{k-۱}{\sqrt{۳x-k+۲}}$ برابر $D = (-\frac{۱}{۳}, +\infty)$ باشد.

حل: باید داشته باشیم $۳x - k + ۲ > ۰$ که از حل آن بدست می‌آید $x > \frac{k-۲}{۳}$. بنابر دامنهٔ تعریف پیشنهادی باید داشته باشیم $\frac{k-۲}{۳} \geq -\frac{۱}{۳}$. که از آن بدست می‌آید $k \geq ۱$.

ج ـ حل معادله‌های شامل عبارات گویا

در اینگونه معادله‌ها اگر یافتن دامنهٔ تعریف عبارت کار دشواری نباشد بهتر است که ابتدا دامنهٔ تعریف را بیابیم. سپس بین کسرهای داده شده مخرج مشترک می‌گیریم که معمولاً ک. م. م مخرج‌ها راه گشا می‌باشد و در آخر با اعمال جبری مناسب عبارت را به یک معادلهٔ درجه اول، دوم یا ... تبدیل کرده و به حل آن مبادرت می‌ورزیم. جواب‌های بدست آمده را در صورت تعلق داشتن به دامنهٔ تعریف برگزیده و داخل مجموعه‌ای به نام مجموعهٔ جواب معادله نگهداری می‌کنیم. اگر در ابتدا دامنهٔ تعریف را نیافته باشیم در مرحلهٔ آخر باید جواب‌های بدست آمده را در معادلهٔ اولیه آزمایش کنیم و در صورت صدق کردن در معادله، آنها را در مجموعهٔ جواب قرار دهیم.

مثال ۱۰۱: معادله‌های زیر را حل کرده، مجموعه جواب را مشخص کنید.

MATH75.IR

الف) $x + \frac{۱}{x} = -\frac{۵}{۲}$

ب) $\frac{۲x - ۱}{x + ۱} - \frac{x + ۲}{x - ۱} = -۳$

ج) $\frac{۲x + ۱}{x - ۲} - \frac{۲x - ۱}{x + ۲} = \frac{۳(x^۲ + ۱)}{x^۲ - ۴}$

د) $\frac{۲(۱ - x)}{۵} - \frac{۳(x + ۱)}{۲} = -۱$

هـ) $\frac{۲x + ۳}{x + ۵} = \frac{۲x - ۳}{x - ۱}$

و) $\frac{x}{۵} + \frac{x - ۲}{x + ۱} = \frac{\frac{۶x}{۵}}{۲x + ۲}$

ز) $\frac{\frac{۱}{x + ۱} + \frac{x}{۱ - x}}{\frac{۱}{۱ - x} - \frac{x}{۱ + x}} = ۱$

الف ـ دامنهٔ تعریف این معادله $D = \mathbf{R} - \{۰\}$ است.

$$x + \frac{۱}{x} = -\frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{x^۲ + ۱}{x} = -\frac{۵}{۲} \Rightarrow ۲x^۲ + ۲ = -۵x \Rightarrow$$

$$۲x^۲ + ۵x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۵ \pm \sqrt{۲۵ - ۱۶}}{۴} = \frac{-۵ \pm ۳}{۴}$$

$$x_۱ = -۲ \ , x_۲ = -\frac{۱}{۲} \qquad A = \{-۲ , -\frac{۱}{۲}\}$$

ب ـ

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \ , \ x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \qquad D = \mathbf{R} - \{-۱ , ۱\}$$

$$\frac{(x - ۱)(۲x - ۱) - (x + ۱)(x + ۲)}{(x + ۱)(x - ۱)} = -۳ \Rightarrow \frac{x^۲ - ۶x - ۱}{(x + ۱)(x - ۱)} = -۳$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۶x - ۱ = -۳(x^۲ - ۱) \Rightarrow ۴x^۲ - ۶x - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x - ۲ = ۰$$

$$x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ + ۱۶}}{۴} = \frac{۳ \pm ۵}{۴} \Rightarrow x_۱ = ۲ \ , \ x_۲ = -\frac{۱}{۲}$$

که هر دو در دامنهٔ تعریف موجودند. پس:

$$A = \{-\frac{۱}{۲} , ۲\}$$

ج ـ

$$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \ , \ x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \qquad D = \mathbf{R} - \{-۲ , ۲\}$$

$$\frac{(۲x + ۱)(x + ۲) - (x - ۲)(۲x - ۱)}{x^۲ - ۴} = \frac{۳(x^۲ + ۱)}{x^۲ - ۴} \Rightarrow ۱۰x = ۳x^۲ + ۳$$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۱۰x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۱۰۰ - ۳۶}}{۶} = \frac{۱۰ \pm ۸}{۶}$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۳} \ , \ x_۲ = ۳$$

که هر دو در دامنهٔ تعریف موجودند. لذا:

$$A = \{\frac{۱}{۳} , ۳\}$$

د ـ در اینجا دامنهٔ تعریف **R** است. طرفین معادله را در ۱۰ (ک. م. م مخرج‌ها) ضرب می‌کنیم.

$$۴(۱ - x) - ۱۵(x + ۱) = -۱۰ \Rightarrow ۴ - ۴x - ۱۵x - ۱۵ = -۱۰ \Rightarrow$$

$$-۱۹x = ۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۱۹} \qquad A = \left\{-\frac{۱}{۱۹}\right\}$$

هـ ـ

$$x + ۵ = ۰ \Rightarrow x = -۵$$
$$x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \qquad D = \mathbf{R} - \{-۵ , ۱\}$$
$$\frac{۲x + ۳}{x + ۵} = \frac{۲x - ۳}{x - ۱} \Rightarrow (۲x + ۳)(x - ۱) = (x + ۵)(۲x - ۳) \Rightarrow$$
$$x - ۳ = ۷x - ۱۵ \Rightarrow -۶x = -۱۲ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow A = \{۲\}$$

و ـ

$$x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \qquad ۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱ \qquad D = \mathbf{R} - \{-۱\}$$

$$\frac{x}{۵} + \frac{x - ۲}{x + ۱} - \frac{۳x}{۵(x + ۱)} = ۰ \Rightarrow \frac{x(x + ۱) + ۵(x - ۲) - ۳x}{۵(x + ۱)} = ۰ \Rightarrow$$

$$x^۲ + ۳x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۹ + ۴۰}}{۲} = \frac{-۳ \pm ۷}{۲} \Rightarrow x_۱ = -۵ , x_۲ = ۲$$

$$A = \{-۵ , ۲\}$$

ز ـ در اینجا به علت پر حجم بودن عبارت داده شده یافتن دامنهٔ تعریف در ابتدای کار مقرون به صرفه نیست. با کارهای جبری متداول، معادله را حل کرده جواب‌ها را می‌یابیم و آنها را در معادله امتحان می‌کنیم. هر کدام که مشکلی بوجود نیاورند قبول و بقیه را حذف می‌کنیم.

$$\frac{\dfrac{۱ - x + x(x + ۱)}{(۱ + x)(۱ - x)}}{\dfrac{۱ + x - x(۱ - x)}{(۱ - x)(۱ + x)}} = ۱ \Rightarrow \frac{۱ + x^۲}{۱ + x^۲} = ۱$$

عبارت اخیر به ازاء جمیع مقادیر x برقرار است. ولی در محاسبات صورت گرفته و در کسر بالا ملاحظه می‌کنید که $x = ۱$ یا $x = -۱$ باعث صفر شدن مخرج کسرها می‌شوند. پس باید این دو عدد را از مجموعه جواب حذف کنیم. یعنی داشته باشیم:

MATH75.IR

$A = \mathbf{R} - \{-۱ , ۱\}$

مثال ۱۰۲: به ازاء چه مقدار از k مجموعه جواب معادلهٔ $\frac{۱}{x-۱} + \frac{۳۸}{k} = \frac{۳x}{x+۱}$ برابر $A = \{-۲\}$ است؟

حل: به جای x در معادله ۲− قرار می‌دهیم.

$$\frac{۱}{-۳} + \frac{۳۸}{k} = \frac{-۶}{-۱} \Rightarrow -\frac{۱}{۳} + \frac{۳۸}{k} = ۶ \Rightarrow \frac{۳۸}{k} = \frac{۱۹}{۳}$$

$$\Rightarrow k = ۶$$

مثال ۱۰۳: از تساوی $\frac{۳xy - ۲}{x + y} = \frac{۲x + ۱}{۵}$ ، y را برحسب x محاسبه کنید.

حل:

$$۵(۳xy - ۲) = (x + y)(۲x + ۱) \Rightarrow ۱۵xy - ۱۰ = ۲x^۲ + x + ۲xy + y$$

$$\Rightarrow ۱۳xy - y = ۲x^۲ + x + ۱۰ \Rightarrow y(۱۳x - ۱) = ۲x^۲ + x + ۱۰$$

$$\Rightarrow y = \frac{۲x^۲ + x + ۱۰}{۱۳x - ۱}$$

ملاحظه می‌گردد که عبارت اولیه به ازاء هر مقدار x یا y برقرار نیست. بلکه باید قید شود $x \neq \frac{۱}{۱۳}$ (چرا؟)

معادلات اصم

اگر معادله چنان باشد که متغیر (مجهول) در زیر رادیکال به کار رفته باشد، معادله را معادله اصم (گنگ) گویند. برای حل اینگونه معادلات نیز بهتر است ابتدا دامنهٔ متغیر را مشخص کنیم و سپس با کارهای جبری مناسب که اغلب در این موارد توان رساندن طرفین تساوی کارساز است در جهت یافتن مقدار مجهول قدم برداریم. بعد از یافتن جواب‌ها آنهایی را که در دامنهٔ تعریف نیز هستند. قبول و آنهایی را که در دامنهٔ تعریف موجود نیستند حذف کنیم. در مثال‌های زیر فقط به توان رساندن نیاز است. (گاهی اوقات جواب‌های بدست آمده در دامنه هستند ولی در معادله صدق نمی‌کنند. این جوابها را ریشه‌های خارجی می‌گویند).

مثال ۱۰۴: مجموعه جواب هر یک از معادلات اصم زیر را تعیین کنید.

الف) $x = \sqrt{x}$

ب) $\sqrt{x + ۱} - x = -۵$

ج) $x + ۲\sqrt{۱ - ۳x} = ۳$

د) $\sqrt{x - \sqrt{x}} = \sqrt{x} - ۱$

MATH75.IR

حل: الف ـ

$x \geq ۰ \Rightarrow D = [۰ , +\infty)$

$x = \sqrt{x} \longrightarrow x^۲ = x \Rightarrow x(x - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۱$

$A = \{۰ , ۱\}$

ب ـ

$\sqrt{x + ۱} = x - ۵ \qquad x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \qquad D = [-۱ , +\infty)$

با توجه به تساوی بدست آمده دقت کنید که باید $x - ۵ \geq ۰$ باشد، یعنی $x \geq ۵$ باشد. (چرا؟)

اگر طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم داریم:

$$x + ۱ = x^۲ - ۱۰x + ۲۵ \Rightarrow x^۲ - ۱۱x + ۲۴ = ۰$$

$$x = \frac{۱۱ \pm \sqrt{۱۲۱ - ۹۶}}{۲} = \frac{۱۱ \pm \sqrt{۲۵}}{۲} = \frac{۱۱ \pm ۵}{۲}$$

$$x_۱ = ۳ \quad , \quad x_۲ = ۸$$

که با توجه به توضیحات گفته شده $x = ۸$ قابل قبول است.

$$A = \{۸\}$$

ج -

$$x + ۲\sqrt{۱ - ۳x} = ۳ \Rightarrow ۲\sqrt{۱ - ۳x} = ۳ - x$$

$$۱ - ۳x \geq ۰ \Rightarrow x \leq \frac{۱}{۳} \qquad D = (-\infty , \frac{۱}{۳}]$$

همچنین باید $۳ - x \geq ۰$ باشد که بدست می‌آید $x \leq ۳$ و این شرط جدیدی را ایجاب نمی‌کند.

با به توان رساندن دو طرف تساوی داریم.

$$۴(۱ - ۳x) = ۹ + x^۲ - ۶x \Rightarrow ۴ - ۱۲x = ۹ + x^۲ - ۶x \Rightarrow$$

$$x^۲ + ۶x + ۵ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۶ \pm \sqrt{۳۶ - ۲۰}}{۲} = \frac{-۶ \pm ۴}{۲}$$

$$x_۱ = -۵ \quad , \quad x_۲ = -۱$$

که هر دو جواب قابل قبول‌اند.

$$A = \{-۵ , -۱\}$$

د ـ طرفین را به توان دو می‌رسانیم:

$$x - \sqrt{x} = x + ۱ - ۲\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = ۱ \Rightarrow x = ۱$$

MATH75.IR

که اگر در داخل معادله قرار دهیم بدست می‌آید:

$$\sqrt{۱ - \sqrt{۱}} = \sqrt{۱} - ۱ \Leftrightarrow ۰ = ۰$$

که برقرار است. پس: $A = \{۱\}$ مجموعه جواب معادله است.

گاهی اوقات استفاده از اتحادها برای حل معادلهٔ اصم کارساز است.

مثال ۱۰۵: معادلهٔ زیر را حل کرده و مجموعه جواب آن را مشخص کنید.

$$\sqrt[۳]{x - ۵} + \sqrt[۳]{x + ۳} = \sqrt[۳]{۲x - ۲}$$

حل: یادآوری اتحاد اولر:

$$\forall a , b , c \in \mathbf{R} ;\ a^۳ + b^۳ + c^۳ - ۳abc = (a + b + c)(a^۲ + b^۲ + c^۲ - ab - ac - bc)$$

و در حالت خاص اگر $a + b + c = ۰$ آنگاه:

$$a^۳ + b^۳ + c^۳ = ۳abc$$

در اینجا داریم:

$$\sqrt[۳]{x - ۵} + \sqrt[۳]{x + ۳} + \sqrt[۳]{۲ - ۲x} = ۰$$

$$(x - ۵) + (x + ۳) + (۲ - ۲x) = ۳\sqrt[۳]{x - ۵} \times \sqrt[۳]{x + ۳} \times \sqrt[۳]{۲ - ۲x}$$

$$۰ = ۳\sqrt[۳]{x - ۵} \times \sqrt[۳]{x + ۳} \times \sqrt[۳]{۲ - ۲x}$$

$$\sqrt[۳]{x - ۵} = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۵} \text{ یا } \sqrt[۳]{x + ۳} = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -۳} \text{ یا } \sqrt[۳]{۲ - ۲x} = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۱}$$

برای حل بعضی از معادلات اصم لازم است که یک تغییر متغیر داده شود. در این موارد تمام عبارت رادیکالی یا تمام عبارت زیر رادیکال یا بخشی از عبارت زیر رادیکال را به عنوان متغیری جدید در نظر می‌گیرند. معادله را با متغیر جدید حل کرده، جواب‌های آن را می‌یابند، سپس از رابطه‌ای که متغیر جدید با متغیر قدیم دارد استفاده کرده و مقدار یا مقادیر متغیر قدیم را بدست می‌آورند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۰۶: مجموعهٔ جواب هر یک از معادلات اصم زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{x^۲ + x + ۳} + \sqrt{x^۲ + x + ۱۰} = ۷$

ب) $۴\sqrt{\frac{x}{x + ۹}} + \sqrt{۱ + \frac{۹}{x}} = ۴$

حل: الف ـ با اختیار $x^۲ + x = y$ داریم:

$$\sqrt{y + ۳} + \sqrt{y + ۱۰} = ۷ \Rightarrow \sqrt{y + ۳} = ۷ - \sqrt{y + ۱۰} \Rightarrow$$

MATH75.IR

$$y + ۳ = ۴۹ + y + ۱۰ - ۱۴\sqrt{y + ۱۰} \Rightarrow ۱۴\sqrt{y + ۱۰} = ۵۶ \Rightarrow$$

$$\sqrt{y + ۱۰} = ۴ \Rightarrow y + ۱۰ = ۱۶ \Rightarrow y = ۶$$

$$x^۲ + x = ۶ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۲۴}}{۲} = \frac{-۱ \pm ۵}{۲}$$

$$\Rightarrow x = -۳ \text{ یا } x = ۲$$

که با امتحان این مقادیر در معادلهٔ اصلی ملاحظه می‌گردد که هر دو قابل قبول‌اند. یعنی:

$$A = \{-۳ , ۲\}$$

ب ـ با انتخاب $\sqrt{۱ + \frac{۹}{x}} = t$ خواهیم داشت $\sqrt{\frac{x + ۹}{x}} = t$ و

$$\frac{۴}{t} + t = ۴ \Rightarrow ۴ + t^۲ = ۴t \Rightarrow t^۲ - ۴t + ۴ = ۰ \Rightarrow$$

$$(t - ۲)^۲ = ۰ \Rightarrow t - ۲ = ۰ \Rightarrow t = ۲$$

با جایگذاری داریم:

$$\sqrt{\frac{x + ۹}{x}} = ۲ \Rightarrow \frac{x + ۹}{x} = ۴ \Rightarrow x + ۹ = ۴x \Rightarrow$$

$$۹ = ۳x \Rightarrow \boxed{x = ۳} \quad , \quad A = \{۳\}$$

از این خاصیت که جمع چندین عدد غیرمنفی وقتی صفر است که تک تک آنها صفر باشند نیز در حل معادلات اصم می‌توان استفاده کرد.

مثال ۱۰۷: معادله مقابل را حل کنید.

$$\sqrt{x - ۲} + ۳\sqrt{x^۲ - ۴} = ۰$$

حل: $\sqrt{x - ۲} \geq ۰$ و $\sqrt{x^۲ - ۴} \geq ۰$ می‌باشند. برای برقراری تساوی لازم است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \\ x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \end{cases}$$

که برای تحقق هر دو شرط کافی است قرار دهیم $x = ۲$.

نامعادلات اصم

طبق آنچه قبلاً در حل نامعادلات گفته شد در اینجا نیز با توجه به دامنهٔ تعریف عبارت داده شده و استفاده از قضایای موجود در نامساوی‌ها به حل نامعادله پرداخته و مجموعه جواب را در صورت امکان مشخص می‌کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱۰۸: نامعادلات زیر را حل کرده و مجموعه جواب هر یک را مشخص کنید.

MATH75.IR

الف) $۲\sqrt{x+۱} - ۶ > ۰$

ب) $\sqrt{x+۱} \geq \sqrt{۲x-۱}$

ج) $\sqrt{(x-۳)(x+۱)} > ۳(x+۱)$

د) $|x\sqrt{x} + ۱| < ۱$

هـ) $\frac{۲\sqrt{x}+۱}{۳\sqrt{x}+۱} > ۱$

و) $|\sqrt{x+۱} - ۵| > ۱$

ز) $\sqrt{x+۱} + \sqrt{x-۲} \leq ۲$

ح) $\sqrt{۱-x}\,(x^۲ - ۴) < ۰$

ط) $\sqrt{x^۲ - ۲\sqrt{x^۲} + ۱} \leq ۱$

ی) $\sqrt{|x| - ۱} > \sqrt{x} - ۱$

حل: الف ـ

$$\sqrt{x+۱} > ۳ \longrightarrow x+۱ > ۹ \Rightarrow x > ۸$$

$$A = (۸, +\infty)$$

ب ـ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$x+۱ \geq ۲x-۱ \Rightarrow ۲ \geq x \Rightarrow x \leq ۲$$

در اینجا این سؤال پیش می‌آید که آیا هر xای که از ۲ بیشتر نباشد در این نامعادله صدق می‌کند؟ برای پاسخ به این سؤال باید دامنهٔ تعریف را نیز بیابیم.

$$\begin{cases} x+۱ \geq ۰ \\ ۲x-۱ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -۱ \\ x \geq \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow D = [\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

پس مجموعهٔ جواب عبارتست از:

$$A = [\frac{۱}{۲}, ۲]$$

ج ـ ابتدا دامنهٔ تعریف را مشخص می‌کنیم.

$$x-۳ = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

$$x+۱ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
$(x-۳)(x+۱)$		+	۰	−	۰	+	

$$D = (-\infty, -۱] \cup [۳, +\infty)$$

ملاحظه می‌گردد که اگر $x < -۱$ باشد آنگاه $x+۱ < ۰$ و نامعادله در این حالت برقرار است.

$$A_۱ = (-\infty, -۱)$$

MATH75.IR

با فرض $x > ۳$ ($x = ۳$ در نامعادله صدق نمی‌کند. چرا؟) طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(x - ۳)(x + ۱) > ۹(x + ۱)^۲$$

چون $x + ۱ > ۰$ (زیرا $x > ۳$) طرفین را بر $x + ۱$ تقسیم می‌کنیم.

$$x - ۳ > ۹(x + ۱) \Rightarrow x - ۳ > ۹x + ۹ \Rightarrow -۱۲ > ۸x$$

$$\Rightarrow x < -\frac{۱۲}{۸} \Rightarrow x < -\frac{۳}{۲}$$

که با توجه به $x > ۳$ این شرط قابل قبول نیست. و لذا در این حالت نامعادله جواب ندارد و مجموعهٔ جواب کلی آن همان است که قبلاً یافته‌ایم. یعنی: $A = (-\infty , -۱)$

د ـ دامنهٔ تعریف این عبارت برابر است با: $D = [۰ , +\infty)$

با استفاده از نامساوی خوانده شده در قدرمطلق نامعادله داده شده معادل نامعادلهٔ زیر است.

$$-۱ < x\sqrt{x} + ۱ < ۱$$

با کم کردن یک واحد از همه داریم:

$$-۲ < x\sqrt{x} < ۰$$

با توجه به غیر منفی بودن x این نامعادله به ازاء هیچ مقدار $x \geq ۰$ برقرار نیست. لذا داریم:

$$A = \varnothing$$

هـ ـ دامنهٔ تعریف عبارتست از:

$$D = [۰ , +\infty)$$

چون $۳\sqrt{x} + ۱ > ۰$ است می‌توان طرفین نامعادله را در آن ضرب کرد.

$$\frac{۲\sqrt{x} + ۱}{۳\sqrt{x} + ۱} > ۱ \Rightarrow ۲\sqrt{x} + ۱ > ۳\sqrt{x} + ۱ \Rightarrow ۰ > \sqrt{x}$$

این نامعادله نیز با توجه به دامنهٔ تعریف هیچگاه برقرار نیست. لذا:

$$A = \varnothing$$

و ـ دامنهٔ تعریف را بدست می‌آوریم:

$$x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \Rightarrow D = [-۱ , +\infty)$$

با توجه به نامساوی خوانده شده در قدر مطلق نامعادله داده شده معادل اجتماع دو نامعادلهٔ زیر است.

$$\sqrt{x + ۱} - ۵ > ۱ \quad \text{یا} \quad \sqrt{x + ۱} - ۵ < -۱$$

که با حل هر کدام داریم:

$$\sqrt{x + ۱} - ۵ > ۱ \Rightarrow \sqrt{x + ۱} > ۶ \Rightarrow x + ۱ > ۳۶ \Rightarrow x > ۳۵$$

MATH75.IR

با توجه به دامنهٔ تعریف:

$$A_۱ = (۳۵ , +\infty)$$

$$\sqrt{x+۱} - ۵ < -۱ \Rightarrow \sqrt{x+۱} < ۴ \Rightarrow x + ۱ < ۱۶ \Rightarrow x < ۱۵$$

و با توجه به دامنهٔ تعریف:

$$A_۲ = [-۱ , ۱۵)$$

پس مجموعهٔ جواب کل نامعادله عبارتست از:

$$A = A_۱ \cup A_۲ = [-۱ , ۱۵) \cup (۳۵ , +\infty)$$

ز ـ دامنهٔ تعریف را می‌یابیم.

$$\begin{cases} x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱ \\ x - ۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲ \end{cases} \Rightarrow D = [۲ , +\infty)$$

طرفین نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم. داریم:

$$x + ۱ + x - ۲ + ۲\sqrt{x^۲ - x - ۲} \leq ۴ \Rightarrow ۲\sqrt{x^۲ - x - ۲} \leq ۵ - ۲x$$

برای برقراری نامعادلهٔ اخیر لازم است که $۵ - ۲x \geq ۰$ باشد، یعنی $x \leq \frac{۵}{۲}$ (چرا؟) با این فرض طرفین را باز هم به توان ۲ می‌رسانیم.

$$۴(x^۲ - x - ۲) \leq ۲۵ + ۴x^۲ - ۲۰x \Rightarrow ۱۶x \leq ۳۳ \Rightarrow x \leq \frac{۳۳}{۱۶}$$

که با توجه به دو شرط قبل (یعنی $x \geq ۲$, $x \leq \frac{۵}{۲}$) و با توجه به اینکه $\frac{۳۳}{۱۶} < \frac{۵}{۲}$ کافیست مجموعه جواب را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A = [۲ , \frac{۳۳}{۱۶}]$$

ح ـ دامنهٔ تعریف عبارت است از:

$$۱ - x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۱ \qquad D = (-\infty , ۱]$$

چون در این شرایط $\sqrt{۱ - x} \geq ۰$ است. پس برای برقراری نامعادله لازم است که داشته باشیم $x^۲ - ۴ < ۰$ که از آنجا بدست می‌آید:

$$x^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲$$

x		-۲		۲	
$x^۲ - ۴$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$$-۲ < x < ۲$$

با توجه به دامنهٔ تعریف و اینکه $x = ۱ , -۲$ در نامعادله صدق نمی‌کند، مجموعه جواب

MATH75.IR

بصورت زیر می‌شود.

$A = (-۲ , ۱)$

ط ـ

$$\sqrt{x^۲ - ۲\sqrt{x^۲} + ۱} \leq ۱ \Rightarrow \sqrt{|x|^۲ - ۲|x| + ۱} \leq ۱ \Rightarrow$$

$$\sqrt{(|x| - ۱)^۲} \leq ۱ \Rightarrow \big| |x| - ۱ \big| \leq ۱ \Rightarrow$$

$$-۱ \leq |x| - ۱ \leq ۱ \Rightarrow ۰ \leq |x| \leq ۲$$

چون همواره $|x| \geq ۰$ می‌باشد، کافیست شرط $|x| \leq ۲$ را پی‌گیری کنیم که بصورت زیر در می‌آید.

$$|x| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲$$

$A = [-۲ , ۲]$

ی ـ دامنهٔ تعریف عبارتست از: $D = [۱ , +\infty)$. لذا $|x| = x$ است و داریم:

$$\sqrt{x - ۱} > \sqrt{x} - ۱ \Rightarrow \sqrt{x - ۱} + ۱ > \sqrt{x}$$

چون هر دو طرف مثبت‌اند، طرفین را به توان دو می‌رسانیم.

$$x - ۱ + ۱ + ۲\sqrt{x - ۱} > x \Rightarrow ۲\sqrt{x - ۱} > ۰ \Rightarrow \sqrt{x - ۱} > ۰$$

پس کافیست قرار دهیم $x - ۱ > ۰$ که بدست می‌آید $x > ۱$ با توجه به دامنهٔ تعریف خواهیم داشت:

$A = (۱ , +\infty)$

MATH75.IR

تمرین‌های فصل اول

۱ـ اگر a، b، c و d اعداد حقیقی باشند بطوریکه $a < b$ و $c < d$، ثابت کنید:

$$a + c < b + d$$

۲ـ اگر a، b، c و d اعداد حقیقی باشند بطوریکه $a < b$، $c < d$ و $d > 0$ و c باشند، ثابت کنید:

$$ac < bd$$

۳ـ به ازاء هر سه عدد حقیقی a، b و c ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $a = b = c$.

۴ـ اگر $a > 0$ باشد ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \geq 2$. تساوی چه موقع برقرار است؟

۵ـ اگر $a < 0$ باشد ثابت کنید: $a + \frac{1}{a} \leq -2$، تساوی چه موقع برقرار است؟

۶ـ اگر a و b متحدالعلامه باشند ثابت کنید: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. تساوی چه موقع برقرار است؟

۷ـ اگر a و b مختلف العلامه باشند ثابت کنید $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. تساوی چه موقع برقرار است؟

۸ـ اگر $x \neq 5$ باشد و داشته باشیم $y = x + \frac{1}{x-5}$، حدود y را تعیین کنید.

۹ـ اگر داشته باشیم $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ و $p = ab + ac + bc$، نشان دهید:

$$-3 \leq p \leq 6$$

۱۰ـ با توجه به خواص ذکر شده در نامساوی‌ها محدوده x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\frac{1}{x-1} < \frac{1}{4}$$

۱۱ـ بیشترین و کمترین مقدار عبارت $y = \frac{-4x^3}{x^6+1}$ را پیدا کنید.

۱۲ـ اگر $x < y$ و $0 < a < b$ باشد ثابت کنید:

$$x < \frac{bx + ay}{a + b} < y$$

۱۳ـ به ازاء هر سه عدد حقیقی x، y و z ثابت کنید:

MATH75.IR

$$3(xy + xz + yz) \le (x + y + z)^2 \le 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

۱۴ـ طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید.

الف) $(-2 , 3] \cap [-1 , 4) = \dots$

ب) $[-3 , 4) \cap [(2 , 3) \cup (-3 , -1)] = \dots$

ج) $(-1 , 2) \cap [[-1 , 0) \cup (1 , 2]] = \dots$

د) $(-\frac{1}{2} , \frac{1}{2}] \cap (-\frac{1}{3} , \frac{1}{3}] \cap \dots \cap (-\frac{1}{1381} , \frac{1}{1381}] = \dots$

۱۵ـ عبارات زیر را تعیین علامت کنید:

الف) $\frac{-3}{(x - 1)(x + 1)}$

ب) $\frac{x^3 - x^2 - 2x + 8}{-2|x - 1|}$

ج) $x^3 - 2x^2 - 5x + 5$

د) $\frac{-6x^2 + 11x - 3}{x^2 - x + 1}$

هـ) $\frac{(x - 1)^2(3 - x)^3}{-3x^2 + 6x}$

د) $\frac{(x - 2)^2(x + 5)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)(3 - x)}$

ز) $(x + 5)^3(x - 2)^2(x^2 + x + 1)$

ح) $\frac{(x + 1)^2 - 4}{x^8 + x^4 + 5}$

ط) $\frac{(x - 1)^2(x + 2)^3}{-x^2 + 2x - 2}$

ی) $\frac{-x^2\sqrt{-x^2 + 11x - 10}}{x^2 - 6x + 8}$

ک) $\frac{(-x^2 + 4x - 3)(x^2 - 25)}{-x(3x^2 - 2x - 1)(x^2 - x)}$

ل) $\frac{(x^2-5x+6)^{13}(x^2 - 1)(x^2-7x + 12)^7}{(x^2 + 7x + 10)(2x^2-x)(x^2 + 11)}$

م) $\frac{(x^3 + 1)^7(3x - 6)^6(x - 3)^5}{x^4 - 10x^2 + 9}$

ن) $\frac{x^4 + 6x^2 - 7}{\sqrt[3]{x^2 - 2x - 15}}$

س) $|2x + 6| - |x - 1|$

ع) $|x^3 - x| - |x - 2|$

۱۶ـ نامعادلات زیر را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

الف) $\frac{(x + 3)(x - 2)}{-x(x + 1)^2} \le 0$

ب) $\frac{2x + 2}{x^2 - 4} \le 0$

ج) $(2x^2 - 2x - 3)^2 \le (x^2 - x - 3)^2$

د) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) < 48$

هـ) $\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 + 3x + 2} < 0$

و) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} > 1$

ز) $\frac{x^4 - 6x^3 + x^2 - 6x}{(3x^2 - 5x + 7)(-2x + 8)} > 0$

ح) $x^5 + 2 \le 2x^3 + x^2$

ط) $\frac{(x + 8)^4(1 - x)^3}{(x + 5)(x - 2)^2} \ge 0$

ک) $\frac{(x + 7)(x - 5)^3}{(x + 11)^3(x + 4)(3 - x)(x - 6)} \ge 0$

MATH75.IR

ل) $\frac{(x^2-4)^2-(2x+4)^2}{x^2(-x^2+6x-9)(x-4)^4}<0$

م) $\frac{x}{x+1}+3\le 4-\frac{2}{x+1}$

ن) $\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}\ge\frac{2x-1}{x^3+1}$

س) $-1<\frac{3x-2}{x-1}<1$

ع) $-1<\frac{3x^2-4x}{x+1}<0$

ف) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+4x-2}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+13}$

ص) $\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-7}>0$

ق) $\frac{2}{2-x}+\frac{3}{2+x}\ge\frac{4x}{4-x^2}$

ر) $\frac{4x-17}{x-4}+\frac{10x-13}{2x-3}>\frac{8x-30}{2x-7}+\frac{5x-4}{x-1}$

ش) $(x+3)^4+(x+5)^4\ge 4$

۱۷ـ دستگاه‌های نامعادلات زیر را حل کرده و مجموعه جواب را تعیین کنید.

الف) $\begin{cases}x^2-x-6\le 0\\ x^2-4x<0\end{cases}$

ب) $\begin{cases}1-x^2<0\\ x^2-x-12<0\end{cases}$

ج) $\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{x-3}{2}<\frac{5}{6}\\ x^2-9x<-14\end{cases}$

ب) $\begin{cases}x^2-5x+6>0\\ \frac{3x-21}{x^2+x+4}<0\end{cases}$

هـ) $1\le\frac{2-x}{x+1}\le 2$

و) $\begin{cases}\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}>1\\ \frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\le 2\end{cases}$

ز) $\begin{cases}x^2-4<0\\ x+1>0\\ \frac{1}{2}-x>0\end{cases}$

ح) $\begin{cases}x^4-x^3-x^2-x-2\le 0\\ x^4-2x^3+x^2-8x-12\ge 0\end{cases}$

۱۸ـ حدود m را چنان تعیین کنید که نامساوی‌های زیر به ازاء همهٔ مقادیر x برقرار باشند.

الف) $(2-m)x^2+4x-m-1>0$

ب) $x^2+2(m^2-1)x+m^4-3m^2+10>0$

ج) $(m+1)x^2-2(m-1)x+2m-3>0$

د) $-3<\frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}<2$

هـ) $(m-2)x^2+m<4x-1$

و) $\frac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$

MATH75.IR

ز) $\frac{x^2 + 3x + m}{x^2 + x + 1} < 2$

ح) $-2mx^2 + 3(m - 1) < 0$

ط) $\frac{x^2 + mx - 1}{2x^2 - 2x + 3} < 1$

ی) $\frac{mx^2 - 2mx - 1}{x^2 - 2x + 3} < 1$

ک) $(m - 2)x^2 - 2mx + m + 3 > 0$

ل) $\frac{(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 3}{-x^2 - 1} < 0$

۱۹ـ معادله‌های زیر را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

الف) $\left| |2x| - 5 \right| = 7$

ب) $\left| |2x - 1| + 3 \right| = 5$

ج) $|x + 2| + |x + 5| = 3$

د) $|x - 7| + |x + 2| = x$

هـ) $|x - 2| + |3 - x| = \frac{1}{2}$

و) $2|3x - 9| - 5|2x - 4| = 6$

ز) $|x - 1| - |x - 5| = 2$

ح) $|x^2 - 3|x| + 2| = x^2 - 2x$

ط) $\left|x - \frac{2}{3}\right| - \left|x - \frac{3}{4}\right| = 1$

ی) $|6x^2 - 5x + 1| = 5x - 6x^2 - 1$

ک) $|x^2 - 1| = |x + 3|$

ل) $x^2 + 3|x| - 4 = 0$

م) $2|x-1| - 3|2-x| + |x+1| = 5$

ن) $|x^2 + 2x| - |2 - x| = |x^2 - x|$

۲۰ـ مقدار k را چنان تعیین کنید که معادله زیر بیشمار جواب داشته باشد.

$$|x + 1| + |-x + 2| = \frac{2k - 1}{3k + 1}$$

۲۱ـ حدود k را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر جواب منحصر بفرد داشته باشد.

$$|x + 3| - |x - 2| = \frac{3k - 2}{5}$$

۲۲ـ حدود m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر جواب نداشته باشد.

$$|4 - x| - |x + 5| = \frac{m - 1}{2}$$

۲۳ـ حدود k را چنان تعیین کنید که معادلهٔ $|2 - 3(x + 1)| = \frac{k + 1}{k - 1}$ بیش از یک جواب داشته باشد.

۲۴ـ نامساوی‌های زیر را بصورت نامساوی‌های قدرمطلقی بنویسید.

الف) $3 < x - 2 < 5$

ب) $-3 < 2x - 3 < 1$

MATH75.IR

ج) $-۵ < \frac{x}{۲} - ۳ < ۲$ د) $-۵ \leq |x - ۲| - ۳ \leq ۴$

۲۵ـ اگر $-۱ \leq x < ۲$ باشد عبارت $y = |۲x - ۵| - |۳x + ۴|$ را بدون قدرمطلق بنویسید.

۲۶ـ به ازاء هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$\text{Max}\{a , b\} = \frac{a + b}{۲} + \frac{|a - b|}{۲}$$

$$\text{Min}\{a , b\} = \frac{a + b}{۲} - \frac{|a - b|}{۲}$$

۲۷ـ اگر $۲x^۲ - ۵x + ۲ \geq ۰$ باشد و $y = \frac{x + ۱}{x - ۱}$، حدود y را بیابید.

۲۸ـ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\text{Max}\{x , ۱ - x\} = ۱$

ب) $\text{Min}\{۲x , x - ۱\} + \text{Min}\{۲x , x - ۱\} = ۲$

۲۹ـ حدود x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

الف) $|۲x - ۳| < ۵$ ب) $|x^۲ - ۴x - ۱| \leq ۵$

ج) $|۵x + ۴| < ۳x + ۲$ د) $|۳x - ۱| < |۲x + ۱|$

ه) $|x^۲ + x - ۱| < |۲x + ۱|$ و) $|۳x + ۵| > ۷$

ز) $|x^۲ + ۶x + ۴| \geq ۵$ ح) $|x + ۲| > |۲x - ۱|$

ط) $|x^۲ + x + ۱| > |x + ۵|$ ی) $|x - ۵| \geq x^۲ - ۲x - ۱$

ک) $۲x + |x - ۲| + ۱ > ۰$ ل) $|x^۲ - x - ۳| \leq ۹$

م) $x^۲ - ۲|x| < ۳$ ن) $۱ < |x - ۱| < ۶$

س) $۳|x - ۱| + x^۲ > ۷$ ع) $\big||x - ۱| - ۲\big| < ۳$

ف) $|x^۲ - ۳x + ۲| \leq ۲x - x^۲$ ص) $|x^۲ - ۲x| < x$

ث) $\frac{۲}{۳}x - \left|\frac{۱}{۳} - x\right| \leq \frac{۱}{۲}$ غ) $(|x - ۱| - ۲)(|x - ۱| - ۴) \leq ۰$

۳۰ـ نمودار هر یک از معادلات زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۲|x|$ ب) $y = -۳|x| + ۱$

ج) $y = |۲ - x|$ د) $y = |-۳x + ۲| + ۱$

ه) $y = -|x + ۱|$ و) $y = |x + ۲| + |x - ۳|$

ز) $y = |x - ۲| - |x - ۳|$ ح) $y = |x - ۵| - |x + ۲|$

ط) $y = |۲x - ۳|$ ی) $y = |۴x + ۸|$

MATH75.IR

ک) $y = |x| + |x - ۱| + |x + ۳|$ ل) $y = x|x - ۱|$

م) $y = |x^۲ - ۱|$ ن) $y = \big||x| - ۱\big|$

۳۱ـ مجموعه جواب هر یک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $\big|۲|x - ۱| + ۳\big| \leq ۷$

ب) $|x - ۱| \leq ۱ - |۲ - x|$

ج) $|-x - ۲| - |۲x + ۳| > ۰$

د) $|-x + ۱| + |۲ + x| > ۳$

ه) $|x - ۲| - |x + ۲| \geq ۰$

و) $|x + ۳| + |۳ - x| < ۸$

ز) $|x - ۳| + |۵ - x| > x$

ح) $|x - ۲| + |x - ۵| < ۴$

ط) $۲|x - ۱| + |x + ۲| - ۵|x - ۳| > ۴$

ی) $|x + ۲| - |۲ - x| < -۴$

۳۲ـ حدود m را چنان تعیین کنید که هر یک از نامعادله‌های زیر به ازاء جمیع مقادیر x برقرار باشد.

الف) $|۲ - x| + |x + ۳| \geq \frac{۲m + ۱}{m - ۱}$

ب) $\left|x - \frac{۱}{۲}\right| + |x + ۱| > \frac{m + ۱}{m}$

ج) $|۲ - x| - |۳ - x| > -m + ۲$

د) $\left|x + \frac{۱}{۳}\right| - \left|x - \frac{۱}{۲}\right| \leq ۲(۱ - m)$

۳۳ـ مقدار m چقدر باشد تا مینیمم مقدار عبارت $|x - ۲k + ۱| + |x + k - ۳|$ برابر یک باشد. $(k > \frac{۴}{۳})$

۳۴ـ حدود k را چنان تعیین کنید که مجموعه جواب نامعادلهٔ زیر **R** باشد. $(-۱ < k < ۰)$

$$\left|x - \frac{k}{k + ۱}\right| - \left|x + \frac{۱ - k}{k}\right| \geq -۵$$

۳۵ـ به ازاء هر دو عدد حقیقی مانند x و y ثابت کنید: $|x + y| \geq \big||x| - |y|\big|$

شرط تساوی چیست؟

MATH75.IR

۳۶ـ مجموعهٔ جواب نامعادله‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\frac{x^{۴}}{x^{۴}+۱} > \frac{x^{۵}}{x^{۵}+۱}$

ب) $\frac{۲x-۱}{|x-۵|} \geq x$

ج) $\sqrt{۳}\,|x| \leq |x-۵|$

د) $\frac{۱}{x^{۲}-۴} > -\frac{۱}{۳}$

هـ) $\frac{|x^{۲}-۴x|+۳}{x^{۲}+|x-۵|} \geq ۱$

و) $|۷-۲x| < |۳x-۷| + |x-۲|$

ز) $\big|\,|x^{۲}-۳x+۲|-۱\,\big| > x-۲$

ح) $|x^{۲}-۵|x|+۴| \geq |۲x^{۲}-۳|x|+۱|$

ط) $|x-۱| - |x-۲| + |x-۳| \leq ۳ + |x-۴| - |x-۵|$

ی) $\left|\frac{-۵}{x+۲}\right| < \left|\frac{۱۰}{x-۱}\right|$

۳۷ـ دستگاههای زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} |۲x+۵| \geq |۷-۴x| \\ |x| < ۲|x-۴|+x-۲ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} |x^{۳}-x| \leq x \\ \frac{۲}{|x-۲|} > \left|\frac{-۴}{۲x-۱}\right| \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x^{۲}+۲|x+۳|-۱۰ < ۰ \\ \frac{|x^{۲}-۳|+۳}{x^{۲}+|x-۵|} \geq ۱ \end{cases}$

د) $\begin{cases} |۲x+۷|-|۳x+۵| > ۰ \\ \frac{|x+۲|}{|x-۱|} \geq ۱ \end{cases}$

۳۸ـ نامعادلهٔ $|x-۱| - |x-۵| < x$ را حل کرده و تعبیر هندسی آنرا بیان کنید.

۳۹ـ دامنهٔ تعریف هر یک از عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) $x + \frac{۱}{x} - \frac{x}{x+۱}$

ب) $\frac{x-۱}{x^{۳}-۱} + \frac{x+۱}{x^{۲}-۱}$

ج) $\frac{۲x^{۲}+x-۱}{۲x^{۲}+x+۲}$

د) $\frac{|x|-۱}{||x|-۲|}$

هـ) $\frac{|x-۱|}{|x-۲|+|x-۳|-۵}$

و) $\frac{۱}{|۲x-۳|-|x+۳|}$

ز) $\frac{(x+۲)|x-۱|}{(x-۱)|x+۲|}$

ح) $\sqrt{|x|-۱}$

ط) $\frac{\sqrt{x|x|}}{\sqrt{x+۱}}$

ی) $\sqrt{x\sqrt{x}-۱}$

ک) $\frac{\sqrt{x^{۲}-۳x+۲}}{\sqrt{۲x^{۲}-۵x-۳}}$

ل) $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{\sqrt{x-۱}} + \sqrt{x-۱}$

MATH75.IR

ن) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}-1}$

م) $\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(x^2-1)}{2x^2-x-3}}$

ع) $\sqrt[4]{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+1}}$

س) $\sqrt{3-2\sqrt{x+1}}$

ص) $\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{x^4-13x^2+36}}$

ف) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}+\sqrt{x-4}$

۴۰ـ مقدار k چقدر باشد تا دامنهٔ تعریف عبارت $\dfrac{x+k}{\sqrt{1-|2x-k+1|}}$ برابر $D=(2\,,3)$ باشد.

۴۱ـ معادله‌های زیر را حل کرده و مجموعه جواب هر یک را مشخص کنید.

الف) $\dfrac{2x+5}{x+3}+\dfrac{3x-2}{x}-5=0$

ب) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x-1}{x^2+x}$

ج) $\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}=3x\left(1-\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

د) $\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{1}{2x-3}=\dfrac{5}{7x-6}$

هـ) $\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-2x}-\dfrac{x+1}{x}$

و) $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$

ز) $\dfrac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=4+2x+x^2$

۴۲ـ مجموعه جواب هر یک از معادله‌های اصم زیر را تعیین کنید.

الف) $\sqrt{2x+8}-\sqrt{3x+4}=0$

ب) $\sqrt{2x-3}+\sqrt{8x-12}=5$

ج) $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$

د) $\sqrt{x^2+2x-\sqrt{2x^2+4x}}=2$

هـ) $3x-2x^2=\sqrt{4x^2-6x-1}$

MATH75.IR

و) $(2x+\sqrt{x})^4+4(2x+\sqrt{x})^2=5$

ز) $\sqrt{x-1}+6\sqrt[4]{x-1}=16$

ح) $\sqrt[3]{x+1}+4\sqrt[3]{1-x}=41-x^2$

ط) $\sqrt[3]{x^3+1-\sqrt{x^2+1}-x}=x$

ی) $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^2+2(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=-1$

ک) $\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}$

ل) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+5}$

م) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

ن) $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}$ (راهنمایی: $\sqrt{1-\frac{1}{x}}=t$)

س) $\sqrt[4]{1+x}+\frac{1}{x}\sqrt[4]{1+x}=\sqrt[4]{243x}$ (راهنمایی: $\sqrt[4]{3x}=t$)

ع) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$

ف) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

ص) $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$

ق) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-4x^2}}=x-1$

ر) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=1$ (راهنمایی: $\sqrt{x-1}=t$)

ش) $x^2+\sqrt{x-2}=6-x$

ت) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$

ث) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}$

خ) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

ذ) $\sqrt[3]{(5+x)^2}+4\sqrt[3]{(5-x)^2}=5\sqrt[3]{25-x^2}$

MATH75.IR

ض) $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۳}+۲\sqrt{(x-۱)(x+۳)}=۴-۲x$

ظ) $\sqrt{x+۴}+\sqrt{x-۴}-۲\sqrt{x^۲-۱۶}=۲x-۱۲$

غ) $\sqrt[۳]{۱+\sqrt{x}}+\sqrt[۳]{۱-\sqrt{x}}=\sqrt[۳]{۲}$

پ) $\sqrt{x+۸+۲\sqrt{x+۷}}+\sqrt{x+۱-\sqrt{x+۷}}=۴$

ژ) $\sqrt[۳]{۲x}+\sqrt[۳]{x-۲}+\sqrt[۳]{۲-۳x}=۰$

گ) $۳+\sqrt{۳+\sqrt{x}}=x$

چ) $\dfrac{x\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}=۲x+۱$

۴۳ـ نشان دهید معادلهٔ $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲-x}+۴=x$ ریشه حقیقی ندارد.

۴۴ـ مجموعه جواب هر یک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sqrt{(x+۱)(x+۲)}\geq ۲(x+۲)$

ب) $\sqrt{\dfrac{x+۲}{۳-x}}\geq ۲$

ج) $\sqrt{x+۳}-\sqrt{x-۱}\geq ۱$

د) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}>\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}$

هـ) $\sqrt{x^۲-۲x-۳}\leq\sqrt{۵}$

و) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}>\dfrac{۱-x}{\sqrt{۱-x}}$

ز) $\dfrac{۲\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}>۵$

ح) $|x\sqrt{x}-۱|\leq ۲\sqrt{۲}-۱$

۴۵ـ تعیین کنید معادلهٔ زیر چند ریشه دارد؟

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{\ldots}}}}=x$$

MATH75.IR

فصل دوم

رابطه ـ تابع ـ انتقال محورها ـ تقارن

بخش اول: رابطه ـ تابع

زوج مرتب: دو تایی (a , b) که در آن ترتیب نوشتن اهمیت دارد، زوج مرتب نامیده می‌شود. در این زوج مرتب a را مؤلفه (مختص) اول و b را مؤلفه (مختص) دوم می‌گوییم. واضح است که در حالت کلی: $(a , b) \neq (b , a)$

نکته: دو زوج مرتب (a , b) و (c , b) با هم مساویند اگر و تنها اگر مؤلفه‌های اولشان با هم و مؤلفه‌های دومشان نیز با هم مساوی باشند.

$$(a , b) = (c , d) \Leftrightarrow [(a = c) \wedge (b = d)]$$

مثال ۱: اگر $(x - ۲y , ۲x + y) = (۳ , ۱)$ باشد مقادیر x و y را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} x - ۲y = ۳ \\ ۲x + y = ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ۲y = ۳ \\ ۴x + ۲y = ۲ \end{cases} \Rightarrow ۵x = ۵ \Rightarrow x = ۱ \Rightarrow y = -۱$$

ضرب دکارتی دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه باشند ضرب دکارتی A و B که آنرا با نماد $A \times B$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

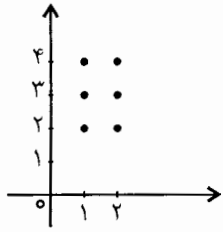
$$A \times B = \{(x , y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

مثال ۲: اگر $A = \{۱ , ۲\}$ و $B = \{۲ , ۳ , ۴\}$ مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ را مشخص کنید.

$$A \times B = \{۱ , ۲\} \times \{۲ , ۳ , ۴\} = \{(۱ , ۲) , (۱ , ۳) , (۱ , ۴) , (۲ , ۲) , (۲ , ۳) , (۲ , ۴)\}$$

MATH75.IR

$B \times A = \{۲, ۳, ۴\} \times \{۱, ۲\} = \{(۲, ۱), (۲, ۲), (۳, ۱), (۳, ۲), (۴, ۱), (۴, ۲)\}$



نکته: همانطور که از مثال ۲ بر می‌آید:

$$A \times B \neq B \times A$$

مثال ۳: اگر $A = \{a, b\}$ حاصل $A^۲$ را حساب کنید.

حل:

$A^۲ = A \times A = \{a, b\} \times \{a, b\} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$

مثال ۴: اگر داشته باشیم:

$A = \{x | x \in R, ۰ \leq x \leq ۳\} = [۰, ۳]$

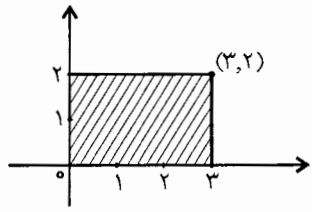
$B = \{y | y \in R, ۰ \leq y \leq ۲\} = [۰, ۲]$

مجموعهٔ $A \times B$ را مشخص کرده و نمودار آنرا رسم کنید.

حل:

$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$

$= \{(x, y) | ۰ \leq x \leq ۳ \wedge ۰ \leq y \leq ۲\}$



اعضای مجموعهٔ $A \times B$ در واقع نقاط واقع بر داخل یا روی مستطیل می‌باشند.

نکته: اعضای مجموعهٔ $R^۲$ کلیهٔ نقاط واقع بر صفحهٔ مختصات می‌باشند.

$R^۲ = R \times R = \{(x, y) | x \in R, y \in R\}$

مثال ۵: مجموعهٔ نقاط واقع در ناحیهٔ دوم صفحهٔ مختصات را به صورت ضرب دکارتی دو مجموعه مشخص کنید.

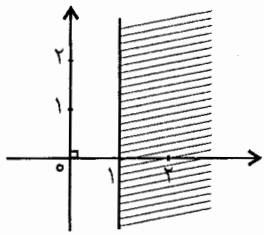
MATH75.IR

حل:

$A = \{x | x \in \mathbf{R} \ , x < ۰\} \ , \ B = \{y | y \in R \ , y > ۰\}$

$A \times B = \{(x , y) | \ x , y \in \mathbf{R} \ , \ x < ۰ \ \wedge y > ۰\}$

مثال ۶: ناحیه‌ای که در نمودار زیر سایه زده شده نمودار حاصلضرب دکارتی کدام دو مجموعه است؟



حل:

$A = \{x | x \in R \ , x \geq ۱\}$

$B = \{y | y \in R\}$

$A \times B = \{(x , y) | \ x , y \in \mathbf{R} \ , x \geq ۱\}$

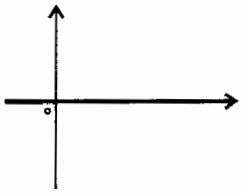
مثال ۷: نمودار مجموعه‌های $R \times \{۰\}$ و $\{۲\} \times R$ را مشخص کنید.

حل:

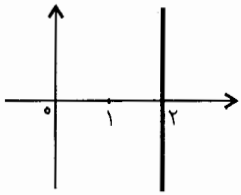
$R \times \{۰\} = \{(x , ۰) | \ x \in R\}$

$\{۲\} \times R = \{(۲ , y) \ | y \in R\}$

اعضای مجموعهٔ $R \times \{۰\}$ تمام نقاط واقع بر محور طول و اعضای مجموعهٔ $\{۲\} \times R$ کلیه نقاط واقع بر خط $x = ۲$ می‌باشند.



$R \times \{۰\}$



$\{۲\} \times R$

MATH75.IR

قضیه: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد ثابت کنید: $A \times \phi = \phi$ و $\phi \times A = \phi$.

اثبات: فرض می‌کنیم $A \times \phi \neq \phi$.

بنابراین مجموعهٔ $A \times \phi$ لااقل یک عضو دارد. فرض می‌کنیم $(x , y) \in A \times \phi$ که در این صورت باید $x \in A$ و $y \in \phi$ باشد که چنین چیزی ممکن نیست لذا $A \times \phi = \phi$. به همین ترتیب با روش برهان خلف ثابت می‌شود: $\phi \times A = \phi$.

قضیه: ثابت کنید: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

اثبات:

$$(x , y) \in A \times (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in (B \cap C)$$
$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (y \in B \wedge y \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C)$$
$$\Leftrightarrow (x , y) \in A \times B \wedge (x , y) \in A \times C$$
$$\Leftrightarrow (x , y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

به این ترتیب نشان دادیم هر عضو $A \times (B \cap C)$ در مجموعهٔ $(A \times B) \cap (A \times C)$ هست و بالعکس. لذا این دو مجموعه مساویند.

رابطه: دو مجموعهٔ A و B را در نظر می‌گیریم. هر زیر مجموعهٔ $A \times B$ را یک رابطه از A در B می‌گویند. بنابراین اگر R یک رابطه از A در B باشد آنگاه $R \subset A \times B$.

اگر $R \subset A \times A$ باشد می‌گوییم R یک رابطه در A است.

مثال ۸: فرض می‌کنیم $A = \{۱ , ۲ , ۳\}$ و $B \{۲ , ۳ , ۴\}$ در این صورت:

$$A \times B = \{(۱,۲) , (۱,۳) , (۱ , ۴) , (۲ , ۲) , (۲ , ۳) , (۲ , ۴) , (۳ , ۲) , (۳ , ۳) , (۳ , ۴)\}$$

هر یک از مجموعه‌های زیر یک رابطه از A در B می‌باشند.

$$R_۱ = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۴)\} = \{(x , y) | x \in A , y \in B , y = ۲x\}$$
$$R_۲ = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۳) , (۳ , ۴)\} = \{(x , y) | x \in A , y \in B , y = x + ۱\}$$
$$R_۳ = \{(۱ , ۲) , (۱ , ۳) , (۱ , ۴) , (۲ , ۳) , (۲ , ۴) , (۳ , ۴)\}$$
$$= \{(x , y) | x \in A , y \in B , x < y\}$$

نکته: اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، یعنی $R \subset A \times B$، در این صورت A را مجموعهٔ آغاز و B را مجموعهٔ انجام رابطهٔ R می‌گویند.

اگر $(a , b) \in R$ گویند a با b رابطه دارد و آنرا به صورت aRb نشان می‌دهند. همچنین اگر

MATH75.IR

$(a , b) \notin R$ گویند a با b رابطه ندارد و آنرا به صورت $a \not R b$ نشان می‌دهند.

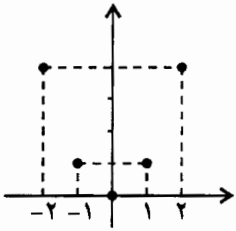
مثال ۹: اگر $R = \{(x , y) | x - y = ۲\}$ رابطه‌ای در $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ باشد اعضای رابطهٔ R را مشخص کنید.

حل: $R = \{(۳ , ۱) , (۴ , ۲)\}$

مثال ۱۰: رابطهٔ $R = \{(x , y) | y = x^۲\}$ در مجموعهٔ $A = \{-۴ , -۳ , -۲ , ... , ۴\}$ تعریف شده است. نمودار این رابطه را رسم کنید.

حل:

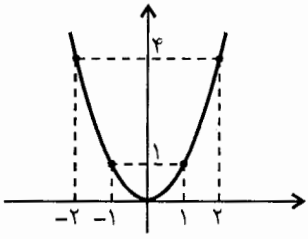
$R = \{(-۲ , ۴) , (-۱ , ۱) , (۰ , ۰) , (۱ , ۱) , (۲ , ۴)\}$



مثال ۱۱: رابطهٔ $R = \{(x , y) | y = x^۲\}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است. نمودار آنرا رسم کنید.

حل:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۱	۰	۱	۴

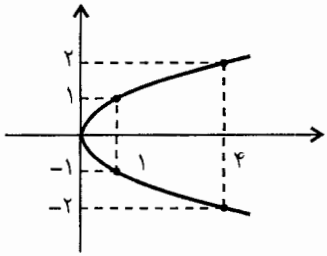


مثال ۱۲: رابطهٔ $R = \{(x , y) | y^۲ = x\}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است. نمودار این رابطه را رسم کنید.

MATH75.IR

حل:

y	-۲	-۱	۰	۱	۲
x	۴	۱	۰	۱	۴



دامنه و برد یک رابطه: فرض کنید R یک رابطه از A در B باشد. دامنهٔ R که با نماد D_R نشان داده می‌شود، عبارتست از مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضای R. همچنین مجموعهٔ کلیهٔ مؤلفه‌های دوم اعضای R، برد آن را تشکیل می‌دهند. واضح است که دامنهٔ R زیر مجموعهٔ A و برد R زیر مجموعهٔ B می‌باشد.

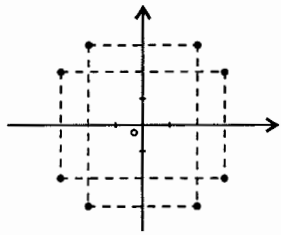
مثال ۱۳: رابطهٔ $R = \{(x , y) | x^۲ + y^۲ = ۱۳\}$ در مجموعهٔ $A = \{-۳ , -۲ , ۱ , ۲ , ۳\}$ تعریف شده است. اولاً این رابطه را به صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتب بنویسید. ثانیاً دامنه و برد این رابطه را تعیین کنید. ثالثاً نمودار مختصاتی آنرا رسم کنید.

حل:

$R = \{(-۳,-۲) , (-۳,۲) , (-۲ , -۳) , (-۲ , ۳) , (۲ , -۳) , (۲,۳) , (۳,-۲) , (۳ , ۲)\}$

$D_R = \{-۳ , -۲ , ۲ , ۳\}$

R برد $= \{-۳ , -۲ , ۲ , ۳\}$



قابل ذکر است اگر رابطهٔ R در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف می‌شد اعضای رابطهٔ R مختصات کلیهٔ نقاط واقع بر دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۱۳}$ می‌بود.

وارون یک رابطه: اگر R یک رابطه از A در B باشد، وارون R که آنرا به صورت $R^{-۱}$ نشان می‌دهیم عبارتست از:

$R^{-۱} = \{(y , x) | (x , y) \in R\}$

$(x , y) \in R \Leftrightarrow (y , x) \in R^{-۱}$

نکته: دامنهٔ $R^{-۱}$ با برد R و برد $R^{-۱}$ با دامنهٔ R برابر است.

MATH75.IR

مثال ۱۴: اگر $R = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۳) , (۳ , ۴)\}$ یک رابطه در N باشد، وارون رابطه را مشخص کنید.

حل:

$$R^{-۱} = \{(۲ , ۱) , (۳ , ۲) , (۴ , ۳)\}$$

مثال ۱۵: رابطهٔ $R = \{(x , y) | \ y = ۲x + ۱\}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است. $R^{-۱}$ را با علائم ریاضی مشخص کنید.

حل:

$$y = ۲x + ۱ \Rightarrow y - ۱ = ۲x \Rightarrow x = \frac{y - ۱}{۲}$$

$$R^{-۱} = \{(x , y) | \ x , y \in \mathbf{R} \ , \ y = \frac{x - ۱}{۲}\}$$

تابع: یک رابطه که در آن هیچ دو زوج مرتب متفاوتی دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند یک تابع نامیده می‌شود. به عبارت دیگر یک رابطه که در آن به هر عضو دامنه، عضو منحصر بفردی از برد نسبت داده می‌شود یک تابع است. به طور دقیق‌تر می‌توان گفت رابطهٔ f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B یک تابع است اگر دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول مساوی عضو f باشند آنگاه مؤلفه دومشان نیز مساوی باشند.

$$[(x_۱ , y_۱) \in f \wedge (x_۲ , y_۲) \in f \wedge x_۱ = x_۲] \Rightarrow y_۱ = y_۲$$

مثال ۱۶: رابطه‌های زیر در مجموعهٔ اعداد طبیعی تعریف شده‌اند. معین کنید که کدامیک از آنها تابعند؟

$$R_۱ = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۳) , (۳ , ۴) , (۴ , ۴)\}$$

$$R_۲ = \{(۱ , ۱) , (۱ , ۲) , (۲ , ۳)\}$$

$$R_۳ = \{(۲ , ۵)\}$$

$$R_۴ = \{(۲ , ۱) , (۳ , ۲) , (۴ , ۳) , (۲ , ۱)\}$$

$$R_۵ = \{ \ \}$$

حل:

$R_۱$ تابع است زیرا هیچ دو زوج مرتبی در آن وجود ندارد که مؤلفه‌های اولشان برابر باشند.

$R_۲$ تابع نیست زیرا دو زوج مرتب (۱ , ۱) و (۲ , ۱) مؤلفه‌های اولشان مساوی است.

$R_۳$ تابع است زیرا در آن دو زوج مرتب با مؤلفه‌های اول مساوی یافت نمی‌شود لذا می‌توان گفت مقدم ترکیب شرطی که در تعریف تابع آورده شده نادرست و کل گزاره به انتفاء مقدم

MATH75.IR

درست می‌شود.

$R_۴$ تابع است زیرا دو زوج مرتبی که مؤلفه‌های اولشان مساوی است مؤلفه‌های دومشان نیز برابر است.

$R_۵$ تابع است زیرا مقدم ترکیب شرطی که در تعریف تابع آمده نادرست و کل گزاره درست است.

مثال ۱۷: a و b را چنان تعیین کنید که رابطهٔ زیر یک تابع باشد.

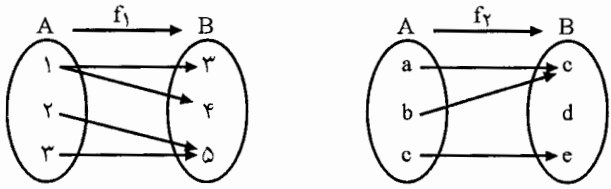
$$f = \{(۱ , ۳) , (۲ , ۲) , (۱ , a - ۲b) , (۲ , a^۲ - b) , (۳ , ۲)\}$$

حل:

$$\begin{cases} a - ۲b = ۳ \Rightarrow a = ۲b + ۳ \\ a^۲ - b = ۲ \Rightarrow (۲b + ۳)^۲ - b = ۲ \Rightarrow ۴b^۲ + ۱۱b + ۷ = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} b = -۱ \Rightarrow a = ۱ \\ b = \frac{-۷}{۴} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲} \end{array} \right.$$

مثال ۱۸: رابطه‌های $f_۱$ و $f_۲$ با نمودارهای زیر تعریف شده‌اند. اعضای این رابطه‌ها را مشخص کنید و بگویید کدامیک تابعند.



حل:

$$f_۱ = \{(۱ , ۳) , (۱ , ۴) , (۲ , ۵) , (۳ , ۵)\}$$

$$f_۲ = \{(a , c) , (b , c) , (c , e)\}$$

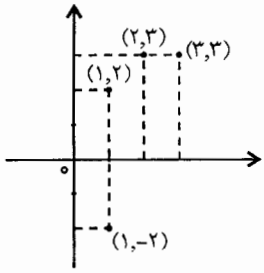
رابطهٔ $f_۲$ تابع نیست زیرا دو زوج مرتب متمایز در $f_۱$ وجود دارد که مؤلفه‌های اولشان مساوی است. رابطهٔ f تابع است.

به طور کلی یک رابطه که با نمودار پیکانی مشخص شده، در صورتی تابع است که از هیچ عضو مجموعهٔ آغازش بیش از یک پیکان خارج نشده باشد.

مثال ۱۹: نمودار مختصاتی رابطهٔ $R = \{(۱ , ۲) , (۱ , -۲) , (۲ , ۳) , (۳ , ۳)\}$ را رسم کنید و تحقیق کنید از نظر نمودار یک رابطه چه موقع تابع است؟

MATH75.IR

حل:

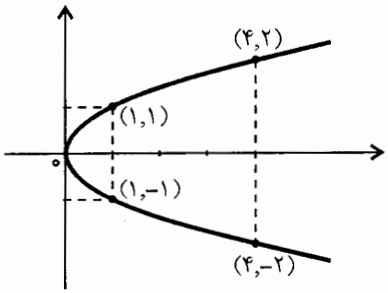


همانطوری که ملاحظه می‌شود دو زوج مرتب (۲ , ۱) و (۲− , ۱) از رابطهٔ R مؤلفه‌های اولشان مساوی و مؤلفه‌های دومشان متمایز است لذا رابطهٔ R تابع نیست. از نظر نمودار این دو زوج مرتب مختصات دو نقطه از نمودار مختصاتی‌اند که روی خطی موازی محور عرض قرار دارند.

نتیجه: از نظر نمودار یک رابطه موقعی تابع است که هیچ دو نقطه از نمودار روی خطی موازی محور عرض قرار نگیرند به عبارت بهتر هر خط موازی محور عرض نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال ۲۰: تحقیق کنید رابطهٔ $f = \{(x , y) | x , y \in R , y = x^2\}$ تابع هست یا خیر؟ این موضوع را با نمودار هم بررسی کنید.

حل: رابطهٔ f تابع نیست زیرا مثلاً دو زوج مرتب (۱ , ۱) و (۱− , ۱) در تساوی $y^2 = x$ صدق می‌کنند لذا عضو مجموعهٔ f هستند پس f تابع نیست. نمودار این رابطه به صورت زیر است.



همانطور که ملاحظه می‌شود خطوطی به موازات محور عرض می‌توان رسم کرد که نمودار رابطه را در دو نقطه قطع کند پس این رابطه تابع نمی‌باشد.

تابع حقیقی: تابع f از A به B را یک تابع حقیقی گوییم در صورتی که A و B زیر مجموعهٔ R باشند.

MATH75.IR

مثال ۲۱: رابطهٔ $f = \{(x , y) | \ x , y \in \mathbf{R} , y = ۲x + ۳\}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است. ثابت کنید f تابع است.

حل: فرض می‌کنیم $(x_۱ , y_۱)$ و $(x_۲ , y_۲)$ دو عضو f و $x_۱ = x_۲$ باشند حال نشان می‌دهیم $y_۱ = y_۲$.

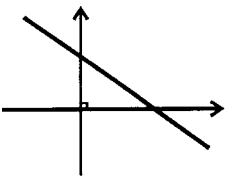
$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow ۲x_۱ = ۲x_۲ \Rightarrow ۲x_۱ + ۳ = ۲x_۲ + ۳ \Rightarrow y_۱ = y_۲$$

مثال ۲۲: تحقیق کنید رابطهٔ $g = \{(x , y) | \ x , y \in \mathbf{R} \ , xy + y^۲ - y = ۰\}$ تابع است یا خیر؟

حل:

$$xy + y^۲ - y = ۰ \Rightarrow y(x + y - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ \\ x + y - ۱ = ۰ \end{cases}$$

نمودار این رابطه متشکل از نمودار دو خط $y = ۰$ و $x + y - ۱ = ۰$ است.



ملاحظه می‌شود خطی موازی محور عرض می‌توان رسم کرد که نمودار رابطه را در دو نقطه قطع کند بنابراین رابطهٔ فوق تابع نیست.

$(۰ , ۰) \in g$

$(۰ , ۱) \in g$

مثال ۲۳: ثابت کنید رابطهٔ $f = \{(x , y) | \ x , y \in \mathbf{R} \ , y = x^۲ - ۳x + ۱\}$ تابع است.

حل: فرض می‌کنیم $(x_۱ , y_۱)$ و $(x_۲ , y_۲)$ دو زوج مرتب از f بوده و $x_۱ = x_۲$ باشد.

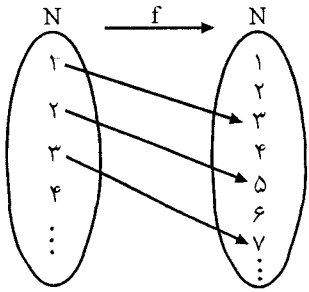
$$x_۱ = x_۲ \Rightarrow \begin{cases} x_۱^۲ = x_۲^۲ \\ ۳x_۱ = ۳x_۲ \end{cases} \Rightarrow x_۱^۲ - ۳x_۱ = x_۲^۲ - ۳x_۲$$

$$\Rightarrow x_۱^۲ - ۳x_۱ + ۱ = x_۲^۲ - ۳x_۲ + ۱ \Rightarrow y_۱ = y_۲$$

بنابراین رابطه f تابع است.

نکته: تابع $f = \{(۱ , ۳) , (۲ , ۵) , (۳ , ۷)\}$ را در مجموعهٔ اعداد طبیعی در نظر بگیرید. نمودار پیکانی این تابع به صورت زیر است.

MATH75.IR



در این تابع عدد ۳ مقدار تابع به ازای ۱ می‌باشد که آنرا به صورت $f(۱) = ۳$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب می‌توان گفت $f(۲) = ۵$ و $f(۳) = ۷$. به طور کلی اگر $f = \{(x , y) | x , y \in \mathbf{R}\}$ یک تابع حقیقی باشد y را مقدار تابع به ازای x می‌نامند و آنرا به صورت $y = f(x)$ نشان می‌دهند.

$$y = f(x) \Leftrightarrow (x , y) \in f$$

مثال ۲۴: تابع $f = \{(x , y) | x , y \in \mathbf{R} , y = ۳x + ۱\}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است. $f(-۵)$، $f(\frac{-۲}{۳})$ و $f(\sqrt{۲} - ۱)$ و $f(۲a - ۱)$ را حساب کنید.

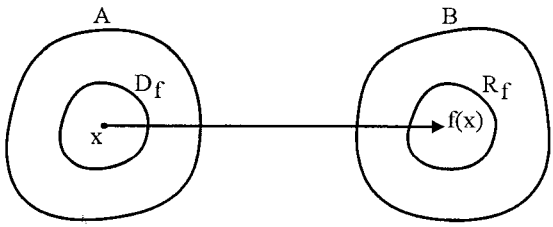
حل:

$$f(-۵) = ۳ \times (-۵) + ۱ = -۱۴ \quad f\left(\frac{-۲}{۳}\right) = ۳ \times \left(\frac{-۲}{۳}\right) + ۱ = -۱$$

$$f(\sqrt{۲} - ۱) = ۳ (\sqrt{۲} - ۱) + ۱ = ۳\sqrt{۳} - ۲ \quad f(۲a - ۱) = ۳(۲a - ۱) + ۱ = ۶a - ۲$$

دامنه و برد تابع: فرض کنیم f تابعی از A در B باشد. مجموعهٔ A را مجموعهٔ آغاز و مجموعهٔ B را مجموعهٔ انجام می‌نامند. همچنین مجموعهٔ $\{x \in A | (x , y) \in f\}$ دامنهٔ تابع است که آنرا با D_f نشان می‌دهیم و مجموعهٔ $\{y \in B | (x , y) \in f\}$ برد تابع f می‌باشد که آنرا با نماد R_f نشان می‌دهیم.

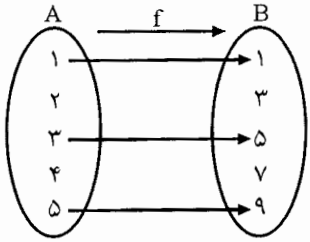
واضح است $D_f \subset A$ و $R_f \subset B$.



MATH75.IR

ضابطهٔ تابع: اگر f تابعی از A در B باشد در این صورت هر عضو x از A را به عضو منحصر بفردی مانند y از B نظیر می‌کند قانونی که این ارتباط را برقرار می‌کند ضابطهٔ تابع نامیده می‌شود. تابع f که به این‌ترتیب بیان شده بصورت $\begin{cases} f : A \xrightarrow{f} B \\ y = f(x) \end{cases}$ یا $\begin{cases} A \xrightarrow{f} B \\ y = f(x) \end{cases}$ نشان داده می‌شود.

مثال ۲۵: تابع f با نمودار زیر تعریف شده است. مجموعهٔ آغاز مجموعهٔ انجام، دامنه، برد و قانون تابع را بنویسید.



حل:

مجموعهٔ آغاز = A = {۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵}

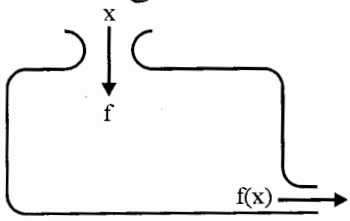
مجموعهٔ انجام = B = {۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹}

$D_f = \{۱ , ۳ , ۵\}$

$R_f = \{۱ , ۵ , ۹\}$

قانون تابع $y = f(x) = ۲x - ۱$

تعبیر تابع به عنوان یک ماشین: هر تابع را می‌توان به یک ماشین تشبیه کرد که دارای یک ورودی است که اعضای دامنه از آنجا وارد ماشین شده و قانون تابع روی آن اعمال می‌شود و از خروجی آن مقدار تابع به ازای هر مقدار دامنه خارج می‌شود.



به عنوان مثال در مورد تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x - ۱}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان گفت این تابع هر عدد حقیقی که از بازهٔ $[۱ , +\infty)$ را می‌گیرد ابتدا یک واحد از آن کم می‌کند سپس جذر

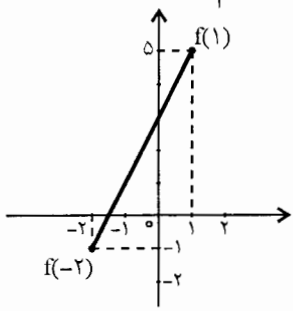
MATH75.IR

آنرا می‌گیرد و حاصل را به عنوان مقدار تابع ارائه می‌دهد.

$$f(۱۰) = \sqrt{۱۰ - ۱} = \sqrt{۹} = ۳ \Rightarrow (۱۰ , ۳) \in f$$

$$f(۷) = \sqrt{۷ - ۱} = \sqrt{۶} \Rightarrow (۷ , \sqrt{۶}) \in f$$

مثال ۲۶: تابع f با نمودار زیر و با ضابطهٔ $y = ۲x + ۳$ تعریف شده است. دامنه و برد تابع را تعیین کنید و بگویید مقدار تابع به ازای $x = \frac{۱}{۲}$ و $x = -۱$ را چگونه روی شکل پیدا می‌کنیم؟



حل:

$D_f = [-۲ , ۱]$ $\qquad$ $R_f = [-۱ , ۵]$

برای اینکه مقدار تابع را به ازای $x = \frac{۱}{۲}$ یا $x = -۱$ پیدا کنیم کافی است از نقاط به طول $\frac{۱}{۲}$ و -۱ دو خط موازی محور عرض رسم کنیم تا نمودار تابع را در دو نقطه قطع کنند عرض این نقاط مقدار تابع به ازای $\frac{۱}{۲}$ یا -۱ خواهد بود.

$$f(\frac{۱}{۲}) = ۲ \times \frac{۱}{۲} + ۳ = ۴$$

$$f(-۱) = ۲ \times (-۱) + ۳ = ۱$$

مثال ۲۷: رابطهٔ f به صورت زیر تعریف شده. آیا این رابطه یک تابع است؟

$$f(x) = \begin{cases} -x + ۱ & x \leq -۲ \\ ۲ & -۳ \leq x < ۱ \\ x + ۱ & ۱ < x \end{cases}$$

حل: این رابطه تابع نیست زیرا از ضابطهٔ اول $f(-۲) = ۳$ و از ضابطهٔ دوم $f(-۲) = ۲$ می‌باشد. یعنی $(-۲ , ۳) \in f$ و $(-۲ , ۲) \in f$ که دو زوج مرتب مختلف دارای مؤلفه‌های اول مساوی هستند.

نکته: به طور کلی رابطه‌های چند ضابطه‌ای در صورتی تابعند که هر کدام از ضابطه‌ها تابع بوده و دامنه‌های ضابطه‌ها دوبدو جدا از هم باشند.

MATH75.IR

توابع چند ضابطه‌ای: هرگاه دامنهٔ یک تابع را به چند مجموعهٔ جدا از هم تقسیم کنیم، به طوریکه اجتماع آن مجموعه‌ها برابر با دامنه باشد و روی هر مجموعه، ضابطه‌ای مجزا تعریف کنیم در این صورت یک تابع با چند ضابطه یا اصطلاحاً یک تابع چند ضابطه‌ای بدست می‌آید.

$$f(x) = \begin{cases} f_۱(x) & x \in D_۱ \\ f_۲(x) & x \in D_۲ \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in D_n \end{cases}$$

$$\forall i , j \in N : D_i \cap D_j = \varnothing$$

$$D_۱ \cup D_۲ \cup ... \cup D_n = D_f$$

مثال ۲۸: تابع حقیقی f به صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x + ۱ & x > ۱ \\ ۳ & -۱ \leq x \leq ۱ \\ -۲x + ۱ & x < -۱ \end{cases}$$

اولاً $f(۲)$، $f(۰)$، $f(-۲)$ و $f(a - ۱)$ را حساب کنید. ثانیاً نمودار تابع f را رسم کنید و دامنه و برد تابع را تعیین کنید.

حل: اولاً:

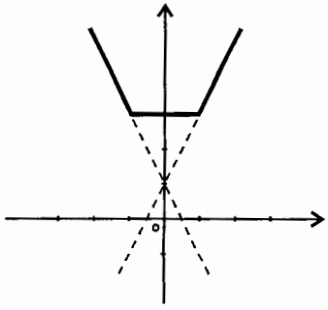
$$۲ > ۱ \Rightarrow f(۲) = ۲ \times ۲ + ۱ = ۵$$

$$-۱ \leq ۰ \leq ۱ \Rightarrow f(۰) = ۳$$

$$-۲ < -۱ \Rightarrow f(-۲) = -۲ \times (-۲) + ۱ = ۵$$

$$f(a-۱) = \begin{cases} ۲(a - ۱) + ۱ & a - ۱ > ۱ \\ ۳ & -۱ \leq a - ۱ \leq ۱ \\ -۲(a - ۱) + ۱ & a - ۱ < -۱ \end{cases} \Rightarrow f(a - ۱) = \begin{cases} ۲a - ۱ & a > ۲ \\ ۳ & ۰ \leq a \leq ۲ \\ -۲a + ۳ & a < ۰ \end{cases}$$

ثانیاً:



MATH75.IR

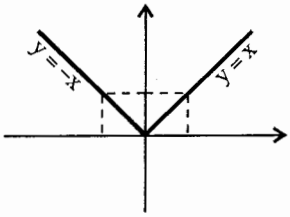
$D_f = (-\infty , +\infty) = R$ $\qquad$ $R_f = [۳ , +\infty)$

مثال ۲۹: تابع قدرمطلق و تابع علامت (S(x)) از توابع چند ضابطه‌ای هستند که به صورت زیر تعریف شده‌اند، نمودار هر کدام را رسم کنید و دامنه و برد آنها را تعیین کنید.

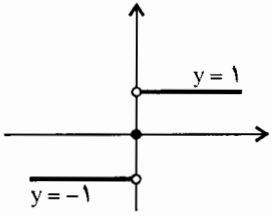
$f : R \longrightarrow R$ $\qquad$ $S : R \longrightarrow Z$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases} \qquad S(x) = \begin{cases} ۱ & x > ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ -۱ & x < ۰ \end{cases}$$

حل:



f(x) = |x|



S(x)

$D_f = R$ $\qquad$ $D_s = R$

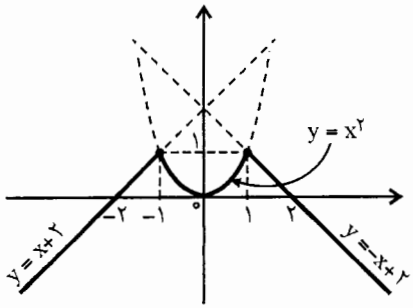
$R_f = [۰ , +\infty)$ $\qquad$ $R_s = \{-۱ , ۰ , ۱\}$

مثال ۳۰: تابع f به صورت زیر تعریف شده است. نمودار تابع را رسم کنید و دامنه و برد آنرا تعیین کنید.

$f : R \longrightarrow R$

$$f(x) = \begin{cases} -x + ۲ & x > ۱ \\ x^۲ & -۱ \le x \le ۱ \\ x + ۲ & x < -۱ \end{cases}$$

حل:

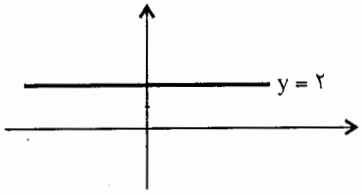


MATH75.IR

$D_f = R \qquad R = (-\infty , ۱]$

تابع ثابت: تابع $f: A \longrightarrow B$ را ثابت گوییم در صورتیکه برد آن مجموعه‌ای یک عضوی باشد.

مثال ۳۱: تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = ۲ \end{cases}$ تابعی ثابت است.



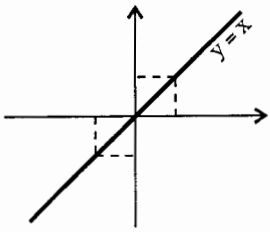
$f(۰) = ۲$

$f(\sqrt{۵}) = ۲$

$f(\pi) = ۲$

تابع همانی: تابع $f: R \longrightarrow R$ با ضابطهٔ $f(x) = x$، تابع همانی نامیده می‌شود. این تابع هر عضو دامنه‌اش را به خود همان عضو نظیر می‌کند. نمودار این تابع نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات است.

$f(۰) = ۰ \qquad f(۱) = ۱ \qquad f(-۱) = -۱$



$D_f = R_f = R$

مثال ۳۲: تابع حقیقی $f(x) = |x + ۱| + |x - ۱|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آنرا رسم کنید.

حل:

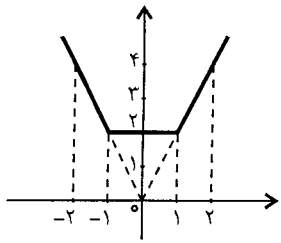
$x < -۱ \Rightarrow f(x) = -x - ۱ - x + ۱ = -۲x$

$-۱ \leq x < ۱ \Rightarrow f(x) = x + ۱ - x + ۱ = ۲$

$۱ \leq x \Rightarrow f(x) = x + ۱ + x - ۱ = ۲x$

MATH75.IR

$$f(x) = \begin{cases} -۲x & x < -۱ \\ ۲ & -۱ \le x < ۱ \\ ۲x & ۱ \le x \end{cases}$$



دامنه و برد توابع چند جمله‌ای:

تابع f که به ازای هر مقدار حقیقی x ضابطه‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n a_{n-۱} x^{n-۱} + ... + a_۱ x + a_۰$ دارد یک تابع چند جمله‌ای نامیده می‌شود. دامنهٔ این توابع اگر ذکر نشود R می‌باشد. برای تعیین برد این نوع توابع باید x را برحسب y حل کنیم و شرط حقیقی بودن x را بکار گیریم. قابل ذکر است که همواره محاسبهٔ x برحسب y امکان‌پذیر نیست لذا همیشه نمی‌توان برد توابع چند جمله‌ای را تعیین کرد.

مثال ۳۳: دامنه و برد تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = -x^۲ + ۲$ را تعیین کنید.

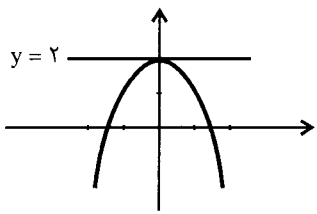
حل: دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

$$y = -x^۲ + ۲ \Rightarrow x^۲ = ۲ - y \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲ - y}$$

$$x \in R \Rightarrow ۲ - y \ge ۰ \Rightarrow ۲ \ge y$$

$$R_f = (-\infty , ۲]$$

نمودار تابع به صورت زیر است که نشان می‌دهد برد تابع اعداد حقیقی کوچکتر یا مساوی ۲ است.



مثال ۳۴: دامنه وبرد تابع $\begin{cases} f: R \longrightarrow R \\ f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ \end{cases}$ را تعیین کنید.

حل: دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

$$y = x^۳ - ۳x^۲ + ۳x - ۱ \Rightarrow y = (x - ۱)^۳$$

$$\Rightarrow x - ۱ = \sqrt[۳]{y} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y} + ۱$$

MATH75.IR

با توجه به اینکه فرجهٔ رادیکال فرد است می‌توان گفت به ازای هر مقدار y عبارت $\sqrt[3]{y} + 1$ یک عدد حقیقی است. بنابراین برد این تابع نیز مجموعه اعداد حقیقی است.

مثال ۳۵: دامنه و برد تابع $\begin{cases} g : (1 , 2) \longrightarrow R \\ g(x) = x^4 + x^2 + 1 \end{cases}$ را تعیین کنید.

حل: $D_g = (1 , 2)$

$$x \in D_g \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} 1 < x^4 < 16 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow 2 < x^4 + x^2 < 20$$

$$\Rightarrow 3 < x^4 + x^2 + 1 < 21 \Rightarrow 3 < y < 21 \Rightarrow R_f = (3 , 21)$$

مثال ۳۶: دامنه و برد تابع حقیقی با ضابطهٔ $y = x^4 - 3x^2 + 1$ را تعیین کنید.

حل: دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

$$y = x^4 - 3x^2 + 1 \Rightarrow y = (x^4 - 3x^2 + \frac{9}{4}) - \frac{5}{4}$$

$$y = (x^2 - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$$

کمترین مقدار $(x^2 - \frac{3}{2})^2$ صفراست و بیشترین مقدار آن به $+\infty$ میل می‌کند.

$$\text{Min}y = 0 - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$\text{برد تابع} = \left[-\frac{5}{4} , +\infty\right)$$

نکته: از اتحاد $x^{2n} \pm mx = (x^n \pm \frac{m}{2})^2 - (\frac{m}{2})^2$ می‌توان در محاسبهٔ برد برخی از توابع استفاده کرد.

دامنه و برد توابع کسری گویا: تابع کسری تابعی است که به صورت $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ نوشته می‌شود. $p(x)$ و $q(x)$ هر کدام یک چند جمله‌ای هستند و $q(x)$ عدد ثابت نیست. برای تعیین دامنهٔ این نوع توابع ریشه‌های مخرج را از مجموعهٔ اعداد حقیقی کم می‌کنیم. تعیین برد این توابع گاهی اوقات که درجهٔ جملات بزرگ باشد امکان‌پذیر نیست اما برد برخی توابع کسری را می‌توان به روشهای گوناگون بدست آورد.

مثال ۳۷: دامنه و برد تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \frac{2x}{x + 1} \end{cases}$ را بدست آورید.

حل:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

MATH75.IR

$D_f = R - \{-۱\}$

$y = \frac{۲x}{x + ۱} \Rightarrow xy + y = ۲x \Rightarrow xy - ۲x = -y$

$\Rightarrow x(y - ۲) = -y \Rightarrow x = \frac{y}{۲ - y}$

با توجه به اینکه x متعلق به دامنه و حقیقی می‌باشد لذا $y \neq ۲$.

$R_f = R - \{۲\}$

مثال ۳۸: دامنه و برد تابع حقیقی با ضابطهٔ $y = \frac{۱}{x^۲ - ۲x}$ را بدست آورید.

حل:

$x^۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x(x - ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۲$

$D = R - \{۰ , ۲\}$

$y = \frac{۱}{x^۲ - ۲x} \Rightarrow yx^۲ - ۲xy = ۱ \Rightarrow yx^۲ - ۲xy - ۱ = ۰$

$x = \frac{y \pm \sqrt{y^۲ + y}}{y}$ $\qquad y^۲ + y \geq ۰ \Rightarrow y(y + ۱) \geq ۰$

$\Rightarrow y \leq -۱$ یا $y \geq ۰$

صفر در برد تابع نیست زیرا اگر در تابع $y = \frac{۱}{x^۲ + ۲x}$ جای y صفر قرار دهیم مقداری برای x بدست نمی‌آید.

$R = (-\infty , -۱] \cup (۰ , +\infty)$

مثال ۳۹: دامنه و برد تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^۳ + ۳x^۲ + ۲x}{x(x^۲ - ۱)(x + ۲)}$ را تعیین کنید.

حل:

$x(x^۲ - ۱)(x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = \pm ۱$ یا $x = -۲$

$D_f = R - \{-۲ , -۱ , ۰ , ۱\}$

برای تعیین برد تابع با توجه به دامنه، ضابطه را ساده می‌کنیم.

$f(x) = \frac{x(x^۲ + ۳x + ۲)}{x(x^۲ - ۱)(x + ۲)} = \frac{x(x + ۱)(x + ۲)}{x(x - ۱)(x + ۱)(x + ۲)} \Rightarrow y = \frac{۱}{x - ۱}$

مقادیر تابع را به ازای ۲− و ۱− و ۰ و ۱ حساب می‌کنیم و آنها را از برد کم می‌کنیم.

$f(-۲) = -\frac{۱}{۳} \qquad f(-۱) = -\frac{۱}{۲} \qquad f(۰) = -۱$

$y = \frac{۱}{x - ۱} \Rightarrow x - ۱ = \frac{۱}{y} \Rightarrow x = \frac{۱}{y} + ۱$

MATH75.IR

با توجه به اینکه x مقداری حقیقی است لذا $y \neq ۰$.

$$R_f = R - \{-۱ , -\frac{۱}{۲} , -\frac{۱}{۳} , ۰\}$$

مثال ۴۰: دامنه و برد تابع حقیقی با ضابطهٔ $y = \frac{x - ۱}{۲x + ۳}$ را بدست آورید.

حل:

$$۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$$

$$D = R - \left\{-\frac{۳}{۲}\right\}$$

$$y = \frac{x - ۱}{۲x + ۳} \Rightarrow ۲xy + ۳y = x - ۱ \Rightarrow (۲y - ۱)x = -۳y - ۱$$

$$\Rightarrow x = \frac{-۳y - ۱}{۲y - ۱}$$

با توجه به اینکه x عددی حقیقی است باید داشته باشیم:

$$۲y - ۱ \neq ۰ \Rightarrow y \neq \frac{۱}{۲}$$

$$\text{برد تابع} = R - \left\{\frac{۱}{۲}\right\}$$

مثال ۴۱: دامنه و برد تابع حقیقی $f(x) = \frac{x^{۵۰} - x}{x - x^{۵۰}}$ را حساب کنید.

حل:

$$x - x^{۵۰} = ۰ \Rightarrow x(۱ - x^{۴۹}) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \text{ یا } x = ۱$$

$$D_f = R - \{۰ , ۱\}$$

$$y = \frac{x^{۵۰} - x}{x - x^{۵۰}} = \frac{x^{۵۰} - x}{-(x^{۵۰} - x)} = -۱$$

$$R_f = \{-۱\}$$

این تابع یک تابع ثابت است.

دامنه و برد توابع اصم: توابعی که در آنها متغیر x زیر رادیکال قرار داشته باشد تابع اصم نامیده می‌شود.

مثال ۴۲: دامنه و برد تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \sqrt{۲x - ۱} \end{cases}$ را بدست آورید.

MATH75.IR

حل:

$$۲x - ۱ \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{۱}{۲} \qquad D_f = [\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

$$y = \sqrt{۲x - ۱} \quad \Rightarrow \quad y^۲ = ۲x - ۱ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y^۲ + ۱}{۲}$$

به ازای هر مقدار y مقداری حقیقی برای x وجود دارد.

$$\sqrt{۲x - ۱} \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad y \geq ۰$$

$$R = [۰, +\infty)$$

مثال ۴۳: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{x - ۲} + \sqrt{۴ - x}$ را بدست آورید.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} x - ۲ \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x \geq ۲ \\ ۴ - x \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x \leq ۴ \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{اشتراک}} ۲ \leq x \leq ۴ \quad \Rightarrow \quad D = [۲, ۴]$$

برای تعیین برد تابع باید توجه داشته باشیم اولاً $\boxed{(۱) \quad y > ۰}$

$$\sqrt{x - ۲} + \sqrt{۴ - x} = y$$

$$x - ۲ + ۴ - x + ۲\sqrt{(x - ۲)(۴ - x)} = y^۲$$

$$۲ + ۲\sqrt{-x^۲ + ۶x - ۸} = y^۲ \quad \Rightarrow \quad ۲\sqrt{-x^۲ + ۶x - ۸} = y^۲ - ۲$$

$$۴(-x^۲ + ۶x - ۸) = (y^۲ - ۲)^۲ \quad \Rightarrow \quad -۴x^۲ + ۲۴x - [۳۲ - (y^۲ - ۲)^۲] = ۰$$

$$x = \frac{-۱۲ \pm \sqrt{۱۴۴ - ۴[۳۲ + (y^۲ - ۲)^۲]}}{-۴}$$

$$۱۴۴ - ۴[۳۲ + (y^۲ - ۲)^۲] \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad ۳۶ \geq ۳۲ + (y^۲ - ۲)^۲$$

$$\Rightarrow \quad (y^۲ - ۲)^۲ \leq ۴ \quad \Rightarrow \quad -۲ \leq y^۲ - ۲ \leq ۲ \quad \Rightarrow \quad ۰ \leq y^۲ \leq ۴$$

$$\Rightarrow \quad -۲ \leq y \leq ۲$$

با توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت

$$\text{برد تابع} = (۰, ۲]$$

مثال ۴۴: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ $y = ۲ - \sqrt{-x^۲ + ۴x}$ را بدست آورید.

حل:

$$-x^۲ + ۴x \geq ۰$$

MATH75.IR

ریشه‌های معادلهٔ $-x^2 + 4x = 0$ برابر صفر و ۴ می‌باشند. عبارت $-x^2 + 4x$ به ازای مقادیر بین و خود دو ریشه بزرگتر یا مساوی صفر می‌شود. بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $-x^2 + 4x \geq 0$ مجموعهٔ $\{x|x \in R \ , \ 0 \leq x \leq 4\}$ است.

$D = [0 , 4]$

برای تعیین برد تابع باید توجه داشته باشیم که کمترین مقدار عبارت $(\sqrt{-x^2 + 4x})$ صفر است. لذا بیشترین مقدار y برابر ۲ می‌شود. بنابراین $y \leq 2$ شرط اولیه است.

$$y = 2 - \sqrt{-x^2 + 4x} \Rightarrow (y - 2)^2 = -x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + (y - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - (y - 2)^2}$$

$$4 - (y - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow (y - 2)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq y - 2 \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq y \leq 4$$

حال اشتراک دو رابطهٔ $y \leq 2$ و $0 \leq y \leq 4$ را به عنوان برد تابع در نظر می‌گیریم.

$R = [0 , 2]$

مثال ۴۵: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ $y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{-x^2 + x + 2}}$ را تعیین کنید.

حل: دامنه این تابع مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x^2 - 2x}{-x^2 + x + 2} \geq 0$ می‌باشد.

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2$$

$$-x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = 2$$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$x^2 - 2x$		+		+	0	−	0	+	
$-x^2 + x + 2$		−	0	+		+	0	−	
$\frac{x^2 - 2x}{-x^2 + x + 2}$		−	ن	+	0	−	ن	−	

$D = \{x|x \in \mathbf{R} \ , \ -1 < x \leq 0\} = (-1 , 0]$

برای تعیین برد تابع، ابتدا ضابطهٔ تابع را با توجه به اینکه $x \in (-1 , 0]$ ساده می‌کنیم.

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{-x^2 + x + 2}} = \sqrt{\frac{x(x - 2)}{-(x + 1)(x - 2)}} = \sqrt{\frac{x}{-(x + 1)}}$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{-(x + 1)}} \Rightarrow y^2 = \frac{x}{-x - 1} \Rightarrow -xy^2 - y^2 = x$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \quad -y^{۲} = x(۱ + y^{۲}) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-y^{۲}}{y^{۲} + ۱} \qquad x \in (-۱ , ۰]$$

$$\Rightarrow \quad -۱ < \frac{-y^{۲}}{y^{۲} + ۱} \leq ۰ \quad \Rightarrow \quad -۱ < \frac{-y^{۲} - ۱ + ۱}{y^{۲} + ۱} \leq ۰ \quad \Rightarrow \quad -۱ < -۱ + \frac{۱}{y^{۲} + ۱} \leq ۰$$

$$\Rightarrow \quad ۰ < \frac{۱}{۱ + y^{۲}} \leq ۱ \quad \Rightarrow \quad ۱ + y^{۲} \geq ۱ \quad \Rightarrow \quad y^{۲} \geq ۰$$

این نامعادله به ازای هر مقدار y برقرار است اما شرط اولیه این است که $y \geq ۰$ لذا:

برد تابع $= [۰ , +\infty)$

دامنه و برد توابع شامل قدرمطلق:

مثال ۴۶: دامنه و برد تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = -|x - ۱| + ۲ \end{cases}$ را بدست آورید.

حل: دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است. اما برای تعیین برد تابع دو حالت در نظر می‌گیریم.

$$y = \begin{cases} -(x - ۱) + ۲ & x \geq ۱ \\ +(x - ۱) + ۲ & x < ۱ \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} -x + ۳ & x \geq ۱ \\ x + ۱ & x < ۱ \end{cases}$$

$$x \geq ۱ \quad \Rightarrow \quad y = -x + ۳ \quad \Rightarrow \quad x = ۳ - y$$

$$۳ - y \geq ۱ \quad \Rightarrow \quad y \leq ۲$$

$$x < ۱ \quad \Rightarrow \quad y = x + ۱ \quad \Rightarrow \quad x = y - ۱$$

$$y - ۱ < ۱ \quad \Rightarrow \quad y < ۲$$

$$R_f = (-\infty , ۲]$$

مثال ۴۷: دامنه و برد تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \frac{x + ۲}{|x| - ۱}$ را بدست آورید.

حل:

$$|x| - ۱ = ۰ \quad \Rightarrow \quad |x| = ۱ \quad \Rightarrow \quad x = \pm ۱$$

$$D = R - \{-۱ , ۱\}$$

برای تعیین برد تابع دو حالت در نظر می‌گیریم.

$$y = \begin{cases} \dfrac{x + ۲}{x - ۱} & x \geq ۰ \\[2ex] \dfrac{x + ۲}{-x - ۱} & x < ۰ \end{cases}$$

$$x \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x + ۲}{x - ۱} \quad \Rightarrow \quad xy - y = x + ۲ \quad \Rightarrow \quad x(y - ۱) = y + ۲ \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y + ۲}{y - ۱}$$

MATH75.IR

$$x \geq 0 \Rightarrow \frac{y+2}{y-1} \geq 0$$

ریشه‌های صورت و مخرج عبارت $\frac{y+2}{y-1}$ برابر ۲− و ۱ می‌باشند.

y	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\frac{y+2}{y-1}$		$+$	0	$-$	ن	$+$	

$$R_1 = (-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$$

$$x < 0 \Rightarrow y = \frac{x+2}{-x-1} \Rightarrow -xy - y = x + 2 \Rightarrow -y - 2 = xy + x$$

$$\Rightarrow -y - 2 = x(y+1) \Rightarrow x = \frac{-y-2}{y+1}$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{-y-2}{y+1} < 0$$

ریشه‌های صورت و مخرج عبارت $\frac{-y-2}{y+1}$ برابر ۲− و ۱− می‌باشند.

y	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$\frac{-y-2}{y+1}$		$-$	0	$+$	ن	$-$	

$$R_2 = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$$

$$R_f = R_1 \cup R_2 = (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$$

مثال ۴۸: دامنه و برد تابع $f(x) = |x-1| + |x-2|$ را بدست آورید.

حل: دامنهٔ تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

برای تعیین برد تابع آنرا به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$f(x) = \begin{cases} -x+1-x+2 & x < 1 \\ x-1-x+2 & 1 \leq x < 2 \\ x-1+x-2 & 2 \leq x \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x+3 & x < 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \\ 2x-3 & 2 \leq x \end{cases}$$

برد هر ضابطه را حساب می‌کنیم و اجتماع آنها را بعنوان برد تابع در نظر می‌گیریم.

$$x < 1 \Rightarrow -2x > -2 \Rightarrow -2x + 3 > -2 + 3 \Rightarrow y > 1$$

$$R_1 = (1, +\infty) \qquad R_2 = \{1\}$$

$$2 \leq x \Rightarrow 4 \leq 2x \Rightarrow 4 - 3 \leq 2x - 3$$

$$\Rightarrow R_3 = [1, +\infty)$$

MATH75.IR

$R_f = R_۱ \cup R_۲ \cup R_۳ = [۱ , +\infty)$

مثال ۴۹: دامنه و برد تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x - |x|}$ را تعیین کنید.

حل:

$x - |x| \geq ۰ \Rightarrow x \geq |x|$

با توجه به اینکه قدرمطلق x همواره از خود x بزرگتر یا مساوی است می‌توان گفت نامساوی اخیر فقط در صورتی درست است که $|x| = x$ باشد. پس $x \geq ۰$.

$D_f = [۰ , +\infty)$

$x \geq ۰ \Rightarrow |x| = x \Rightarrow x - |x| = ۰ \Rightarrow \sqrt{x - |x|} = ۰ \Rightarrow y = ۰$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x) = ۰$ می‌باشد لذا:

$R_f = \{۰\}$

مثال ۵۰: دامنه و برد تابع حقیقی با ضابطهٔ $y = x + \frac{۱}{x - ۲}$ را بدست آورید.

حل:

$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow D_f = R - \{۲\}$

$y = x + \frac{۱}{x - ۲} \Rightarrow y - ۲ = x - ۲ + \frac{۱}{x - ۲}$

می‌دانیم اگر $a > ۰$ آنگاه $a + \frac{۱}{a} \geq ۲$ و اگر $a < ۰$ آنگاه $a + \frac{۱}{a} \leq -۲$ بنابراین:

$x > ۲ \Rightarrow y - ۲ \geq ۲ \Rightarrow y \geq ۴$

$x < ۲ \Rightarrow y - ۲ \leq -۲ \Rightarrow y \leq ۰$

$R_f = (-\infty , ۰] \cup [۴ , +\infty)$

مثال ۵۱: دامنه و برد تابع حقیقی $f(x) = \frac{۲x^۴ + ۴}{\sqrt{x^۴ + ۱}}$ را تعیین کنید.

حل:

$x^۴ + ۱ > ۰ \Rightarrow D_f = R$

$$f(x) = \frac{۲x^۴ + ۴}{\sqrt{x^۴ + ۱}} = ۲\left(\frac{x^۴ + ۱ + ۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}}\right) = ۲\left(\frac{x^۴ + ۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}} + \frac{۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}}\right)$$

$$= ۲\left(\sqrt{x^۴ + ۱} + \frac{۱}{\sqrt{x^۴ + ۱}}\right) \geq ۴$$

MATH75.IR

$R_f = [۴ , +\infty)$

مثال ۵۲: اگر $f(x) = x^۲ + ۲x + ۳$ حاصل $f(۲x - ۱)$ را حساب کنید.

حل:

$$f(۲x - ۱) = (۲x - ۱)^۲ + ۲(۲x - ۱) + ۳$$
$$= ۴x^۲ - ۴x + ۱ + ۴x - ۲ + ۳$$
$$= ۴x^۲ + ۲$$

مثال ۵۳: اگر $f(۲x - ۳) = x^۲ - ۱$ باشد $f(x)$ را بدست آورید.

حل:

$$۲x - ۳ = t \Rightarrow x = \frac{t + ۳}{۲}$$

$$f(۲x - ۳) = x^۲ - ۱ \Rightarrow f(t) = \left(\frac{t + ۳}{۲}\right)^۲ - ۱ = \frac{t^۲ + ۶t + ۹}{۴} - ۱$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{t^۲ + ۶t + ۵}{۴} \Rightarrow f(x) = \frac{x^۲ + ۶x + ۵}{۴}$$

مثال ۵۴: اگر $f\left(x + \frac{۱}{x}\right) = x^۳ + \frac{۱}{x^۳}$، آنگاه $f(\frac{۱}{x})$ را بدست آورید.

حل:

$$f(x + \frac{۱}{x}) = (x + \frac{۱}{x})^۳ - ۳(x + \frac{۱}{x})$$

حال به جای $x + \frac{۱}{x}$ عبارت $\frac{۱}{x}$ را قرار می‌دهیم.

$$f(\frac{۱}{x}) = (\frac{۱}{x})^۳ - ۳ \times \frac{۱}{x} = \frac{۱}{x^۳} - \frac{۳}{x} \Rightarrow f(\frac{۱}{x}) = \frac{۱ - ۳x^۲}{x^۳}$$

مثال ۵۵: اگر $f(x + y , x - y) = ۲xy$، آنگاه $f(x , y)$ را بدست آورید.

حل:

$$(x + y , x - y) = (a , b)$$

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{a + b}{۲} \quad , \quad y = \frac{a - b}{۲}$$

$$f(a , b) = ۲\left(\frac{a + b}{۲}\right)\left(\frac{a - b}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}(a^۲ - b^۲)$$

MATH75.IR

$$f(x , y) = \frac{۱}{۲}(x^۲ - y^۲)$$

مثال ۵۶: اگر $۲f(x - ۱) + f(۱ - x) = ۲x$ باشد $f(x)$ را بدست آورید.

حل:

$$x - ۱ = t \Rightarrow ۱ - x = -t \ , \ ۲x = ۲t + ۲$$

$$-۲\begin{cases} ۲f(t) + f(-t) = ۲t + ۲ \\ ۲f(-t) + f(t) = -۲t + ۲ \end{cases} \qquad t \longrightarrow -t$$

$$\begin{cases} -۴f(t) - ۲f(-t) = -۴t - ۴ \\ f(t) + ۲f(-t) = -۲t + ۲ \end{cases} \Rightarrow -۳f(t) = -۶t - ۲ \Rightarrow f(t) = ۲t + \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲x + \frac{۲}{۳}$$

تساوی دو تابع: دو تابع $f : A \longrightarrow B$ و $g : A \longrightarrow B$ مساویند اگر فقط اگر:

اولاً: $D_f = D_g$

ثانیاً: به ازای هر x از دامنهٔ مشترک: $f(x) = g(x)$.

مثال ۵۷: دو تابع حقیقی f و g با ضابطه‌های $f(x) = |x|$ و $g(x) = \sqrt{x^۲}$ با هم مساویند زیرا دامنهٔ دو تابع برابر R است و به ازای هر عدد حقیقی x خواهیم داشت:

$$f(x) = g(x)$$

اما دو تابع حقیقی t و h با ضابطه‌های $t(x) = x - ۱$ و $h(x) = \frac{x^۲ - x}{x}$ با هم مساوی نیستند زیرا:

$$D_t = R \quad , \quad D_h = R - \{۰\}$$

مثال ۵۸: تحقیق کنید دو تابع حقیقی زیر مساویند یا خیر؟

$$f(x) = x^۲ + x + ۱ \qquad g(x) = \begin{cases} \frac{x^۳ - ۱}{x - ۱} & x \neq ۱ \\ ۱ & x = ۱ \end{cases}$$

حل:

$$D_f = D_g = R$$

$$\begin{matrix} f(۱) = ۳ \\ g(۱) = ۱ \end{matrix} \Rightarrow f(۱) \neq g(۱)$$

بنابراین $f \neq g$.

اعمال جبری روی توابع: اگر f و g دو تابع باشند در این صورت $f + g$، $f - g$، $f . g$، $\frac{f}{g}$ و rf به صورت زیر تعریف می‌شوند:

MATH75.IR

الف) $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ب) $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

ج) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

د) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

هـ) $\forall r \in \mathbf{R} \ : (rf)(x) = rf(x)$

دامنهٔ تابعهای $f + g$ و $f - g$ و $f \cdot g$ اشتراک دامنه‌های f و g می‌باشد. دامنهٔ $\frac{f}{g}$ نیز عبارت است از

$D_f \cap D_g - \{x | x \in D_g , g(x) \neq ۰\}$

دامنهٔ تابع rf با دامنهٔ f مساوی است.

مثال ۵۹: اگر $f = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۳) , (۳ , ۴) , (۴ , ۲)\}$ و $g = \{(۱ , ۳) , (۳ , ۰) , (۲ , ۵) , (۶, ۵)\}$ دوتابع باشند، تابعهای $f + g$، $f - g$، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ و $۳f$ را مشخص کنید.

حل:

$D_f = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$

$D_g = \{۱ , ۲ , ۳ , ۶\}$

$\Rightarrow D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f.g} = D_f \cap D_g = \{۱ , ۲ , ۳\}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{۱ , ۲ , ۳\} - \{۳\} = \{۱ , ۲\}$ $\qquad D_{۳f} = D_f$

با توجه به اینکه $D_f \cap D_g = \{۱ , ۲ , ۳\}$ واضح است که تابعهای $f + g$، $f - g$ و $f \cdot g$ فقط می‌توانند روی ۱ و ۲ و ۳ اثر کنند.

$(f + g)(۱) = f(۱) + g(۱) = ۲ + ۳ = ۵$

$(f + g)(۲) = f(۲) + g(۲) = ۳ + ۵ = ۸$

$(f + g)(۳) = f(۳) + g(۳) = ۴ + ۰ = ۴$

$f + g = \{(۱ , ۵) , (۲ , ۸) , (۳ , ۴)\}$

$f - g = \{(۱ , ۲ - ۳) , (۲ ,۳ - ۵) , (۳ , ۴ - ۰)\} = \{(۱ , -۱) , (۲ , -۲) , (۳ , ۴)\}$

$f \cdot g = \{(۱ , ۲ \times ۳) , (۲ , ۳ \times ۵) , (۳ , ۴ \times ۰)\} = \{(۱ , ۶) , (۲ , ۱۵) , (۳ , ۰)\}$

$\frac{f}{g} = \{(۱ , \frac{۲}{۳}) , (۲ , \frac{۳}{۵})\}$

$۳f = \{(۱ , ۶) , (۲ , ۹) , (۳ , ۱۲) , (۴ , ۶)\}$

مثال ۶۰: اگر $f(x) = x^۲ - ۱ \ , \ g(x) = ۲x + ۱$ تابع $f + g$ را مشخص کنید.

MATH75.IR

حل:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = R$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^۲ - ۱ + ۲x + ۱ = x^۲ + ۲x$$

مثال ۶۱: اگر $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x \geq ۱ \\ x + ۱ & x < ۱ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x + ۳ & x \geq ۲ \\ -۲x + ۱ & x < ۲ \end{cases}$

مطلوبست محاسبهٔ $f + g$ و $f . g$.

حل:

$$D_f = D_g = R \Rightarrow D_f \cap D_g = R \Rightarrow D_{f+g} = D_{f.g} = R$$

اگر $x \geq ۲$ آنگاه:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^۲ - ۱) + (x + ۳) = x^۲ + x + ۲$$

اگر $x < ۲$ آنگاه:

$$۱ \leq x < ۲ \Rightarrow (f + g)(x) = (x^۲ - ۱) + (-۲x + ۱) = x^۲ - ۲x$$

$$x < ۱ \Rightarrow (f + g)(x) = (x + ۱) + (-۲x + ۱) = -x + ۲$$

$$(f + g)(x) = \begin{cases} x^۲ + x + ۲ & x \geq ۲ \\ x^۲ - ۲x & ۱ \leq x < ۲ \\ -x + ۲ & x < ۱ \end{cases}$$

ضابطهٔ تابع $f . g$ نیز به همین ترتیب بدست می‌آید.

$$(f . g)(x) = \begin{cases} x^۳ + ۳x^۲ - x - ۳ & x \geq ۲ \\ -x^۲ + ۲x - ۱ & ۱ \leq x < ۲ \\ -۲x^۲ - x + ۱ & x < ۱ \end{cases}$$

مثال ۶۲: اگر $f(x) = \sqrt{x - ۱}$ تابع $f^۲(x)$ را تعیین کنید.

حل:

$$D_{f^۲} = D_f = [۱ , +\infty)$$

$$f^۲(x) = (f . f)(x) = f(x) . f(x) = \sqrt{x - ۱} \times \sqrt{x - ۱} = x - ۱$$

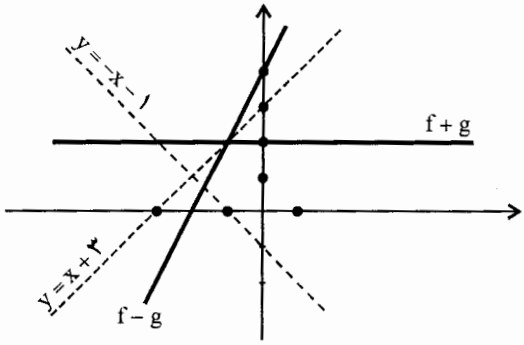
مثال ۶۳: اگر $f(x) = x + ۳$ و $g(x) = -x - ۱$ نمودار توابع $f + g$ و $f - g$ را رسم کنید.

MATH75.IR

حل:

$(f + g)(x) = x + ۳ - x - ۱ = ۲$

$(f - g)(x) = x + ۳ + x + ۱ = ۲x + ۴$



ترکیب توابع: تابع f باضابطهٔ $f(x) = x + ۱$ و تابع g با ضابطهٔ $g(x) = x^۲$ را در نظر بگیریم. اگر بخواهیم عددی مانند t را ابتدا تحت تأثیر تابع g و سپس حاصل آنرا تحت تأثیر تابع f قرار دهیم دراین صورت خواهیم داشت:

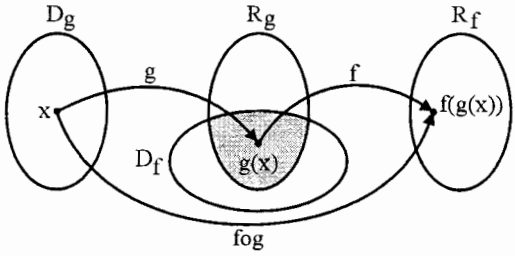
$g(t) = t^۲ \ , \ f(t^۲) = t^۲ + ۱$

حال اگر بخواهیم تابعی بسازیم که کار این دوتابع را یکجا انجام دهد و مستقیماً عدد حقیقی t را به $t^۲ + ۱$ نظیر کند باید دو تابع f و g را با هم ترکیب کنیم که در این صورت از نماد fog استفاده می‌کنیم و آنرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$(fog)(x) = f(g(x))$

$f(g(t)) = f(t^۲) = t^۲ + ۱$

$D_{fog} = \{x | x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$

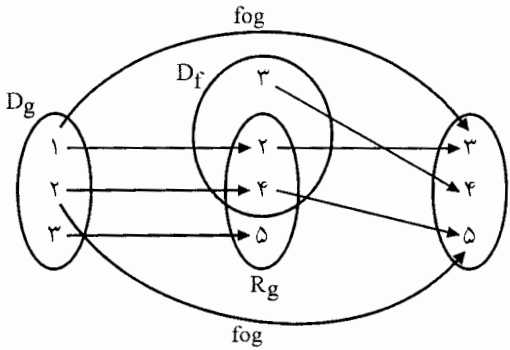


مثال ۶۴: اگر $g = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۴) , (۳ , ۵)\}$ و $f = \{(۲ , ۳) , (۳ , ۴) , (۴ , ۵)\}$ باشد.

MATH75.IR

توابع fog و gof و دامنه‌های آنها را تعیین کنید.

حل:



$D_{fog} = \{۱ , ۲\}$ $\qquad$ $D_{gof} = \{۲\}$

$fog = \{(۱ , ۳) , (۲ , ۵)\}$ $\qquad$ $gof = \{(۲ , ۵)\}$

مثال ۶۵: توابع حقیقی f و g به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$f(x) = \sqrt{x} \quad , \quad g(x) = ۱ - x$

اولاً: دامنهٔ توابع fog و gof را پیدا کنید.

ثانیاً: ضابطهٔ توابع fog ، gof و gog را بدست آورید.

حل:

$D_f = [۰ , +\infty) \qquad D_g = R$

$D_{fog} = \{x|x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\} = \{x|x \in R \ , \ ۱ - x \geq ۰\} = (-\infty , ۱]$

$D_{gof} = \{x|x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g\} = \{x|x \geq ۰ \ , \sqrt{x} \in R\} = [۰ , +\infty)$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(۱ - x) = \sqrt{۱ - x}$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = ۱ - \sqrt{x}$

$(gog)(x) = g(g(x)) = g(۱ - x) = ۱ - (۱ - x) = x$

مثال ۶۶: اگر $f(x) = \frac{۲}{x - ۳}$ و $g(x) = \frac{x - ۲}{x + ۱}$ دامنه و ضابطهٔ تابع fog را تعیین کنید.

حل:

$D_f = R - \{۳\} \qquad D_g = R - \{-۱\}$

$D_{fog} = \{x|x \in D_g \ , \ g(x) \in D_f\}$

MATH75.IR

$$= \{x | x \in R , x \neq -۱ , \frac{x - ۲}{x + ۱} \neq ۳\}$$

$$= \{x | x \in R \ , x \neq -۱ \ , \ x \neq -\frac{۵}{۲}\} = R - \{-\frac{۵}{۲} , -۱\}$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x - ۲}{x + ۱}\right) = \frac{۲}{\frac{x - ۲}{x + ۱} - ۳} = \frac{۲}{\frac{-۲x - ۵}{x + ۱}} = \frac{۲x + ۲}{-۲x - ۵}$$

مثال ۶۷: اگر $g(x) = x^۲ - ۱$ و $fog(x) = ۲x^۲ + ۱$ ضابطهٔ تابع f را بدست آورید.

حل:

$$f(g(x)) = ۲x^۲ + ۱ \Rightarrow f(x^۲ - ۱) = ۲x^۲ + ۱$$

$$x^۲ - ۱ = t \Rightarrow x^۲ = t + ۱$$

$$f(t) = ۲(t + ۱) + ۱ \Rightarrow f(t) = ۲t + ۳$$

$$\Rightarrow f(x) = ۲x + ۳$$

مثال ۶۸: اگر $f(x) = ۴x - ۱$ و $fog(x) = ۴x^۳ + ۷$ ضابطهٔ تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

حل:

$$f(g(x)) = ۴x^۳ + ۷$$

$$۴g(x) - ۱ = ۴x^۳ + ۷ \Rightarrow ۴g(x) = ۴x^۳ + ۸ \Rightarrow g(x) = x^۳ + ۲$$

مثال ۶۹: اگر $g(x) = ۳x - ۱$ و $f(x) = \begin{cases} x & x \leq ۱ \\ -۲ & ۱ < x < ۲ \\ ۲x - ۱ & x \geq ۲ \end{cases}$ مطلوبست محاسبهٔ fog .

حل:

$$fog\ (x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x) & g(x) \leq ۱ \\ -۲ & ۱ < g(x) < ۲ \\ ۲g(x) - ۱ & g(x) \geq ۲ \end{cases}$$

$$g(x) \leq ۱ \Rightarrow ۳x - ۱ \leq ۱ \Rightarrow ۳x \leq ۲ \Rightarrow x \leq \frac{۲}{۳}$$

$$۱ < g(x) < ۲ \Rightarrow ۱ < ۳x - ۱ < ۲ \Rightarrow ۲ < ۳x < ۳ \Rightarrow \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۲}{۳} < x < ۱$$

$$g(x) \geq ۲ \Rightarrow ۳x - ۱ \geq ۲ \Rightarrow ۳x \geq ۳ \Rightarrow x \geq ۱$$

MATH75.IR

$$fog(x) = \begin{cases} ۳x - ۱ & x \le \frac{۲}{۳} \\ -۲ & \frac{۲}{۳} < x < ۱ \\ ۶x - ۳ & x \ge ۱ \end{cases}$$

توابع زوج و فرد: فرض کنیم f یک تابع و برای هر $x \in D_f$ همواره $-x \in D_f$. در این صورت:

الف) تابع f را زوج می‌نامیم اگر برای هر x متعلق به دامنهٔ f داشته باشیم: $f(-x) = f(x)$.

ب) تابع f را فرد گوییم اگر برای هر x متعلق به دامنهٔ f داشته باشیم: $f(-x) = -f(x)$.

مثال ۷۰: تابع $f(x) = x^۴ - ۳x^۲ + ۱$ تابعی زوج است. زیرا:

$$f(-x) = (-x)^۴ - ۳(-x)^۲ + ۱ = x^۴ - ۳x^۲ + ۱ = f(x)$$

مثال ۷۱: تابع $f(x) = x^۳ - x$ تابعی فرد است. زیرا:

$$f(-x) = (-x)^۳ - (-x) = -x^۳ + x = -(x^۳ - x) = -f(x)$$

مثال ۷۲: تابع $f(x) = x^۲ - ۲x$ نه زوج است و نه فرد. زیرا:

$$f(-x) = (-x)^۲ - ۲(-x) = x^۲ + ۲x$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

نکته: تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۰$ هم زوج است و هم فرد.

مثال ۷۳: اگر f و g دو تابع زوج باشند ثابت کنید fog نیز تابعی زوج است.

حل: فرض می‌کنیم $f(-x) = f(x)$ و $g(-x) = g(x)$.

$$(fog)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (fog)(x)$$

مثال ۷۴: اگر f و g دو تابع فرد باشند ثابت کنید fog نیز تابعی فرد است. (اثبات به عهدهٔ دانش‌آموز)

مثال ۷۵: ثابت کنید حاصلضرب دو تابع فرد تابعی زوج است.

حل: فرض می‌کنیم f و g دو تابع فرد باشند.

$$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times -g(x) = f(x) \times g(x) = (f \times g)(x)$$

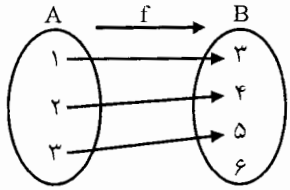
بنابراین تابع $f \times g$ تابعی زوج است.

نکته: به همین ترتیب ثابت می‌شود حاصلضرب دو تابع زوج تابعی زوج، و حاصلضرب یک تابع زوج در یک فرد تابعی فرد است.

نکته: مجموع و تفاضل دو تابع زوج، تابعی زوج و مجموع و تفاضل دو تابع فرد تابعی فرد است.

MATH75.IR

توابع یک به یک: تابع f که با نمودار پیکانی زیر تعریف شده است را در نظر بگیرید.



در این نمودار به ازای هر عضو از R_f فقط یک عضو از دامنه وجود دارد که به آن نظیر شده است. در واقع به هیچ عضو مجموعهٔ B دو پیکان وارد نشده است. (واضح است که از هیچ عضو دامنه نیز دو پیکان خارج نشده است) چنین توابعی را توابع یک به یک می‌نامند.

به‌طور کلی تابع f از A در B یک به یک است اگر و فقط اگر به هر y از برد یک و تنها یک x از دامنه نظیر شده باشد.

تعریف: تابع $f : A \longrightarrow B$ را یک به یک گوییم اگر و فقط اگر:

$$\forall x_۱ , x_۲ \in D_f : x_۱ \neq x_۲ \Rightarrow f(x_۱) \neq f(x_۲)$$

با توجه به اینکه عکس نقیض هر گزارهٔ شرطی با خود گزاره هم ارز است می‌توان گزارهٔ زیر را که کاربرد عملی دارد بکار برد.

$$\forall x_۱ , x_۲ \in D_f : f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

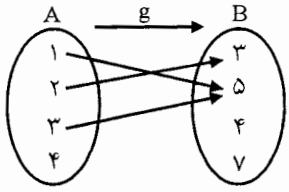
مثال ۷۶: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = ۲x + ۵ \end{cases}$ یک به یک است.

حل: فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ دو عضو از دامنه تابع باشند.

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow ۲x_۱ + ۵ = ۲x_۲ + ۵ \Rightarrow ۲x_۱ = ۲x_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

بنابراین تابع f یک به یک است.

مثال ۷۷: تابع g با نمودار زیر تعریف شده. آیا این تابع یک به یک است؟



حل: این تابع یک به یک نیست زیرا دو عضو ۱ و ۳ از دامنه به عضو ۵ از برد نظیر شده‌اند. در

MATH75.IR

واقع در تابع دو زوج مرتب وجود دارد که مؤلفه‌های دومشان برابرند.

$f(۱) = f(۳) \wedge ۱ \neq ۳$

مثال ۷۸: ثابت کنید تابع $\begin{cases} h : R \longrightarrow R \\ h(x) = x^۳ + ۱ \end{cases}$ یک به یک است.

حل: فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ دو عضو دامنه باشند.

$h(x_۱) = h(x_۲) \Rightarrow x_۱^۳ + ۱ = x_۲^۳ + ۱ \Rightarrow x_۱^۳ = x_۲^۳ \Rightarrow x_۱ = x_۲$

پس تابع h یک به یک است.

مثال ۷۹: تحقیق کنید تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - ۱$ یک به یک است یا خیر؟

حل: این تابع یک به یک نیست زیرا دو عضو ۱ و ۱− از دامنه هر دو به عضو صفر از برد نظیر می‌شوند.

$$\left.\begin{array}{l} f(۱) = ۱^۲ - ۱ = ۰ \\ f(-۱) = (-۱)^۲ - ۱ = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow f(۱) = f(-۱) \wedge ۱ \neq -۱$$

مثال ۸۰: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R^+ \longrightarrow R \\ f(x) = x^۲ - ۱ \end{cases}$ یک به یک است.

حل: فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ دو عضو دامنه باشند ($x_۱ > ۰$ و $x_۲ > ۰$).

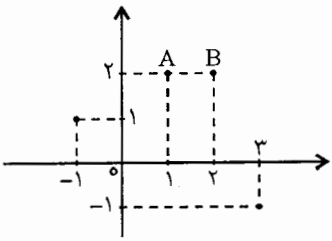
$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱^۲ - ۱ = x_۲^۲ - ۱ \Rightarrow x_۱^۲ = x_۲^۲$

$\Rightarrow |x_۱| = |x_۲| \Rightarrow x_۱ = x_۲$

پس تابع f یک به یک است.

بررسی یک به یک بودن تابع از روی نمودار

تابع $f = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۲) , (-۱ , ۱) , (۳ , -۱)\}$ را در نظر بگیرید. در این رابطه دو زوج مرتب (۲ , ۱) و (۲ , ۲) مؤلفه‌های دومشان مساوی است پس تابع یک به یک نیست. اگر نمودار این تابع را رسم کنیم ملاحظه می‌کنیم دو نقطه A(۱ , ۲) و B(۲ , ۲) روی خطی موازی محور طول قرار می‌گیرند.



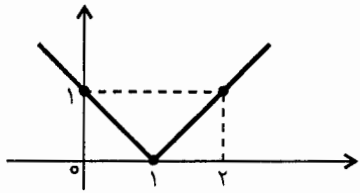
MATH75.IR

نتیجه: به طور کلی از نظر نمودار یک تابع یک به یک است در صورتی که هیچ خط افقی (موازی محور طول) در بیش از یک نقطه نمودار تابع را قطع نکند.

مثال ۸۱: نمودار تابع حقیقی $f(x) = |x - ۱|$ را رسم کنید و بررسی کنید تابع یک به یک است یا خیر؟

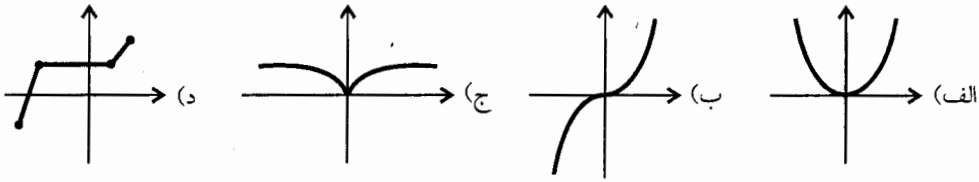
حل:

x	۰	۱	۲
$y = \|x - ۱\|$	۱	۰	۱



این تابع یک به یک نیست. زیرا خطوط افقی بیشماری می‌توان رسم کرد که نمودار آنرا در دو نقطه قطع کند.

مثال ۸۲: معین کنید کدامیک از نمودارهای زیر نمودار یک تابع یک به یک می‌باشند؟



حل: نمودار (الف) نمودار تابع یک به یک نیست.

نمودار (ب) نمودار تابع یک به یک هست زیرا هر خط افقی فقط در یک نقطه آنرا قطع می‌کند.

نمودار (ج) نمودار تابع یک به یک نیست زیرا خطی افقی می‌توان رسم کرد که آنرا در دو نقطه قطع کند.

نمودار (د) نمودار تابع یک به یک نیست. زیرا یک خط افقی می‌توان رسم کرد که آنرا در بیشمار نقطه قطع کند.

مثال ۸۳: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x \end{cases}$ تابعی یک به یک است.

حل:

$x_۱ , x_۲ \in R$

$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow x_۱^۳ + ۳x_۱^۲ + ۳x_۱ = x_۲^۳ + ۳x_۲^۲ + ۳x_۲$

MATH75.IR

$$\Rightarrow x_1^3 + 3x_1^2 + 3x_1 + 1 = x_2^3 + 3x_2^2 + 3x_2 + 1$$

$$(x_1 + 1)^3 = (x_2 + 1)^3$$

$$\Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

لذا تابع f یک به یک است.

مثال ۸۴: ثابت کنید تابع حقیقی f با ضابطهٔ $x^3 + y^3 = 1$ یک به یک است.

حل: فرض می‌کنیم (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو عضو تابع و $y_1 = y_2$ باشد و نشان می‌دهیم $x_1 = x_2$.

$$\left.\begin{array}{l}(x_1, y_1) \in f \Rightarrow x_1^3 + y_1^3 = 1 \\ (x_2, y_2) \in f \Rightarrow x_2^3 + y_2^3 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow x_1^3 + y_1^3 = x_2^3 + y_2^3 \xrightarrow{y_1 = y_2} x_1^3 = x_2^3$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع یک به یک است.

راه دوم:

$$x^3 + y^3 = 1 \Rightarrow y^3 = 1 - x^3 \Rightarrow y = \sqrt[3]{1 - x^3}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[3]{1 - x_1^3} = \sqrt[3]{1 - x_2^3} \Rightarrow 1 - x_1^3 = 1 - x_2^3$$

$$\Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال ۸۵: ثابت کنید تابع $f : R - \{-1\} \longrightarrow R - \{2\}$ با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1 - 3}{x_1 + 1} = \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 1}$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 - 3 = 2x_1x_2 + 2x_2 - 3x_1 - 3$$

$$\Rightarrow 2x_1 - 3x_2 = 2x_2 - 3x_1$$

$$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع f یک به یک است.

بررسی یک به یک بودن توابع چند ضابطه‌ای:

یک تابع چند ضابطه‌ای یک به یک است اگر و تنها اگر هر کدام از ضابطه‌هایش یک به یک بوده و بردهای هیچ دو ضابطه‌ای عضو مشترک نداشته باشند.

MATH75.IR

تابع $f(x) = \begin{cases} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{cases}$ در صورتی یک به یک است که $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و ... $f_n(x)$ یک به یک بوده و $\forall i , j \in N : R_{f_i} \cap R_{f_j} = \varnothing$

مثال ۸۶: ثابت کنید تابع زیر یک به یک است.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

حل: در نظر می‌گیریم $g_1(x) = x^2$ و $g_2(x) = 2x - 1$ و نشان می‌دهیم g_1 و g_2 یک به یک هستند.

$$g_1(x_1) = g_1(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \quad x_1 , x_2 \geq 0 \quad x_1 = x_2$$

پس g_1 یک به یک است.

$$g_2(x_1) = g_2(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس g_2 یک به یک است.

حال نشان می‌دهیم برد g_1 و g_2 اشتراک ندارند.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y \geq 0 \qquad R_{g_1} = [0 , +\infty[$$

$$y = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2}$$

$$x < 0 \Rightarrow \frac{y + 1}{2} < 0 \Rightarrow y + 1 < 0 \Rightarrow y < -1 \qquad R_{g_2} =]-\infty , -1[$$

ملاحظه می‌شود $R_{g_1} \cap R_{g_2} = \varnothing$.

بنابراین تابع g یک به یک است.

مثال ۸۷: تحقیق کنید تابع $h : R \longrightarrow R$ با ضابطهٔ زیر یک به یک هست یا خیر؟

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 0 \\ x^2 - 5 & 0 < x \leq 2 \\ -x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

حل: اگر سه ضابطهٔ تابع را از بالا به پایین به ترتیب h_1 و h_2 و h_3 بنامیم در این صورت با توجه به دامنهٔ هر ضابطه خواهیم داشت:

MATH75.IR

$$x \le ۰ \Rightarrow ۲x \le ۰ \Rightarrow ۲x - ۱ \le -۱ \Rightarrow h_۱ \le -۱$$

$$R_{h_۱} =]-\infty , -۱]$$

$$۰ < x \le ۲ \Rightarrow ۰ < x^۲ \le ۴ \Rightarrow -۵ < x^۲ - ۵ \le -۱ \Rightarrow -۵ < h_۲ \le -۱$$

$$R_{h_۲} =]-۵ , -۱]$$

$$x > ۲ \Rightarrow -x < -۲ \Rightarrow -x - ۲ < -۴ \Rightarrow h_۳ < -۴$$

$$R_{h_۳} =]-\infty , -۴[$$

ملاحظه می‌شود $R_{h_۱} \cap R_{h_۲} = \{-۱\}$

بنابراین تابع فوق یک به یک نیست. در واقع می‌توان مثال نقض زیر را نیز برای حل مسئله بکار برد.

$$\begin{matrix} f(۰) = ۲ \times ۰ - ۱ = -۱ \\ f(۲) = ۲^۲ - ۵ = -۱ \end{matrix} \Rightarrow f(۰) = f(۲) \wedge ۰ \ne ۲$$

نکته: عمل جمع در مجموعهٔ اعداد حقیقی را می‌توان به منزلهٔ یک تابع دو متغیره تعریف کرد که هر دو عدد حقیقی را به مجموع آنها نظیر می‌کند.

$$\begin{cases} f : R^۲ \longrightarrow R \\ f(x , y) = x + y \end{cases}$$

به همین ترتیب اعمال تفریق و ضرب و تقسیم را نیز می‌توان به صورت یک تابع تعریف کرد.

مثال ۸۸: تحقیق کنید تابع $\begin{cases} f : R^۲ \longrightarrow R^۲ \\ f(x , y) = x + y \end{cases}$ یک به یک هست یا خیر؟

حل: این تابع یک به یک نیست زیرا:

$$\begin{matrix} f(۲ , ۳) = ۲ + ۳ = ۵ \\ f(۱ , ۴) = ۱ + ۴ = ۵ \end{matrix} \Rightarrow f(۲ , ۳) = f(۱ , ۴) \wedge (۲ , ۳) \ne (۱ , ۴)$$

مثال ۸۹: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R^۲ \longrightarrow R^۲ \\ f(x , y) = (x + ۲y , ۳x + ۴y) \end{cases}$ یک به یک است.

حل: فرض می‌کنیم $(x_۱ , y_۱)$ و $(x_۲ , y_۲)$ دو عضو از دامنهٔ تابع باشند.

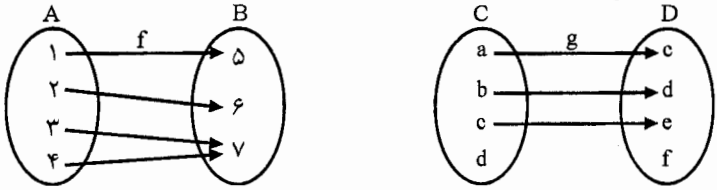
$$f(x_۱ , y_۱) = f(x_۲ , y_۲) \Rightarrow (x_۱ + ۲y_۱ , ۳x_۱ + ۴y_۱) = (x_۲ + ۲y_۲ , ۳x_۲ + ۴y_۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ + ۲y_۱ = x_۲ + ۲y_۲ \\ ۳x_۱ + ۴y_۱ = ۳x_۲ + ۴y_۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۲x_۱ - ۴y_۱ = -۲x_۲ - ۴y_۲ \\ ۳x_۱ + ۴y_۱ = ۳x_۲ + ۴y_۲ \end{cases} \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

MATH75.IR

حال در یکی از معادلات دستگاه جای $x_۱$ مساوی آن $x_۲$ را قرار می‌دهیم و نتیجه می‌گیریم $y_۱ = y_۲$. در نتیجه $(x_۱ , y_۱) = (x_۲ , y_۲)$ لذا تابع یک به یک است.

توابع پوشا (بِرو): توابع f و g که با نمودارهای زیر تعریف شده‌اند را در نظر بگیرید.



همانطور که ملاحظه می‌شود برد تابع f با مجموعهٔ انجام آن یعنی B برابر است. به عبارت دیگر به هر عضو B لااقل یک پیکان وارد شده است. یعنی به ازای هر عضو B عضوی در A وجود دارد که به آن نظیر شده است. تابع f یک تابع پوشا نامیده می‌شود. در تابع g عضو f از مجموعهٔ D نظیر هیچ عضو از C نیست. در واقع برد تابع g با مجموعهٔ انجام آن مساوی نیست. لذا این تابع پوشا نیست.

تعریف: تابع $f : A \longrightarrow B$ تابعی پوشاست اگر و تنها اگر:

$$\forall y \in B \ \exists x \in A : f(x) = y$$

مثال ۹۰: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = ۳x + ۲ \end{cases}$ تابعی پوشاست.

حل: باید نشان دهیم به ازای هر y از R عضوی مانند x در R موجود است که $f(x) = y$ برای این منظور جای f(x) در ضابطهٔ تابع y قرار می‌دهیم و معادلهٔ حاصل را بر حسب x حل می‌کنیم.

$$y = ۳x + ۲ \Rightarrow y - ۲ = ۳x \Rightarrow x = \frac{y - ۲}{۳}$$

با توجه به اینکه عبارت $\frac{y - ۲}{۳}$ به ازای هر مقدار y عددی حقیقی است می‌توان گفت به ازای هر x، y ی در R وجود دارد که $f(x) = y$.

$$f(x) = f\left(\frac{y - ۲}{۳}\right) = ۳\left(\frac{y - ۲}{۳}\right) + ۲ = y - ۲ + ۲ = y$$

بنابراین تابع فوق پوشاست.

مثال ۹۱: تحقیق کنید تابع $\begin{cases} g : N \longrightarrow N \\ g(x) = ۲x - ۱ \end{cases}$ پوشاست یا خیر.

حل:

$$y = ۲x - ۱ \Rightarrow y + ۱ = ۲x \Rightarrow x = \frac{y + ۱}{۲}$$

MATH75.IR

با انتخاب $y = ۴$ خواهیم داشت $x = \frac{۴ + ۱}{۲} = \frac{۵}{۲} \notin N$.

یعنی اگر y برابر ۴ فرض شود هیچ x ی در مجموعهٔ دامنه (N) وجود ندارد که $f(x) = ۴$. پس تابع g پوشانیست.

مثال ۹۲: تحقیق کنید تابع $\begin{cases} f : R - \{\frac{۳}{۲}\} \longrightarrow R \\ f(x) = \frac{۴x - ۱}{۲x - ۳} \end{cases}$ پوشاست یا خیر.

حل:

$$y = \frac{۴x - ۱}{۲x - ۳} \Rightarrow ۲xy - ۳y = ۴x - ۱$$

$$(۲y - ۴)x = ۳y - ۱ \Rightarrow x = \frac{۳y - ۱}{۲y - ۴}$$

عبارت $\frac{۳y - ۱}{۲y - ۴}$ به ازای $y = ۲$ عددی حقیقی نیست یعنی به ازای $y = ۲$ هیچ عدد حقیقی مانند x در دامنهٔ تابع وجود ندارد که $f(x) = y$.

پس تابع فوق پوشانیست. قابل ذکر است اگر مجموعهٔ انجام تابع را به $R - \{۲\}$ تغییر دهیم تابع پوشا می‌شود.

نکته: تابع $f : R - \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow R - \{\frac{a}{c}\}$ با ضابطهٔ $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ و با شرط $ad - bc \neq ۰$ تابعی پوشاست. (ثابت کنید)

مثال ۹۳: تحقیق کنید تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x^۲ + x + ۲}$ پوشا است یا خیر.

حل: با توجه به اینکه دلتای عبارت $x^۲ + x + ۲$ منفی است میتوان گفت $x^۲ + x + ۲ > ۰$ بنابراین $D_f = R$.

$$y = \sqrt{x^۲ + x + ۲} \Rightarrow y^۲ = x^۲ + x + ۲ \Rightarrow x^۲ + x + ۲ - y^۲ = ۰$$

$$x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ - ۴(۲ - y^۲)}}{۲} = \frac{-۱ \pm \sqrt{۴y^۲ - ۷}}{۲}$$

برای اینکه عبارت اخیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی با معنی باشد باید داشته باشیم:

$$۴y^۲ - ۷ \geq ۰ \Rightarrow y^۲ \geq \frac{۷}{۴} \Rightarrow y \leq -\frac{\sqrt{۷}}{۲} \text{ یا } y \geq \frac{\sqrt{۷}}{۲}$$

اگر $-\frac{\sqrt{۷}}{۲} < y < \frac{\sqrt{۷}}{۲}$ عبارت زیر رادیکال منفی می‌شود و هر y عضو این بازه تصویر هیچ x ی از دامنه نیست. پس تابع پوشا نیست.

مثال ۹۴: نشان دهید تابع حقیقی $f : R \longrightarrow R^{\geq ۰}$ پوشا است.

$$f(x) = \sqrt{x^۲ + ۴x + ۱}$$

MATH75.IR

حل:

$$y = \sqrt{x^۲ + ۴x + ۱} \Rightarrow y^۲ = x^۲ + ۴x + ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۴x + ۱ - y^۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \pm \sqrt{۴ - (۱ - y^۲)}$$

$$\Rightarrow x = -۲ \pm \sqrt{y^۲ + ۳} \in R$$

به ازای هر y از $R^{\geq ۰}$ می‌توان x متناظر آنرا از تساوی $x = -۲ \pm \sqrt{y^۲ + ۳}$ بدست آورد که داشته باشیم $f(x) = y$. پس تابع پوشا است.

مثال ۹۵: تحقیق کنید تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x \end{cases}$ پوشاست یا خیر؟

حل:

$$y = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x \Rightarrow y + ۱ = x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱$$

$$\Rightarrow y + ۱ = (x + ۱)^۳ \Rightarrow x + ۱ = \sqrt[۳]{y + ۱} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{y + ۱} - ۱$$

عبارت اخیر به ازای هر مقدار y متعلق به R است و به ازای هر y از مجموعهٔ انجام x ی در دامنه وجود دارد که:

$$f(x) = (x + ۱)^۳ - ۱$$

$$f(x) = f(\sqrt[۳]{y - ۱} + ۱) = (\sqrt[۳]{y + ۱} - ۱ + ۱)^۳ - ۱ = y + ۱ - ۱ = y$$

پس تابع f پوشاست.

مثال ۹۶: تحقیق کنید تابع: $\begin{cases} f : [۰ , ۱[\longrightarrow [۲ , ۵] \\ f(x) = ۳x + ۲ \end{cases}$ پوشاست یا خیر.

حل: برد تابع را حساب کرده و با مجموعهٔ انجام آن مقایسه می‌کنیم

$$۰ \leq x < ۱ \Rightarrow ۰ \leq ۳x < ۳ \Rightarrow ۲ \leq ۳x + ۲ < ۵$$

$$\Rightarrow ۲ \leq y < ۵ \Rightarrow R_f = [۲ , ۵[$$

ملاحظه می‌شود برد تابع با مجموعهٔ انجام آن مساوی نیست. در واقع عضو ۵ از مجموعهٔ انجام با هیچ عضوی از دامنه نظیر نشده است. پس تابع پوشانیست.

بررسی پوشا بودن توابع چند ضابطه‌ای

توابع چند ضابطه‌ای، توابعی هستند که مجموعهٔ انجام آنها به چند زیر مجموعه افراز شده و هر یک از آنها با ضابطه‌ای مجزا تعریف شده است. برای بررسی پوشایی این گونه توابع به یکی

MATH75.IR

از دو صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱ـ برد هر ضابطه را جداگانه حساب کرده و اجتماع این بردها را بدست می‌آوریم. اگر اجتماع این بردها با مجموعهٔ انجام تابع برابر شود تابع پوشا است.

۲ـ عضو دلخواهی مانند y از مجموعهٔ انجام اختیار می‌کنیم و آنرا مساوی هر یک از ضابطه‌ها قرار می‌دهیم. در این صورت باید حداقل توسط یکی از ضابطه‌ها x ی یافت می‌شود که $f(x) = y$.

مثال ۹۷: نشان دهید تابع $f : R \longrightarrow R$ با ضابطهٔ زیر پوشاست.

$$f(x) = \begin{cases} x + ۱ & x > ۱ \\ ۲ & x = ۱ \\ ۳x - ۱ & x < ۱ \end{cases}$$

حل: هر یک از ضابطه‌های تابع را $f_۱$ و $f_۲$ و $f_۳$ می‌نامیم.

$$x > ۱ \Rightarrow x + ۱ > ۲ \Rightarrow R_{f_۱} =]۲ , +\infty[\quad \text{و} \quad R_{f_۲} = \{۲\}$$

$$x < ۱ \Rightarrow ۳x < ۳ \Rightarrow ۳x - ۱ < ۲ \Rightarrow R_{f_۳} =]-\infty , ۲[$$

$$R_{f_۱} \cup R_{f_۲} \cup R_{f_۳} = R$$

پس تابع پوشا است.

مثال ۹۸: تحقیق کنید تابع حقیقی زیر پوشاست یا خیر؟

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \geq ۰ \\ x - ۱ & x < ۰ \end{cases}$$

حل: فرض می‌کنیم $f_۱(x) = x^۲$ و $f_۲(x) = x - ۱$.

$$y = x^۲ \Rightarrow x = \sqrt{y} \qquad y \geq ۰ \Rightarrow R_{f_۱} = [۰ , +\infty[$$

$$y = x - ۱ \Rightarrow x = y + ۱ \qquad x < ۰ \Rightarrow y + ۱ < ۰ \Rightarrow y < -۱$$

$$\Rightarrow R_{f_۲} =]-\infty , -۱[$$

$$R_{f_۱} \cup R_{f_۲} =]-\infty , -۱[\cup [۰ , +\infty[\neq R$$

در واقع اعداد واقع در بازهٔ $]-۱ , ۰[$ تصویر هیچ عضو دامنه نمی‌باشند. لذا تابع پوشا نیست.

مثال ۹۹: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R^۲ \longrightarrow R^۲ \\ f(x , y) = (۲x + y , ۳x - y) \end{cases}$ پوشاست.

MATH75.IR

حل: فرض می‌کنیم $f(x , y) = (z , t)$ و نشان می‌دهیم به ازای هر مقدار (z , t) از مجموعه انجام (x , y)ای از دامنه موجود است که $f(x , y) = (z , t)$.

$$(۲x + y , ۳x - y) = (z , t)$$

$$\begin{cases} ۲x + y = z \\ ۳x - y = t \end{cases} \Rightarrow ۵x = z + t \Rightarrow x = \frac{z + t}{۵}$$

$$۳x - y = t \Rightarrow y = ۳x - t = \frac{۳z + ۳t}{۵} - t = \frac{۳z - ۲t}{۵}$$

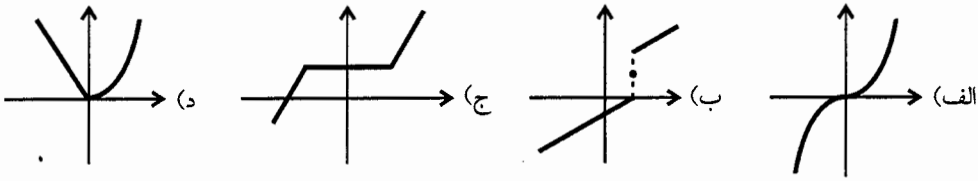
$$\Rightarrow (x , y) = \left(\frac{z + t}{۵} , \frac{۳z - ۲t}{۵}\right)$$

با توجه به اینکه $\frac{z + t}{۵}$ و $\frac{۳z - t}{۵}$ همواره حقیقی‌اند می‌توان گفت تابع فوق پوشاست.

بررسی پوشا بودن یک تابع از روی نمودار:

فرض می‌کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد. تابع f پوشاست در صورتیکه به ازای هر مقدار $k \in B$ خط افقی $y = k$ نمودار تابع را لااقل در یک نقطه قطع کند.

مثال ۱۰۰: کدامیک از تابعهای حقیقی زیر پوشا هستند؟



حل: تابعهای «الف» و «ج» پوشا هستند و توابع «ب» و «د» پوشا نیستند.

تابع دو سویی (تناظر یک به یک): یک تابع را دو سویی می‌نامند در صورتیکه یک به یک و پوشا باشد.

تابع معکوس و معکوس یک تابع

توابع $f = \{(۱ , ۲), (۲ , ۴), (۳ , ۴), (۴ , ۵)\}$ و $g = \{(۱ , ۱), (۲ , ۴), (۳ , ۹), (۴ , ۱۶)\}$ را در نظر بگیرید. معکوس تابعهای f و g عبارتند از:

معکوس $f = \{(۲ , ۱), (۴ , ۲), (۴ , ۳), (۵ , ۴)\}$

معکوس $g = \{(۱ , ۱), (۴ , ۲), (۹ , ۳), (۱۶ , ۴)\}$

همانطور که ملاحظه می‌کنید معکوس (وارون) تابع f تابع نیست. اما معکوس تابع g خود نیز

MATH75.IR

تابع است. وارون تابع g را تابع معکوس می‌نامیم و آنرا با g^{-1} نشان می‌دهیم.

$$g^{-1} = \{(y , x) | (x , y) \in g\}$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow g^{-1}(y) = x$$

واضح است که $D_{f^{-1}} = R_f$ و $R_{f^{-1}} = D_f$.

حال این پرسش مطرح می‌شود که چه شرطی لازم است تا معکوس یک تابع خود نیز تابع باشد؟ قضیهٔ زیر به این سؤال جواب می‌دهد.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f از A در B وارون‌پذیر باشد آن است که تابع f یک به یک باشد.

اثبات: اولاً فرض می‌کنیم f وارون‌پذیر است یعنی f^{-1} تابع است. ثابت می‌کنیم f یک به یک است، برای این منظور کافی است برای هر x_1 و x_2 از D_f نشان دهیم اگر $f(x_1) = f(x_2)$ آنگاه $x_1 = x_2$.

$$(x_1 , f(x_1)) \in f \Rightarrow (f(x_1) , x_1) \in f^{-1}$$

$$(x_2 , f(x_2)) \in f \Rightarrow (f(x_2) , x_2) \in f^{-1}$$

چون $f(x_1) = f(x_2)$ و f^{-1} تابع است پس $x_1 = x_2$ لذا f یک به یک است. ثانیاً، فرض می‌کنیم f یک به یک باشد و ثابت می‌کنیم f^{-1} تابع است. فرض می‌کنیم $(x_1 , y_1) \in f^{-1}$ و $(x_2 , y_2) \in f^{-1}$ و نشان می‌دهیم اگر $x_1 = x_2$ آنگاه $y_1 = y_2$.

$$\left.\begin{array}{l} (x_1 , y_1) \in f^{-1} \Rightarrow (y_1 , x_1) \in f \Rightarrow x_1 = f(y_1) \\ (x_2 , y_2) \in f^{-1} \Rightarrow (y_2 , x_2) \in f \Rightarrow x_2 = f(y_2) \end{array}\right\} \xrightarrow{x_1 = x_2} f(y_1) = f(y_2)$$

با توجه به اینکه f یک به یک است نتیجه می‌گیریم $y_1 = y_2$. لذا f^{-1} تابع است.

نتیجه: از قضیه فوق می‌توان نتیجه گرفت دو تابع f و g وارون یکدیگرند در صورتیکه:

$$\forall a \in D_f , \forall b \in R_f : f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$$

مثال ۱۰۱: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = ۳x + ۴ \end{cases}$ وارون‌پذیر است و ضابطهٔ تابع وارون آنرا بدست آورید.

حل: ابتدا نشان می‌دهیم تابع یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow ۳x_1 + ۴ = ۳x_2 + ۴ \Rightarrow ۳x_1 = ۳x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

MATH75.IR

برای بدست آوردن ضابطهٔ تابع معکوس در ضابطهٔ تابع به جای $f(x)$، y قرار می‌دهیم، سپس x را برحسب y محاسبه می‌کنیم و سرانجام با توجه به اینکه معمولاً x را متغیر مستقل و y را متغیر تابع در نظر می‌گیریم نقش این دو را عوض می‌کنیم.

$$y = ۳x + ۴ \Rightarrow y - ۴ = ۳x \Rightarrow x = \frac{y - ۴}{۳}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} f^{-۱} : R \longrightarrow R \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x - ۴}{۳} \end{cases}$$

مثال ۱۰۲: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R - \{-۱\} \longrightarrow R - \{۲\} \\ f(x) = \dfrac{۲x - ۳}{x + ۱} \end{cases}$ وارون‌پذیر است و ضابطهٔ تابع وارون آنرا بدست آورید.

حل:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow \frac{۲x_۱ - ۳}{x_۱ + ۱} = \frac{۲x_۲ - ۳}{x_۲ + ۱}$$

$$\Rightarrow ۲x_۱x_۲ + ۲x_۱ - ۳x_۲ - ۳ = ۲x_۱x_۲ + ۲x_۲ - ۳x_۱ - ۳$$

$$\Rightarrow ۲x_۱ - ۳x_۲ = ۲x_۲ - ۳x_۱ \Rightarrow ۵x_۱ = ۵x_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

بنابراین تابع یک به یک است.

$$y = \frac{۲x - ۳}{x + ۱} \Rightarrow xy + y = ۲x - ۳$$

$$\Rightarrow y + ۳ = ۲x - xy \Rightarrow y + ۳ = x(۲ - y) \Rightarrow x = \frac{y + ۳}{۲ - y}$$

$$\begin{cases} f^{-۱} : R - \{۲\} \longrightarrow R - \{-۱\} \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x + ۳}{۲ - x} \end{cases}$$

مثال ۱۰۳: تابع $f : R \longrightarrow R$ با ضابطهٔ زیر یک به یک است. ضابطهٔ تابع معکوس آنرا بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{۲} + ۱ & x \geq ۱ \\ ۲x - ۱ & x < ۱ \end{cases}$$

حل:

$$y_۱ = \frac{x}{۲} + ۱ \Rightarrow ۲y_۱ = x + ۲ \Rightarrow x = ۲y_۱ - ۲ \quad , \quad y_۱ = ۲x - ۲$$

$$x \geq ۱ \Rightarrow \frac{x}{۲} \geq \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{x}{۲} + ۱ \geq \frac{۳}{۲} \Rightarrow y_۱ \geq \frac{۳}{۲}$$

MATH75.IR

برد تابع f_1 که با دامنهٔ f_1^{-1} برابر است بازهٔ $[\frac{3}{2}, +\infty[$ می‌باشد.

$$y_2 = 2x - 1 \Rightarrow y_2 + 1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$x < 1 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow 2x - 1 < 1 \Rightarrow y_2 < 1$$

برد تابع f_2 که با دامنهٔ f_2^{-1} برابر است بازهٔ $]-\infty, 1[$ می‌باشد. بنابراین:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x < 1 \end{cases}$$

توجه داریم که دامنهٔ f^{-1} و برد f اعضای بازهٔ $]\frac{3}{2}, 1]$ را شامل نمی‌شوند.

مثال ۱۰۴: ثابت کنید دو تابع f و g وارون یکدیگرند.

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = 2x - \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} g : R \longrightarrow R \\ g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} \end{cases}$$

حل: چون f یک به یک است پس وارون‌پذیر است. حال طبق تعریف بایستی نشان دهیم.

$$\forall a, b \in R : f(a) = b \Leftrightarrow g(b) = a$$

ابتدا فرض می‌کنیم $f(a) = b$ و نشان می‌دهیم $g(b) = a$.

$$f(a) = b \Rightarrow 2a - \frac{5}{2} = b$$

$$g(b) = g(2a - \frac{5}{2}) = \frac{1}{2}(2a - \frac{5}{2}) + \frac{5}{4} = a - \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = a$$

اکنون فرض می‌کنیم $g(b) = a$ و نشان می‌دهیم $f(a) = b$.

$$g(b) = a \Rightarrow \frac{1}{2}b + \frac{5}{4} = a$$

$$f(a) = f\left(\frac{1}{2}b + \frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{2}b + \frac{5}{4}\right) - \frac{5}{2} = b + \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = b$$

لذا f و g وارون یکدیگرند.

نکته: می‌توان گفت دو تابع f و g معکوس یکدیگرند اگر و فقط اگر داشته باشیم:

الف) به ازای هر x از D_g : $fog(x) = f(g(x)) = x$

ب) به ازای هر x از D_f : $gof(x) = g(f(x)) = x$

مثال ۱۰۵: نمودار تابع $\begin{cases} f : R^+ \longrightarrow R \\ f(x) = x^2 \end{cases}$ و تابع وارون آنرا در یک دستگاه مختصات رسم

MATH75.IR

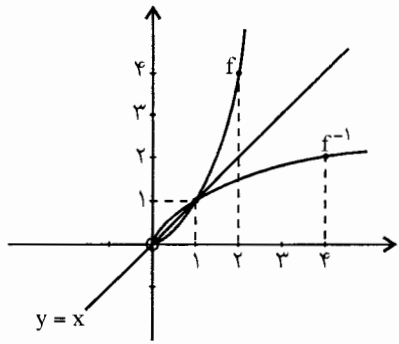
کرده و نتیجهٔ حاصل را بیان کنید.

حل: با توجه به اینکه دامنه تابع R^+ می‌باشد تابع یک به یک است. لذا وارون‌پذیر می‌باشد. ضابطه f^{-1} را بدست می‌آوریم.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

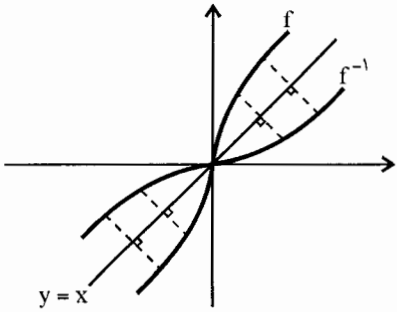
$$\begin{cases} f^{-1} : R^+ \longrightarrow R \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

x	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۳
$y = x^2$	$\frac{1}{4}$	۱	۴	۹
x	$\frac{1}{4}$	۱	۴	۹
$y = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2}$	۱	۲	۳



همانطور که ملاحظه می‌کنید نمودار تابع f و تابع معکوس آن نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند.

نمودار تابع معکوس یک تابع: فرض می‌کنیم تابع f معکوس‌پذیر باشد بنابراین یک به یک نیز می‌باشد و هیچ خطی موازی محور طول وجود ندارد که نمودار f را در بیش از یک نقطه قطع کند. از طرفی اگر $(a , b) \in f$ می‌توان گفت $(b , a) \in f^{-1}$ و با توجه به اینکه دو نقطهٔ (a , b) و (b , a) نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (خط $y = x$) متقارنند. به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که نمودارهای f و f^{-1} نسبت به خط $y = x$ قرینهٔ یکدیگرند. لذا با در دست داشتن نمودار f می‌توان نمودار f^{-1} را رسم کرد.



MATH75.IR

خواص تابع معکوس

۱ـ ترکیب هر تابع و تابع وارون آن یک تابع همانی است.

$\forall x \in D_f : f^{-1}of(x) = x = I_x$

۲ـ وارون وارون هر تابع معکوس‌پذیر برابر خود تابع است.

$(f^{-1})^{-1} = f$

۳ـ اگر f و g توابعی یک به یک باشند، آنگاه fog وارون‌پذیر است و $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$.

این خاصیت برای سه تابع وارون‌پذیر نیز برقرار است و داریم $(fogoh)^{-1} = h^{-1}og^{-1}of^{-1}$

(اثبات این خاصیتها به عهده دانش‌آموزان)

نکته: از خاصیت سوم فوق می‌توان برای پیدا کردن وارون توابعی که آنها را بتوان به صورت ترکیب چند تابع نوشت استفاده کرد.

مثال ۱۰۶: وارون تابع $f(x) = (x - 1)^4$ را بدست آورید. $(x \geq 1)$

حل: قرار می‌دهیم $h(x) = x - 1$ و $g(x) = x^4$.

$f(x) = (goh)(x) = g(h(x))$

$h^{-1}(x) = x + 1 \qquad g^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$

$f^{-1}(x) = (goh)^{-1}(x) - (h^{-1}og^{-1})(x) = h^{-1}(g^{-1}(x)) = h^{-1}(\sqrt[4]{x}) = \sqrt[4]{x} + 1$

مثال ۱۰۷: ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : [2 , +\infty[\longrightarrow R \\ f(x) = 1 + \sqrt{x - 2} \end{cases}$ وارون‌پذیر است و تابع وارون آنرا پیدا کنید و نمودار هر دو تابع را رسم کنید.

حل:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 1 + \sqrt{x_1 - 2} = 1 + \sqrt{x_2 - 2}$

$\Rightarrow \sqrt{x_1 - 2} = \sqrt{x_2 - 2} \Rightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

پس تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$y = 1 + \sqrt{x - 2} \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x - 2} \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = x - 2$

$\Rightarrow x = y^2 - 2y + 3$

برد تابع f که دامنه f^{-1} می‌باشد را حساب می‌کنیم.

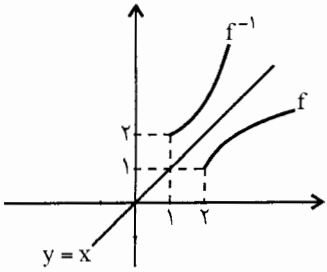
$x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x - 2} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{x - 2} \geq 1$

$\Rightarrow y \geq 1 \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [1 , +\infty[$

MATH75.IR

لذا:

$$\begin{cases} f^{-1} : [1 , +\infty[\longrightarrow [2 , +\infty[\\ f^{-1}(x) = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$



توابع یکنوا (توابع صعودی یا نزولی)

فرض کنید A و B زیر مجموعه‌های R و $f : A \longrightarrow B$ یک تابع باشد.

۱ـ تابع f را بر A صعودی گوییم در صورتیکه:

$$\forall x_1 , x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$$

تابع f اکیداً صعودی است در صورتیکه:

$$\forall x_1 , x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

۲ـ تابع f را بر A نزولی گوییم در صورتیکه:

$$\forall x_1 , x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$$

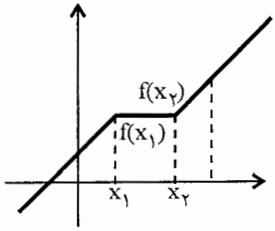
تابع f اکیداً نزولی است در صورتیکه:

$$\forall x_1 , x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

۳ـ تابع f را بر A ثابت گوییم در صورتیکه:

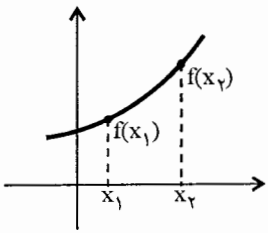
$$\forall x_1 , x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$$

هر تابع صعودی یانزولی را یکنوا و هر تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را اکیداً یکنوا می‌نامیم.



$f(x_1) \leqslant f(x_2)$

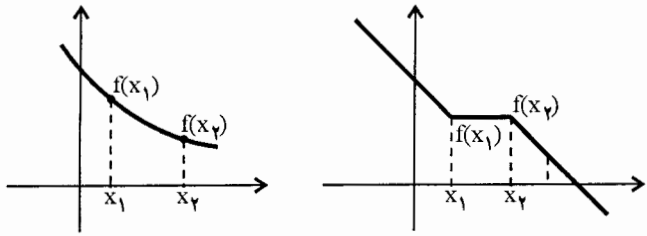
صعودی



$f(x_1) < f(x_2)$

اکیداً صعودی

MATH75.IR



$f(x_1) > f(x_2)$ اکیداً نزولی

$f(x_1) \geqslant f(x_2)$ نزولی

مثال ۱۰۸: تحقیق کنید تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = 3x - 1 \end{cases}$ صعودی است یا نزولی .

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

این تابع اکیداً صعودی است.

مثال ۱۰۹: نشان دهید تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = -2x + 1$ اکیداً نزولی است.

حل: فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو عضو دامنهٔ تابع باشند و $x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

بنابراین تابع فوق اکیداً نزولی است.

نکته: به طور کلی خطوط به معادلهٔ $y = ax + b$ در صورتیکه a مثبت باشد تابعی اکیداً صعودی و در صورتیکه a منفی باشد اکیداً نزولی و اگر $a = 0$ تابع ثابت است.

مثال ۱۱۰: تحقیق کنید تابع حقیقی $f(x) = x^2$ صعودی است یا نزولی است.

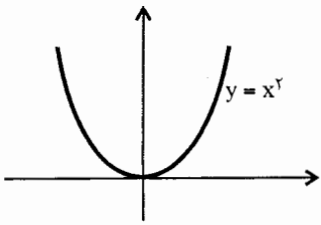
حل: فرض می‌کنیم x_1 و x_2 اعدادی حقیقی و $x_1 < x_2$.

دو حالت در نظر می‌گیریم:

$0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_1^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ تابع اکیداً صعودی

$x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ تابع اکیداً نزولی

ملاحظه می‌کنیم تابع در بازهٔ $]-\infty , 0[$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $]0 , +\infty[$ اکیداً صعودی است.



MATH75.IR

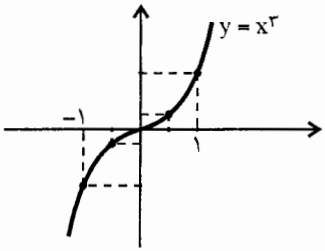
مثال ۱۱۱: ثابت کنید تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = x^3$ اکیداً صعودی است و نمودار آنرا رسم کنید.

حل: فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو عدد حقیقی باشند و $x_1 < x_2$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

بنابراین تابع در مجموعهٔ اعداد حقیقی اکیداً صعودی است.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = x^3$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1



نکته: به طور کلی می‌توان ثابت کرد تابع حقیقی $f(x) = x^n$ اگر n فرد باشد اکیداً صعودی است و اگر n زوج باشد در بازهٔ $]-\infty , 0]$ اکیداً نزولی و در بازهٔ $[0 , +\infty[$ اکیداً صعودی است.

قضیه: ثابت کنید هر تابع اکیداً یکنوا یک به یک است.

برهان: دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: تابع f اکیداً صعودی است.

برای اثبات اینکه تابع f یک به یک است کافی فرض کنیم x_1 و x_2 دو عضو دامنهٔ تابع باشند و $x_1 \neq x_2$ و نشان دهیم $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{یا} \\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}$$

حالت دوم: تابع f اکیداً نزولی است.

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{یا} \\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \end{cases}$$

لذا در هر دو حالت تابع یک به یک است.

مثال ۱۱۲: ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x} & x \geq -1 \\ -(x+2)^2 & x \leq -2 \end{cases}$ در دامنه‌اش صعودی است.

MATH75.IR

حل:

$$-1 \le x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt[3]{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow 1 + \sqrt[3]{x_1} < 1 + \sqrt[3]{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \le -2 \Rightarrow x_1 + 2 < x_2 + 2 \le 0 \Rightarrow (x_1 + 2)^2 > (x_2 + 2)^2$$

$$\Rightarrow -(x_1 + 2)^2 < -(x_2 + 2)^2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

پس تابع در بازه‌های $]-1 , +\infty[$ و $]-\infty , 2[$ صعودی است اما اکیداً صعودی نیست زیرا:

$$-1 > -2 \ , \ f(-1) = f(-2) = 0$$

مثال ۱۱۳: ثابت کنید تابع $f(x) = x^3 + x^2 + 4x + 1$ یک به یک است.

حل: نشان می‌دهیم تابع اکیداً یکنوا است. برای این منظور فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو عضو دامنهٔ تابع و $x_1 < x_2$ باشد.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 < 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1^3 + x_1^2 + 4x_1 + 1) - (x_2^3 + x_2^2 + 4x_2 + 1)$$

$$= (x_1^3 - x_2^3) + (x_1^2 - x_2^2) + (4x_1 - 4x_2)$$

$$= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 4)$$

عبارت $x_1 - x_2$ منفی است و نشان می‌دهیم پرانتز دوم همواره مثبت است.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 4 = \frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 8)$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + 6] > 0$$

لذا $f(x_1) - f(x_2) < 0$ در نتیجه $f(x_1) < f(x_2)$ بنابراین تابع اکیداً صعودی و یک به یک است.

نمو متغیر و نمو تابع

اگر $y = f(x)$ یک تابع و x_1 و x_2 دو مقدار متمایز از D_f باشند، تفاضل $\Delta x = x_2 - x_1$ را نمو متغیر و تفاضل $\Delta y = f(x_2) - f(x_1) = y_2 - y_1$ را نمو تابع می‌نامیم.

نسبت $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ را نسبت متوسط تغییرات تابع می‌گویند. فرض کنید تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ باز (a , b) معین و x عضو این بازه باشد.

هر نمو Δx برای x، به قسمی که $x + \Delta x$ در این فاصله باشد، نموی مثل Δy برای y بدست

MATH75.IR

می‌دهد.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

اگر نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (وقتی که مقدار Δx را ناچیز فرض کرده و از آن صرف نظر می‌کنیم) مثبت باشد تابع صعودی و اگر منفی باشد تابع نزولی و اگر صفر باشد تابع ثابت است.

مثال ۱۱۴: با تشکیل نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای تابع $y = ۳x^۲ + ۱$ تحقیق کنید این تابع در چه فاصله‌ای صعودی و در چه فاصله‌ای نزولی است؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{۳(x + \Delta x)^۲ + ۱ - (۳x^۲ + ۱)}{\Delta x}$$

$$= \frac{۳x^۲ + ۶x(\Delta x) + ۳(\Delta x)^۲ + ۱ - ۳x^۲ - ۱}{\Delta x} = \frac{۶x(\Delta x) + ۳(\Delta x)^۲}{\Delta x}$$

$$= ۶x + ۳\Delta x \approx ۶x$$

عبارت $۶x$ منفی است اگر x منفی باشد و تابع در بازهٔ $]-\infty , ۰[$ اکیداً نزولی است و عبارت $۶x$ نامنفی است اگر $x \geq ۰$ لذا تابع در بازهٔ $[۰ , +\infty[$ اکیداً صعودی است.

مثال ۱۱۵: با تشکیل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای تابع $y = x^۳ - ۶x^۲ + ۵$ تحقیق کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است.

حل:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [(x + \Delta x)^۳ - ۶(x + \Delta x)^۲ + ۵] - (x^۳ - ۶x^۲ + ۵)$$

$$= x^۳ + ۳x^۲.(\Delta x) + ۳x(\Delta x)^۲ + (\Delta x)^۳ - ۶x^۲ - ۱۲x(\Delta x) - ۶(\Delta x)^۲ + ۵ - x^۳ + ۶x^۲ - ۵$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = (\Delta x)^۳ + ۳x^۲(\Delta x) + ۳x(\Delta x)^۲ - ۶(\Delta x)^۲ - ۱۲x(\Delta x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = (\Delta x)^۲ + ۳x^۲ + ۳x(\Delta x) - ۶(\Delta x) - ۱۲x$$

اگر Δx را عدد بسیار کوچکی نزدیک صفر اختیار کنیم و از آن صرف نظر کنیم خواهیم داشت.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ۳x^۲ - ۱۲x$$

حال اگر عبارت $۳x^۲ - ۱۲x$ را تعیین علامت کنیم ملاحظه می‌کنیم اگر $۰ < x < ۴$ عبارت $۳x^۲ - ۱۲x$ منفی و به ازای $x = ۰$ یا $x = ۴$ برابر صفر و در سایر جاها مثبت است.

لذا تابع در بازه‌های $]-\infty , ۰[$ و $]۴ , +\infty[$ صعودی و در بازهٔ $[۰ , ۴]$ نزولی است.

MATH75.IR

تمرینهای فصل دوم

بخش اول

۱ـ مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که تساوی‌های زیر برقرار باشد.

الف) $\left((x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ , ۳\right) = (۰ , ۳)$

ب) $(x^۲ + y^۲ , ۶) = (۱۳ , xy)$

۲ـ اگر $A = \{۱ , ۲ , ۳\}$ و $B = \{۳ , ۴ , ۵\}$ مجموعه‌های $A \times B$ و $B \times A$ و $A^۲$ و $A \times (B - A)$ را مشخص کنید.

۳ـ در هر یک از حالتهای زیر نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

الف) $A = (-۳ , ۲]$ $B = (-۲ , ۰]$

ب) $A = [-۲ , ۲]$ $B = [۱ , ۲]$

ج) $A = (۳ , +\infty)$ $B = (-\infty , -۲)$

۴ـ اگر $A = [-۳ , ۳]$ و $B = [۱ , ۳]$ و R مجموعهٔ مرجع باشد آیا می‌توان گفت $(A \times B)' = A' \times B'$؟ آیا این رابطه همواره درست؟

۵ـ اگر $A \subset B$ ثابت کنید: $A \times C \subset B \times C$

۶ـ اگر $A \neq \varnothing$ ثابت کنید: $A \times B = A \times C \Leftrightarrow B = C$

۷ـ اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند ثابت کنید.

$A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$

۸ـ درستی تساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

ب) $(A - B)^۲ = (A \times B') \cap (B' \times A)$

ج) $(B \cap C)^۲ = (B \times C) \cap (C \times B)$

د) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

هـ) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

۹ـ اگر $A \times B = \varnothing$ ثابت کنید: $A = \varnothing$ یا $B = \varnothing$.

MATH75.IR

۱۰ـ ثابت کنید $(B - C)^{۲} = B^{۲} - C^{۲}$.

۱۱ـ اگر f و g دو رابطه باشند ثابت کنید:

الف) $(f - g)^{-۱} = f^{-۱} - g^{-۱}$

ب) $(f \cap g)^{-۱} = f^{-۱} \cap g^{-۱}$

ج) $(f^{-۱})^{-۱} = f$

د) $(f \cup g)^{-۱} = f^{-۱} \cup g^{-۱}$

۱۲ـ نمودار هر یک از رابطه‌های زیر را در مجموعهٔ اعداد حقیقی رسم کنید.

الف) $y^{۲} = x^{۲}$

ب) $|y| = |x|$

ج) $x = -y^{۲}$

د) $x = |y - ۱|$

هـ) $|x + y| \leq ۱$

و) $x^{۲} + y^{۲} = ۴$

ز) $۱ \leq x^{۲} + y^{۲} \leq ۹$

ح) $-۱ < ۲x - y < ۲$

ط) $|x - ۲| + |y + ۲| = ۱$

ی) $y = |x - ۲| + |x - ۱|$

ک) $y = |x - ۲| - |x - ۱|$

ل) $y^{۲} - ۲xy + x = ۰$

م) $۱ \leq |x| + |y| < ۲$

ن) $|۲x - y + ۱| = ۲$

۱۳ـ معین کنید کدامیک از روابط زیر تابع هستند؟

$R_{۱} = \{(x , y) | x , y \in R , y + ۱ = (x - ۱)^{۲}\}$

$R_{۲} = \{(x , y) | x , y \in R , (y + ۱)^{۲} = x^{۲}\}$

$R_{۳} = \{(x , y) | x , y \in R , (x - ۱)^{۲} + (y + ۱)^{۲} = ۰\}$

$R_{۴} = \{(x , y) | x , y \in N , x^{۲} + y^{۲} \leq ۴\}$

$R_{۵} = \{(x , y) | x , y \in R , y^{۲} + xy + ۱ = ۰\}$

$R_{۶} = \{(x , y) | x , y \in R , |y| = |x + ۱|\}$

۱۴ـ رابطه‌های زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. معین کنید کدامیک از آنها می‌توانند ضابطهٔ یک تابع باشند. چرا؟

الف) $۴x^{۲} + ۴xy + y^{۲} = ۰$

ب) $y^{۲} - ۹x^{۲} = ۰$

ج) $y = ۲x - |x - ۱|$

د) $|x| + |۲y| = ۱$

هـ) $۲x + y^{۲} = ۳y$

و) $x = |y - ۱|$

ز) $۲xy = ۳x + ۱$

ح) $yx^{۲} = xy + ۵$

ط) $y = x^{۲} - ۳x + ۱$

ی) $x^{۲} - ۳x + x^{۲}y^{۲} + ۴xy = ۵$

MATH75.IR

ک) $y = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ 2x + 1 & x < 0 \end{cases}$

ل) $y = \begin{cases} x + 3 & x \geq 1 \\ 1 - x & x \leq 1 \end{cases}$

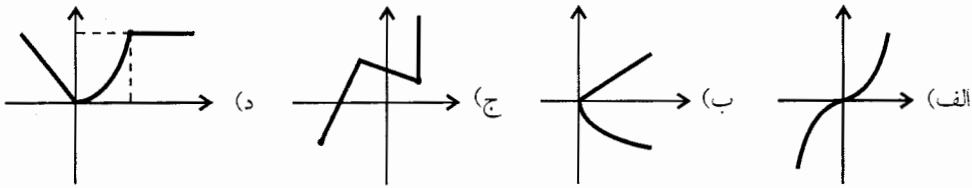
م) $y = x + \sqrt{2x - 1}$

ن) $(x - 1)^2 + (y - 1)^3 = 4$

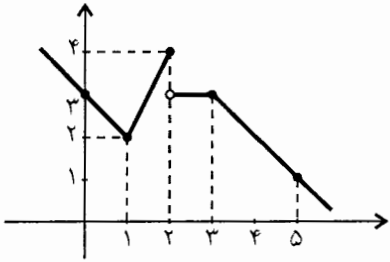
س) $x = \dfrac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}$

ع) $|x| + \sqrt{y} = 3$

۱۵ـ از نمودارهای زیر کدامیک نمودار یک تابع است؟



۱۶ـ در شکل‌های زیر نمودار یک تابع رسم شده است. ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.



۱۷ـ نمودار تابع $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی چگونه است؟ توضیح دهید.

۱۸ـ نمودار تابع حقیقی با ضابطهٔ زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & x < -2 \\ (x + 1)^2 - 1 & -2 \leq x < 1 \\ 3 & 1 \leq x < 3 \\ 2x - 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

۱۹ـ اگر f و g تابع باشند تحقیق کنید $f \cup g$ و $f \cap g$ تابعند یا خیر. چرا؟

۲۰ـ دامنهٔ توابعی که با ضابطه‌های زیر تعریف شده‌اند را بدست آورید.

الف) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 3}$

ب) $y = \dfrac{1}{x^4 - 5x^2 + 4}$

MATH75.IR

ج) $y = \dfrac{x + ۱}{|۲x - ۱| - ۵}$

د) $y = \dfrac{x - ۱}{|x| - x}$

هـ) $y = \sqrt{۱ - x^۲}$

و) $y = \sqrt{\dfrac{۲x - ۱}{۲ - ۲x}} + \sqrt{\dfrac{۳ - ۲x}{۲x - ۱}}$

ز) $y = \sqrt{|x - ۲| - ۴}$

ح) $y = \dfrac{۲x - ۳}{x^۲ - ۴|x| - ۲۱}$

ط) $y = \sqrt{\dfrac{۱ - |x|}{۱ + |x|}}$

ی) $y = \sqrt{\dfrac{۲ + |x|}{x^۲ + x + ۲}}$

ک) $y = \dfrac{۱}{\sqrt{۲x - x^۳}}$

ل) $y = \dfrac{۱}{\sqrt{|x| - x}}$

م) $y = \sqrt{۲ + \sqrt{۱ - x^۲}}$

ن) $y = \sqrt{۳ - ۲\sqrt{۱ - x}}$

س) $y = \sqrt{x + ۱} + \sqrt{۵ - x}$

ع) $y = \dfrac{x + \sqrt{۱ - x^۲}}{\sqrt{x + |x|}}$

ف) $y = \sqrt{۳^x - ۴^x}$

ص) $y = \sqrt{x(x - ۱)} - \sqrt{x(x + ۱)}$

ق) $y = \sqrt{۱ - \sqrt{۱ - ۱۶x^۲}}$

ر) $y = \sqrt{۴ - x^۲} + \sqrt{۱ - x^۲}$

ش) $y = \sqrt{|x|(x^۲ - ۱)}$

ت) $y = \sqrt{۲ - \sqrt{x^۲ - ۲x + ۱}}$

۲۱ـ دامنه و برد هر یک از توابع حقیقی که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است بدست آورید.

الف) $y = ۴x - ۳$

ب) $y = -x^۲ - ۳$

ج) $y = x^۳ + ۲x^۲ + ۳x - ۱$

د) $y = -x^۲ + ۵x - ۴$

هـ) $y = \dfrac{۱ - x}{۲x + ۱}$

و) $y = \dfrac{۳x^۲ - ۲x}{x^۲ - x}$

ز) $y = \dfrac{x^{۱۰} + ۲}{۲ - x^{۱۰}}$

ح) $y = \dfrac{۱}{x^۲ + x + ۱}$

ط) $y = \sqrt{\dfrac{x + ۲}{۲ - x}}$

ی) $y = x^۲ + \dfrac{۱}{x^۲ + ۳}$

ک) $y = \sqrt{x^۲ - ۴}$

ل) $y = x - \sqrt{x}$

م) $y = \sqrt[۴]{\dfrac{x^۳ - ۳x + ۲}{x^۲ - ۲x + ۱}}$

ن) $y = \dfrac{|x| + ۲}{|x|}$

MATH75.IR

ع) $y = |x - ۲| + |x + ۳|$

س) $y = \sqrt{x - ۲} + \frac{۱}{\sqrt{x - ۲} + ۱}$

ص) $y = x + \sqrt{x^۲ + ۴x + ۹}$

ف) $y = |x + ۳| - |x - ۱|$

ر) $y = x - \sqrt{۱ - x^۲}$

ق) $y = ۲ - \sqrt{-x^۲ + ۴x}$

ت) $y = \frac{۲x^۳}{x^۶ + ۸}$

ش) $y = \big| |x - ۳| - |x + ۲| \big|$

۲۲ـ تابع $y = |x - ۲| - |x| - |x - ۳|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آنرا رسم کنید.

۲۳ـ نمودار توابع حقیقی زیر را رسم کنید.

الف) $y = \big| |x| - ۳ \big| + ۱$

ب) $y = x^۲ - |x|$

ج) $y = |x^۲ - ۴x| - ۳$

د) $y = x|x| - x + ۱$

۲۴ـ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲ & x < -۲ \\ |x^۲ + x| - ۱ & -۲ \le x < ۱ \\ ۲x + ۱ & ۱ \le x < ۳ \\ -x & ۳ \le x \end{cases}$$

۲۵ـ اگر $f\left(\frac{۴x + ۳}{۴x - ۳}\right) = \frac{۲۸x - ۹}{۴x - ۳}$ ضابطهٔ $f(x)$ را بدست آورید.

۲۶ـ اگر $f\left(x + \frac{۱}{x}\right) = x^۴ + \frac{۱}{x^۴}$ ضابطهٔ $f(x)$ را پیدا کنید.

۲۷ـ اگر $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^۲ + y^۲}}{x}$ و $x < ۰$ ، $f(x)$ را پیدا کنید.

۲۸ـ اگر $۲f(۲x - ۳) + f(۳ - ۲x) = ۴x$ ضابطهٔ $f(x)$ را بیابید.

۲۹ـ اگر $f\left(\frac{x}{x^۲ + x + ۱}\right) = \frac{x^۲}{x^۴ + x^۲ + ۱}$ مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$.

۳۰ـ اگر $f\left(x + y , \frac{y}{x}\right) = x_۲ - y_۲$ مطلوبست محاسبهٔ $f(x , y)$.

۳۱ـ اگر $f\left(\frac{۱}{x}\right) = \sqrt{۱ + x^۲}$ و $x \neq ۰$ باشد، ضابطهٔ تابع $f(x)$ را بدست آورید.

MATH75.IR

۳۲ـ اگر $af(x) + bf(-x) = cx$، مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$.

۳۳ـ اگر $f(x) = a^x + b^x$ و $g(x) = \frac{f(x+1)}{f(x-1)}$. مقدار $g(0)$ چقدر است؟

۳۴ـ اگر $f(x-y) = x^2 + y^2 - x + y - 2xy$ مطلوبست $f(x)$.

۳۵ـ با ذکر دلیل نشان دهید تابع‌های زیر با هم مساویند یا خیر؟

الف)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} \quad , g(x) = 2 - x$$

ب)

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} \quad , \quad g(x) = x + 1$$

ج)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & (x \neq 1) \\ 0 & (x = 1) \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & (x \neq 1) \\ x - 1 & (x = 1) \end{cases}$$

د)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 2 \\ 3x & x < 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x - 2} & 0 \leq x < 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = \begin{cases} x + 1 & x \geq 2 \\ 3x & x < 0 \\ x + 2 & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

ه)

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 x} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{\cos x}$$

و)

$$f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{2 - x} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x(2 - x)}$$

۳۶ـ اگر $f(2x - 1) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 2 \\ 2x & x < 2 \end{cases}$، ضابطهٔ $f(x)$ را بدست آورید.

۳۷ـ تابع f در مجموعهٔ اعداد حقیقی با ضابطهٔ زیر تعریف شده است. مطلوبست محاسبهٔ $f(-\sqrt{2})$، $f(\sqrt{3})$، $f(-\frac{1}{2})$، $f(f(f(0)))$ و $f(f(f(-2)))$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ x^3 - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ x - 4 & x > 1 \end{cases}$$

MATH75.IR

۳۸ـ توابع f و g به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$f = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۳) , (۳ , ۴) , (۴ , ۵)\}$

$g = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۵) , (۴ , ۳) , (۵ , ۱)\}$

مطلوب است تعیین:

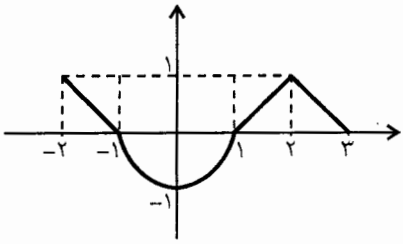
الف) $f + g$ ب) $f - g$ ج) $f . g$ د) $\frac{f}{g}$

ه) $۲f + ۳g$ و) $۵f . g$ ز) fog ح) fof

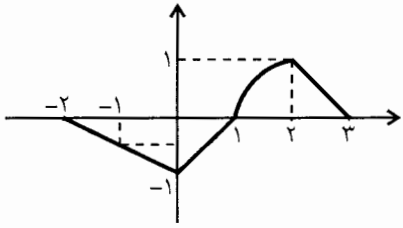
ط) $(f + g)of$ ی) $(f + g) o (f - g)$

۳۹ـ توابع f و g و با نمودارهای زیر مشخص شده‌اند. مطلوبست محاسبهٔ:

$f(g(-۱))$ ، $f(g(۲))$ ، $g(f(\frac{۱}{۲}))$ و $f(f(-\frac{۳}{۲}))$.



y = f(x)



y = g(x)

۴۰ـ اگر $f(x) = \frac{x}{x - ۱}$ و $g(x) = \sqrt{x - ۲}$ دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را تعیین کنید.

۴۱ـ توابع f و g به صورت زیر تعریف شده‌اند. اولاً حاصل عبارات $f(g(۱))$ ، $f(g(-۳))$ ، $f(g(\sqrt{۲}))$ ، $g(f(-۵))$ ، $(f + g)(-۱)$ و $(f . g)(۱)$ را بدست آورید. ثانیاً ضابطهٔ fog و gof را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x + ۱ & x < -۱ \\ x^۲ - ۱ & -۱ \le x \le ۱ \\ x + ۱ & x > ۱ \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} ۲ & x < -۲ \\ -x^۲ + ۱ & -۲ \le x \le ۲ \\ ۲x & x > ۲ \end{cases}$$

۴۲ـ اگر f و g دو تابع باشند ثابت کنید $f + g$ و $f - g$ نیز تابعند.

۴۳ـ اگر $f(x) = \frac{۱}{x^۳}$ و $x \neq ۰$ و $g(f(x)) = x^۲$ مطلوبست محاسبهٔ $f(x)$.

۴۴ـ اگر f و g دو تابع حقیقی با ضابطه‌های $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x(x - ۱)}}$ و $g(x) = \frac{x^۲}{۱ + x^۲}$ باشند.

اولاً: دامنهٔ تعریف و برد هر کدام از این دو تابع را بدست آورید.

MATH75.IR

ثانیاً: دامنهٔ توابع fog و gof و ضابطهٔ gof را تعیین کنید.

ثالثاً: تابعهای $f + g$ و $f - g$ و $f . g$ و $\frac{g}{f}$ را تعیین کرده و دامنهٔ هر کدام را مشخص کنید.

۴۵ـ اگر $f(x) = \frac{۲}{x - ۳}$ و $g(x) = \frac{x}{x - ۲}$ دامنه و ضابطهٔ fog و gof را بدست آورید.

۴۶ـ اگر $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ضابطهٔ $(f + g)of$ و $go(f . g)$ را بدست آورید.

۴۷ـ اگر $f(x) = \frac{x + ۱}{x - ۱}$ و $fog(x) = -f(x)$ ضابطهٔ تابع g را پیدا کنید.

۴۸ـ اگر $f(x) = ۳x + a$ و $fof(x) = ۹x + ۴$ مقدار a چقدر است؟

۴۹ـ اولاً اگر $f(x) = x^۲ - ۲x - ۴$ و $fog(x) = x - ۴$ ضابطهٔ $g(x)$ را حساب کنید.

ثانیاً: اگر $f(x) = x^۲ + ۲x + ۲$ و $f(g(x)) = x^۲ - ۴x + ۵$ باشند $g(x)$ را محاسبه کنید.

۵۰ـ برای سه تابع f و g و h ثابت کنید $(fog)oh = fo(goh)$.

۵۱ـ اگر $f(x , y) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ حاصل $f\left(\frac{۱}{y^۲} , \frac{۱}{x^۲}\right)$ چیست؟

۵۲ـ اگر $f\left(x^۳ + \frac{۱}{x^۳}\right) = x^۶ + \frac{۱}{x^۶}$ ضابطهٔ $f(x)$ را حساب کنید.

۵۳ـ اگر $fog(x) = ۴x^۲ - ۱۲x + ۱۰$ و $g(x) = ۲x - ۳$ مطلوبست ضابطهٔ تابع f .

۵۴ـ نمودار تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = |(|x| - ۳)^۲ - ۴|$ را رسم کنید.

۵۵ـ اگر $f(x + y) = f(x) + f(y)$ و $f(۱) \neq ۰$ ثابت کنید:

$$\forall n \in N : \frac{f(n)}{f(۱)} = n$$

۵۶ـ اگر $f(x) = ۳x + ۲$ و $g(x) = x^۲ + ۱$ و $f(g(x)) = g(f(x))$ مقدار x را حساب کنید.

۵۷ـ اگر $g(x) = x^۳ - ۱$ و $f(x) = \begin{cases} ۲x & x \leq ۱ \\ ۴ & ۱ < x \leq ۳ \\ \sqrt[۳]{x} & x > ۳ \end{cases}$ مطلوبست ضابطهٔ fog .

۵۸ـ توابع gof به صورت زیر تعریف شده‌اند ضابطهٔ fog را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ x^۲ & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۰ & x > ۱ \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} ۱ & x < ۰ \\ \frac{x}{۲} & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۱ & x > ۱ \end{cases}$$

MATH75.IR

۵۹ـ اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که $f(g(x)) = x^2 - 3x + 4$.

۶۰ـ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ و $g(x) = \frac{x}{1+x}$ دامنه و ضابطهٔ fog و gof را تعیین کنید.

۶۱ـ اگر $f(x - y , x + 2y) = x^2y$ حاصل $f(4 , 1)$ چقدر است؟

۶۲ـ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x + 1 & x \geq 2 \\ x - 2 & x < 2 \end{cases}$ مطلوبست محاسبهٔ $f + g$ و $f . g$.

۶۳ـ اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ 4 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 5 & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ -1 & x = 0 \\ x^2 - 1 & 0 < x < 3 \end{cases}$

مطلوبست محاسبهٔ D_f ، D_g ، D_{f+g} و ضابطهٔ $f(x) + g(x)$ ، $f(g(-2))$ و $g(f(0))$.

۶۴ـ توابع f و g با ضابطه‌های زیر تعریف شده‌اند ضابطه fog را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x + 8 & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

۶۵ـ در هر یک از موارد زیر دو تابع مانند g و h پیدا کنید به طوریکه $f = goh$

الف) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ ب) $f(x) = (x + 1)^3$

ج) $f(x) = |x^2 - 1|$ د) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$

۶۶ـ اگر $f_n(x) = \underbrace{fofo \ldots of}_{n \text{ بار}}(x)$ و $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ مطلوبست محاسبهٔ $f_n(x)$.

۶۷ـ اگر $f(x) = (x + a)(x + a^2) \ldots (x + a^n)$ ، ثابت کنید به ازای هر x:

$$a^n(x + 1)f(x) = (x + a^n)f(ax)$$

۶۸ـ اگر $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$ و $D_f = [2 , +\infty[$ و $g(x) = \frac{x^2}{2x - 2}$ ثابت کنید:

$$gof(x) = x$$

MATH75.IR

۶۹ـ توابع $f(x) = \begin{cases} ۲ & x \geq ۳ \\ x - ۳ & x < ۳ \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} ۲ & x \geq ۱ \\ x^۲ + ۱ & x < ۱ \end{cases}$ داده شده‌اند

دامنه و ضابطه $\frac{f}{g}$ و $f + g$ را بدست آورید.

۷۰ـ تابع f به ازای هر عدد طبیعی n در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$f(۱) = ۱ \quad , \quad \forall n > ۱ : f(n) = f(n - ۱) + a^n$$

مطلوبست محاسبهٔ $f(n)$.

۷۱ـ اگر $f(x) = a^x + b^x$ و $g(x) = \frac{f(x)}{f(x - ۲)}$ و $a + b \neq ۰$ باشد مقدار $g(۳)$ را حساب کنید.

۷۲ـ تحقیق کنید از توابع زیر کدامیک زوج و کدامیک فردند.

الف) $y = x^۴ - x^۲ + ۳$

ب) $y = ۴x^۵ - ۲x$

ج) $y = x^۲ + ۱ + \sqrt{۱ - x^۲}$

د) $y = \frac{۳x}{x^۲ + ۱}$

هـ) $y = \frac{a^x + ۱}{a^x - ۱} \quad (a > ۰ \ , a \neq ۱)$

و) $y = \sqrt[۳]{۵ - x} \times \sqrt[۳]{x + ۵}$

ز) $y = x|x|$

ح) $y = \frac{a^x + a^{-x}}{۲}$

ط) $y = |x^۲ - ۲| + |-x|$

ی) $y = ۳x^۴ - ۴x^۳$

ک) $f(x) = \begin{cases} ۱ & x \in Q \\ ۰ & x \notin Q \end{cases}$

ل) $f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & x \geq ۰ \\ -x^۲ + ۱ & x < ۰ \end{cases}$

۷۳ـ تابعی مثال بزنید که هم زوج و هم فرد باشد.

۷۴ـ ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $y = |x + ۱| + |x - ۱|$ تابعی زوج و تابع با ضابطهٔ $y = |x + ۱| - |x - ۱|$ تابعی فرد است.

۷۵ـ خاصیت یک به یک و پوشا بودن را دربارهٔ هر یک از توابع زیر تحقیق کنید.

الف) $\begin{cases} f : R - \{۱\} \longrightarrow R \\ f(x) = \frac{۲x + ۱}{x - ۱} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f : R - \{۰\} \longrightarrow R \\ f(x) = \frac{|x| + ۵}{x} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \sqrt{x - |x|} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f : R - \{۱\} \longrightarrow R \\ f(x) = \frac{|x|}{x - ۱} \end{cases}$

MATH75.IR

و) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = ۸x^۳ - ۱۲x^۲ + ۶x \end{cases}$

ه) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = x^۲ - ۳x + ۱ \end{cases}$

ح) $\begin{cases} f : R^۲ \longrightarrow R^۲ \\ f(x , y) = (x + ۲y , x - ۲y) \end{cases}$

ز) $\begin{cases} f : N^۲ \longrightarrow N \\ f(x , y) = ۲^{x-۱} (۲y - ۱) \end{cases}$

ی) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ + x + ۲} \end{cases}$

ط) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \sqrt[۵]{x - ۳} \end{cases}$

ک) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \dfrac{|x| - ۲}{|x| + ۲} \end{cases}$

ل) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = ۲^{۵x+۲} - ۲^{۵x+۱} \end{cases}$

م) $\begin{cases} f : R^+ \longrightarrow R \\ f(x) = x^۲ - ۲x \end{cases}$

ن) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = x + |x - ۱| \end{cases}$

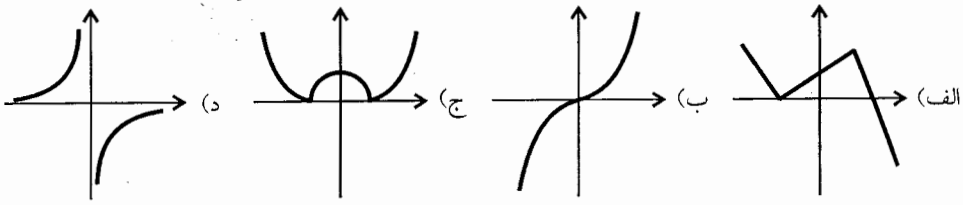
س) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = |x - ۲| - ۲|x + ۱| \end{cases}$

ع) $\begin{cases} f : R \longrightarrow (-۱ , ۰] \\ f(x) = \dfrac{x}{۱ - x} \end{cases}$

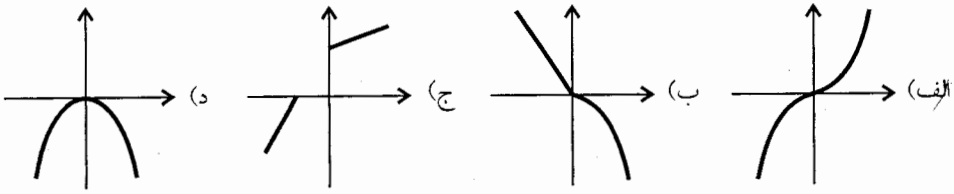
ف) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \dfrac{x}{۱ - |x|} \end{cases}$

ص) $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \dfrac{x}{x^۲ + ۱} \end{cases}$

۷۶ـ کدامیک از نمودارهای زیر نمودار یک تابع یک به یک می‌باشد؟



۷۷ـ کدامیک از نمودارهای زیر نمودار یک تابع پوشاست؟ (مجموعهٔ انجام R است)



MATH75.IR

۷۸ـ تابع حقیقی f با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x}{|x| + ۱}$ تعریف شده است.

اولاً: دامنه و برد تابع را بدست آورید.

ثانیاً: تحقیق کنید این تابع پوشا هست یاخیر.

ثالثاً: ثابت کنید تابع وارون‌پذیر است و ضابطهٔ تابع وارون آنرا محاسبه کنید.

رابعاً: مطلوبست محاسبهٔ $f(f(f(f(x))))$.

۷۹ـ ثابت کنید تابع زیر وارون‌پذیر است و ضابطهٔ تابع وارون آنرا بدست آورید.

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = ۳x + ۲|x| \end{cases}$$

۸۰ـ ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R^+ \longrightarrow R^+ \\ f(x) = x + \sqrt{x} \end{cases}$ یک به یک و پوشاست و ضابطهٔ تابع وارون f را بدست آورید.

۸۱ـ ثابت کنید تابع $f : N \longrightarrow Z$ که با ضابطهٔ زیر تعریف شده، یک تناظر یک به یک است.

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{۲} & n = ۲k \\ \frac{n - ۱}{۲} & n = ۲k - ۱ \end{cases} \quad (k \in N)$$

۸۲ـ تابع $\begin{cases} f : (۰ , ۱) \longrightarrow (a , b) \\ f(x) = bx + (۱ - x)a \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

اولاً: ثابت کنید f یک به یک و پوشاست.

ثانیاً: ضابطهٔ $f^{-۱}$ را تعیین کنید.

۸۳ـ ثابت کنید تابع زیر یک به یک و پوشاست و تابع وارون آنرا مشخص کنید.

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x \end{cases}$$

۸۴ـ ثابت کنید تابع حقیقی $f(x) = x|x|$ یک به یک و پوشاست و ضابطهٔ وارون آنرا بدست آورید.

۸۵ـ ثابت کنید تابع $\begin{cases} f: (-\infty , ۰) \longrightarrow R \\ f(x) = x^۲ - ۲x - ۱ \end{cases}$ وارون‌پذیر است و ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را تعیین کرده و نمودار f و $f^{-۱}$ را رسم کنید.

MATH75.IR

۸۶ـ ثابت کنید تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R - \{۲\} \\ f(x) = \dfrac{۲\sqrt{x} - ۱}{\sqrt{x} + ۱} \end{cases}$ وارون‌پذیر است و ضابطهٔ تابع وارون آنرا بدست آورید.

۸۷ـ ثابت کنید تابع زیر یک به یک و پوشاست و ضابطهٔ وارون آنرا حساب کنید.

$$\begin{cases} f : R^۲ \longrightarrow R^۲ \\ f(x , y) = (۲x + ۳y , ۳x + ۴y) \end{cases}$$

۸۸ـ اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد ثابت کنید $f^{-۱}(x) = f(x)$

$$\begin{cases} f : R - \{c\} \longrightarrow R - \{c\} \\ f(x) = \dfrac{cx + d}{x - c} \end{cases}$$

۸۹ـ ثابت کنید تابع زیر تناظر یک به یک است اگر و تنها اگر $a^۲ \leq ۳b$.

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = x^۳ + ax^۲ + bx + c \end{cases} \qquad (a , b , c \in R)$$

۹۰ـ ثابت کنید تابع زیر یک تناظر یک به یک است سپس $f^{-۱}$ را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ - x & x \geq ۰ \\ (۱ - x)^۲ & x < ۱ \end{cases}$$

۹۱ـ ثابت کنید $f(x) = \begin{cases} x^۴ & x \geq ۰ \\ x(۲ - x) & x < ۰ \end{cases}$ یک تابع دو سویی است و معکوس آنرا حساب کنید.

۹۲ـ ثابت کنید تابع زیر یک به یک است، سپس وارون آنرا بدست آورید.

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = \sqrt{x - ۱ + ۲\sqrt{x - ۲}} \end{cases}$$

۹۳ـ نشان دهید که تابع $y = x + \sqrt[۳]{x}$ روی R معکوس‌پذیر است و ضابطهٔ معکوس آنرا بدست آورید.

۹۴ـ تحقیق کنید تابع f که به صورت زیر تعریف شده است یک به یک و پوشا است یا خیر؟

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۱ & x > ۲ \\ x - ۱ & ۰ < x \leq ۲ \\ x + ۱ & x \leq ۰ \end{cases}$$

MATH75.IR

۹۵ـ تحقیق کنید تابع $f(x) = |x - ۲| - |x - ۳|$ یک به یک است یا خیر؟

۹۶ـ ثابت کنید توابع زیر وارون یکدیگرند.

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = ۲x - ۳ \end{cases} \qquad \begin{cases} g : R \longrightarrow R \\ g(x) = \frac{x}{۲} + \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

۹۷ـ ثابت کنید تابع زیر یک به یک و پوشاست و ضابطهٔ وارون آنرا بدست آورید. سپس ضابطهٔ fof را بنویسید.

$$f(x) = \begin{cases} ۲x - ۲ & x < ۰ \\ \frac{۱}{۲}x - ۲ & ۰ \le x < ۲ \\ x^۲ - ۴x + ۳ & ۲ \le x \end{cases}$$

۹۸ـ اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{|x|}}{|x|} & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$ تابعی حقیقی باشد ضابطهٔ $f^{-۱}$ را تعیین کنید.

۹۹ـ اگر $f(x) = x^۴ - ۲x^۲ + ۱$ و $x \ge ۱$ باشد $f^{-۱}(x)$ را مشخص کنید.

۱۰۰ـ نشان دهید تابع $f(x) = ۲ + \sqrt[۳]{x}$ روی R معکوس‌پذیر است و ضابطهٔ معکوس آنرا بیابید.

۱۰۱ـ ثابت کنید تابع $f(x) = x^۳ + x + \sqrt{x}$ در دامنهٔ تعریفش وارون‌پذیر است.

۱۰۲ـ وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید، سپس ضابطهٔ تابع معکوس آنها را بدست آورید.

الف) $\begin{cases} f : [۰ , ۱] \longrightarrow R \\ f(x) = x^۴ - ۲x^۲ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} g : [۱ , +\infty[\longrightarrow R \\ g(x) = |x - ۱| + ۲ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f : [۱ , +\infty[\longrightarrow R \\ f(x) = \sqrt{x^۳ - ۱} \end{cases}$

د) $\begin{cases} g : (۱ , +\infty) \longrightarrow R \\ f(x) = x^۲ - ۲x \end{cases}$

۱۰۳ـ اگر $f(n)$ تابعی باشد که $f(۱) = f(۲) = f(۳) = m$ و به ازای $n \ge ۳$،
$f(n + ۱) = \frac{f(n) . f(n - ۱) + ۱}{f(n - ۲)}$، حاصل $f(۶)$ برحسب m چیست؟

۱۰۴ـ اگر $f(۲a + b , a - ۲b) = a^۲ - b^۲$ مطلوبست $f(a , b)$.

۱۰۵ـ اگر $f(a + b , a - b) = a^۳ - b^۳$ مطلوبست $f(a , b)$.

۱۰۶ـ اگر $f(x) = |x - ۱| + |x + ۲|$ مطلوبست $ff(x)$.

۱۰۷ـ اگر $f(a + b , a - b) = \frac{۴ab}{a + b}$ مطلوبست $f(a , b)$.

۱۰۸ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = sgn \frac{x^۲ - ۲x + ۱}{۶ - ۲x}$ را رسم کنید.

MATH75.IR

۱۰۹ـ اگر $f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = x^2 - \frac{1}{x^2}$ باشد $f(x)$ را پیدا کنید $(x > \frac{1}{x} > 0)$.

۱۱۰ـ ثابت کنید تابع حقیقی $y = -x^3 + 1$ اکیداً نزولی است.

۱۱۱ـ ثابت کنید تابع حقیقی $y = \sqrt{x-1}$ اکیداً صعودی است.

۱۱۲ـ تحقیق کنید توابع زیر صعودی است یا نزولی.

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = x^3 + x \end{cases} \qquad \begin{cases} g : [1\ ,\ +\infty[\ \longrightarrow R \\ g(x) = x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

۱۱۳ـ اگر $f(x) = \sqrt[n]{a - x^n}$ باشد $fof(x)$ را بدست آورید و تحقیق کنید تابع در چه صورت وارون‌پذیر است و وارون آنرا پیدا کنید.

۱۱۴ـ تابع معکوس تابع $y = \frac{2x}{1+x^2}$ را در فاصله‌ای که وارون‌پذیر است پیدا کنید.

۱۱۵ـ ثابت کنید تابع $y = -x^3 + x^2 - 2x - 1$ اکیداً نزولی است.

۱۱۶ـ اگر $f(x) = x - \sqrt{x - 3x^2}$ ثابت کنید تابع f در بازهٔ $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$ وارون‌پذیر است. ضابطهٔ تابع وارون آنرا بدست آورید.

۱۱۷ـ نشان دهید تابع $f(x) = 2\sqrt{x-2} + x$ وارون‌پذیر است و ضابطهٔ f^{-1} را پیدا کنید.

۱۱۸ـ اگر $\forall x\ ,\ y : f(xy) = xf(y) + yf(x)$ تابع f را مشخص کنید.

۱۱۹ـ با فرض $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$، $a > 0$ ثابت کنید:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

۱۲۰ـ با تشکیل نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ برای توابع زیر معین کنید این توابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی می‌باشند؟

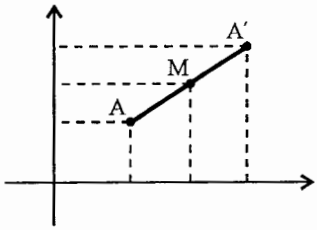
$f_1(x) = x^2 + x$ $\qquad$ $f_2(x) = \frac{1}{x}$

$f_3(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ $f_4(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

MATH75.IR

بخش دوم: قرینه‌یابی، انتقال محورها، محور و مرکز تقارن:

قرینهٔ یک نقطه نسبت به نقطه‌ای دیگر: برای اینکه قرینهٔ نقطهٔ $A(a , b)$ را نسبت به نقطهٔ $M(\alpha , \beta)$ بدست آوریم باید از نقطهٔ A به نقطهٔ M وصل کرده و آنرا به اندازهٔ خودش امتداد دهیم. اگر قرینهٔ A را A' بنامیم نقطهٔ M وسط پاره خط AA' قرار می‌گیرد.

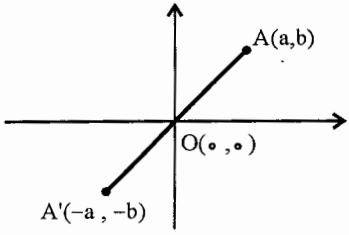


$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \Rightarrow \alpha = \frac{a + x_{A'}}{۲} \Rightarrow x_{A'} = ۲\alpha - a$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{۲} \Rightarrow \beta = \frac{b + y_{A'}}{۲} \Rightarrow y_{A'} = ۲\beta - b$$

بنابراین قرینهٔ نقطه $A(a , b)$ نسبت به نقطه $M(\alpha , \beta)$ نقطهٔ $A'(۲\alpha - a , ۲\beta - b)$ می‌باشد.

نکته: اگر بخواهیم قرینهٔ نقطه $A(a , b)$ را نسبت به مبداء مختصات بدست آوریم کافی است طول و عرض نقطهٔ A را قرینه کنیم زیرا:



قرینهٔ $A(a , b)$ نسبت به $O(۰ , ۰)$ نقطهٔ $A'(۲ \times ۰ - a , ۲ \times ۰ - b)$ یا $A'(-a , -b)$ است.

مثال ۱۱۶: قرینهٔ نقطهٔ $A(۲ , -۳)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱ , -۲)$ چیست؟

حل:

$$\begin{aligned} x_{A'} &= ۲ \times (-۱) - ۲ = -۴ \\ y_{A'} &= ۲ \times (-۲) - (-۳) = -۱ \end{aligned} \Rightarrow A'(-۴ , -۱)$$

مثال ۱۱۷: دو نقطه $A(m - ۲ , ۳)$ و $B(۵ , n + ۱)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱ , ۱)$ قرینهٔ

MATH75.IR

یکدیگرند. m و n را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} \dfrac{(m-۲)+۵}{۲} = -۱ \Rightarrow m+۳ = -۲ \Rightarrow m = -۵ \\ \dfrac{(n+۱)+۳}{۲} = ۱ \Rightarrow n+۴ = ۲ \Rightarrow n = -۲ \end{cases}$$

مثال ۱۱۸: قرینهٔ خط $۲x - ۳y + ۱ = ۰$ را نسبت به مبداء مختصات بدست آورید.

حل: با توجه به اینکه قرینهٔ هر نقطه مانند (x , y) نسبت به مبداء نقطه $(-x , -y)$ می‌باشد کافی است در معادلهٔ خط فوق x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم.

$$۲(-x) - ۳(-y) + ۱ = ۰ \Rightarrow -۲x + ۳y + ۱ = ۰$$

مثال ۱۱۹: قرینهٔ منحنی به معادله $y = x^۲ - ۲x + ۳$ را نسبت به نقطهٔ $M(-۱ , ۲)$ بدست آورید.

حل: قرینهٔ هر نقطهٔ مانند (x , y) واقع بر نمودار تابع فوق نسبت به نقطه $M(-۱ , ۲)$ نقطهٔ $(-۲ - x , ۴ - y)$ می‌باشد. بنابراین کافی است در معادله منحنی x را به $-۲ - x$ و y را به $۴ - y$ تبدیل کنیم.

$$۴ - y = (-۲ - x)^۲ - ۲(-۲ - x) + ۳$$

$$۴ - y = ۴ + x^۲ + ۴x + ۴ + ۲x + ۳ \Rightarrow y = -x^۲ - ۶x - ۷$$

مرکز تقارن: مرکز تقارن یک نمودار نقطه‌ای است که قرینهٔ هر نقطه از نمودار نسبت به آن روی خود نمودار قرار گیرد. به عبارت دیگر قرینهٔ نمودار نسبت به آن نقطه برخود نمودار منطبق شود.

می‌توان گفت نقطه $M(\alpha , \beta)$ مرکز تقارن یک نمودار است در صورتیکه اگر در معادلهٔ نمودار x را به $۲\alpha - x$ و y را به $۲\beta - y$ تبدیل کنیم معادله تغییر نکند. یعنی:

$$f(۲\alpha - x , ۲\beta - y) = f(x , y)$$

مثال ۱۲۰: ثابت کنید مبداء مختصات مرکز تقارن منحنی $y = x^۳$ است.

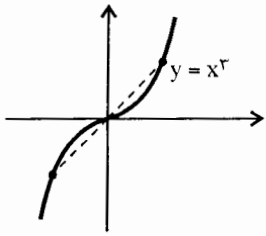
حل: باید x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم و نشان دهیم معادلهٔ نمودار تغییر نمی‌کند یعنی:

$$f(-x) = -f(x)$$

$$-y = (-x)^۳ \Rightarrow -y = -x^۳ \Rightarrow y = x^۳$$

بنابراین نقطه $O(۰ , ۰)$ مرکز تقارن نمودار است.

MATH75.IR



مثال ۱۲۱: مرکز تقارن نمودار تابع $y = x^3 + 3x^2 - x + 2$ را بدست آورید.

حل: فرض می‌کنیم نقطهٔ $M(\alpha , \beta)$ مرکز تقارن منحنی باشد. در این صورت با تبدیل x به $2\alpha - x$ و y به $2\beta - y$ معادله نباید تغییر کند.

$$2\beta - y = (2\alpha - x)^3 + 3(2\alpha - x)^2 - (2\alpha - x) + 2$$

$$2\beta - y = 8\alpha^3 - 12\alpha^2 x + 6\alpha x^2 - x^3 + 12\alpha^2 - 12\alpha x + 3x^2 - 2\alpha + x + 2$$

$$y = x^3 - (6\alpha + 3)x^2 - (1 - 12\alpha^2 - 12\alpha)x - (8\alpha^3 + 12\alpha^2 - 2\alpha + 2 - 2\beta)$$

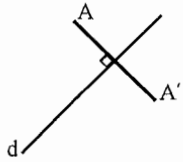
برای اینکه تساوی اخیر با معادله تابع فوق هم ارز باشد باید ضرایب جملات متشابه برابر باشند.

$$\begin{cases} -6\alpha - 3 = 3 \Rightarrow -6\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = -1 \\ 1 - 12\alpha^2 - 12\alpha = 1 \\ -8\alpha^3 - 12\alpha^2 + 2\alpha - 2 + 2\beta = 2 \Rightarrow 8 - 12 - 2 - 2 + 2\beta = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2\beta = 10 \Rightarrow \beta = 5$$

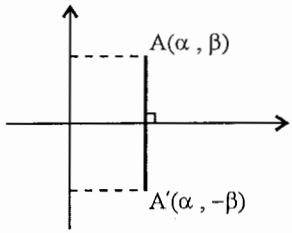
بنابراین نقطه $M(-1 , 5)$ مرکز تقارن نمودار تابع فوق است.

قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک خط: نقطهٔ A' را قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط d می‌نامیم در صورتیکه خط d عمود منصف پاره خط AA' باشد. بنابراین برای پیدا کردن قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط d باید از A بر d عمود کرده و پاره خط حاصل را به اندازهٔ خودش امتداد دهیم. برای پیدا کردن قرینهٔ یک نمودار نسبت به یک خط باید قرینهٔ کلیهٔ نقاط نمودار را نسبت به آن خط تعیین کنیم.



MATH75.IR

قرینهٔ یک نقطه نسبت به محور طول: قرینهٔ نقطه $A(\alpha , \beta)$ نسبت به محور طول نقطهٔ $A'(\alpha , -\beta)$ است. زیرا عمود منصف پاره خط AA' خط $y = ۰$ می‌باشد که همان محور طول است.



مثال ۱۲۲: قرینهٔ نقطهٔ $A(-۲ , ۳)$ نسبت به محور طول نقطه $A'(-۲ , -۳)$ است.

مثال ۱۲۳: قرینهٔ منحنی به معادله $y^۲ - ۲xy + x = ۰$ نسبت به محور طول چیست؟

حل: کافی است در معادلهٔ منحنی y را به $-y$ تبدیل کنیم.

$$(-y)^۲ - ۲x(-y) + x = ۰ \quad \Rightarrow \quad y^۲ + ۲xy + x = ۰$$

محور تقارن یک نمودار: اگر خطی مانند d در صفحهٔ نمودار f وجود داشته باشد که قرینهٔ هر نقطهٔ f نسبت به خط d نقطه‌ای از خود f باشد، خط d را محور تقارن نمودار f می‌نامیم.

نکته: محور طول خط تقارن یک نمودار است اگر و تنها اگر با تبدیل y به $-y$ در معادلهٔ آن نمودار تغییری حاصل نشود.

$$f(x , -y) = f(x , y)$$

مثال ۱۲۴: ثابت کنید محور طول خط تقارن منحنی $x = y^۲ + ۱$ است.

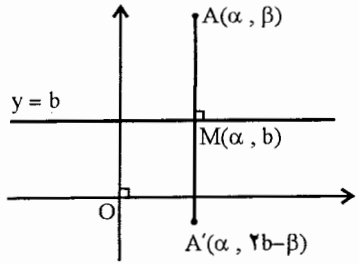
حل: در معادلهٔ منحنی y را به $-y$ تبدیل می‌کنیم.

$$x = (-y)^۲ + ۱ \quad \Rightarrow \quad x = y^۲ + ۱$$

با توجه به اینکه معادلهٔ نمودار تغییری نکرده می‌توان گفت محور طول خط تقارن نمودار است.

قرینهٔ یک نقطه نسبت به خط $y = b$: برای بدست آوردن قرینهٔ نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ نسبت به خط $y = b$ از A به خط $y = b$ عمود کرده و پاره خط حاصل را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم. با توجه به اینکه نقاط A' و A روی خط موازی محور عرض قرار دارند طولشان مساوی است. عرض A' نیز به طریق زیر بدست می‌آید.

MATH75.IR



$$\frac{y_A + y_{A'}}{۲} = y_M \Rightarrow \frac{\beta + y_{A'}}{۲} = b \Rightarrow y_{A'} = ۲b - \beta$$

بنابراین قرینهٔ نقطه $A(\alpha , \beta)$ نسبت به خط $y = b$ نقطهٔ $A'(\alpha , ۲b - \beta)$ است.

مثال ۱۲۵: قرینهٔ نقطهٔ $A(۲ , -۵)$ نسبت به خط $y = ۷$ نقطهٔ $A'(۲ , ۲ \times ۷ - (-۵))$ یا $A'(۲ , ۱۹)$ است.

مثال ۱۲۶: مقدار m را چنان تعیین کنید که دو نقطهٔ $A(۵ , ۲m - ۱)$ و $B(۵ , ۳)$ نسبت به خط $y = -۴$ متقارن باشند.

حل:

$$\frac{(۲m - ۱) + ۳}{۲} = -۴ \Rightarrow ۲m + ۲ = -۸ \Rightarrow ۲m = -۱۰ \Rightarrow \boxed{m = -۵}$$

مثال ۱۲۷: قرینهٔ منحنی $y^۲ - ۲y = ۲x + ۳$ را نسبت به خط $y = ۳$ بدست آورید.

حل: کافی است هر نقطه (x , y) از منحنی را به نقطه $(x , ۶ - y)$ تبدیل کنیم.

$$(۶ - y)^۲ - ۲(۶ - y) = ۲x + ۳$$

$$۳۶ + y^۲ - ۱۲y - ۱۲ + ۲y = ۲x + ۳ \Rightarrow y^۲ - ۱۰y = ۲x - ۲۱$$

مثال ۱۲۸: ثابت کنید خط $y = ۱$ خط تقارن منحنی $x = y^۲ - ۲y + ۳$ است.

حل: نشان می‌دهیم قرینهٔ منحنی $x = y^۲ - ۲y + ۳$ نسبت به خط $x = ۱$ خودش می‌شود. برای این منظور هر نقطه (x , y) واقع بر منحنی را به نقطهٔ $(x , ۲ - y)$ تبدیل می‌کنیم.

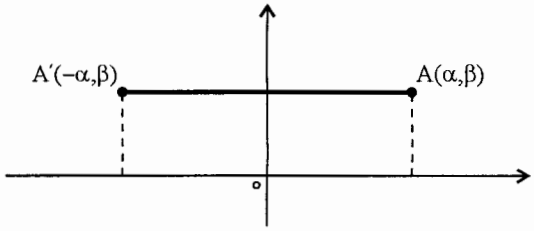
$$x = (۲ - y)^۲ - ۲(۲ - y) + ۳$$

$$x = ۴ - ۴y + y^۲ - ۴ + ۲y + ۳ \Rightarrow x = y^۲ - ۲y + ۳$$

ملاحظه می‌شود معادلهٔ منحنی تغییر نکرد. لذا خط $y = ۱$ خط تقارن منحنی است.

قرینهٔ یک نقطه نسبت به محور عرض: قرینهٔ نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ نسبت به محور عرض نقطهٔ $A'(-\alpha , \beta)$ است. زیرا محور عرض عمود منصف پاره خط AA' است.

MATH75.IR



مثال ۱۲۹: قرینهٔ نقطه $A(-۳ , ۵)$ نسبت به محور عرض نقطهٔ $A'(۳ , ۵)$ است.

مثال ۱۳۰: قرینهٔ خط $۲x + ۳y + ۵ = ۰$ نسبت به محور عرض چیست؟

حل: هر نقطه مانند (x , y) از خط فوق باید به $(-x , y)$ تبدیل شود.

$$۲(-x) + ۳y + ۵ = ۰ \Rightarrow -۲x + ۳y + ۵ = ۰$$

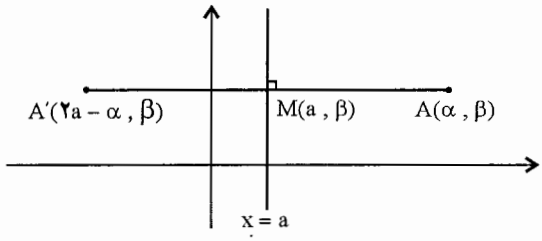
مثال ۱۳۱: ثابت کنید محور عرض خط تقارن نمودار تابع $y = x^۴ + x^۲ + ۱$ است.

حل: با تبدیل x به $-x$ معادلهٔ تابع تغییر نمی‌کند.

$$y = (-x)^۴ + (-x)^۲ + ۱ \Rightarrow y = x^۴ + x^۲ + ۱$$

بنابراین محور عرض خط تقارن نمودار است.

قرینهٔ یک نقطه نسبت به خط $x = a$: قرینهٔ نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ نسبت به خط $x = a$ نقطه $A'(۲a - \alpha , \beta)$ می‌باشد. زیرا خط $x = a$ عمود منصف پاره خط AA' است.



مثال ۱۳۲: قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳ , ۲)$ نسبت به خط $x = -۵$ نقطهٔ $A'(۲ \times (-۵) - (-۳) , ۲)$ یا $A'(-۷ , ۲)$ است.

مثال ۱۳۳: قرینهٔ منحنی $x^۲ - ۲x = y^۲$ را نسبت به خط $x = ۲$ بدست آورید.

حل: باید هر نقطهٔ (x , y) را به نقطهٔ $(۴ - x , y)$ تبدیل کنیم.

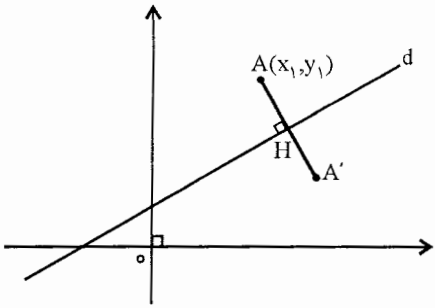
$$(۴ - x)^۲ - ۲(۴ - x) = y^۲ \Rightarrow ۱۶ - ۸x + x^۲ - ۸ + ۲x = y^۲$$

$$x^۲ - ۶x + ۸ = y^۲$$

قرینهٔ یک نقطه نسبت به یک خط: نقطهٔ $A(x_۱ , y_۱)$ و خط d به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ را

MATH75.IR

در نظر بگیرید. می‌خواهیم مختصات نقطهٔ A' قرینهٔ A را نسبت به خط d بدست آوریم.
برای این منظور مختصات نقطه H را بدست آورده و از فرمول قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به H استفاده می‌کنیم.



نقطهٔ H محل برخورد AA' و d می‌باشد و برای بدست آوردن مختصات H معادلهٔ AA' را نوشته و با معادلهٔ خط d در یک دستگاه قرار داده حل می‌کنیم.

$$m_d = \frac{-a}{b} \Rightarrow m_{AA'} = \frac{b}{a}$$

$$AA' : y - y_۱ = \frac{b}{a}(x - x_۱) \Rightarrow \frac{y - y_۱}{b} = \frac{x - x_۱}{a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{y - y_۱}{b} = \dfrac{x - x}{a} = -\lambda \Rightarrow H \left| \begin{array}{l} x = -a\lambda + x_۱ \\ y = -b\lambda + y_۱ \end{array} \right. \\ ax + by + c = ۰ \Rightarrow a(-a\lambda + x_۱) + b(-b\lambda + y_۱) + c = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -a^۲\lambda + ax_۱ - b^۲\lambda + by_۱ + c = ۰ \Rightarrow (a^۲ + b^۲)\lambda = ax_۱ + by_۱ + c$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{ax_۱ + by_۱ + c}{a^۲ + b^۲}$$

$$x_{A'} = ۲x_H - x_۱ = ۲(-a\lambda + x_۱) - x_۱ = x_۱ - ۲a\lambda$$

$$y_{A'} = ۲y_H - y_۱ = ۲(-b\lambda + y_۱) - y_۱ = y_۱ - ۲b\lambda$$

$$A'(x_۱ - ۲a\lambda , y_۱ - ۲b\lambda)$$

مثال ۱۳۴: قرینهٔ نقطهٔ $A(۲ , -۱)$ را نسبت به خط $۳x - ۴y + ۱۵ = ۰$ بدست آورید.

حل:

$$\lambda = \frac{۳ \times ۲ - ۴ \times (-۱) + ۱۵}{۳^۲ + (-۴)^۲} = \frac{۶ + ۴ + ۱۵}{۹ + ۱۶} = \frac{۲۵}{۲۵} = ۱$$

MATH75.IR

$$\begin{aligned} x_{A'} &= x_1 - 2a\lambda = 2 - 2 \times 3 \times 1 = -4 \\ y_{A'} &= y_1 - 2b\lambda = -1 - 2 \times (-4) \times 1 = 7 \end{aligned} \Rightarrow A'(-4 , 7)$$

مثال ۱۳۵: ثابت کنید خط $2x - y - 2 = 0$ خط تقارن منحنی به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ است.

حل: باید نشان دهیم قرینهٔ هر نقطه مانند (x , y) از منحنی فوق نسبت به خط $2x - y - 2 = 0$ برخود منحنی قرار می‌گیرد به عبارت دیگر باید نشان دهیم $f(x - 2a\lambda , y - 2b\lambda) = f(x , y)$

$$f(x - 4\lambda , y + 2\lambda) = (x - 4\lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 - 2(x - 4\lambda) - 3$$
$$= x^2 - 8x\lambda + 16\lambda^2 + y^2 + 4y\lambda + 4\lambda^2 - 2x + 8\lambda - 3$$
$$= x^2 + y^2 - 2x - 3 + (20\lambda^2 - 8x\lambda + 4y\lambda + 8\lambda)$$
$$= x^2 + y^2 - 2x - 3 + \lambda(20\lambda - 8x + 4y + 8)$$
$$= x^2 + y^2 - 2x - 3 + \left(\frac{2x - y - 2}{5}\right)(8x - 4y - 8 - 8x + 4y + 8)$$
$$= x^2 + y^2 - 2x - 3 = f(x , y)$$

در واقع با تبدیل (x , y) به $(x - 4\lambda , y + 2\lambda)$ تغییری در معادلهٔ نمودار پدید نیامد. لذا خط $2x - y - 2 = 0$ خط تقارن منحنی است.

قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم

معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $x - y = 0$ است. قرینهٔ نقطهٔ $A(x_1 , y_1)$ نسبت به خط $x - y = 0$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\lambda = \frac{x_1 - y_1}{1^2 + (-1)^2} = \frac{x_1 - y_1}{2}$$
$$x_{A'} = x_1 - 2a\lambda = x_1 - 2 \times 1 \times \frac{x_1 - y_1}{2} = x_1 - (x_1 - y_1) = y_1$$
$$y_{A'} = y_1 - 2b\lambda = y_1 - 2 \times (-1) \times \frac{x_1 - y_1}{2} = y_1 + (x_1 - y_1) = x_1$$

نقطهٔ $A'(y_1 , x_1)$ قرینهٔ نقطهٔ $A(x_1 , y_1)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است. به‌طور کلی می‌توان گفت برای بدست آوردن قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم کافی است جای طول و عرض آنرا عوض کنیم.

مثال ۱۳۶: مقادیر m و n را چنان تعیین کنید که دو نقطهٔ $A(2m - n , 7)$ و $B(n + 8 , 3)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ یکدیگر باشند.

MATH75.IR

حل:

$$\begin{cases} ۲m - n = ۳ \\ n + ۸ = ۷ \end{cases} \Rightarrow n = -۱$$

$$۲m - (-۱) = ۳ \Rightarrow ۲m = ۲ \Rightarrow m = ۱$$

مثال ۱۳۷: نشان دهید نمودار یک رابطه و نمودار وارون آن نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و دوم قرینهٔ یکدیگرند.

حل: می‌دانیم اگر $(x , y) \in R$ آنگاه $(y , x) \in R^{-۱}$ و بالعکس.

از طرفی دو نقطه (x , y) و (y , x) نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ یکدیگرند.

بنابراین هر نقطه‌ای که در معادلهٔ رابطهٔ R صدق کند قرینهٔ آن نقطه در معادلهٔ $R^{-۱}$ صدق می‌کند. لذا نمودار R و $R^{-۱}$ نسبت به خط $y = x$ قرینهٔ یکدیگرند.

مثال ۱۳۸: ثابت کنید نیمساز ناحیهٔ اول و سوم محور تقارن نمودار رابطهٔ $x^۲ + y^۲ - xy = ۱$ است.

حل: باید نشان دهیم با تبدیل هر نقطهٔ (x , y) به (y , x) معادلهٔ رابطه تغییر نمی‌کند.

اگر x را به y و y را به x تبدیل کنیم معادله به صورت $y^۲ + x^۲ - yx = ۱$ در می‌آید که تغییری نکرده است.

قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم

معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $x + y = ۰$ است.

قرینهٔ نقطه $A(x_۱ , y_۱)$ نسبت به خط $x + y = ۰$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\lambda = \frac{x_۱ + y_۱}{۲}$$

$$x_{A'} = x_۱ - ۲a\lambda = x_۱ - ۲ \times ۱ \times \frac{x_۱ + y_۱}{۲} = x_۱ - (x_۱ + y_۱) = -y_۱$$

$$y_{A'} = y_۱ - ۲b\lambda = y_۱ - ۲ \times ۱ \times \frac{x_۱ + y_۱}{۲} = y_۱ - (x_۱ + y_۱) = -x_۱$$

ملاحظه می‌شود قرینه نقطه $A(x_۱ , y_۱)$ نقطهٔ $A'(-y_۱ , -x_۱)$ است. بنابراین برای بدست آوردن قرینهٔ یک نقطه نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم کافی است جای طول و عرض را عوض کرده و هر کدام را قرینه کنیم.

مثال ۱۳۹: قرینهٔ خط $۲x - ۵y + ۳ = ۰$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم بدست آورید.

MATH75.IR

حل: کافی است در معادلهٔ خط، x را به y− و y را به x− تبدیل کنیم.

$$۲(-y) - ۵(-x) + ۳ = ۰$$

$$-۲y + ۵x + ۳ = ۰$$

انتقال محورهای مختصات

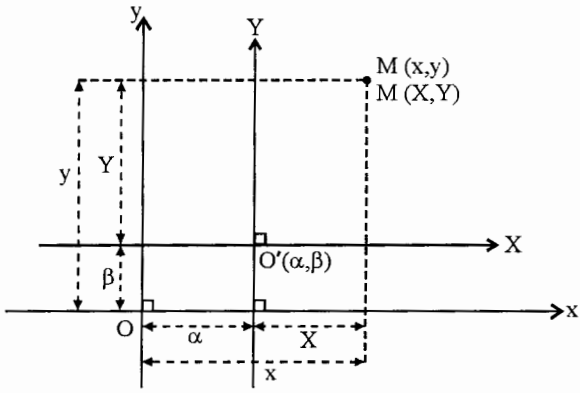
نقطه $O'(\alpha , \beta)$ را در دستگاه مختصات xoy در نظر بگیرید. محورهای مختصات را به موازات خودشان انتقال داده و مبداء مختصات را به نقطهٔ O' برده و دستگاه مختصات جدید $XO'Y$ را ساخته‌ایم.

اگر $M(x , y)$ نقطه‌ای در دستگاه xoy باشد مختصات نقطهٔ M در دستگاه جدید چیست؟

همانطور که از شکل بر می‌آید اگر مختصات نقطهٔ M در دستگاه جدید را با (X , Y) نشان دهیم رابطهٔ زیر بین مختصات M در دستگاه جدید و قدیم برقرار است.

$$\begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$$



مثال ۱۴۰: محورهای مختصات را به موازات خودشان به نقطه $O'(۲ , -۱)$ انتقال داده‌ایم. اگر $M(-۳ , ۴)$ نقطه‌ای در دستگاه قدیم باشد مختصات این نقطه در دستگاه جدید چیست؟

حل:

$$X = x - \alpha = -۳ - ۲ = -۵$$

$$Y = y - \beta = ۴ - (-۱) = ۵$$

$$M(-۵ , ۵)$$

مثال ۱۴۱: نقطهٔ $A(m , ۲n)$ در دستگاه xoy مفروض است. اگر محورهای مختصات را به موازات خودشان به نقطهٔ $O'(-۳ , ۲)$ انتقال دهیم، مختصات نقطهٔ A در دستگاه جدید $(n - ۱ , m + ۲)$ می‌شود. m و n را بدست آورید.

MATH75.IR

حل:

$$\begin{cases} m = n - ۱ + (-۳) \\ ۲n = m + ۲ + ۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - n = -۴ \\ -m + ۲n = ۴ \end{cases} \Rightarrow n = ۰ \quad , \quad m = -۴$$

مثال ۱۴۲: معادلهٔ خط d در دستگاه قدیم $۵x - ۴y + ۳ = ۰$ است. اگر محورها را به موازات خودشان انتقال داده و مبداء مختصات را به نقطهٔ $O'(۲ , -۴)$ ببریم، معادلهٔ خط d در دستگاه جدید چیست؟

حل:

$$x = X + ۲ \qquad y = Y - ۴$$

$$۵(X + ۲) - ۴(Y - ۴) + ۳ = ۰ \quad \Rightarrow \quad ۵X + ۱۰ - ۴Y + ۱۶ + ۳ = ۰$$

$$۵X - ۴Y + ۲۹ = ۰$$

مثال ۱۴۳: اگر با انتقال محورهای مختصات مبداء را به نقطه $O'(-۱ , ۲)$ ببریم معادلهٔ یک منحنی در دستگاه جدید به صورت $X^۲ + (Y - ۳)^۲ = ۴$ می‌شود. معادله این منحنی را در دستگاه قدیم تعیین کنید.

حل:

$$X = x + ۱ \qquad Y = y - ۲$$

$$X^۲ + (Y - ۳)^۲ = ۴$$

$$(x + ۱)^۲ + (y - ۲ - ۳)^۲ = ۴ \quad \Rightarrow \quad (x + ۱)^۲ + (y - ۵)^۲ = ۴$$

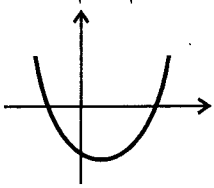
MATH75.IR

تغییرات و انتقال نمودار یک تابع

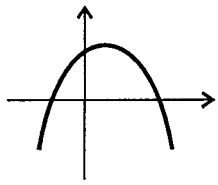
نمودار تابع $y = f(x)$ را در اختیار داریم. می‌خواهیم به کمک آن نمودار توابع $y_1 = -f(x)$، $y_2 = f(-x)$، $y_3 = f(x) + a$، $y_4 = f(x - a)$، $y_5 = f(x - a) + b$، $y_6 = kf(x)$، $y_7 = f(kx)$، $y_8 = |f(x)|$ و $y_9 = f(|x|)$ و $|y_{10}| = f(x)$ رسم کنیم.

۱ـ رسم نمودار تابع $y_1 = -f(x)$

اگر نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ نقطه‌ای از منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد آنگاه نقطهٔ $A'(\alpha , -\beta)$ نقطه‌ای از منحنی تابع $y = -f(x)$ است و بالعکس. با توجه به اینکه دو نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ و $A'(\alpha , -\beta)$ نسبت به محور طول قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین برای رسم نمودار تابع $y = -f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور طول رسم کنیم.



$y = f(x)$

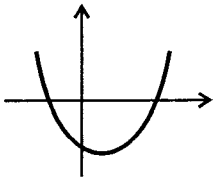


$y = -f(x)$

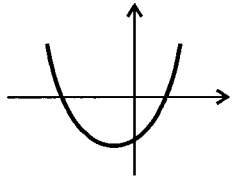
۲ـ رسم نمودار $y_2 = f(-x)$

اگر نقطه $A(\alpha , \beta)$ روی منحنی $y = f(x)$ قرار داشته باشند نقطهٔ $A'(-\alpha , \beta)$ روی منحنی $y = f(-x)$ قرار می‌گیرد و بالعکس.

با توجه به اینکه نقاط $A(\alpha , \beta)$ و $A'(-\alpha , \beta)$ نسبت به محور عرض قرینهٔ یکدیگرند، بنابراین برای رسم نمودار $y = f(-x)$ کافی است قرینهٔ نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور عرض رسم کنیم.



$y = f(x)$



$y = f(-x)$

MATH75.IR

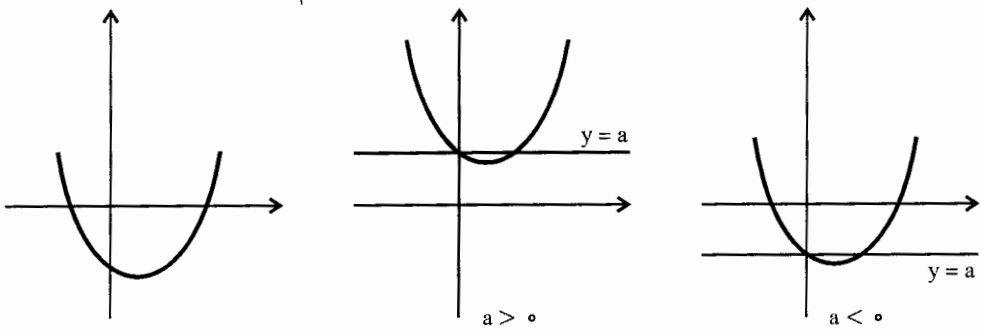
۳ـ رسم نمودار تابع $y_3 = f(x) + a$

اگر نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ روی منحنی تابع $y = f(x)$ باشد آنگاه نقطهٔ $A'(\alpha , \beta + a)$ روی منحنی تابع $y_3 = f(x) + a$ قرار می‌گیرد و بالعکس. اگر $A'(\alpha , \beta + \alpha)$ روی منحنی تابع $y_3 = f(x) + a$ قرار گیرد خواهیم داشت.

$$\beta + a = f(\alpha) + a \Rightarrow \beta = f(\alpha) \Rightarrow A(\alpha , \beta) \in f$$

پس هر نقطه به عرض β واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر طول) در منحنی به معادلهٔ $y_3 = f(x) + a$ به نقطه‌ای با عرض $\beta + a$ تبدیل می‌شود.

لذا برای رسم منحنی تابع $y_3 = f(x) + a$ کافی است منحنی تابع $y = f(x)$ را به اندازهٔ a واحد در راستای محور عرض بالا $(a > 0)$ یا پایین $(a < 0)$ انتقال دهیم.



$y = f(x)$ $\qquad$ $y_3 = f(x) + a$ $\qquad$ $y_3 = f(x) + a$

۴ـ رسم نمودار تابع $y_4 = f(x - a)$

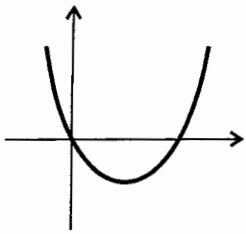
اگر نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ روی منحنی تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ $A'(\alpha + a , \beta)$ روی منحنی تابع $y = f(x - a)$ قرار می‌گیرد و بالعکس اگر $A'(\alpha + a , \beta)$ روی منحنی تابع $y_4 = f(x - a)$ قرار داشته باشد خواهیم داشت:

$$\beta = f(\alpha + a - a) \Rightarrow \beta = f(\alpha) \Rightarrow A(\alpha , \beta) \in f$$

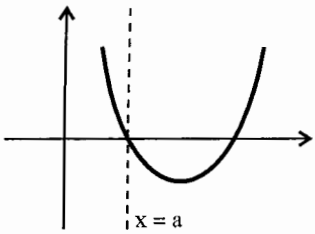
پس می‌توان گفت هر نقطه به طول α واقع بر منحنی تابع f (بدون تغییر عرض) در منحنی تابع $y = f(x - a)$ به نقطه‌ای به طول $\alpha + a$ تبدیل می‌شود.

بنابراین برای رسم نمودار تابع $y = f(x - a)$ از روی نمودار $y = f(x)$ کافی است هر نقطهٔ نمودار $y = f(x)$ را به اندازهٔ a واحد به راست $(a > 0)$ یا به چپ $(a < 0)$ در راستای محور طول انتقال دهیم.

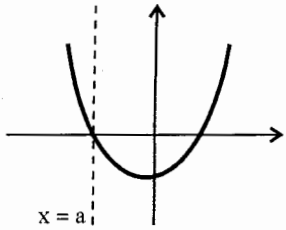
MATH75.IR



$y = f(x)$



$y_۴ = f(x - a)$
$a > ۰$



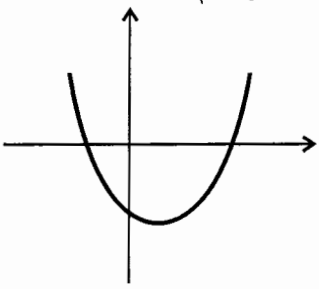
$y_۴ = f(x - a)$
$a < ۰$

۵ـ رسم نمودار تابع $y_۵ = f(x - a) + b$

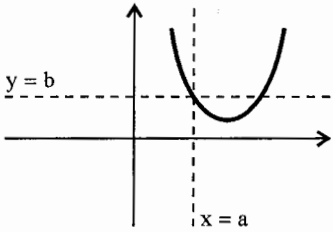
رسم این تابع در واقع ترکیبی از رسم دو تابع به معادلات $y = f(x - a)$ و $y = f(x) + b$ است.

اگر a و b مثبت باشند برای رسم نمودار تابع $y = f(x - a) + b$ کافی است نمودار $y = f(x)$ را به اندازهٔ a واحد به راست سپس b واحد به بالا منتقل کنیم.

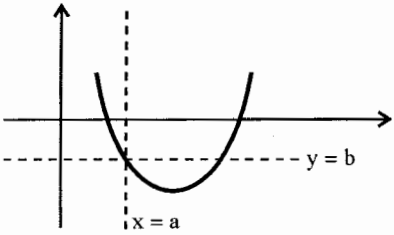
اگر a مثبت و b منفی باشد نمودار $y = f(x)$ را a واحد به راست و b واحد پایین می‌بریم. اگر a منفی و b مثبت باشد نمودار $y = f(x)$ را a واحد به چپ و b واحد بالا می‌بریم. اگر a و b منفی باشند نمودار $y = f(x)$ را a واحد به چپ و b واحد پایین می‌بریم.



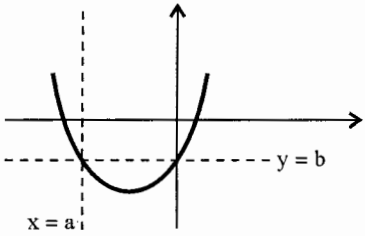
$y = f(x)$



$y_۵ = f(x-a) + b$
$a , b > ۰$



$y_۵ = f(x - a) + b$
$a > ۰ , b < ۰$



$y_۵ = f(x - a) + b$
$a , b < ۰$

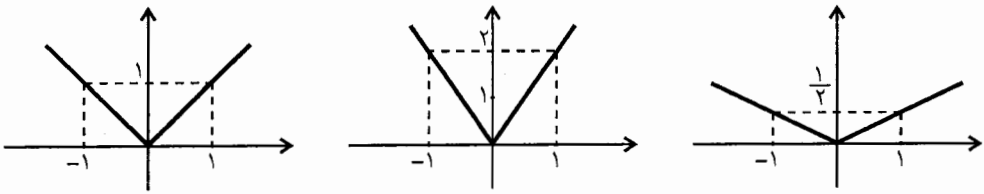
MATH75.IR

۶ـ رسم نمودار تابع $y_۶ = kf(x)$

اگر نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ روی منحنی تابع $y = f(x)$ باشد آنگاه نقطهٔ $A'(\alpha , k\beta)$ روی منحنی تابع $y = kf(x)$ قرار می‌گیرد و بالعکس اگر نقطهٔ $A'(\alpha , k\beta)$ روی منحنی $y = kf(x)$ قرار داشته باشد خواهیم داشت:

$$k\beta = kf(\alpha) \Rightarrow \beta = f(\alpha) \Rightarrow (\alpha , \beta) \in f$$

پس برای رسم تابع $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از منحنی تابع f را (با حفظ طول آن) در k ضرب کنیم.



$y = f(x)$ $\qquad$ $y = ۲f(x)$ $\qquad$ $y = \frac{۱}{۲} f(x)$

ملاحظه می‌شود اگر $k > ۱$ نمودار بسته و اگر $k < ۱$ نمودار باز می‌شود.

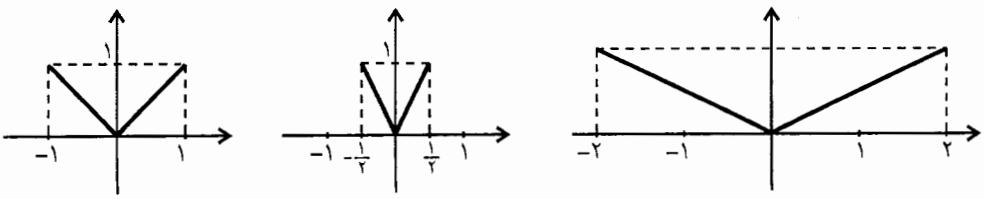
۷ـ رسم نمودار تابع $y_۷ = f(kx)$

اگر نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ روی منحنی تابع f باشد، آنگاه نقطهٔ $A'(\frac{\alpha}{k} , \beta)$ روی منحنی تابع $y = f(kx)$ است و بالعکس اگر $A'(\frac{\alpha}{k} , \beta)$ روی منحنی $y = f(kx)$ باشد خواهیم داشت:

$$\beta = f\left(k \times \frac{\alpha}{k}\right) \Rightarrow \beta = f(\alpha) \Rightarrow (\alpha , \beta) \in f$$

بنابراین برای رسم تابع $y = f(kx)$ ، باید طول هر نقطه از منحنی f را (با حفظ مقدار عرض آن) بر عدد k تقسیم کنیم.

اگر حوزهٔ تعریف تابع f بازهٔ $[a , b]$ باشد آنگاه حوزهٔ تعریف تابع $y = f(kx)$ بازهٔ $\left[\frac{a}{k} , \frac{b}{k}\right]$ می‌باشد.



$y = f(x)$ $\qquad$ $y = f(۲x)$ $\qquad$ $y = f(\frac{۱}{۲} x)$

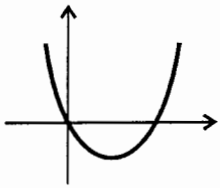
MATH75.IR

۸ـ رسم نمودار $y_{۸} = |f(x)|$

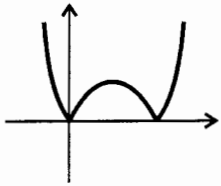
اگر نقطهٔ $A(\alpha , \beta)$ روی منحنی تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه نقطهٔ $A'(\alpha , |\beta|)$ روی منحنی تابع $y_{۸} = |f(x)|$ قرار می‌گیرد.

اگر منحنی تابع $y = f(x)$ تماماً بالا یا روی محور طول باشد، نمودار تابع $y = |f(x)|$ نیز همان نمودار تابع f است.

چنانچه قسمتی یا تمام منحنی تابع f در زیر محور طول باشد باید قرینهٔ این قسمت از منحنی را نسبت به محور xها رسم کنیم تا نمودار $y = |f(x)|$ بدست آید.



$y = f(x)$

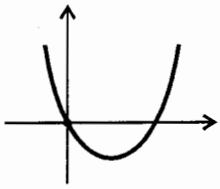


$y_{۸} = |f(x)|$

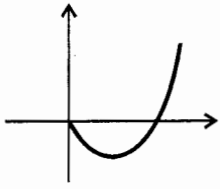
۹ـ رسم نمودار $y_{۹} = f(|x|)$

$$\begin{cases} y_{۹} = f(x) & x \geq ۰ \\ y_{۹} = f(-x) & x < ۰ \end{cases}$$

پس برای رسم تابع به معادلهٔ $y_{۹} = f(|x|)$ باید از نمودار تابع $y = f(x)$ قسمتی را انتخاب کرد که $x \geq ۰$.

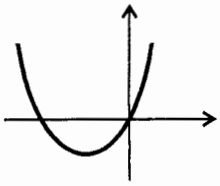


$y = f(x)$

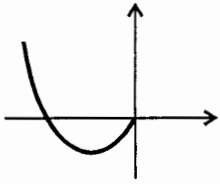


$y = f(|x|)$

و از نمودار تابع $y = f(-x)$ باید قسمتی را انتخاب کرد که $x < ۰$.



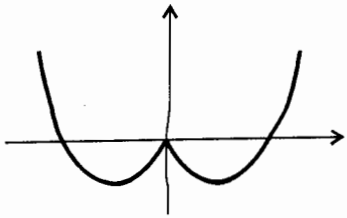
$y = f(-x)$



$y = f(|x|)$

MATH75.IR

لذا نمودار تابع $y_۹ = f(|x|)$ به صورت زیر است.

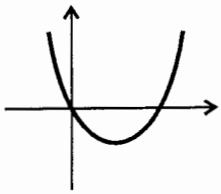


۱۰ـ رسم نمودار رابطهٔ $|y_{۱۰}| = f(x)$

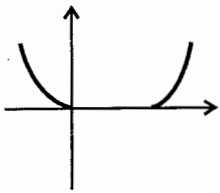
اولاً $f(x) \geq ۰$. بنابراین از نمودار تابع f قسمتی را که بالا یا روی محور طول است اختیار می‌کنیم.

$y_{۱۰} = \pm f(x)$

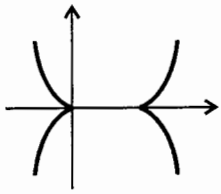
ثانیاً باید قرینهٔ این قسمت را نسبت به محور طول رسم کنیم.



$y = f(x)$



$f(x) \geqslant ۰$



$|y_{۱۰}| = f(x)$

MATH75.IR

تمرینهای فصل دوم

بخش دوم

۱ـ قرینهٔ نقطهٔ $A(-۳ , ۵)$ را نسبت به نقاط یا خطوط زیر بدست آورید.

الف) نسبت به مبداء مختصات.

ب) نسبت به نقطهٔ $M(۱ , -۲)$.

ج) نسبت به محور طول.

د) نسبت به محور عرض.

ه) نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم.

و) نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم.

ز) نسبت به خط $y = -۷$.

ح) نسبت به خط $x = -۱۳$.

ط) نسبت به خط $y = -۲x$.

ی) نسبت به خط $۲x - y - ۴ = ۰$.

۲ـ قرینهٔ نمودار رابطهٔ $x^۲ - ۲y^۲ - xy + ۱ = ۰$ را نسبت به نقاط یا خطوط زیر بدست آورید.

الف) نسبت به مبداء مختصات.

ب) نسبت به نقطهٔ $M(-۱ , ۳)$.

ج) نسبت به محور طول.

د) نسبت به محور عرض.

ه) نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم.

و) نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم.

ز) نسبت به خط $y = ۴$.

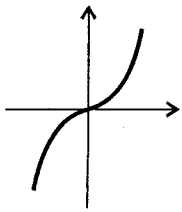
ح) نسبت به خط $x = -۲$.

ط) نسبت به خط $y = -۲x$.

ی) نسبت به خط $۲x - y - ۴ = ۰$.

MATH75.IR

۳ـ قرینهٔ نمودار زیر را نسبت به هر یک از نقاط یا خطوط تمرین ۲ رسم کنید.



۴ـ قرینهٔ خط $۲x - ۵y + ۱ = ۰$ را نسبت به نقطهٔ $M(۲ , -۱)$ بدست آورید.

۵ـ دو نقطه $A(m + n , ۲m + ۳)$ و $B(۲m - n + ۴ , n - ۲)$ مفروضند. m و n را چنان تعیین کنید که دو نقطهٔ A و B:

اولاً: نسبت به مبداء مختصات قرینهٔ یکدیگر باشند.

ثانیاً: نسبت به محور طول قرینهٔ یکدیگر باشند.

ثالثاً: نسبت به محور عرض قرینهٔ یکدیگر باشند.

رابعاً: نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم قرینهٔ یکدیگر باشند.

خامساً: نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم قرینهٔ یکدیگر باشند.

سادساً: نسبت به خط $x = -۳$ قرینهٔ یکدیگر باشند.

۶ـ اگر $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ معادلهٔ یک منحنی باشد و مبداء مختصات را به نقطهٔ $O'(-۱ , ۲)$ انتقال دهیم معادلهٔ منحنی را در دستگاه جدید بدست آورید.

۷ـ معادلهٔ یک منحنی در دستگاه xoy به صورت $y = x^۲ - ۲x + ۱$ است. مبداء را به نقطهٔ O' منتقل کرده‌ایم. معادلهٔ منحنی در دستگاه جدید به صورت $Y - X^۲ = ۲X + ۲$ تبدیل شده است. مختصات نقطهٔ O' را تعیین کنید.

۸ـ معادلهٔ یک منحنی به صورت $y = \frac{x - ۳}{x - ۱}$ می‌باشد. مبداء را به چه نقطه‌ای منتقل کنیم تا معادلهٔ منحنی به صورت $XY + ۲ = ۰$ در آید؟

۹ـ به ازای چه مقداری از m محور طول محور تقارن منحنی زیر می‌باشد؟

$$x^۲ + y^۲ + ۲x + (m - ۱)y + ۱ = ۰$$

۱۰ـ به ازای چه مقداری از m محور عرض محور تقارن منحنی زیر می‌باشد؟

$$۴x^۲ - y^۲ + (۲m - ۳)x + my - ۱ = ۰$$

MATH75.IR

۱۱ـ به ازای چه مقادیری از a و b مبداء مختصات مرکز تقارن منحنی به معادلهٔ زیر است؟

$x^2 + 4y^2 + (a - 2)x + (b + 3)y = 0$

۱۲ـ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو نقطه $A(-1 , 3)$ و $B(a - 2b , a + b)$ نسبت به خط $2x - 3 = 0$ قرینهٔ یکدیگر باشند.

۱۳ـ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دو نقطهٔ $A(2b - a , a - 2)$ و $B(2a + 3 , 2b + 1)$ نسبت به خط $2x - 2y + 1 = 0$ قرینهٔ یکدیگر باشند.

۱۴ـ ثابت کنید نقطهٔ $M(2 , -1)$ مرکز تقارن منحنی به معادله $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ می‌باشد.

۱۵ـ ثابت کنید نقطهٔ $A(2 , -1)$ مرکز تقارن منحنی به معادله $y = \frac{-x + 1}{x - 2}$ است.

۱۶ـ ثابت کنید خط $y = 2$ محور تقارن منحنی به معادلهٔ $y^2 - 4y + 2x = 1$ است.

۱۷ـ ثابت کنید خط $x = -\frac{1}{2}$ خط تقارن منحنی به معادلهٔ $x^2 + x + y - 2 = 0$ است.

۱۸ـ ثابت کنید خط $3y - 3x + 1 = 0$ محور تقارن منحنی $y = \frac{2}{3x - 1}$ است.

۱۹ـ معادلهٔ محور تقارن منحنی به معادلهٔ $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y = 0$ را که موازی محور طول می‌باشد بدست آورید.

۲۰ـ معادلهٔ محور تقارن منحنی به معادلهٔ $4x^2 + y^2 - 8x - 2y - 1 = 0$ را که موازی محور عرض می‌باشد بدست آورید.

۲۱ـ رابطهٔ $x^2 - 4y^2 + ax - 1 = 0$ مفروض است. مقدار a را چنان تعیین کنید که خط $2x - 1 = 0$ محور تقارن منحنی باشد.

۲۲ـ در رابطهٔ $y^2 + by + x + b + 1 = 0$ مقدار b را چنان تعیین کنید که خط $y = -2$ محور تقارن نمودار باشد.

۲۳ـ در رابطهٔ $x^2 + y^2 + ax + by - 1 = 0$، a و b را چنان تعیین کنید که نقطهٔ $A(2 , -1)$ مرکز تقارن نمودار رابطه باشد.

۲۴ـ معادلهٔ محور تقارن نمودار تابع $y = |x - 2| + |x + 2|$ را بدست آورید.

۲۵ـ مختصات مرکز تقارن نمودار تابع $y = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$ را تعیین کنید.

۲۶ـ مرکز تقارن نمودار تابع $y = (x - a)^{2k+1}$ $(k \in N)$ را تعیین کنید.

۲۷ـ نمودار $|xy| = 1$ چند محور تقارن دارد؟

MATH75.IR

۲۸ـ اگر نقطهٔ $A(1, -3)$ مرکز تقارن $y_1 = f(x)$ باشد مرکز تقارن $y_2 = f\left(\frac{x}{2}\right)$ را بیابید.

۲۹ـ اگر در تابع $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$، x را به $-(x+1)$ تبدیل کنیم y به $-y$ تبدیل می‌شود. مرکز تقارن تابع را بیابید.

۳۰ـ مرکز تقارن هر یک از منحنی‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $y = x^3 + 5x - 1$

ب) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$

۳۱ـ معادلهٔ منحنی $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ را پس از انتقال مبداء به نقطهٔ $A(1, -3)$ بدست آورید.

۳۲ـ ثابت کنید مبداء مختصات مرکز تقارن تابع زیر است.

$y = |2x - 3| - |2x + 3|$

۳۳ـ نشان دهید نقطه $A(0, -1)$ مرکز تقارن منحنی $y = x^3 - x - 1$ است.

۳۴ـ مرکز تقارن منحنی $x^2 - y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ را بدست آورید.

۳۵ـ قرینهٔ خط $\frac{x+1}{5} = \frac{y-2}{3}$ را نسبت به نقطه $A(2, -1)$ بدست آورید.

۳۶ـ قرینهٔ نقطهٔ $A(2b, b-1)$ نسبت به نقطهٔ $B(-2, 3)$ بر خط $x + y + 1 = 0$ قرار می‌گیرد. مقدار b چیست؟

۳۷ـ ثابت کنید نقطه $A(\frac{1}{2}, -1)$ مرکز تقارن منحنی به معادلهٔ $4x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ است.

۳۸ـ ثابت کنید خط $y = 3x - 1$ محور تقارن منحنی به معادلهٔ زیر است.

$y^2 + 9x^2 - 6xy - 4y - 8x - 1 = 0$

۳۹ـ ثابت کنید هر خطی که از نقطهٔ $A(1, -2)$ بگذرد خط تقارن منحنی به معادلهٔ زیر است.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$

۴۰ـ در نوع تقارن‌های نمودار رابطه‌های زیر بحث کنید.

الف) $x^2 + 5y = |x| + 1$

ب) $y = \frac{-3}{x}$

ج) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

د) $y = \frac{x+2}{x-2}$

MATH75.IR

فصل سوم

ماتریس‌ها و دستگاههای معادلات

بخش اول: ماتریس و انواع آن

به هر جدولی از اعداد مانند $\begin{bmatrix} ۳ & -۵ & ۲ \\ ۵ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس گویند. $[۳ \quad -۵ \quad ۲]$ را سطر اول، $[۵ \quad ۱ \quad ۴]$ را سطر دوم، $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ را ستون اول، $\begin{bmatrix} -۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را ستون دوم و $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ را ستون سوم این ماتریس گویند. این ماتریس دارای ۲ سطر و ۳ ستون است که آنرا ماتریس ۳×۲ می‌نامیم و می‌گوییم مرتبهٔ ماتریس ۳×۲ است. هر کدام از اعداد نوشته شده در ماتریس را یک درایه می‌نامند. در اینجا ۲ را درایهٔ یک و یک، ۵- را درایهٔ یک و دو، ۳ را درایهٔ یک و سه، ۴ را درایهٔ دو و یک، ۱ را درایهٔ دو و دو و ۵ را درایهٔ دو و سه گویند.

در حالت کلی اگر $a_{۱۱}$, $a_{۱۲}$, ... , a_{mn} , mn عدد حقیقی باشند ماتریس m در n ، A را بصورت زیر می‌نویسند.

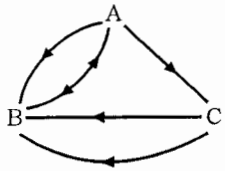
$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

در اینجا a_{ij} درایهٔ مربوط به سطر iام و ستون jام است. $(۱ \le j \le n \ , \ ۱ \le i \le m)$

MATH75.IR

ماتریس یک شبکه مستقیم

شکل زیر را در نظر بگیرید.

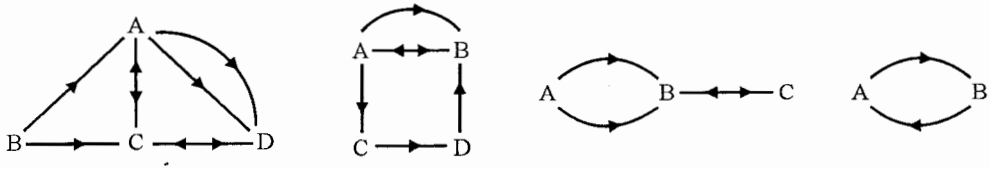


این شکل سه میدان A، B و C از یک شهر را نشان می‌دهد. برای رسیدن از A به B دو خیابان وجود دارد که یکی از آنها یک طرفه و دیگری دو طرفه است. برای رسیدن از B به A فقط یک خیابان وجود دارد که دو طرفه است. برای رفتن از A به C یک خیابان موجود است. برای رسیدن از میدان C به میدان A خیابانی که بطور مستقیم آنها را به هم وصل کند وجود ندارد. برای رسیدن از میدان B به میدان C به‌طور مستقیم خیابانی طراحی نشده. ولی برای رسیدن از میدان C به میدان B دو خیابان یک طرفه در نظر گرفته شده. این نتایج را می‌توان در ماتریس زیر خلاصه کرد.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

دقت کنید که در این ماتریس نشان داده شده که از A به A، از B به B و از C به C خیابانی وجود ندارد. این ماتریس را ماتریس شبکهٔ مستقیم یا مختصراً ماتریس شبکهٔ شکل بالا می‌گویند.

مثال ۱: ماتریس شبکه مستقیم هر یک از شکل‌های زیر را تشکیل دهید.



الف) ب) ج) د)

حل:

الف) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$

ب) $\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$

MATH75.IR

د)
$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ \\ B & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ C & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ \\ D & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{array}$$

ج)
$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & ۰ & ۲ & ۱ & ۰ \\ B & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ C & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ D & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{array}$$

مثال ۲: در هر یک از موارد زیر ماتریس یک شبکهٔ مستقیم داده شده، آن شبکه را مشخص کنید.

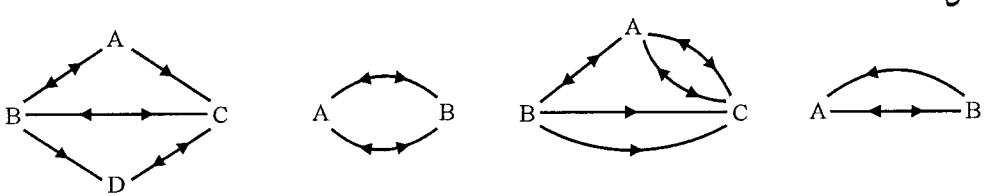
الف)
$$\begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline A & ۰ & ۱ \\ B & ۲ & ۰ \end{array}$$

ب)
$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & ۰ & ۱ & ۲ \\ B & ۱ & ۰ & ۲ \\ C & ۲ & ۰ & ۰ \end{array}$$

ج)
$$\begin{array}{c|cc} & A & B \\ \hline A & ۰ & ۲ \\ B & ۲ & ۰ \end{array}$$

د)
$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline A & ۰ & ۱ & ۱ & ۰ \\ B & ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ C & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ D & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \end{array}$$

حل:



الف) ب) ج) د)

تساوی دو ماتریس

اگر A و B دو ماتریس باشند گوییم A و B مساوی‌اند و می‌نویسیم $A = B$، اگر دو شرط زیر همزمان برقرار باشند.

الف) مرتبهٔ A و مرتبهٔ B برابر باشند.

ب) هر درایه از A با درایهٔ نظیرش از B برابر باشند.

MATH75.IR

مثال ۳: مقادیر x و y را طوری بیابید که در هر یک از موارد زیر ماتریس‌های داده شده برابر باشند.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳x - ۱ & ۵ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۲x + y - ۱ & ۲ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$

ب) $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & x - ۱ \\ ۳ & y & -۵ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ x - ۱ & ۳ \\ y & -۵ \end{bmatrix}$

ج) $A = \begin{bmatrix} x + y - ۱ & ۲ \\ ۳x + ۲ & ۰ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۴ & y - ۴ \\ -۱ & y + ۶x \end{bmatrix}$

حل:

الف) A و B دو ماتریس هم مرتبه و ۲ × ۲ اند. برای تساوی آنها کافیست داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲x + y - ۱ = ۱ & ۲ \times ۲ + y = ۲ \Rightarrow \boxed{y = -۲} \\ ۳x - ۱ = ۵ \Rightarrow \boxed{x = ۲} \end{cases}$$

ب) A و B دو ماتریس غیر هم مرتبه‌اند و لذا نمی‌توانند برابر باشند. یعنی در این حالت تساوی A و B به ازاء هیچ مقدار از x و y میسر نیست.

ج) مرتبهٔ A و B برابر است.

$$\begin{cases} x + y - ۱ = ۴ \\ y - ۴ = ۲ \Rightarrow \boxed{y = ۶} \\ ۳x + ۲ = -۱ \Rightarrow \boxed{x = -۱} \\ y + ۶x = ۰ \end{cases}$$

اگر این مقادیر را در معادلات اول و چهارم دستگاه نیز قرار دهیم صدق می‌کنند.

انواع ماتریس

۱ـ ماتریس سطری: ماتریسی که فقط شامل یک سطر باشد ماتریس سطری نام دارد مرتبهٔ یک ماتریس سطری بصورت $۱ \times n$ $(n \in N)$ می‌باشد.

مثال ۴: ماتریس‌های زیر همگی سطری‌اند.

$A = [۱ \quad -۲]_{۱\times۲}$ $\qquad B = [۰ \quad -۱ \quad ۱]_{۱\times۳}$ $\qquad C = [۱ \quad ۲ \quad ۳ \quad ۴ \quad ۵]_{۱\times۵}$

۲ـ ماتریس ستونی: ماتریسی که فقط شامل یک ستون باشد ماتریس ستونی نام دارد. مرتبهٔ

MATH75.IR

یک ماتریس ستونی بصورت $m \times ۱$ $(m \in \mathbf{N})$ می‌باشد.

مثال ۵: ماتریس‌های زیر همگی ستونی‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} -\sqrt{۲} \\ ۳ \end{bmatrix}_{۲\times۱} \qquad B = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۱} \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۰/۲ \\ ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}_{۴\times۱}$$

قرارداد: هر ماتریس ۱×۱ را مساوی تک درایه‌اش در نظر می‌گیرند.

$$a \in \mathbf{R} \qquad A = [a] = a$$

لذا هر عدد حقیقی را می‌توان به عنوان یک ماتریس ۱×۱ در نظر گرفت.

۳ـ ماتریس صفر: ماتریسی که تمام درایه‌هایش صفر باشد به ماتریس صفر معروف است. ماتریس صفر مرتبه $m \times n$ را با نماد $\bar{O}_{m\times n}$ یا مختصراً $O_{m\times n}$ نشان می‌دهند.

$$O_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad O_{۱\times۲} = [۰ \quad ۰] \quad , \quad O_{۳\times۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} , \ \ldots$$

۴ـ ماتریس مربعی: ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌هایش مساوی باشند به ماتریس مربعی معروف است. ماتریس مربعی $n \times n$ را یک ماتریس مرتبهٔ n می‌نامند. در مثال‌های زیر، A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۲، B یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۳ و C یک ماتریس مربعی مرتبهٔ ۴ است.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۰ & ۵ \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

تعریف قطر اصلی و قطر فرعی در یک ماتریس مربعی

در ماتریس مربعی مرتبهٔ n، $A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \cdots a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \cdots a_{۲n} \\ \vdots & & \\ a_{n۱} & a_{n۲} & a_{n۳} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$ درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$، ... و

MATH75.IR

a_{nn} را درایه‌های واقع بر قطر اصلی A و درایه‌های a_{1n} ، $a_{2(n-1)}$ ،... ، a_{n1} را درایه‌های واقع بر قطر فرعی A می‌نامند.

مثال ۶: مجموع درایه‌های قطر اصلی A و حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی B چقدر است؟

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۱۰ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۵ \\ ۳ & ۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

حل: مجموع درایه‌های قطر اصلی A = ۲ + (−۱۰) = −۸

حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی B = ۱ × ۲ × ۳ = ۶

۵ـ ماتریس قطری: ماتریس مربعی D را که درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن همگی صفر باشند، ماتریس قطری می‌نامند. یک ماتریس قطری مرتبهٔ n در حالت کلی به صورت زیر است.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & a_{22} & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

به عبارتی در ماتریس قطری مرتبهٔ n:

$$\forall i , j \ (i \neq j \ \Rightarrow \ a_{ij} = ۰)$$

مثال ۷: یک ماتریس قطری مرتبه ۵ موجود است که درایه‌های غیر صفر آن عبارتند از ۱ و ۱ و ۲ و ۸− . حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی این ماتریس چقدر است؟

حل: بنابر تعریف ماتریس قطری، درایه‌های خارج قطر اصلی این ماتریس همگی صفراند و با توجه به فرض مسأله چهار درایه از پنج درایه واقع بر قطر اصلی ۱ و ۱ و ۲ و ۸− و درایهٔ پنجم حتماً صفر بوده (چرا؟) لذا حاصلضرب درایه‌های واقع بر قطر اصلی ۰ = ۰×(۸−)×۲×۱×۱ است.

مثال ۸: تمام ماتریس‌های قطری مرتبهٔ ۳ را بنویسید که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آنها اعداد طبیعی باشند و مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی همگی آنها ۴ باشد.

حل:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

۶ـ ماتریس اسکالر: ماتریس قطری‌ای که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن یک عدد ثابت باشد به ماتریس اسکالر معروف است و معمولاً با S نشان داده می‌شود. یک ماتریس اسکالر مرتبهٔ n در حالت کلی به صورت زیر است:

$$S = \begin{bmatrix} s & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & s & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & s & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & s \end{bmatrix}_{n\times n}$$

مثال ۹: ماتریس‌های زیر همگی اسکالرند.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

۷ـ ماتریس همانی (واحد): ماتریس اسکالری که درایه‌های واقع بر قطر اصلی‌اش همگی یک باشند ماتریس همانی (واحد) نام دارد. ماتریس همانی مرتبهٔ n را با نماد I_n نشان می‌دهند.

$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \quad I_۳ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}, \ldots, \quad I_n = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}_{n\times n}$$

نوشتن یک ماتریس بصورت اختصاری

گاهی اوقات ماتریس را به صورت کلی و توسط درایهٔ موجود در سطر iام و ستون jام آن تعریف می‌کنند و می‌نویسند: $A = [a_{ij}]$ همچنین اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد برای تأکید می‌نویسند: $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. اینگونه نوشتن زمانی حائز اهمیت است که مرتبهٔ ماتریس بزرگ است و ما صرفاً می‌خواهیم اطلاعاتی از آن ماتریس را داشته باشیم. در این حالت اگر هر دارایه

MATH75.IR

با روش خاصی (با یک فرمول معین) تعریف شده باشد کافیست فرمولی که برای ساختن a_{ij} بکار رفته است را نیز ذکر کنیم.

مثال ۱۰: ماتریس $A = [a_{ij}]_{۲\times۳}$ به اینصورت تعریف شده، $a_{ij} = i + j$ ماتریس A را با درایه‌هایش معلوم کنید.

حل: در اینجا i معرف سطر است $(۱ \le i \le ۲)$ و j معرف ستون $(۱ \le j \le ۳)$ است.

$$a_{۱۱} = ۱ + ۱ = ۲ \qquad a_{۱۲} = ۱ + ۲ = ۳ \qquad a_{۱۳} = ۱ + ۳ = ۴$$

$$a_{۲۱} = ۲ + ۱ = ۳ \qquad a_{۲۲} = ۲ + ۲ = ۴ \qquad a_{۲۳} = ۲ + ۳ = ۵$$

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۳ & ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۱: در هر یک از موارد زیر ماتریس داده شده را با درایه‌هایش معلوم کنید.

$$A = [a_{ij}]_{۲\times۲} \ , \ a_{ij} = i^j$$

$$B = [b_{ij}]_{۳\times۳} \ , \ b_{ij} = ij$$

$$C = [c_{ij}]_{۳\times۲} \ , \ c_{ij} = j^۲ + i$$

$$D = [d_{ij}]_{۱\times۳} \ , \ d_{ij} = \frac{i}{j}$$

حل:

$$a_{۱۱} = ۱^۱ = ۱ \ , \ a_{۱۲} = ۱^۲ = ۱$$
$$a_{۲۱} = ۲^۱ = ۲ \ , \ a_{۲۲} = ۲^۲ = ۴ \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$b_{۱۱} = ۱ \times ۱ = ۱ \ , \ b_{۱۲} = ۱ \times ۲ = ۲ \ , \ b_{۱۳} = ۱ \times ۳ = ۳$$
$$b_{۲۱} = ۲ \times ۱ = ۲ \ , \ b_{۲۲} = ۲ \times ۲ = ۴ \ , \ b_{۲۳} = ۲ \times ۳ = ۶ \quad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۴ & ۶ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$
$$b_{۳۱} = ۳ \times ۱ = ۳ \ , \ b_{۳۲} = ۳ \times ۲ = ۶ \ , \ b_{۳۳} = ۳ \times ۳ = ۹$$

$$c_{۱۱} = ۱^۲ + ۱ = ۲, \ c_{۱۲} = ۲^۲ + ۱ = ۵$$
$$c_{۲۱} = ۱^۲ + ۲ = ۳, \ c_{۲۲} = ۲^۲ + ۲ = ۶ \qquad C = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۶ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$$
$$c_{۳۱} = ۱^۲ + ۳ = ۴, \ c_{۳۲} = ۲^۲ + ۳ = ۷$$

$$d_{۱۱} = \frac{۱}{۱} \qquad d_{۱۲} = \frac{۱}{۲} \qquad , \ d_{۱۳} = \frac{۱}{۳} \qquad D = [۱ \ \ \frac{۱}{۲} \ \ \frac{۱}{۳}]$$

ماتریس به عنوان برد یک تابع: گاهی اوقات می‌توان ماتریس را به عنوان بُرد یک تابع که از

MATH75.IR

مجموعهٔ $N \times N$ به $\mathbf{R}$ تعریف می‌شود در نظر گرفت. مثلاً اگر A یک ماتریس $m \times n$ باشد آن را بصورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$f : N \times N \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(۱ \le i \le m \ , \ ۱ \le j \le n) \qquad f(i , j) = a_{ij}$$

مثال ۱۲: برد تابع $f : N \times N \longrightarrow \mathbf{R}$

$$۱ \le i \le ۳ \ , \ ۱ \le j \le ۲ \ , \ f(i ,j) = \frac{i - j}{i + j}$$

را بصورت یک ماتریس بنویسید.

حل: برد این تابع را می‌توان بصورت یک ماتریس ۲×۳ نمایش داد. برای این منظور داریم:

$$f(۱ , ۱) = a_{۱۱} = \frac{۱ - ۱}{۱ + ۱} = ۰ \qquad f(۱ , ۲) = a_{۱۲} = \frac{۱ - ۲}{۱ + ۲} = \frac{-۱}{۳}$$

$$f(۲ , ۱) = a_{۲۱} = \frac{۲ - ۱}{۲ + ۱} = \frac{۱}{۳} \qquad f(۲ , ۲) = a_{۲۲} = \frac{۲ - ۲}{۲ + ۲} = ۰$$

$$f(۳ , ۱) = a_{۳۱} = \frac{۳ - ۱}{۳ + ۱} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲} \qquad f(۳ , ۲) = a_{۳۲} = \frac{۳ - ۲}{۳ + ۲} = \frac{۱}{۵}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

۸ـ ترانهادهٔ یک ماتریس: فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ باشد. ماتریس A' را از روی A اینگونه تشکیل می‌دهیم که سطر اول A را در ستون اول A'، سطر دوم A را در ستون دوم A' و... قرار می‌دهیم. به این ترتیب A' را ترانهادهٔ A می‌گویند. بدیهی است که در این حالت مرتبهٔ A' برابر $n \times m$ است.

مثال ۱۳: برای هر یک از ماتریس‌های زیر، ماتریس ترانهاده را تشکیل دهید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۵ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} ۲ & \sqrt{۲} \\ -۱ & ۳ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$D = [۱ \ \ -۱ \ \ ۰] \qquad E = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

حل:

$$A' = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۰ \\ \sqrt{۲} & ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \qquad E' = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۳ & -۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۴: اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۲x + ۱ & x - ۱ \\ \frac{x}{۲} & ۳ - x \end{bmatrix}$ و مجموع درایه‌های قطر فرعی A' برابر ۱۱ باشد، حاصلضرب درایه‌های ستون دوم A چقدر است؟

$$A' = \begin{bmatrix} ۲x + ۱ & \frac{x}{۲} \\ x - ۱ & ۳ - x \end{bmatrix}$$

$$\frac{x}{۲} + x - ۱ = ۱۱ \Rightarrow \frac{۳x}{۲} = ۱۲ \Rightarrow \boxed{x = ۸}$$

حاصلضرب درایه‌های ستون دوم A $\quad (۸ - ۱) \times (۳ - ۸) = ۷ \times (-۵) = -۳۵$

اگر A بصورت $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ باشد، آنگاه A' بصورت $A' = [a'_{ij}]_{n\times m}$ است که در آن $a'_{ij} = a_{ji}$ به راحتی می‌توان نشان داد که اگر A یک ماتریس دلخواه باشد آنگاه $(A')' = A$. یعنی ترانهادهٔ هر ماتریس با خود آن ماتریس برابر است.

ضرب یک عدد در یک ماتریس (ضرب اسکالر)

اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ یک ماتریس و k یک عدد حقیقی دلخواه باشند، منظور از ضرب k در A که با نماد kA نمایش می‌دهیم، ماتریسی است که مرتبه‌اش با مرتبهٔ A یکی است ولی درایه‌هایش k برابر درایه‌های A می‌باشد. به عبارتی:

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \Rightarrow kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$$

مثال ۱۵: اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ ، ماتریس‌های ۲A ، −A و $\sqrt{۳}A$ را تشکیل دهید.

MATH75.IR

حل:

$$۲A = ۲\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ & ۶ \\ ۴ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$-A = (-۱)\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & -۳ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{۳}A = \sqrt{۳}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{۳} & -\sqrt{۳} & ۳\sqrt{۳} \\ ۲\sqrt{۳} & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک ماتریس: اگر A یک ماتریس باشد قرینهٔ A را با نماد A− نشان می‌دهیم و آن عبارتست از ماتریسی که تمام درایه‌های مربوط به A در آن قرینه شده باشد.

مثال ۱۶: اگر $B = \begin{bmatrix} ۲ & x-۱ \\ ۳ & -y \end{bmatrix}$ قرینهٔ $A = \begin{bmatrix} z-۱ & ۲x+۱ \\ ۲t+۱ & x-۳y \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر x، y، z و t را بیابید.

حل:

$$-A = \begin{bmatrix} ۱-z & -۲x-۱ \\ -۲t-۱ & ۳y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & x-۱ \\ ۳ & -y \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ۱-z = ۲ \Rightarrow \boxed{z=-۱} \\ -۲x-۱ = x-۱ \Rightarrow \boxed{x=۰} \\ -۲t-۱ = ۳ \Rightarrow \boxed{t=-۲} \\ ۳y-x = -y \Rightarrow \boxed{y=۰} \end{cases}$$

۹ـ ماتریس متقارن: ماتریس مربعی $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ را متقارن گوییم هرگاه $A' = A$. یعنی اگر ترانهادهٔ یک ماتریس با خود ماتریس برابر باشد گوییم آن ماتریسی متقارن است. می‌دانیم اگر $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ آنگاه $A' = [a_{ij}]_{n\times n}$ که در آن $a'_{ij} = a_{ji}$. از تعریف بالا نیز بر می‌آید که برای متقارن بودن ماتریس مربعی A ، شرط لازم و کافی آنستکه داشته باشیم $a_{ji} = a_{ij}$. یعنی از روی ماتریس مربعی A قبل از تشکیل A' می‌توان تشخیص داد که A متقارن است یا خیر؟ کافیست

MATH75.IR

دقت کنیم که آیا درایه‌های واقع در A نسبت به قطر اصلی مانند هم هستند یا خیر؟ مثلاً ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$ متقارن است. زیرا قطر اصلی مانند آینه عمل کرده و درایه $a_{۱۲}$ با درایه $a_{۲۱}$ برابر است. $A' = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$.

همچنین ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ نیز متقارن است، زیرا باز هم قطر اصلی مانند یک آینه عمل کرده.

$$B' = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & -۱ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۱۷: مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که ماتریس A متقارن باشد.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & -۲ \\ ۲x - ۱ & ۳ & y - ۱ \\ ۳y + ۱ & -x & -۴ \end{bmatrix}$$

حل: باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۲x - ۱ = ۳ \Rightarrow \boxed{x = ۲} \\ ۳y + ۱ = -۲ \Rightarrow \boxed{y = -۱} \\ y - ۱ = -x \Rightarrow -۱ - ۱ = -۲ \end{cases}$$

مثال ۱۸: اولاً: مقدار x چقدر باشد تا درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم در A' برابر ۳- باشد؟

ثانیاً: تحت این شرایط مقدار $a_{۱۲} + a_{۲۳} + a_{۳۴}$ چقدر است؟

$$A = \begin{bmatrix} x & ۲x - ۱ & ۳x & x - ۱ \\ x + ۱ & \frac{x}{۲} & -x + ۱ & x - ۵ \\ -۲y & \frac{x}{۲} - ۱ & ۱ - \frac{x}{۲} & \frac{x + ۱}{۲} \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

حل: اولاً می‌دانیم $a'_{۲۳} = a_{۳۲}$. پس کافیست داشته باشیم:

$$\frac{x}{۲} - ۱ = -۳ \Rightarrow \frac{x}{۲} = -۲ \Rightarrow x = -۴$$

ثانیاً:

$$a_{۱۲} + a_{۲۳} + a_{۳۴} = ۲x - ۱ + (-x + ۱) + \frac{x + ۱}{۲} = x + \frac{x + ۱}{۲}$$

اگر قرار دهیم $x = -۴$ خواهیم داشت:

$$-۴ + \frac{-۴ + ۱}{۲} = \frac{-۱۱}{۲}$$

مثال ۱۹: آیا هر ماتریس قطری متقارن است؟

حل: بله. زیرا اولاً هر ماتریس قطری مربعی است. ثانیاً تمام درایه‌های غیر قطر اصلی صفر می‌باشند. پس قطر در اینگونه ماتریس‌ها به عنوان آینه عمل می‌کند.

۱۰ـ ماتریس پادمتقارن: ماتریس $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ را پادمتقارن گوییم هرگاه $A' = -A$. یعنی اگر ترانهاده یک ماتریس با قرینهٔ آن ماتریس برابر باشد آنگاه آن ماتریس پادمتقارن است. پس می‌توان گفت شرط لازم و کافی برای آنکه $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ پادمتقارن باشد آنستکه $a'_{ij} = -a_{ij}$. که از آنجا بدست می‌آید:

$$\forall i, j : ۱ \le i, j \le n \quad ; \quad a_{ji} = -a_{ij}$$

و در حالت خاصی که قرار دهیم $i = j$، داریم $a_{ii} = -a_{ii}$. یعنی $۲a_{ii} = ۰$ و از آنجا $a_{ii} = ۰$ یعنی شرط اولیه برای آنکه ماتریس مربعی A پادمتقارن باشد آنستکه درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن همگی صفر باشند. پس بطور خلاصه می‌توان بیان کرد که اگر ماتریس مربعی A چنان باشد که درایه‌های واقع بر قطر اصلی‌اش همگی صفر بوده و درایه‌های دیگر نسبت به قطر اصلی از نظر مقداری قرینه باشند آنگاه A پادمتقارن است.

مثال ۲۰: اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۳ \\ ۱ & ۰ & \frac{۱}{۲} \\ -۳ & -\frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$ آنگاه:

$$A' = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۳ \\ -۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ ۳ & \frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود که $A' = -A$ است. یعنی A پادمتقارن است.

مثال ۲۱: مقادیر x، y، z، t و f را چنان تعیین کنید که ماتریس A پادمتقارن شود.

MATH75.IR

$$A = \begin{bmatrix} x+۳ & z-۱ & x+y \\ x & ۳y-۲x & f-۱ \\ t+۱ & y & ۰ \end{bmatrix}$$

حل: باید داشته باشیم:

$$x + ۳ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -۳}$$

$$۳y - ۲x = ۰ \Rightarrow y = -\frac{۶}{۳} = -۲ \Rightarrow \boxed{y = -۲}$$

$$z - ۱ = -x \Rightarrow z = ۳ + ۱ \Rightarrow \boxed{z = ۴}$$

$$t + ۱ = -(x + y) = -(-۳ - ۲) = ۵ \Rightarrow \boxed{t = ۴}$$

$$f - ۱ = -y = ۲ \Rightarrow \boxed{f = ۳}$$

مثال ۲۲: A یک ماتریس پادمتقارن مرتبه ۱۰ است. حاصلجمع همهٔ درایه‌های A چند است؟

حل: درایه‌های واقع بر قطر اصلی که همگی صفراند و درایه‌های غیر قطر اصلی نیز دوبدو قرینه‌اند پس مجموع همهٔ درایه‌ها صفر است.

MATH75.IR

بخش دوم: اعمال بر ماتریس‌ها

جمع ماتریس‌ها

اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ دو ماتریس هم مرتبه باشند، حاصلجمع آنها را با نماد $A + B$ نشان می‌دهند و هر درایهٔ $A + B$ از جمع درایه‌های متناظرش از A و B محاسبه می‌شوند. یعنی مثلاً برای یافتن درایهٔ واقع در سطر اول و ستون دوم $A + B$ (در صورت امکان) کافیست درایه واقع در سطر اول و ستون دوم A را با درایه واقع در سطر اول و ستون دوم B جمع کنیم.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

پس شرط اصلی جمع‌پذیری دو ماتریس هم مرتبه بودن آنها می‌باشد.

مثال ۲۳: در هر یک از موارد زیر حاصلجمع ماتریس‌های داده شده را تعیین کنید.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$

ب) $C = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ & ۵ \\ ۲ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$

ج) $E = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$

حل:

الف) $A + B = \begin{bmatrix} ۲+۰ & -۱+۱ \\ ۳+۲ & ۴+(-۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$

ب) $C + D = \begin{bmatrix} ۳+(-۱) & ۲+(-۳) & -۱+۵ \\ ۱+۲ & ۰+(-۲) & ۲+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & -۲ & ۳ \end{bmatrix}$

ج) $E + F = \begin{bmatrix} ۰+۰ & ۱+(-۱) & (-۱)+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

خواص جمع ماتریس‌ها

۱ـ بسته بودن: اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند در اینصورت $A + B$ نیز یک ماتریس $m \times n$ خواهد بود. در این حالت اصطلاحاً گفته می‌شود که مجموعهٔ ماتریس‌های $m \times n$ نسبت به جمع بسته است.

۲ـ شرکتپذیری: اگر A، B و C سه ماتریس $m \times n$ باشند آنگاه:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

MATH75.IR

این خاصیت را خاصیت شرکتپذیری جمع گویند.

۳ـ عضو خنثی (بی اثر): اگر A یک ماتریس $m \times n$ دلخواه باشد داریم:

$$A + \bar{O}_{m\times n} = \bar{O}_{m\times n} + A = A$$

$\bar{O}_{m\times n}$ را عضو بی اثر عمل جمع ماتریس‌ها گویند.

۴ـ عضو قرینه: اگر A یک ماتریس $m \times n$ دلخواه باشد و $-A$ قرینهٔ آن، در اینصورت داریم:

$$A + (-A) = (-A) + A = \bar{O}_{m\times n}$$

۵ـ خاصیت جابجایی (تعویضپذیری)

اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ دلخواه باشند داریم:

$$A + B = B + A$$

این خاصیت را خاصیت جابجایی عمل جمع گویند.

مثال ۲۴: اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $A + B$، $B + C$، $A + (B + C)$، $(A + B) + C$، $A + ۳B$، $۲A - B + ۵C$ و $A + \frac{۱}{۲}B - \frac{۳}{۲}C$ را مشخص کنید.

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$B + C = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$(A + B) + C = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۵ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$A + ۳B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} + ۳\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۳ \\ ۶ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۹ & -۵ \end{bmatrix}$$

$$۲A - B + ۵C = ۲\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} + ۵\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

$$= \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۶ & -۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۵ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A + \frac{۱}{۲}B - \frac{۳}{۲}C = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} + \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} - \frac{۳}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۲} \\ ۱ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۷}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ ۴ & -۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۲۵: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشند $(A + B)'$ و $A' + B'$ را بدست آورید و با هم مقایسه کنید.

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$(A + B)' = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$A' + B' = \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۱ & ۹ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود:

$$(A + B)' = A' + B'$$

اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند می‌توان نشان داد که $(A + B)' = A' + B'$ یعنی ترانهادهٔ مجموع برابر است با مجموع ترانهاده‌ها.

مثال ۲۶: اگر A یک ماتریس پادمتقارن باشد $A + A'$ چیست؟

حل: چون A پادمتقارن است پس $A' = -A$. لذا: $A + A' = A + (-A) = \bar{O}$

مثال ۲۷: A یک ماتریس مربع مرتبهٔ ۲ است بطوریکه $A + A' = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و حاصلضرب درایه‌های قطر فرعی A برابر ۶ است. ماتریس A چگونه است؟

حل: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد و $bc = ۶$. داریم:

$$A + A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲a & b + c \\ b + c & ۲d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

$$\begin{cases} ۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲ \\ ۲d = ۶ \Rightarrow d = ۳ \\ b + c = ۵ \\ bc = ۶ \end{cases}$$

برای یافتن b و c کافیست معادلهٔ درجهٔ دوم زیر را حل کرده و ریشه‌های آن را بیابیم.

$$x^۲ - ۵x + ۶ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۲ \text{ یا } x = ۳$$

پس داریم $\begin{cases} b = ۲ \\ c = ۳ \end{cases}$ یا $\begin{cases} b = ۳ \\ c = ۲ \end{cases}$. که در اینصورت دو نوع ماتریس برای A بدست می‌آید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۳ & ۳ \end{bmatrix} \text{ یا } A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی:

اگر $A = [a_{ij}]_{۱\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times ۱}$ به ترتیب یک ماتریس سطری (دارای n ستون) و یک ماتریس ستونی (دارای n سطر) باشند، بنابر تعریف حاصلضرب A در B را با نماد $A \times B$ یا مختصراً AB نشان می‌دهیم و آن عبارتست از عددی حقیقی که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \dots & a_{۱n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{۱۱} \\ B_{۲۱} \\ b_{۳۱} \\ \vdots \\ b_{n۱} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \dots & a_{۱n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{۱n} \\ b_{۲n} \\ b_{۳n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} = a_{۱۱}\, b_{۱۱} + a_{۱۲}\, b_{۲۱} + a_{۱۳}\, b_{۳۱} + \dots + a_{۱n}\, b_{n۱}$$

MATH75.IR

ملاحظه می‌کنید که برای محاسبهٔ AB در این حالت لازم است که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد و در این حالت اگر ضرب امکان‌پذیر باشد حاصل این ضرب یک عدد حقیقی است.

مثال ۲۸: در هر یک از موارد زیر حاصلضرب ماتریس سطری A در ماتریس ستونی B را تشکیل دهید.

الف) $A = [۱ \quad ۲] \ , \ B = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$

ب) $A = [۰ \quad ۱ \quad ۲] \ , \ B = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$

ج) $A = [۰ \quad ۲] \ , \ B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$

حل:

الف) $AB = [۱ \quad ۲]\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۱ \times (-۳) + ۲ \times ۲ = -۳ + ۴ = ۱$

ب) $AB = [۰ \quad ۱ \quad ۲] \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = ۰ \times (-۱) + ۱ \times ۳ + ۲ \times ۴ = ۳ + ۸ = ۱۱$

ج)

در اینجا ضرب A و B امکان پذیر نیست . زیرا تعداد ستون‌های A (۲) با تعداد سطرهای B (۳) یکی نیست.

تعریف ضرب دو ماتریس در حالت کلّی

اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ دو ماتریس باشند بطوریکه تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B یکسان باشد در اینصورت ضرب A در B امکان‌پذیر بوده و اگر قرار دهیم $AB = D = [d_{ij}]$ ، آنگاه D یک ماتریس $m \times p$ است. برای محاسبهٔ درایه‌های ماتریس D کافیست سطر و ستون مربوط به آن درایه را بدانیم. سپس سطر مربوطه را از A و ستون مربوطه

MATH75.IR

را از B انتخاب کرده و طبق آنچه در بالا آمد آن سطر را در این ستون ضرب کرده و عدد حاصل را به جای درایهٔ مورد نظر در D بنویسیم. این کار را تا آنجا ادامه می‌دهیم تا تمام درایه‌های D شناسایی شوند.

مثال ۲۹: اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $D = AB$، ماتریس D را تشکیل دهید.

حل: $A_{\underline{۲}\times ۲} \times B_{۲\times \underline{۳}} = D_{۲\times ۳}$ ، D یک ماتریس ۳ × ۲ است و دارای ۶ درایه که باید آنها را بیابیم.

$$d_{۱۱} = \text{سطر اول } A \times \text{ستون اول } B = [۲ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۲ \times ۱ + (-۱) \times (-۱) = ۳$$

$$d_{۱۲} = \text{سطر اول } A \times \text{ستون دوم } B = [۲ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۲ \times ۲ + (-۱) \times ۰ = ۴$$

$$d_{۱۳} = \text{سطر اول } A \times \text{ستون سوم } B = [۲ \quad -۱]\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۲ \times ۳ + (-۱) \times ۲ = ۴$$

$$d_{۲۱} = \text{سطر دوم } A \times \text{ستون اول } B = [۳ \quad ۴]\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۳ \times ۱ + ۴ \times (-۱) = -۱$$

$$d_{۲۲} = \text{سطر دوم } A \times \text{ستون دوم } B = [۳ \quad ۴]\begin{bmatrix} ۲ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۳ \times ۲ + ۴ \times ۰ = ۶$$

$$d_{۲۳} = \text{سطر دوم } A \times \text{ستون سوم } B = [۳ \quad ۴]\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = ۳ \times ۳ + ۴ \times ۲ = ۱۷$$

$$D = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۴ \\ -۱ & ۶ & ۱۷ \end{bmatrix}$$

شکل زیر را ببینید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۴ & ۴ \\ -۱ & ۶ & ۱۷ \end{bmatrix}$$

مثال ۳۰: در هر یک از موارد زیر ماتریس‌های خواسته شده را بدست آورید.

الف) $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$, $AB = ?$

MATH75.IR

ب) $C = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix}$, $CD = ?$

ج) $E = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$, $EF = ?$

د) $G = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$, $H = [۱ \quad ۰]$, $GH = ?$

ه) $K = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۴ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$, $KL = ?$

حل:

الف) $AB = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times ۰ + (-۱)\times ۲ & ۲\times ۱ + (-۱)\times ۴ \\ ۰\times ۰ + ۱\times ۲ & ۰\times ۱ + ۱\times ۴ \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix}$

ب) $CD = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱\times(-۱) + ۲\times ۲ & ۱\times ۰ + ۲\times ۱ & ۱\times ۱ + ۲\times(-۱) \\ ۳\times(-۱) + ۴\times ۲ & ۳\times ۰ + ۴\times ۱ & ۳\times ۱ + ۴\times(-۱) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۵ & ۴ & -۱ \end{bmatrix}$

ج) $EF = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۰ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳\times(-۱)+(-۱)\times(-۵) & ۳\times۴+(-۱)\times۲ \\ ۱\times(-۱)+۰\times(-۵) & ۱\times۴+۰\times۲ \\ ۲\times(-۱)+۲\times(-۵) & ۲\times۴+۲\times۲ \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ۲ & ۱۰ \\ -۱ & ۴ \\ -۱۲ & ۱۲ \end{bmatrix}$

د)

حاصل ضرب GH امکانپذیر نیست. زیرا تعداد ستون‌های G(۲) با تعداد سطرهای H(۱) برابر

MATH75.IR

نمی‌شود.

هـ) $KL = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۴ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} ۱\times(-۱)+۲\times۲+۳\times۴ & ۱\times۰+۲\times۰+۳\times(-۱) & ۱\times۱+۲\times۱+۳\times۲ \\ ۰\times(-۱)+(-۱)\times۲+۲\times۴ & ۰\times۰+(-۱)\times۰+۲\times(-۱) & ۰\times۱+(-۱)\times۱+۲\times۲ \\ ۳\times(-۱)+۲\times۲+۱\times۴ & ۳\times۰+۲\times۰+۱\times(-۱) & ۳\times۱+۲\times۱+۱\times۲ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱۵ & -۳ & ۹ \\ ۶ & -۲ & ۳ \\ ۵ & -۱ & ۷ \end{bmatrix}$$

مثال ۳۱: با فرض $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۵ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ ، $A^۳$ و $B^۲$ را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم $A^۳ = A \times A^۲$ ، داریم:

$$A^۲ = A \times A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۵ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۵ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴-۱۵ & ۶+۳ \\ -۱۰-۵ & -۱۵+۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۱ & ۹ \\ -۱۵ & -۱۴ \end{bmatrix}$$

$$A^۳ = A \times A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۵ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱۱ & ۹ \\ -۱۵ & -۱۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲۲-۴۵ & ۱۸-۴۲ \\ ۵۵-۱۵ & -۴۵-۱۴ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۶۷ & -۲۴ \\ ۴۰ & -۵۹ \end{bmatrix}$$

$$B^۲ = B \times B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۱+۰+۱ & ۰+۰+۲ & -۱+۰+۱ \\ -۲+۲-۱ & ۰+۱-۲ & ۲-۱-۱ \\ -۱+۴+۱ & ۰+۲+۲ & ۱-۲+۱ \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

$$= \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۰ \\ -۱ & -۱ & ۰ \\ ۴ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

مثال ۳۲: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ باشند AB و BA را محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰+۴ & ۱-۲ \\ ۰+۶ & -۱-۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۶ & -۴ \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰-۱ & ۰+۳ \\ ۲+۱ & ۴-۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌گردد $AB \neq BA$. این مثال نشان می‌دهد که ***ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابجایی ندارد.***

مثال ۳۳: اگر $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ ماتریس همانی مرتبهٔ ۲ باشد، $AI_۲$ و $I_۲A$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل:

$$AI_۲ = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$I_۲A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌گردد که $AI_۲ = I_۲A = A$. یعنی حاصلضرب یک ماتریس در ماتریس همانی (در صورت امکان) با خود ماتریس برابر است.

مثال ۳۴: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد $A \times \bar{O}_{۲\times۲}$ و $\bar{O}_{۲\times۲} \times A$ را بدست آورده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرد؟

حل:

$$A \times \bar{O}_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\bar{O}_{۲\times۲} \times A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

ملاحظه می‌گردد $A \times \bar{O}_{۲\times۲} = \bar{O}_{۲\times۲} \times A = \bar{O}_{۲\times۲}$. یعنی حاصلضرب هر ماتریس در ماتریس صفر (در صورت امکان) ماتریس صفر است.

مثال ۳۵: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ باشند. حاصل $A(B + C)$ و $AB + AC$ را بدست آورده و با هم مقایسه کنید.

حل:

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲\times۰+(-۱)\times۱ & ۲\times۲+(-۱)\times۲ & ۲\times۰+(-۱)\times۱ \\ ۳\times۰+۲\times۱ & ۳\times۲+۲\times۲ & ۳\times۰+۲\times۱ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۱ \\ -۲ & ۱ & -۳ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۳ & -۶ \\ ۹ & ۸ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & -۱ & ۵ \\ -۷ & ۲ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

این مثال نشان می‌دهد که $A(B + C) = AB + AC$.

بطور کلی اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ و $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ و $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ باشند، آنگاه:

$$A(B + C) = AB + AC$$

و حاصل هر دو طرف تساوی فوق ماتریسی $m \times p$ است. این خاصیت را خاصیت پخشی ضرب نسبت به جمع در ماتریس‌ها از سمت چپ گویند.

مثال ۳۶: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند، $(B + C) \times A$ و $BA + CA$ را بدست آورده و با هم مقایسه کنید.

حل:

$$(B + C) \times A = \left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} =$$

MATH75.IR

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۰ & -۵ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$BA + CA = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ & -۱ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۴ & ۰ & -۴ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ & ۰ & -۵ \\ ۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

این مثال نشان می‌دهد که $(B + C)A = BA + CA$.

بطور کلی اگر $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ و $C = [c_{ij}]_{n\times p}$ و $A = [a_{ij}]_{p\times m}$ باشند، آنگاه:

$$(B + C)A = BA + CA$$

و حاصل هر دو طرف تساوی فوق ماتریسی $n \times m$ است. این خاصیت را خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع از سمت راست گویند.

مثال ۳۷: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشند حاصل $A(BC)$ و $(AB)C$ را بدست آورده و با هم مقایسه کنید.

حل:

$$A(BC) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۶ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

این مثال نشان می‌دهد $A(BC) = (AB)C$. به طور کلی اگر $A = [a_{ij}]_{m\times n}$، $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ و $C = [c_{ij}]_{p\times q}$ باشند آنگاه:

$$A(BC) = AB)C$$

هر دو طرف تساوی بالا ماتریسی $m \times q$ بوده و این خاصیت را خاصیت شرکتپذیری عمل ضرب در ماتریس‌ها گویند.

مثال ۳۸: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، تمام ماتریس‌های ۲×۲ مانند B را بیابید که داشته باشیم $AB = BA$.

حل: فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد بطوریکه $AB = BA$. داریم:

MATH75.IR

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ ۲c & ۲d \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -a+۲b \\ c & -c+۲d \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \Rightarrow \begin{cases} a - c = a \Rightarrow \boxed{c = ۰} \\ ۲c = c \\ b - d = -a + ۲b \Rightarrow b = a - d \\ -c + ۲d = ۲d \Rightarrow \boxed{c = ۰} \end{cases}$$

این نشان می‌دهد که a و d باید اعداد دلخواهی باشند و $b = a - d$ و $c = ۰$ باشد. یعنی B به صورت زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} a & a-d \\ ۰ & d \end{bmatrix}$$

مثلاً یکی از این ماتریس‌ها $\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$ است.

مثال ۳۹: مقدار x را طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$[x \quad ۲ \quad ۱] \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۳/۵ \end{bmatrix} = ۰$$

حل:

$$[x \quad ۲ \quad ۱]_{۱\times۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}_{۳\times۳} = [x+۴ \quad ۲x+۱ \quad ۴]$$

$$[x+۴ \quad ۲x+۱ \quad ۴] \begin{bmatrix} x \\ ۲ \\ ۳/۵ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴x + ۲ + ۱۴ = ۰ \Rightarrow$$

$$x^۲ + ۸x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow (x+۴)^۲ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = -۴}$$

مثال ۴۰: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، نشان دهید تساوی زیر برقرار است.

$$A^۲ = ۲A + ۳I$$

MATH75.IR

حل:

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$۲A + ۳I = ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} + ۳\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۴ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

مثال ۴۱: اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ n باشند، حاصل $(A + B)^{۲}$ چیست؟

حل: در اینجا از پخشی ضرب نسبت به جمع در ماتریس‌ها استفاده می‌کنیم.

$$(A+B)^{۲} = (A + B)(A + B) = (A + B) . A + (A + B) . B = A^{۲} + BA + AB + B^{۲}$$

دقت کنید که در اینجا همان کار عادی پخش کردن را انجام داده‌ایم ولی ترتیب ضرب را هم حفظ کرده‌ایم.

$$(A + B)^{۲} = (A + B)(A + B) = A^{۲} + BA + AB + B^{۲}$$

در تساوی اخیر نمی‌توانیم به جای $AB + BA$، $۲AB$ یا $۲BA$ بنویسیم. چون در صورت مسأله ذکر نشده که A و B تعویضپذیرند.

اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبهٔ n و تعویضپذیر باشند آنگاه می‌توان نوشت:

$$(A + B)^{۲} = A^{۲} + ۲AB + B^{۲}$$

در حالت کلی می‌توان گفت اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و تعویضپذیر باشند آنگاه تمام اتحادهای جبری را در مورد آن دو ماتریس می‌توان بکار برد. در حالت خاص اگر A یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n و I_n ماتریس واحد هم مرتبه با A باشد چون $AI_n = I_nA$، در اینصورت:

$$(A + I)^{۲} = A^{۲} + ۲A + I$$

$$(A - I)^{۲} = A^{۲} - ۲A + I$$

$$(A + I)^{۳} = A^{۳} + ۳A^{۲} + ۳A + I$$

$$(A - I)^{۳} = A^{۳} - ۳A^{۲} + ۳A - I$$

$$A^{۳} + I^{۳} = A^{۳} + I = (A + I)(A^{۲} + I - A)$$

$$A^{۳} - I^{۳} = A^{۳} - I = (A - I)(A^{۲} + I + A)$$

$$A^{۲} - I^{۲} = A^{۲} - I = (A - I)(A + I)$$

مثال ۴۲: اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و تعویضپذیر باشند، ثابت کنید $A^{۲}$ نیز با B

MATH75.IR

تعویضپذیر است.

حل: طبق فرض $AB = BA$ است.

$$A^2B = (A \times A) \times B = A \times (AB) = A(BA) = (AB)A = (BA)A$$
$$= B(A \times A) = BA^2$$

این نشان می‌دهد که A^2 نیز با B تعویضپذیر است.

بطور کلی اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و تعویضپذیر بوده و m و n دو عدد طبیعی باشند آنگاه: $A^mB^n = B^nA^m$

یعنی در اینصورت هر توانی از A با هر توانی از B تعویضپذیر است.

مثال ۴۳: تمام ماتریس‌هایی بصورت $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ را بیابید که در تساوی $A^2 = A$ صدق کنند.

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & a+b \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = a \Rightarrow a(a-1) = 0 \\ a + b = 1 \\ b^2 = b \Rightarrow b(b-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \text{ یا } a = 1 \\ b = 0 \text{ یا } b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

پس ماتریس‌های بصورت $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ در شرط مسأله صدق می‌کنند.

ماتریس خود توان: ماتریس مربعی A را خود توان گویند هرگاه $A^2 = A$ باشد. در مثال بالا دیدیم که ماتریس‌های $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ خود توان می‌باشند.

اگر A یک ماتریس خود توان باشد آنگاه به ازاء هر عدد طبیعی مانند n داریم: $A^n = A$

مثال ۴۴: اگر A خود توان و I ماتریس همانی هم مرتبه با A باشد حاصل $(A + I)^3$ چیست؟

حل: چون A و I تعویضپذیرند می‌توان اتحاد مکعب مجموع را به کاربرد.

MATH75.IR

$$(A + I)^{۳} = A^{۳} + ۳A^{۲} + ۳A + I$$

چون A خود توان است، لذا $A^{۳} = A$ و $A^{۲} = A$. بنابراین:

$$(A + I)^{۳} = A + ۳A + ۳A + I = ۷A + I$$

اگر A خود توان و I ماتریس همانی هم مرتبه با A باشد ثابت می‌شود:

$$(n \in N) \quad (A + I)^{n} = (۲^{n} - ۱)A + I$$

مثال ۴۵: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشند، AB را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \bar{O}_{۲\times۲}$$

این مثال نشان می‌دهد که ممکن است حاصل ضرب دو ماتریس صفر شود، در حالیکه هیچ یک از آن دو ماتریس صفر نباشند.

می‌دانیم در مجموعهٔ اعداد حقیقی چنین نیست. یعنی اگر حاصلضربی صفر باشد باید حداقل یکی از دو عامل ضرب صفر باشند.

تعریف مقسوم علیه صفر

ماتریس $A \neq \bar{O}$ را یک مقسوم علیه صفر نامند در صورتیکه ماتریسی مانند $B \neq \bar{O}$ یافت شود بطوریکه $AB = \bar{O}$ یا $BA = \bar{O}$. در مثال فوق A و B دو مقسوم علیه صفراند.

مثال ۴۶: ماتریس ۳ × ۳، A را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۴ & -۱ \\ ۱۲ & -۸ & -۴ \\ ۹ & ۶ & ۳ \end{bmatrix}$$

حل:

با اختیار $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ داریم:

MATH75.IR

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ ۲d & ۲e & ۲f \\ ۳g & ۳h & ۳i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۲d & ۲e & ۲f \\ ۳g & ۳h & ۳i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳c & ۲b & a \\ ۶f & ۴e & ۲d \\ ۹i & ۶h & ۳g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۳c & ۲b & a \\ ۶f & ۴e & ۲d \\ ۹i & ۶h & ۳g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ & ۴ & -۱ \\ ۱۲ & -۸ & -۴ \\ ۹ & ۶ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$۳c = -۳ \Rightarrow \boxed{c = -۱} \ , \ ۲b = ۴ \Rightarrow \boxed{b = ۲} \ , \ \boxed{a = -۱}$$

$$۶f = ۱۲ \Rightarrow \boxed{f = ۲} \ , \ ۴e = -۸ \Rightarrow \boxed{e = -۲} \ , \ ۲d = -۴ \Rightarrow \boxed{d = -۲}$$

$$۹i = ۹ \Rightarrow \boxed{i = ۱} \ , \ ۶h = ۶ \Rightarrow \boxed{h = ۱} \ , \ ۳g = ۳ \Rightarrow \boxed{g = ۱}$$

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۱ \\ -۲ & -۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۴۷: یک کارخانه از سه نوع سوخت نفت، بنزین و گازوئیل استفاده می‌کند. این کارخانه در هفته ۴۸۰ لیتر نفت، ۱۰۰۰ لیتر بنزین و ۱۵۰۰ لیتر گازوئیل مصرف دارد. اگر نفت لیتری ۲۵۰ ریال، بنزین لیتری ۵۰۰ ریال و گازوئیل ۱۲۰ ریال باشد، هزینهٔ سوخت هفتگی این کارخانه چقدر است؟

حل: مقدار لیتر مصرفی هر نوع سوخت را بصورت یک ماتریس سطری و مبلغ هر لیتر را بصورت یک ماتری ستونی می‌نویسیم، و هر دوماتریس را در هم ضرب می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} \text{نفت} & \text{بنزین} & \text{گازوئیل} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} ۴۸۰ & ۱۰۰۰ & ۱۵۰۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲۵۰ \\ ۵۰۰ \\ ۱۲۰ \end{bmatrix} = ۴۸۰ \times ۲۵۰ + ۱۰۰۰ \times ۵۰۰ + ۱۵۰۰ \times ۱۲۰$$

$$= ۱۲۰۰۰۰ + ۵۰۰۰۰۰ + ۱۸۰۰۰۰ = ۸۰۰۰۰۰ \text{ ریال}$$

MATH75.IR

بخش سوم: تبدیل در صفحه

می‌دانیم هر نقطه در صفحهٔ دکارتی با یک مختصات بصورت $A\ (x\ ,\ y)$ یا $A \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ نشان داده می‌شود. حتی در سال سوم راهنمایی مختصات A را بصورت $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان می‌دادیم. اینک می‌دانیم این طرز نوشتن یک ماتریس ۱ × ۲ را نشان می‌دهد. پس می‌توان گفت هر نقطه در صفحه دکارتی بصورت یک ماتریس ۱ × ۲ است.

ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر این ماتریس را از سمت چپ در ماتریس $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ضرب کنیم چه روی می‌دهد؟

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که نقطهٔ دیگری از صفحهٔ دکارتی با مختصات $\begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$ پدید می‌آید.

این کار را اصطلاحاً یک تبدیل در صفحه می‌گوییم. طی این تبدیل نقطه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ به نقطهٔ $\begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$ تبدیل شده. ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ را ماتریس مبدّل یا مختصراً ماتریس این تبدیل می‌نامیم.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

آیا این طرز نوشتن، تابع را در ذهن شما یادآوری نمی‌کند؟

$$f(X) = Y$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

به جای f یک ماتریس ۲ × ۲ قرار گرفته.

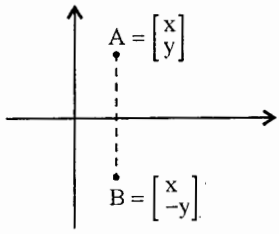
چند تبدیل خاص در صفحه اهمیت ویژه‌ای دارند که لازم است ماتریس‌های این نوع تبدیلات

MATH75.IR

را بدست آورده و به خاطر بسپاریم.

الف ـ ماتریس تقارن نسبت به محور طول‌ها

به دنبال ماتریسی هستیم که هر نقطه با مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به نقطهٔ $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ تبدیل کند.



فرض کنیم ماتریس این تبدیل $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = x \\ cx + dy = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a - ۱)x + by = ۰ \\ cx + (d + ۱)y = ۰ \end{cases}$$

چون هر دو معادلهٔ دستگاه باید به ازاء جمیع مقادیر x و y برقرار باشند بایدداشته باشیم:

$$\begin{cases} a - ۱ = ۰ \Rightarrow a = ۱ \\ b = ۰ \\ c = ۰ \\ d + ۱ = ۰ \Rightarrow d = -۱ \end{cases} \Rightarrow \text{ماتریس تبدیل} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۴۸: معادلهٔ قرینهٔ خط به معادلهٔ $۲x - ۳y + ۵ = ۰$ را نسبت به محور طول‌ها بدست آورید.

حل: می‌دانیم خط مجموعه‌ای از نقاط است. اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطهٔ دلخواهی از این خط باشد و قرینهٔ آن نسبت به محور طول‌ها $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ باشد داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

که از آنجا بدست می‌آید: $x = x'$ و $y = -y'$. اگر در معادلهٔ خط قرار دهیم خواهیم داشت:

$$۲x' - ۳(-y') + ۵ = ۰ \Rightarrow ۲x' + ۳y' + ۵ = ۰$$

که اینک کافی است x' را به x به y' را به y تبدیل کنیم تا معادله خط جدید بدست آید.

$$۲x + ۳y + ۵ = ۰$$

البته شاید این کار طولانی به نظر آید، چرا که با اطلاعاتی که در قسمت تابع و تقارن دیدیم، خیلی راحت‌تر می‌شد گفت که باید در معادلهٔ قدیم y را به $-y$ تبدیل کنیم تا معادلهٔ جدید بدست آید. اما می‌خواستیم از ماتریس نیز در این کار استفاده کرده باشیم.

ب ـ ماتریس تقارن نسبت به محور عرض‌ها

به طور مشابه با آنچه در بالا آمد ملاحظه خواهد شد که ماتریس این تبدیل $\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد.

مثال ۴۹: قرینه منحنی به معادلهٔ $y = \frac{۲x - ۱}{۳x + ۱}$ را نسبت به محور عرض‌ها تعیین کنید.

حل: در اینجا نیز با استفاده از ماتریس این کار را انجام می‌دهیم. اگر $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطه‌ای دلخواه از این منحنی و $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ تبدیل شدهٔ آن نسبت به محور عرض‌ها باشد داریم:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow -x = x' \ , \ y = y'$$

$$\Rightarrow x = -x' \ , \ y = y'$$

یعنی کافیست x را به $-x'$ و y را به y' تبدیل کنیم تا معادله منحنی جدید به‌دست آید.

$$y' = \frac{-۲x' - ۱}{-۳x' + ۱}$$

اینک که کار انجام شده، کافیست x' را به x و y' را به y تبدیل کنیم. پس معادلهٔ منحنی جدید عبارتست از:

$$y = \frac{-۲x - ۱}{-۳x + ۱}$$

MATH75.IR

ج ـ ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات:

ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ هر نقطه از صفحهٔ دکارتی را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کند.

(چرا؟)

مثال ۵۰: قرینهٔ منحنی به معادلهٔ $x^2 + y^2 - 3x + y - 1 = 0$ را نسبت به مبدأ مختصات بدست آورید.

حل: کافیست در این معادله x را به x− و y را به y− تبدیل کنیم. معادلهٔ منحنی جدید بصورت زیر در می‌آید.

$$x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$$

د ـ ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم

ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ هر نقطه از صفحه را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌کند.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

به عبارتی برای یافتن معادله قرینه یک منحنی نسبت به نیمساز ربع اول و سوم کافیست x را به y و y را به x تبدیل کنیم تا معادلهٔ منحنی جدید بدست آید.

مثال ۵۱: قرینه منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x-1}{x}$ را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم بدست آورید.

حل: با تبدیل $x \longrightarrow y$ و $y \longrightarrow x$ داریم:

$$x = \frac{y-1}{y} \Rightarrow xy = y - 1 \Rightarrow y(x-1) = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{1-x}$$

هـ ـ ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم

ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم بصورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ است. (چرا؟)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$$

به عبارتی برای یافتن معادلهٔ قرینهٔ یک منحنی نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم کافیست x را به y− و y را به x− تبدیل کنیم تا معادلهٔ منحنی جدید بدست آید.

MATH75.IR

مثال ۵۲: قرینهٔ نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} ۲x - ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم نقطهٔ $B = \begin{bmatrix} y - ۵ \\ x + ۱ \end{bmatrix}$ است. مقادیر x و y را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} -(۲x - ۱) = x + ۱ \Rightarrow x = ۰ \\ -۳ = y - ۵ \Rightarrow y = ۲ \end{cases}$$

مثال ۵۳: اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و n یک عدد طبیعی باشد در مورد A^n، B^n، C^n، D^n و E^n چه می‌توان گفت؟ نتیجه را بیان کنید.

حل:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = I_۲$$

$$A^۳ = A^۲ . A = A . I_۲ = A$$

$$A^n = \begin{cases} I_۲ & \text{اگر n زوج باشد} \\ A & \text{اگر n فرد باشد} \end{cases}$$

به طریق مشابه در مورد B، C، D و E نیز می‌توان به این نتیجه رسید.

$$B^n = \begin{cases} I_۲ & \text{اگر n زوج باشد} \\ B & \text{اگر n فرد باشد} \end{cases} \qquad C^n = \begin{cases} I_۲ & \text{اگر n زوج باشد} \\ C & \text{اگر n فرد باشد} \end{cases}$$

$$D^n = \begin{cases} I_۲ & \text{اگر n زوج باشد} \\ D & \text{اگر n فرد باشد} \end{cases} \qquad E^n = \begin{cases} I_۲ & \text{اگر n زوج باشد} \\ E & \text{اگر n فرد باشد} \end{cases}$$

دقت کنید، اتفاقی که افتاده از قبل قابل پیش‌بینی بوده. مثلاً در مورد ماتریس A:

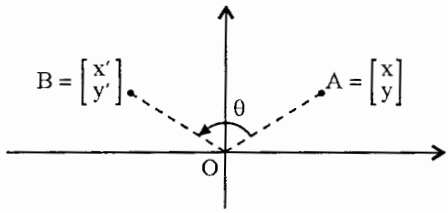
$$\begin{tikzcd} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "A^۲"'] & \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \arrow[r, "A"] & \begin{bmatrix} x \\ -(-y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{tikzcd}$$

MATH75.IR

یعنی وقتی یک نقطه را به تعداد زوج بار نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم نقطه در جای اول خود باقی می‌ماند و A^2 یا A^4 یا .... به عنوان ماتریس همانی روی نقطه عمل می‌کنند.
ولی وقتی یک نقطه را به تعداد فرد نسبت به محور طول‌ها قرینه می‌کنیم مانند این است که یک بار آن نقطه را نسبت به جایی که مورد نظر بوده قرینه کنیم. این حرف در مورد B، C، D و E نیز صادق است.

و ـ ماتریس دوران حول مبدأ تحت زاویهٔ θ

فرض کنیم $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطهٔ دلخواهی از صفحهٔ دکارتی باشد و بخواهیم این نقطه را حول مبدأ مختصات به اندازهٔ θ (درجه یا رادیان) در جهت مثلثاتی (عکس جهت حرکت عقربه‌های ساعت) دوران دهیم.



اگر ماتریس این تبدیل را به R_θ نشان دهیم، ثابت می‌شود که:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{R_\theta} B = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

مثال ۵۴: نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$ را حول مبدأ مختصات و در جهت مثلثاتی به اندازهٔ °۳۰ دوران داده‌ایم. مختصات نقطهٔ جدید چیست؟

حل: اگر B نقطهٔ جدید باشد:

MATH75.IR

$$\theta = ۳۰^\circ \Rightarrow R_{۳۰^\circ} = \begin{bmatrix} \cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ \\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} - ۲ \\ \frac{۳}{۲} + ۲\sqrt{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳\sqrt{۳} - ۴}{۲} \\ \frac{۳ + ۴\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

مثال ۵۵: سهمی به معادلهٔ $y = x^۲$ را حول مبدأ مختصات و به اندازهٔ ۹۰° در جهت مثلثاتی دوران داده‌ایم. معادلهٔ منحنی حاصل چیست؟

حل:

$$\theta = ۹۰^\circ \Rightarrow R_{۹۰^\circ} = \begin{bmatrix} \cos ۹۰^\circ & -\sin ۹۰^\circ \\ \sin ۹۰^\circ & \cos ۹۰^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

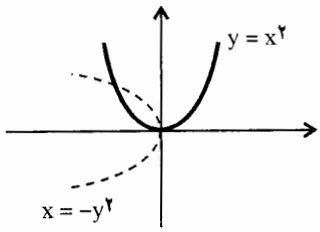
فرض کنیم $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نقطهٔ دلخواهی از این سهمی باشد و $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ تبدیل یافتهٔ این نقطه. داریم:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = y' \end{cases}$$

پس در معادلهٔ قدیم کافی است x را به y' و y را به $-x'$ تبدیل کنیم. خواهیم داشت:

$$-x' = y'^۲ \Rightarrow x' = -y'^۲$$

اینک که کار تبدیل پایان یافته x' را به x و y' را به y تبدیل می‌کنیم. لذا معادلهٔ منحنی جدید عبارت خواهد بود از: $x = -y^۲$



مثال ۵۶: نقطهٔ $A = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ را:

الف ـ ابتدا به اندازهٔ ۳۰° حول مبدأ و در جهت مثلثاتی دوران دهید تا به نقطهٔ B برسید. سپس نقطهٔ B را به اندازهٔ ۶۰° حول مبدأ و در جهت مثلثاتی دوران دهید تا به نقطه C برسید. مختصات نقطهٔ C چیست؟

MATH75.IR

ب ـ به اندازهٔ °۹۰ حول مبدأ و در جهت مثلثاتی دوران دهیدتا به نقطهٔ D برسید.

ج ـ نقاط C و D را مقایسه کنید چه نتیجه‌ای می‌گیرید.

حل: الف ـ

$$B = R_{۳۰^\circ} \times \begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{۳} - \frac{۵}{۲} \\ -۱ + \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$C = R_{۶۰^\circ} \times \begin{bmatrix} -\sqrt{۳} - \frac{۵}{۲} \\ -۱ + \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sqrt{۳} - \frac{۵}{۲} \\ -۱ + \frac{۵\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

ب ـ

$$D = R_{۹۰^\circ} \times \begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

ج ـ C و D یک نقطه را مشخص می‌کنند. این نشان می‌دهد که اگر نقطه‌ای را دو بار متوالی یک بار به اندازهٔ °۳۰ و بار دیگر به اندازهٔ °۶۰ در جهت مثلثاتی دوران دهیم مانند این است که آن نقطه را به یک باره به اندازهٔ °۹۰ حول مبدأ و در جهت مثلثاتی دروان دهیم.

به طور کلی اگر به نقطه‌ای ابتدا به اندازهٔ α و متعاقب آن به اندازهٔ β درجه در جهت مثلثاتی دوران دهیم، مانند این است که نقطه را به یک باره به اندازهٔ $\alpha + \beta$ درجه و در جهت مثلثاتی دروان داده باشیم، یعنی:

$$R_\beta \cdot R_\alpha = R_{(\alpha+\beta)}$$

مثال ۵۷: اگر α و β اندازهٔ زوایایی برحسب درجه باشند $\sin(\alpha + \beta)$ و $\cos(\alpha + \beta)$ را بدست آورید.

حل: این مثال از آنجا با اهمیت است که یک فرمول مثلثاتی را با استفاده از روش‌های ماتریسی محاسبه می‌کند. بنابر آنچه در بالا گفته شد:

$$R_{(\alpha+\beta)} = R_\beta \cdot R_\alpha \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha & -\cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha) \\ \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

مثال ۵۸: با استفاده از فرمول‌های بدست آمده نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ °۷۵ را بیابید.

حل:

$$۷۵° = ۳۰° + ۴۵°$$

$$\cos(۷۵°) = \cos(۳۰° + ۴۵°) = \cos۳۰°\cos۴۵° - \sin۳۰° . \sin۴۵° =$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} - \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\sin(۷۵°) = \sin(۳۰° + ۴۵°) = \sin۳۰°\cos۴۵° + \cos۳۰° . \sin۴۵° =$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

مثال ۵۹: اگر α و β اندازهٔ دو زاویه برحسب درجه باشندنشان دهید.

$$R_\alpha . R_\beta = R_\beta . R_\alpha$$

حل:

$$R_\alpha . R_\beta = R_{(\beta+\alpha)} = R_{(\alpha+\beta)} = R_\beta . R_\alpha$$

دقت کنید اگر نقطه‌ای را ابتدا به اندازهٔ $\beta°$ و متعاقب آن به اندازهٔ $\alpha°$ حول مبدأ دوران دهیم این کار با اینکه آن نقطه را از ابتدا به اندازهٔ $\alpha°$ و متعاقب آن به اندازهٔ $\beta°$ حول مبدأ دوران دهیم فرقی ندارد و هر دو دورانی به اندازهٔ $\alpha° + \beta°$ به آن نقطه می‌دهند. بطور کلی اگر $\alpha_۱ , \alpha_۲ , ... , \alpha_n$ اندازهٔ n زاویه برحسب درجه باشند. داریم:

$$\mathbf{R}_{\alpha_۱} \mathbf{R}_{\alpha_۲} ... \mathbf{R}_{\alpha_n} = \mathbf{R}_{\alpha_n} \mathbf{R}_{\alpha_{n-۱}} ... \mathbf{R}_{\alpha_۲} \mathbf{R}_{\alpha_۱} = \mathbf{R}_{(\alpha_۱ + \alpha_۲ + ... + \alpha_n)}$$

و در حالت خاص اگر θ اندازهٔ یک زاویه برحسب درجه و n یک عدد طبیعی باشد داریم:

$$(\mathbf{R}_\theta)^n = \mathbf{R}_{n\theta}$$

مثال ۶۰: اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$، حاصل $A^{۱۳۸۲}$ چیست؟

MATH75.IR

حل: می‌دانیم $A = R_{۳۰^\circ}$. بنابر نکتهٔ فوق:

$$A^{۱۳۸۲} = (R_{۳۰^\circ})^{۱۳۸۲} = R_{(۱۳۸۲\times ۳۰^\circ)} = R_{۴۱۴۶۰}$$

پس کافیست ماتریس دوران به ازاء ۴۱۴۶۰° رابیابیم. می‌دانیم:

$$۴۱۴۶۰ = ۱۱۵ \times ۳۶۰^\circ + ۶۰$$

یعنی زاویه مورد نظر مضربی از دوران‌های کامل را در برگرفته که به اندازهٔ ۶۰° از آن بیشتر است. پس انتهای کمان مقابل به زاویهٔ ۴۱۴۶۰° دقیقاً در جایی قرار گرفته که انتهای کمان مقابل به زاویهٔ ۶۰° واقع است. پس:

$$A^{۱۳۸۲} = R_{۴۱۴۶۰^\circ} = R_{۶۰^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

بخش چهارم: دستگاه‌های دو معادله و دو مجهول خطی درجه اوّل

یک دستگاه شامل دو معادله و دو مجهول خطی در حالت کلی چنین است:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

که در آن a، b، c، a′، b′ و c′ اعداد حقیقی‌اند. برای حل این دستگاه و یافتن مقادیر x و y از کارهای متداول در تساوی‌ها می‌توانیم استفاده کنیم.

۱) ضرب طرفین تساوی در یک عدد

$$x = y \Rightarrow kx = ky$$

۲) تقسیم طرفین تساوی بر عددی غیرصفر:

$$x = y \ , \ k \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{k} = \frac{y}{k}$$

۳) افزودن یک عدد ثابت به طرفین تساوی:

$$x = y \Rightarrow x + k = y + k$$

۴) کاستن یک عدد ثابت از طرفین تساوی:

$$x = y \Rightarrow x - k = y - k$$

۵) جمع طرفین دو تساوی:

$$\begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases} \Rightarrow x + z = y + t$$

۶) تفریق طرفین دو تساوی:

$$\begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases} \Rightarrow x - z = y - t$$

روش حذفی برای حل دستگاه

قبل از بیان این روش یادآوری می‌کنیم که در مورد معادلهٔ $mx = n$

الف) شرط لازم و کافی برای اینکه این معادله جواب منحصر بفرد داشته باشد آنستکه $m \neq 0$ باشد.

ب) شرط لازم و کافی برای آنکه این معادله جواب نداشته باشد (ممتنع یا نشدنی) آنستکه $m = 0$ و $n \neq 0$ باشد.

MATH75.IR

ج) شرط لازم و کافی برای آنکه این معادله بیشمار جواب داشته باشد (مبهم) آن است که $m = n = ۰$ باشد.

با این مقدمه و با کارهای مجازی که در مورد تساوی‌ها گفته شد داریم:

$$\begin{cases} ax + by = c \xrightarrow{\times b'} \\ a'x + b'y = c \xrightarrow{\times(-b)} \end{cases} \quad \begin{cases} ab'x + bb'y = cb' \\ -ba'x - bb'y = -bc' \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}}$$

$$(ab' - ba')x = cb' - bc' \qquad (۱)$$

$$\begin{cases} ax + by = c \xrightarrow{\times(-a')} \\ a'x + b'y = c' \xrightarrow{\times a} \end{cases} \quad \begin{cases} -aa'x - ba'y = -ca' \\ aa'x + ab'y = ac' \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}}$$

$$(ab' - ba')y = ac' - ca' \qquad (۲)$$

شرط لازم و کافی برای اینکه معادله‌های (۱) و (۲) جواب منحصر بفرد داشته باشند آنستکه $ab' - ba' \neq ۰$ باشد. تحت این شرایط داریم:

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad , \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

این طرز حل کردن دستگاه به روش حذفی معروف است. دقت کنید که در فرآیند حل این دستگاه یک شرط لازم و کافی برای وجود یک جواب منحصر بفرد برای دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ بدست آمده و آن اینستکه $ab' - ba' \neq ۰$ باشد که در آینده بیشتر در مورد آن صحبت خواهیم کرد.

مثال ۶۱: دستگاه $\begin{cases} ۲x - ۳y = ۱ \\ ۵x + y = ۲ \end{cases}$ را به روش حذفی حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} ۲x - ۳y = ۱ \\ ۵x + y = ۱۱ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} ۲x - ۳y = ۱ \\ ۱۵x + ۳y = ۳۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} ۱۷x = ۳۴ \Rightarrow \boxed{x = ۲}$$

اگر مقدار x را در معادلهٔ اول دستگاه قرار دهیم داریم:

$$۲ \times ۲ - ۳y = ۱ \Rightarrow -۳y = -۳ \Rightarrow \boxed{y = ۱}$$

مثال ۶۲: به ازاء چه مقادیری از m دستگاه $\begin{cases} ۳mx - ۲y = ۱ \\ (m + ۱)x + y = -۲ \end{cases}$ جواب منحصر بفرد دارد؟

MATH75.IR

حل: طبق شرط بدست آمده در بالا باید داشته باشیم:

$$(۳m)(۱) - (-۲)(m + ۱) \neq ۰ \Rightarrow ۳m + ۲m + ۲ \neq ۰ \Rightarrow m \neq \frac{-۲}{۵}$$

یعنی به ازاء هر عدد حقیقی مانند $m \neq \frac{-۲}{۵}$ این دستگاه جواب منحصر بفرد خواهد داشت.

مثال ۶۳: شرط اینکه دو خط به معادله‌های $D : (m + ۲)x + (m - ۲)y = ۱$ و $D' : (۵ + m)x + (m - ۱)y = ۲$ متقاطع باشند چیست؟

حل: می‌دانیم تعبیر هندسی حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول درجهٔ اول، یافتن نقطهٔ برخورد دو خط با معادلات داده شده در صورت امکان است.

پس در اینجا می‌خواهیم شرایطی را فراهم کنیم که دستگاه جواب منحصر بفرد داشته باشد. لذا باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} (m + ۲)x + (m - ۲)y = ۱ \\ (۵ + m)x + (m - ۱)y = ۲ \end{cases}$$

$$(m + ۲)(m - ۱) - (m - ۲)(۵ + m) \neq ۰ \Rightarrow -۲m + ۸ \neq ۰ \Rightarrow m \neq ۴$$

روش کرامر برای حل دستگاه

در ادامه روش حذفی برای یافتن جواب‌های دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ با شرط $ab' - ba' \neq ۰$ جواب‌های دستگاه بصورت زیر آشکار گشت.

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \quad , \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - bc'}$$

اگر مستقیماً مقادیر x و y را از این دو فرمول بیابیم گوییم جواب‌ها را از روش کرامر یافته‌ایم.

مثال ۶۴: جواب دستگاه $\begin{cases} ۲x - ۳y = ۹ \\ ۳x + ۵y = ۴ \end{cases}$ را از روش کرامر بدست آورید.

حل: در این دستگاه $a = ۲$، $b = -۳$، $c = ۹$، $a' = ۳$، $b' = ۵$ و $c' = ۴$ می‌باشند.

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = \frac{۹ \times ۵ - (-۳)(۴)}{۲ \times ۵ - (-۳) \times ۳} = \frac{۴۵ + ۱۲}{۱۰ + ۹} = \frac{۵۷}{۱۹} = ۳$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = \frac{۲ \times ۴ - ۹ \times ۳}{۱۹} = \frac{۸ - ۲۷}{۱۹} = \frac{-۱۹}{۱۹} = -۱$$

MATH75.IR

تعریف دترمینان

اگر A یک ماتریس ۲ × ۲ بصورت $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد عدد حقیقی $ad - bc$ را با نماد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ یا $|A|$ یا $\det(A)$ نشان داده و به آن دترمینان ماتریس A گفته می‌شود.

مثال ۶۵: در هر یک از موارد زیر دترمینان ماتریس‌های داده شده را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & m \\ n & ۰ \end{bmatrix} \qquad \bar{O} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل:

$$|A| = ۱ \times ۴ - ۲ \times ۳ = -۲ \qquad |B| = ۱ \times ۱ - ۰ \times (-۱) = ۱$$

$$|C| = ab - ۰ = ab \qquad |D| = ۰ \times ۰ - m \times n = -mn$$

$$|\bar{O}| = ۰ \times ۰ - ۰ \times ۰ = ۰ \qquad |I| = ۱ \times ۱ - ۰ \times ۰ = ۱$$

مثال ۶۶: مقدار m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ - ۲m & ۳m + ۱ \\ ۲ & -۵ \end{vmatrix} = -۱۹$$

حل:

$$-۵(۱ - ۲m) - ۲(۳m + ۱) = -۱۹ \Rightarrow ۴m - ۷ = -۱۹ \Rightarrow \boxed{m = -۳}$$

دترمینان به عنوان تابع

از تعریف دترمینان برای ماتریس‌های ۲ × ۲ ملاحظه می‌گردد که اگر $M_{۲\times۲}$ مجموعهٔ ماتریس‌های ۲×۲ با درایه‌های حقیقی باشد، یعنی:

$$M_{۲\times۲} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

آنگاه دترمینان تابعی است از $M_{۲\times۲}$ به $\mathbf{R}$ بصورت زیر:

$$|\ | : M_{۲\times۲} \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{۲\times۲} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

MATH75.IR

صورت دترمینانی برای روش کرامر

دیدیم که اگر $ab' - ba' \neq 0$ باشد تنها جواب دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ از روش کرامر بصورت $x = \dfrac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$ و $y = \dfrac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$ قابل محاسبه است. صورت و مخرج این کسرها را می‌توان بصورت دترمینان بیان کرد. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

تعریف ماتریس وارون‌پذیر

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و ماتریسی مانند $B_{۲\times۲}$ یافت شود بطوریکه $AB = I_۲$. در این حالت گوییم A وارون‌پذیر است و B را وارون A گفته با نماد $A^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۶۷: نشان دهید $B = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ وارون $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ است.

حل: کافیست نشان دهیم $AB = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ \frac{۳}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ + ۳ & ۱ - ۱ \\ -۶ + ۶ & ۳ - ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال ۶۸: ماتریس $A_{۲\times۲}$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$A \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = I_۲$$

حل: فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a - b & -۲a \\ c - d & -۲c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

MATH75.IR

$$\begin{cases} -۲a = ۰ & \Rightarrow a = ۰ \\ a - b = ۱ & \Rightarrow b = -۱ \\ -۲c = ۱ & \Rightarrow c = -\frac{۱}{۲} \\ c - d = ۰ & \Rightarrow d = -\frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

مثال ۶۹: با فرض $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و اینکه $|A| = ad - bc \neq ۰$ باشد، نشان دهید A وارون‌پذیر است و وارون آن را محاسبه کنید.

حل: فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ چنان باشد که $AB = I$. در اینصورت خواهیم داشت:

$$I = AB \Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ax + bz = ۱ & (۱) \\ cx + dz = ۰ & (۲) \\ ay + bt = ۰ & (۳) \\ cy + dt = ۱ & (۴) \end{cases}$$

از حل معادلات (۱) و (۲) در یک دستگاه جداگانه بدست می‌آید: (با فرض $ad - bc \neq ۰$)

$$x = \frac{d}{ad - bc} \quad , \quad z = \frac{-c}{ad - bc}$$

و از حل معادلات (۳) و (۴) در یک دستگاه خواهیم داشت:

$$y = \frac{-b}{ad - bc} \quad , \quad t = \frac{a}{ad - bc}$$

پس ماتریس B عبارتست از:

$$A^{-۱} = B = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} = \frac{۱}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

پس بطور خلاصه:

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ , \ ad - bc \neq ۰ \ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}}$$

صورت مثال قبل را می‌توان به عنوان یک شرط لازم و کافی بیان کرد. یعنی:

MATH75.IR

شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد آنستکه $|A| \neq ۰$ باشد و در این حالت وارون ماتریس A از دستور زیر بدست می‌آید.

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

یعنی برای یافتن $A^{-۱}$ (در صورت وجود) کافیست در ماتریس A جای درایه‌های قطر اصلی را عوض کنیم و درایه‌های قطر فرعی را قرینه کنیم و حاصل را در معکوس عدد دترمینان ضرب کنیم.

مثال ۷۵: در هر یک از موارد زیر ابتدا تحقیق کنید که آیا ماتریس داده شده وارون‌پذیر است؟ در صورت موجود بودن وارون، ماتریس وارون را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & ۴ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -۳ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

حل:

$|A| = ۱۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow$ A وارون پذیر نیست

$$|B| = -۱۲ \Rightarrow B^{-۱} = \frac{۱}{-۱۲} \begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۳} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} \end{bmatrix}$$

$$|C| = ۶ \Rightarrow C^{-۱} = \frac{۱}{۶} \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۲} & ۰ \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

$$|D| = ۳ \Rightarrow D^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -\frac{۲}{۳} \\ ۰ & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}$$

$$|E| = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱ \Rightarrow E^{-۱} = \frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}$$

$$|F| = -۱ \Rightarrow F^{-۱} = \frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|R_\theta| = \cos^۲\theta + \sin^۲\theta = ۱ \Rightarrow R_\theta^{-۱} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

دقت کنید که بعضی از ماتریس‌ها مانند F وارون‌شان با خودشان برابر است یعنی: $F^۲ = I$.
همچنین به ازاء هر θ، R_θ وارون‌پذیر است و $R_\theta^{-۱} = R_{-\theta}$. یعنی برای یافتن وارون R_θ کافیست در ماتریس این تبدیل θ را به $-\theta$ تبدیل کنیم.

مثال ۷۱: مقدار m را چنان تعیین کنید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+۱ & m-۴ \\ m+۵ & m-۱ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

حل:

$$|A| = (m+۱)(m-۱) - (m-۴)(m+۵) = m^۲ - ۱ - m^۲ - m + ۲۰$$
$$= -m + ۱۹$$

$$|A| = ۰ \Rightarrow -m + ۱۹ = ۰ \Rightarrow \boxed{m = ۱۹}$$

مثال ۷۲: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد وارون A' را بیابید.

حل:

$$A' = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad |A'| = ۲ \times ۰ - ۳ \times (-۱) = ۳$$

$$(A')^{-۱} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

مثال ۷۳: اگر داشته باشیم $D = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$ تحت چه شرایطی D وارون‌پذیر است؟ با شرط وارون‌پذیری D، $D^{-۱}$ را بیابید.

MATH75.IR

حل: می‌دانیم: $|D| = ab$

برای اینکه D وارون‌پذیر باشد لازم و کافی است که $ab \neq ۰$ باشد. یعنی هیچیک از a یا b صفر نباشند. در این شرایط:

$$D^{-۱} = \frac{۱}{ab}\begin{bmatrix} b & ۰ \\ ۰ & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{a} & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{b} \end{bmatrix}$$

مثال ۷۴: با فرض $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ، اولاً: $A^{-۱}$ را بدست آورید.

ثانیاً: $(A^{-۱})^۲$ را محاسبه کنید.

ثالثاً: $(A^۲)^{-۱}$ را محاسبه کنید.

رابعاً: چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل: اولاً:

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۶ - (-۱) = ۷$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۷} & -\frac{۱}{۷} \\ \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} \end{bmatrix}$$

ثانیاً:

$$(A^{-۱})^۲ = \begin{bmatrix} \frac{۳}{۷} & -\frac{۱}{۷} \\ \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۳}{۷} & -\frac{۱}{۷} \\ \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۸}{۴۹} & -\frac{۵}{۴۹} \\ \frac{۵}{۴۹} & \frac{۳}{۴۹} \end{bmatrix}$$

ثالثاً:

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ -۵ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$|A^۲| = ۲۴ + ۲۵ = ۴۹$$

$$(A^۲)^{-۱} = \frac{۱}{۴۹}\begin{bmatrix} ۸ & -۵ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۸}{۴۹} & -\frac{۵}{۴۹} \\ \frac{۵}{۴۹} & \frac{۳}{۴۹} \end{bmatrix}$$

رابعاً: نتیجه این است که $(A^۲)^{-۱} = (A^{-۱})^۲$

MATH75.IR

در حالت کلی اگر A ماتریس وارون‌پذیر باشد آنگاه به ازاء هر عدد طبیعی مانند n ، A^n نیز وارون‌پذیر است و داریم: $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

فرم ماتریسی یک دستگاه و حل دستگاه به کمک ماتریس وارون

باز هم دستگاه دو معادله و دو مجهولی خطی درجه اول (۱) $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ را در نظر بگیرید. برای این دستگاه سه ماتریس زیر را تعریف می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

A را ماتریس ضرایب دستگاه، X را ماتریس مجهولات دستگاه و B را ماتریس جواب دستگاه می‌نامند. به راحتی می‌توان دید که تساوی زیر بین این سه ماتریس برقرار است.

$$AX = B \qquad (۲)$$

تساوی (۲) را فرم ماتریسی دستگاه (۱) گویند. دقت کنید که در این معادله ما به دنبال یافتن X می‌باشیم. برای این منظور شرط لازم و کافی برای موجود بودن جواب برای (۲) آنستکه A وارون‌پذیر باشد. (یعنی $|A| \neq ۰$). با فرض $|A| = ab' - ba' \neq ۰$ طرفین تساوی (۲) را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم. با استفاده از خاصیت شرکتپذیری ضرب و خاصیت وارون یک ماتریس داریم:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$I_۲X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad (۳)$$

تساوی (۳) نشان می‌دهد که برای یافتن مقادیر مجهول دستگاه (۱) باید وارون ماتریس A را از سمت چپ در ماتریس جواب دستگاه ضرب کنیم.

مثال ۷۵: دستگاه مقابل را به روش ماتریس وارون حل کنید.

$$\begin{cases} ۵x - ۲y = ۷ \\ -۳x + ۴y = -۷ \end{cases}$$

حل: ماتریس‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} ۷ \\ -۷ \end{bmatrix}$$

MATH75.IR

شرط اینکه دستگاه جواب داشته باشد آنستکه A وارون‌پذیر باشد.

$$|A| = \begin{vmatrix} ۵ & -۲ \\ -۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۲۰ - ۶ = ۱۴ \neq ۰ \Rightarrow$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$$

و از آنجا:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X = A^{-۱}B = \frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۷ \\ -۷ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۴}\begin{bmatrix} ۱۴ \\ -۱۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب‌های دستگاه عبارتند از:

$$\boxed{y = -۱} \quad , \quad \boxed{x = ۱}$$

مثال ۷۶: اگر داشته باشیم: $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ ، ماتریس A چیست؟

حل: اولاً: دقت کنید که A حتماً یک ماتریس ۲ × ۲ است. (چرا؟)

ثانیاً: برای یافتن A کافیست وارون ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ را در صورت امکان یافته و طرفین تساوی داده شده را از سمت چپ در وارون این ماتریس ضرب کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{vmatrix} = ۶ - ۵ = ۱$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} = \frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ -۵ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۱۲ \\ -۸ & -۱۹ \end{bmatrix}$$

مثال ۷۷: با فرض $X = \begin{bmatrix} ۲x - ۱ \\ ۳ - x \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ ، مقادیر x را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $X'AX = ۲۸$.

حل:

$$[۲x - ۱ \quad ۳ - x]\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲x - ۱ \\ ۳ - x \end{bmatrix} = ۲۸ \Rightarrow$$

MATH75.IR

$$[۲x - ۱ + ۹ - ۳x \quad ۴x - ۲ + ۱۲ - ۴x]\begin{bmatrix} ۲x - ۱ \\ ۳ - x \end{bmatrix} = ۲۸ \Rightarrow$$

$$[-x + ۸ \quad ۱۰]\begin{bmatrix} ۲x - ۱ \\ ۳ - x \end{bmatrix} = ۲۸ \Rightarrow (-x + ۸)(۲x - ۱) + ۱۰(۳ - x) = ۲۸$$

$$\Rightarrow -۲x^۲ + ۷x - ۶ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۷ \pm \sqrt{۴۹ - ۴۸}}{-۴} = \frac{-۷ \pm ۱}{-۴}$$

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{۳}{۲}, \; x_۲ = ۲$$

دستگاه همگن

دستگاهی که در آن $B = \bar{O}$ باشد دستگاه همگن نام دارد. یک دستگاه همگن دو معادله و دو مجهول خطی بصورت مقابل است.

$$\begin{cases} ax + by = ۰ \\ a'x + b'y = ۰ \end{cases}$$

مشاهده می‌گردد که اگر قرار دهیم $x = y = ۰$ دستگاه برقرار است. $x = y = ۰$ ***را جواب بدیهی*** دستگاه گویند. هدف از حل یک دستگاه همگن بصورت فوق یافتن جواب‌های غیرصفر (در صورت امکان) برای آن است. این دستگاه را اگر بصورت حذفی حل کنیم در فرآیند حل بدست می‌آید:

$$\begin{cases} (ab' - ba')x = ۰ & (۱) \\ (ab' - ba')y = ۰ & (۲) \end{cases}$$

در تساوی‌های فوق اگر $ab' - ba' = ۰$ (دترمینان ضرائب دستگاه) در اینصورت x و y هر مقداری (اعم از صفر یا غیر صفر) می‌توانند داشته باشند. زیرا در این حالت هر دو معادلهٔ (۱) و (۲) مبهم شده و بیشمار جواب دارند. ولی اگر $ab' - ba' \neq ۰$ باشد تنها جواب دستگاه همان جواب بدیهی $x = y = ۰$ خواهد بود.

بنابراین می‌توان گفت شرط اینکه یک دستگاه همگن مانند فوق دارای جواب غیر صفر (غیر بدیهی) باشد آنستکه دترمینان ضرائب آن صفر باشد. که در این حالت دستگاه بیشمار جواب دارد. و اگر دترمینان ضرائب آن غیرصفر باشد این دستگاه جواب منحصر بفرد (یکتا) دارد که عبارتست از $x = y = ۰$.

مثال ۷۸: مقدار m را چنان تعیین کنید که دستگاه زیر جواب غیرصفر داشته باشد.

MATH75.IR

$$\begin{cases} (m-۱)x + my = ۰ \\ ۳x - ۵y = ۰ \end{cases}$$

حل: چون دستگاه همگن است برای داشتن جواب غیرصفر باید داشته باشیم:

$|A| = \begin{vmatrix} m-۱ & m \\ ۳ & -۵ \end{vmatrix} = ۰$. که از حل آن خواهیم داشت $m = \frac{۵}{۸}$.

مثال ۷۹: چه رابطه‌ای بین a و b برقرار باشد تا دستگاه زیر جواب غیرصفر داشته باشد.

$$\begin{cases} ax + by = ۰ \\ bx + ay = ۰ \end{cases}$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = ۰ \Rightarrow a^۲ - b^۲ = ۰ \Rightarrow a = \pm b$$

مثال ۸۰: در جواب‌های دستگاه‌های زیر برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

الف) $\begin{cases} (m+۱)x + (۲m-۱)y = ۵ \\ ۳x - y = ۱ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} mx + ۲y = ۱ \\ (m-۱)x + y = -۲ \end{cases}$

حل: الف)

$$A = \begin{bmatrix} m+۱ & ۲m-۱ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -m - ۱ - ۶m + ۳ = -۷m + ۲$$

۱) اگر $-۷m + ۲ = ۰$ یعنی $m = \frac{۲}{۷}$ باشد دستگاه جواب ندارد.

۲) اگر $-۷m + ۲ \neq ۰$ یعنی $m \neq \frac{۲}{۷}$ باشد دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

ب)

$$A = \begin{bmatrix} m & ۲ \\ m-۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = m - ۲m + ۲ = -m + ۲$$

۱) اگر $-m + ۲ = ۰$ یعنی $m = ۲$ باشد، دستگاه جواب ندارد.

۲) اگر $-m + ۲ \neq ۰$ یعنی $m \neq ۲$ باشد، دستگاه جواب منحصر بفرد دارد.

شرط مبهم بودن دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

برای آنکه دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ دارای بیشمار جواب (مبهم) باشد باید داشته باشیم:

MATH75.IR

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

از نظر هندسی این شرط باعث می‌شود که دو خط موجود در دستگاه بر هم منطبق باشند.

مثال ۸۱: مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که دستگاه زیر بیشمار جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} (a - ۱)x + ۳y = ۳ \\ ۳x - (۲b + ۱)y = ۱ \end{cases}$$

حل: باید داشته باشیم:

$$\frac{a - ۱}{۳} = \frac{۳}{-۲b - ۱} = \frac{۳}{۱} \Rightarrow \begin{cases} a - ۱ = ۹ \\ -۲b - ۱ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = ۱۰} \ , \boxed{b = -۱}$$

دترمینان ماتریس‌های ۳ × ۳

در سال‌های آتی خواهید دید که دترمینان تابعی است که از مجموعهٔ ماتریس‌های $n \times n$ (یعنی $M_{n\times n}$) به $\mathbf{R}$ تعریف می‌شود. قضایای مختلفی برای آن وجود دارد و روش‌های گوناگونی برای محاسبهٔ آن. در این قسمت به چگونگی محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳ × ۳ (بدون اثبات) می‌پردازیم. اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ دترمینان A را با نماد $|A|$ نشان می‌دهیم و مقدار آن بصورت زیر است:

$$|A| = |aei + bfg + cdh) - (ceg + bdi + afh)$$

برای آنکه بتوانید چگونگی این فرایند را به خاطر بسپارید به شکل زیر دقت کنید.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

ابتدا سه عبارت aei، bfg و cdh را یافته با هم جمع می‌کنیم. سپس مقدار سه عبارت ceg، bdi و afh را یافته و با هم جمع می‌کنیم. در آخر مقدار بدست آمده از قسمت اول را منهای مقدار بدست آمده از قسمت دوم می‌کنیم. اینگونه تعبیر برای یافتن دترمینان ماتریس ۳ × ۳ به روش ساروس معروف است.

MATH75.IR

مثال ۸۲: اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۰ & ۲ \\ ۵ & ۱ & -۳ \end{bmatrix}$ ، مطلوبست $|A|$.

حل:

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} ۱ & ۲ & -۱ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۲ & ۳ & ۰ \\ ۵ & ۱ & -۳ & ۵ & ۱ \end{array}\right. \quad \begin{array}{cc} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ \\ -۳ & -۱ \end{array}$$

$$= (۰ + ۲۰ - ۳) - (۰ - ۱۸ + ۲) = ۱۷ - (-۱۶) = ۳۳$$

مثال ۸۳: در هر یک از موارد زیر دترمینان ماتریس‌های داده شده را مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۰ \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۳ \\ ۰ & ۴ & ۰ \end{bmatrix}$$

حل:

$$|A| = (۴۵ + ۸۴ + ۹۶) - (۱۰۵ + ۷۲ + ۴۸) = ۲۲۵ - ۲۲۵ = ۰$$

MATH75.IR

$$|B| = ۶ \ , \quad |C| = ۰ - ۶ = -۶ \ , \quad |D| = \frac{۱}{۲} - (-\frac{۱}{۲}) = ۱$$

$$|E| = ۰ \ , \quad |F| = ۱ \ , \quad |G| = ۰ \ , \quad |H| = ۰ \ , \quad |J| = ۰$$

بطور کلی اگر A یک ماتریس مربعی باشد دترمینان آن قابل تعریف است و می‌توان نکات زیر را در مورد آن به خاطر سپرد.

۱) اگر A ماتریس قطری باشد دترمینان آن با حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی آن برابر است.

۲) دترمینان ماتریس صفر برابر صفر است.

۳) اگر یک سطر یا یک ستون A صفر باشد دترمینان A صفر است.

مثلاً:

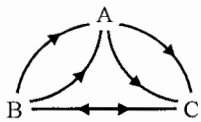
$$\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{vmatrix} = -۱۰ \qquad \begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & ۵ & ۴ \end{vmatrix} = ۰ \qquad \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۷ \\ ۲ & ۰ & ۸ \\ -۵ & ۰ & ۹ \end{vmatrix} = ۰$$

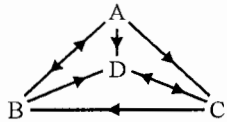
MATH75.IR

تمرین‌های فصل سوم

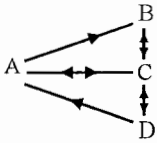
۱ـ ماتریس هر یک از شبکه‌های مستقیم زیر را تشکیل دهید.



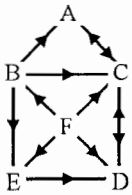
الف)



ب)



ج)



د)

۲ـ برای هر یک از ماتریس‌های زیر یک شبکه مستقیم رسم کنید.

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۳ـ مقادیر x، y و z را طوری بیابید که ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۲x - y & x + z \\ y - x & x + y + z \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y - z - ۹ & y - ۶ \\ ۲z + ۹ & x - ۱ \end{bmatrix}$ برابر باشند.

۴ـ مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} \frac{x - ۳}{۲} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{y + ۲}{۳} \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر باشد.

۵ـ در ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲x + ۱ & x & ۲x \\ y & ۳y - ۱ & -x \\ y - ۵ & -y & x + y \end{bmatrix}$ حاصلجمع درایه‌های قطر فرعی ۱۶ و

MATH75.IR

همچنین $a_{۱۱} + a_{۳۳} = ۱$ است. ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۶ـ ماتریس‌های زیر را با درایه‌هایشان مشخص کنید.

$$A = [a_{ij}]_{۳\times۲} \quad , \quad a_{ij} = i + j^{۲}$$

$$B = [b_{ij}]_{۴\times۳} \quad , \quad b_{ij} = \sqrt{i} + \sqrt{j}$$

$$C = [c_{ij}]_{۳\times۳} \quad , \quad c_{ij} = |i - j|$$

$$D = [d_{ij}]_{۲\times۳} \quad , \quad d_{ij} = (i + ۱)(j + ۲)$$

$$E = [e_{ij}]_{۳\times۳} \quad , \quad e_{ij} = \begin{cases} -۳ & i > j \\ ۰ & i = j \\ ۲ & i < j \end{cases}$$

$$F = [f_{ij}]_{۳\times۴} \quad , \quad f_{ij} = \begin{cases} ۳ & i > j \\ ۵ & i < j \\ ۱ & i = j \end{cases}$$

$$K = [k_{ij}]_{۳\times۳} \quad , \quad k_{ij} = \begin{cases} i + j & i < j \\ ۲i + j & i = j \\ i - j & i > j \end{cases}$$

$$T = [t_{ij}]_{۲\times۳} \quad , \quad t_{ij} = \begin{cases} i^{j} & i = j \\ j^{i} & i \neq j \end{cases}$$

۷ـ ماتریس $(n + ۱) \times (n + ۱)$ ای را در نظر بگیرید که تمام درایه‌های آن یک باشند و آن را A بنامید.

اولاً: حاصلجمع همهٔ درایه‌های A چقدر است؟

ثانیاً: حاصلجمع درایه‌های قطر اصلی A چیست؟

ثالثاً: حاصل جمع تمام درایه‌های واقع در بالای قطر اصلی A چقدر است؟

۸ـ اگر داشته باشیم $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ ، ماتریس‌های -A ، ۲A ، $\sqrt{۲}A$ و $\frac{۱}{۳}A$ را تشکیل دهید.

MATH75.IR

۹ـ مجموعه‌های $A = \{۱ , ۲ , ۳\}$ و $B = \{۱ , ۲\}$ را در نظر بگیرید. برد تابع

$$f : A \times B \longrightarrow N$$

$$f(a , b) = a^۲ + b^۲ - ab$$

را بصورت یک ماتریس نشان دهید.

۱۰ـ با فرض $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و اینکه $A' = [a'_{ij}]$ ترانهادهٔ A می‌باشد، حاصل عبارت زیر چیست؟

$$(a'^۲_{۲۱} - a_{۲۳})(a'^۲_{۳۱} + a_{۱۲})$$

۱۱ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & x - ۱ & ۲ - y \\ y & ۲ & ۵ \\ ۳x - ۵ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ متقارن باشد ماتریس $B = \begin{bmatrix} x & ۰ & x \\ y & y & ۰ \\ x & ۰ & y \end{bmatrix}$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۱۲ـ A یک ماتریس پادمتقارن مرتبهٔ ۳ است بطوریکه به ازاء هر i و j با شرط $i < j$ داریم:

$$a_{ij} = (-۱)^i \times \frac{i + j}{۲}$$

ماتریس A را با درایه‌هایش مشخص کنید.

۱۳ـ A یک ماتریس پادمتقارن مرتبهٔ ۳ با درایه‌های صحیح است بطوریکه در دو شرط زیر صدق می‌کند:

۱) حاصل ضرب همهٔ درایه‌های غیر قطر اصلی آن ۴− است.

۲) حاصلجمع درایه‌های ستون سوم آن ۳ است.

A را مشخص کنید.

۱۴ـ با فرض $M = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۰ \end{bmatrix}$، $Q = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix}$ و $P = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$، عدد حقیقی k را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $P + ۲Q + kM = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$.

۱۵ـ مقدار x را از تساوی‌های زیر تعیین کنید.

الف) $[x \quad -۱] \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰$

MATH75.IR

ب) $[3 \quad x]\begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -3$

۱۶ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ m & 1 \end{bmatrix}$ و $A^2 = \begin{bmatrix} n & p \\ -8 & q \end{bmatrix}$ باشد، مقدار m چیست؟

۱۷ـ مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & y \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2x & x+y \\ x+y & -2xy \end{bmatrix}$$

۱۸ـ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ مفروض است. مقادیر x و y را طوری بیابید که داشته باشیم:

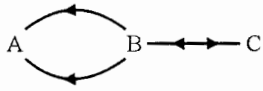
$xA^2 + yA = I$

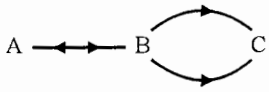
۱۹ـ ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مفروض است. مقادیر α و β را طوری بیابید که داشته باشیم:

$A^3 = \alpha A + \beta I$

۲۰ـ با فرض $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$، حاصل $A^2 - 4A - 5I$ را بیابید.

۲۱ـ اگر T ماتریس شبکه مستقیم (الف) و S ماتریس شبکه مستقیم (ب) باشند حاصل $S'TS$ را بیابید.

الف)


ب)


۲۲ـ مجموعهٔ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \; a, b, c \in Z \right\}$ مفروض است. نشان دهید S نسبت به عمل ضرب ماتریس‌ها بسته است.

۲۳ـ ماتریس‌های مربعی و هم مرتبه A و B مفروض‌اند بطوریکه $AB = A$ و $BA = B$. ثابت کنید: $A^3 = A$ و $B^3 = B$.

۲۴ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ باشند،

MATH75.IR

مطلوبست محاسبهٔ (الف) $A^3 + 3ABC$ و (ب) $A^2 + 2BCA$

۲۵- $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3\times 2}$ را با درایه‌هایشان چنین تعریف کرده‌ایم:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ 2i - j & i \geq j \end{cases} \qquad b_{ij} = \begin{cases} 0 & i + j = 2k \\ i + j & i + j = 2k + 1 \end{cases}$$

AB را مشخص کنید.

۲۶- فرم کلی ماتریس 2×2 مانند A را بیابید که برای آنها داشته باشیم:

$$AA' = \bar{O}$$

۲۷- با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$، ماتریس‌های $\frac{1}{2}(A + A')$ و $\frac{1}{2}(A - A')$ را تشکیل دهید. این دو ماتریس چگونه‌اند؟ آیا درست است بنویسیم:

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ نتیجه حاصل را بیان کنید.

۲۸- اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند بطوریکه $A^2 = A$ و $B = I - A$، ثابت کنید.

الف) $B^2 = B$ ب) $AB = BA = \bar{O}$

۲۹- با فرض $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ماتریس $C_{2\times 2}$ را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$AB = BC$$

۳۰- اگر $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشند حاصل $A^2 + 2AB + B^2$ را بدست آورید.

۳۱- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$، $B = [-3 \quad 1]$ و $C = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس D چنان است که $(A \times D) \times B = C$. اولاً: ماتریس D دارای چه مرتبه‌ای است؟ ثانیاً: D را با تمام درایه‌هایش مشخص کنید.

۳۲- ماتریس مربعی A را خود توان گویند هرگاه $A^2 = A$.

اگر A و B دو ماتریس خود توان هم مرتبه و تعویضپذیر باشند ثابت کنید $A + B - AB$ نیز خود

MATH75.IR

توان است.

۳۳ـ اگر A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند بطوریکه $AB = A$ و $BA = B$، ثابت کنید A و B خود توان هستند.

۳۴ـ اگر $A^2 = I$ باشد نشان دهید $\frac{1}{2}(A + I)$ و $\frac{1}{2}(I - A)$ خود توان هستند.

۳۵ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$، نشان دهید:

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2$$

۳۶ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}$ $(k \in \mathbf{R})$، برای یافتن A^n $(n \in \mathbf{N})$ فرمولی ارائه دهید.

۳۷ـ فرض کنید A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه و تعویضپذیر باشند. ثابت کنید A^2 و B^3 نیز تعویضپذیرند. (یعنی: $A^2B^3 = B^3A^2$)

۳۸ـ A و B دو ماتریس 2×2 می‌باشند که حاصل جمع درایه‌های واقع در ستون‌های هر یک از آنها یک است. نشان دهید حاصل جمع درایه‌های واقع در ستون‌های AB نیز برابر یک است.

۳۹ـ مطلوبست تعیین ماتریس‌های بصورت $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ که در معادلهٔ $A^3 + A = \bar{O}$ صدق کنند.

۴۰ـ ماتریس مربعی A چنان است که $A^2 = \bar{O}$. نشان دهید: $A(I + A)^2 = A$.

۴۱ـ مثالی از یک ماتریس مربعی غیر صفر مانند A ارائه دهید که داشته باشیم $A^2 = \bar{O}$.

۴۲ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ باشد حاصل $(3A)^2$ را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴۳ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ باشند، به جای ۱، I_3 قرار داده و $f(A)$ را محاسبه کنید.

۴۴ـ a، b، c و d در چه شرایطی صدق کنند تا ضرب دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ تعویضپذیر باشد.

۴۵ـ ماتریس‌های $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -5 & 6 & 5 \\ -15 & 14 & 5 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند. ماتریس A را

MATH75.IR

طوری تعیین کنید که داشته باشیم: $C = AB$

۴۶ـ A و B دو ماتریس مربعی هم مرتبه‌اند و عمل $*$ بصورت زیر تعریف شده است:

$$A * B = AB - BA$$

اولاً: نشان دهید: $A * A = \bar{O}$

ثانیاً: ثابت کنید برای ماتریس مربعی C که با A و B هم مرتبه باشد داریم:

$$(A * B) * C + (B * C) * A + (C * A) * B = \bar{O}$$

۴۷ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های واقع بر قطر اصلی $A^۲$ چیست؟

۴۸ـ تبدیل یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $(x - ۱)^۲ + y^۲ = ۴$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ چیست؟

۴۹ـ تبدیل یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $\frac{x + ۱}{۲} = y^۲$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ چیست؟

۵۰ـ تبدیل یافتهٔ خط به معادلهٔ $۲x + ۳y = ۱$ تحت ماتریس $\begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ چیست؟

۵۱ـ با استفاده از ماتریس تبدیل، قرینه نقطه $\begin{vmatrix} -۳ \\ ۲ \end{vmatrix}$ A را نسبت به هر یک از محورها و نیمسازها و مبداء مختصات بدست آورید.

۵۲ـ ماتریس هر یک از تبدیل‌های زیر را بدست آورید.

الف) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} ۲x \\ x - y \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x + ۲y \\ y - ۲x \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} x - y \\ ۲x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y - ۲x \\ y \end{bmatrix}$

هـ) $\begin{bmatrix} ۲x + ۳y \\ ۳x - ۲y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix}$

و) $\begin{bmatrix} x \\ ۰ \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -۲x \\ x \end{bmatrix}$

۵۳ـ حاصلضرب زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}^{۱۰} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{۲}}{۲} & -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \\ \frac{\sqrt{۲}}{۲} & \frac{\sqrt{۲}}{۲} \end{bmatrix}^{۶}$$

MATH75.IR

۵۴ـ اگر M_1 تبدیل یافتهٔ $\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \end{vmatrix}$ M تحت ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و M_2 تبدیل یافتهٔ M_1 تحت ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، مختصات M_2 چیست؟

۵۵ـ پاره خط AB را که در آن $A(۱, -۳)$ و $B(-۲, ۲)$ می‌باشند، تحت ماتریس $M = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ تبدیل کرده‌ایم. اگر A' تبدیل یافتهٔ A و B' تبدیل یافتهٔ B باشند، معادلهٔ خط گذرنده از A' و B' را بنویسید.

۵۶ـ اگر $A = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ باشد، $A^{۴۷۲}$ را بدست آورید.

۵۷ـ اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{\sqrt{۲}} & -\frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} & \frac{۱}{\sqrt{۲}} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، $A^۲$ و $A^{۱۳۸۱}$ را تعیین کنید.

۵۸ـ قرینهٔ مثلث ABC با ماتریس رئوس $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۵ & ۴ & ۲ \\ ۲ & ۵ & ۳ \end{bmatrix} \end{array}$ را نسبت به خط $x + y = ۰$ تعیین کنید.

۵۹ـ نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵° را بدست آورید.

۶۰ـ دستگاه (الف) را به روش حذفی و دستگاه (ب) را به روش کرامر حل کنید.

(الف) $\begin{cases} ۲(x - ۳y) + y = -۱۹ \\ ۳y - ۲x = ۱۳ \end{cases}$ (ب) $\begin{cases} \frac{x}{۵} - ۲y = -۵ \\ ۳y - ۲x = ۱۶ \end{cases}$

۶۱ـ به ازاء چه مقادیری از m و n دستگاه مقابل بیشمار جواب دارد؟

$$\begin{cases} mx + ۳y = -۳ \\ ۲x - ny - ۵ = ۰ \end{cases}$$

۶۲ـ وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$

MATH75.IR

$$C = \begin{bmatrix} \sqrt{۲} & -۱ \\ ۲ & \sqrt{۳} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۳ \\ \frac{۲}{۳} & ۱\frac{۱}{۵} \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ -۶ & -۳ \end{bmatrix}$$

۶۳ـ اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} m-۱ & n-۲ \\ m+۱ & n+۱ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد، چه رابطه‌ای بین m و n برقرار است؟

۶۴ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، وارون AA' را بیابید.

۶۵ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $(A - A')^۲$ را بدست آورید.

۶۶ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد حاصل $[(A^۲)']^{-۱}$ چیست؟

۶۷ـ اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ باشد وارون ماتریس $(A - A^{-۱})^۲$ چیست؟

۶۸ـ مقدار m چقدر باشد تا دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} m & ۰ \\ ۱ & \frac{۱}{m} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} m & ۰ \\ -۱ & \frac{۱}{m} \end{bmatrix}$ وارون یکدیگر باشند؟

۶۹ـ اگر داشته باشیم $A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix}$، A را بیابید.

۷۰ـ ماتریس X را از تساوی زیر بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۷۱ـ مقادیر x، y، z و t را از تساوی زیر بیابید.

$$\begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۹ \\ -۴ & ۶ \end{bmatrix}$$

۷۲ـ به ازاء چه مقدار m دستگاه زیر جواب ندارد.

$$\begin{cases} ۴x + my + ۲ = ۰ \\ (m-۱)x + ۲my = ۲ \end{cases}$$

۷۳ـ در هر یک از موارد زیر ماتریس A را مشخص کنید.

الف) $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & -۵ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix}$

MATH75.IR

ب) $\begin{bmatrix} -۱ & ۵ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۰ & -۱۴ \\ -۲۱ & ۷ \end{bmatrix}$

ج) $A\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ -۳ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۲ & ۷ \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} -۲ & ۳ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

هـ) $A\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix}$

و) $A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۴ \end{bmatrix} = \bar{O}$

ز) $A\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۵ \end{bmatrix} = I$

۷۴ـ اگر A یک ماتریس مربعی باشد و I ماتریس همانی هم مرتبه با A که داشته باشیم:

$$A^۳ - ۵A^۲ + ۷I = \bar{O}$$

نشان دهید A وارون‌پذیر است و سپس وارون A را برحسب A تعیین کنید.

۷۵ـ اگر $A = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ \\ -۴ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$AX = \begin{bmatrix} -۱۲ & ۰ \\ ۰ & -۶ \end{bmatrix}$$

۷۶ـ در وجود و جواب دستگاه‌های زیر برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

الف) $\begin{cases} mx - (۳ - m)y + ۲ = ۰ \\ ۵y - ۲x - ۲ = ۰ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} ۲x + my - ۴ = ۰ \\ x + y = m \end{cases}$

۷۷ـ اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، نشان دهید:

$$A^۲ - (A + d)A - (ad - bc)I_۲ = \bar{O}_{۲\times۲}$$

۷۸ـ با اختیار ماتریس‌های ۲ × ۲ مانند A و B نشان دهید:

$$|AB| = |A||B|$$

و از آنجا نتیجه بگیرید $|A^۲| = |A|^۲$ و $|B^۳| = |B|^۳$.

MATH75.IR

۷۹ـ دستگاه‌های زیر را به روش ماتریس وارون حل کنید.

الف) $\begin{cases} ۲x + ۳y = ۱ \\ x + ۲y - ۵ = ۰ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} ۳x - y - ۵ = ۰ \\ ۲y + x + ۲ = ۰ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} ۲۹(x - ۳) + ۳(y - ۲) = ۱ \\ ۵(x + y - ۱) - ۲y = ۰ \end{cases}$

د) $\begin{cases} ۲x - y = -۳ \\ ۳x + ۲y = -۸ \end{cases}$

۸۰ـ وجود جواب برای دستگاه‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\begin{cases} ۲x + ۳y - z = ۲۰ \\ x - y + ۴z = ۱ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} ۲x + y = ۱۶ \\ ۳x - ۲y = ۳ \\ ۲x + ۴y = ۲۰ \end{cases}$

۸۱ـ ماتریس A را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۷ & ۵ \end{bmatrix}\left(A - \begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۵ & ۷ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

۸۲ـ ماتریس‌های ۲ × ۲ . A و B را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\begin{cases} A\left(B + \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱۵ & -۵ \\ ۲۰ & -۱۵ \end{bmatrix} \\ A\left(B - \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۳ & ۴ \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ۱۲ & -۸ \\ ۱۸ & -۱۷ \end{bmatrix} \end{cases}$$

۸۳ـ دستگاه $\begin{cases} x - y = nz \\ mx + ۲y = z \\ ۲x + ۲y = mz \end{cases}$ جواب غیر صفر دارد. برای m چند جواب وجود دارد؟

۸۴ـ چه رابطه‌ای بین a، b و c برقرار باشد تا دستگاه زیر جواب غیر صفر داشته باشد؟

$$\begin{cases} ax + by + cz = ۰ \\ bx + cy + az = ۰ \\ cx + ay + bz = ۰ \end{cases}$$

MATH75.IR

۸۵ـ اگر a_1، a_2 و a_3 سه عدد طبیعی باشند بطوریکه :

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = 6$$

مقادیر a_1، a_2 و a_3 را بیابید.

۸۶ـ به ازاء چه مقدار از m دستگاه همگن زیر علاوه بر جواب صفر، جواب‌های دیگر نیز دارد؟

$$\begin{cases} (m-2)x + (m-1)y = 0 \\ mx + (2m-3)y = 0 \end{cases}$$

۸۷ـ خط D به معادلهٔ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ مفروض است. شیب خط D چقدر است؟

۸۸ـ ماتریس مربع A پوچ توان نامیده می‌شود در صورتیکه به ازای عددی طبیعی مانند n داشته باشیم $A^n = \bar{O}$. کوچکترین عدد طبیعی واجد این خاصیت را اندیس A (یا مرتبهٔ پوچی A) گویند. نشان دهید ماتریس زیر پوچ توان با اندیس ۳ است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

۸۹ـ ثابت کنید هر ماتریس به صورت زیر یک ماتریس پوچ توان است. $(ac \neq 0)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

۹۰ـ اگر $A = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ -36 & -30 \end{bmatrix}$ ماتریس A^{100} را بدست آورید.

MATH75.IR

فصل چهارم

تابع جزء صحیح

به ازای هر عدد حقیقی x، عددی صحیح مانند n و عددی حقیقی مانند p ($۰ \le p < ۱$) وجود دارد به طوریکه $x = n + p$.

در این صورت عدد صحیح n را جزء صحیح x می‌نامیم و آنرا با نماد $[x]$ یا $E(x)$ نشان می‌دهیم.

مثلاً اگر $x = ۲/۱۹$ باشد.

$$x = ۲ + ۰/۱۹ \Rightarrow [۲/۱۹] = ۲$$

و یا اگر $x = -۳/۷$ باشد.

$$x = -۴ + ۰/۳ \Rightarrow [-۳/۷] = -۴$$

بنابراین جزء صحیح یک عدد بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن عدد است.

در تعریف فوق عدد p را جزء کسری عدد x می‌نامیم و آنرا با نماد $\{x\}$ نشان می‌دهیم.

$$\{x\} = p = x - [x] \qquad \{۲/۱۹\} = ۰/۱۹ \qquad \{-۳/۷\} = ۰/۳$$

مثال ۱: جزء صحیح اعداد زیر را بدست آورید.

$$۱۳/۷ \ , \ -۹/۲ \ , \ \sqrt{۲} \ , \ ۰/۸ \ , \ -\sqrt{۳} \ , \ ۱ - \sqrt{۵} \ , \ -۷$$

حل:

$$۱۳/۷ = ۱۳ + ۰/۷ \Rightarrow [۱۳/۷] = ۱۳$$

$$-۹/۲ = -۱۰ + ۰/۸ \Rightarrow [-۹/۲] = -۱۰$$

$$\sqrt{۲} \approx ۱/۴ = ۱ + ۰/۴ \Rightarrow [۱/۴] = ۱$$

MATH75.IR

$$۰/۸ = ۰ + ۰/۸ \Rightarrow [۰/۸] = ۰$$

$$-\sqrt{۳} \approx -۱/۷ = -۲ + ۰/۳ \Rightarrow [-\sqrt{۳}] = -۲$$

$$۱ - \sqrt{۵} \approx ۱ - ۲/۲ = -۱/۲ = -۲ + ۰/۸ \Rightarrow [۱ - \sqrt{۵}] = -۲$$

$$-۷ = -۷ + ۰ \Rightarrow [-۷] = -۷$$

خواص جزء صحیح

$$۱)\ x - ۱ < [x] \leq x$$

$$۲)\ [x] \leq x < [x] + ۱$$

$$۳)\ x \geq n \Leftrightarrow [x] \geq n$$

$$۴)\ ۰ \leq x - [x] < ۱$$

مثال ۲: ثابت کنید $[x] + [-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$.

اثبات:

$$\begin{cases} x - ۱ < [x] \leq x \\ -x - ۱ < [-x] \leq -x \end{cases} \Rightarrow -۲ < [x] + [-x] \leq ۰$$

بنابراین $[x] + [-x]$ یا صفر است یا -۱.

$$x \in Z \Rightarrow [x] + [-x] = x + (-x) = ۰$$

$$x \notin Z \Rightarrow [x] + [-x] = -۱$$

نتیجه:

$$x \in Z \Rightarrow [-x] = -[x]$$

$$x \notin Z \Rightarrow [-x] = -[x] - ۱$$

قضیه: اگر x عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد ثابت کنید:

$$[x + n] = [x] + n$$

اثبات: فرض می‌کنیم $[x] = k$ $(k \in Z)$ در این صورت $k \leq x < k + ۱$.

$$(k + n) \leq x + n < (k + n) + ۱ \Rightarrow [x + n] = k + n = [x] + n$$

قضیه: اگر x عددی حقیقی و n عددی طبیعی باشد ثابت کنید:

$$\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{[x]}{n}\right]$$

MATH75.IR

اثبات: فرض می‌کنیم $\left[\frac{x}{n}\right] = k$ بنابراین $k \le \frac{x}{n} < k + ۱$. طرفین این نامساوی را در عدد طبیعی n ضرب می‌کنیم خواهیم داشت.

$$nk \le x < n(k + ۱) \Rightarrow nk \le [x] < n(k + ۱)$$

$$\Rightarrow k \le \frac{[x]}{n} < k + ۱ \Rightarrow \left[\frac{[x]}{n}\right] = k = \left[\frac{x}{n}\right]$$

مثال ۳: ثابت کنید $[۲x] = [x] + \left[x + \frac{۱}{۲}\right]$.

حل: فرض می‌کنیم $x = n + p$ و $۰ \le p < ۱$ و $n = [x]$.

$$\left[x + \frac{۱}{۲}\right] = \left[n + p + \frac{۱}{۲}\right] = n + \left[p + \frac{۱}{۲}\right]$$

$$[۲x] = [۲n + ۲p] = ۲n + [۲p]$$

بنابراین باید ثابت کنیم.

$$[۲p] = p + \frac{۱}{۲} \text{ یا } ۲n + [۲p] = n + n + \left[p + \frac{۱}{۲}\right]$$

اگر $۰ \le p < \frac{۱}{۲}$ آنگاه $[۲p] = ۰$ و $\left[p + \frac{۱}{۲}\right] = ۰$ و اگر $\frac{۱}{۲} \le p < ۱$ آنگاه $[۲p] = ۱$ و $\left[p + \frac{۱}{۲}\right] = ۱$

که در هر دو صورت تساوی برقرار است.

نکته: رابطهٔ فوق در حالت کلی نیز برقرار و به صورت زیر است.

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{۱}{n}\right] + \left[x + \frac{۲}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n - ۱}{n}\right]$$

مثال ۴: ثابت کنید $\left[x - \frac{۱}{۲}\right] = \left[x + \frac{۱}{۲}\right] - ۱$.

حل:

$$\left[x - \frac{۱}{۲}\right] = \left[x - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\right] = \left[x + \frac{۱}{۲} - ۱\right] = \left[x + \frac{۱}{۲}\right] - ۱$$

معادلات جزء صحیح

مثال ۵: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[۲x + ۱] = -۳$

ب) $۵[x] + ۱۰ = ۰$

ج) $۷[x] - ۳ = ۲[x] + ۵$

د) $[x]^۲ - ۳[x] + ۲ = ۰$

حل:

الف) $[۲x + ۱] = -۳ \Rightarrow -۳ \le ۲x + ۱ < -۲ \Rightarrow -۴ \le ۲x < -۳ \Rightarrow -۲ \le x < -\frac{۳}{۲}$

MATH75.IR

ب) $۵[x] = -۱۰ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow -۲ \le x < -۱$

ج) $۷[x] - ۲[x] = ۵ + ۳ \Rightarrow ۵[x] = ۸$

با توجه به اینکه ۸ بر ۵ بخشپذیر نیست پس معادله جواب ندارد.

د) $[x]^۲ - ۳[x] + ۲ = ۰$

$$[x] = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۸}}{۲} \Rightarrow [x] = \frac{۳ \pm ۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} [x] = ۱ \\ [x] = ۲ \end{cases}$$

$$\begin{matrix} [x] = ۱ \Rightarrow ۱ \le x < ۲ \\ [x] = ۲ \Rightarrow ۲ \le x < ۳ \end{matrix} \Rightarrow ۱ \le x < ۳$$

مثال ۶: معادلهٔ $\left[\frac{۲ - ۲x}{x + ۲}\right] = -۲$ را حل کنید.

حل:

$$-۲ \le \frac{۲ - ۲x}{x + ۲} < -۱$$

$$\begin{cases} \frac{۲ - ۲x}{x + ۲} < -۱ \Rightarrow \frac{۲ - ۲x}{x + ۲} + ۱ < ۰ \Rightarrow \frac{۲ - ۲x + x + ۲}{x + ۲} < ۰ \Rightarrow \frac{۴ - x}{x + ۲} < ۰ \\ \frac{۲ - ۲x}{x + ۲} \ge -۲ \Rightarrow \frac{۲ - ۲x}{x + ۲} + ۲ \ge ۰ \Rightarrow \frac{۲ - ۲x + ۲x + ۴}{x + ۲} \ge ۰ \Rightarrow \frac{۶}{x + ۲} \ge ۰ \end{cases}$$

$۴ - x = ۰ \Rightarrow x = ۴ \qquad x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲$

x	$-\infty$		-۲		۴		$+\infty$
$۴ - x$		+		+	۰	−	
$x + ۲$		−	۰	+		+	
$\frac{۴ - x}{x + ۲}$		−	ن	+	۰	−	
$\frac{۶}{x + ۲}$		−	ن	+		+	
نتیجه						جواب	

$A = \{x | x \in R \ , x > ۴\}$

مثال ۷: معادلهٔ $\left[x + \frac{۱}{۲}\right] + [x]^۲ = [۲x + ۲]$ را حل کنید.

حل: *روش اول:* فرض می‌کنیم $n \le x < n + ۱$ بنابراین $[x] = n$

$x = n + p \qquad ۰ \le p < ۱$

MATH75.IR

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+[x]^۲=[۲x]+۲$$

$$\left[n+p+\frac{۱}{۲}\right]+[n+p]^۲=[۲n+۲p]+۲$$

$$n+\left[p+\frac{۱}{۲}\right]+(n+[p])^۲=۲n+[۲p]+۲$$

یکبار فرض می‌کنیم $۰\le p<\frac{۱}{۲}$ در این صورت:

$$[p]=۰$$

$$\frac{۱}{۲}\le p+\frac{۱}{۲}<۱ \Rightarrow \left[p+\frac{۱}{۲}\right]=۰$$

$$۰\le ۲p<۱ \Rightarrow [۲p]=۰$$

$$n+۰+(n+۰)^۲=۲n+۰+۲ \Rightarrow n+n^۲=۲n+۲$$

$$n^۲-n-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=-۱ \Rightarrow -۱\le x<۲۰ \\ n=۲ \Rightarrow ۲\le x<۳ \end{cases}$$

بار دیگر فرض می‌کنیم $\frac{۱}{۲}\le p<۱$ در این صورت:

$$[p]=۰ \qquad ۱\le p+\frac{۱}{۲}<\frac{۳}{۲} \Rightarrow \left[p+\frac{۱}{۲}\right]=۱$$

$$۱\le ۲p<۲ \Rightarrow [۲p]=۱$$

همان معادلهٔ قبلی است.

$$n+۱+(n+۰)^۲=۲n+۱+۲ \Rightarrow n^۲-n-۲=۰$$

روش دوم: با استفاده از فرمول $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=[۲x]-[x]$

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+[x]^۲=[۲x]+۲$$

$$[۲x]-[x]+[x]^۲=[۲x]+۲ \Rightarrow [x]^۲-[x]-۲=۰$$

$$[x]=-۱ \Rightarrow -۱\le x<۰$$

$$[x]=۲ \Rightarrow ۲\le x<۳$$

مثال ۸: معادلهٔ $[۲x]-[x]+۳=۰$ را حل کنید.

حل:

$$[x]+\left[x+\frac{۱}{۲}\right]-[x]+۳=۰ \Rightarrow \left[x+\frac{۱}{۲}\right]+۳=۰$$

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=-۳ \Rightarrow -۳\le x+\frac{۱}{۲}<-۲ \Rightarrow -\frac{۷}{۲}\le x<-\frac{۵}{۲}$$

MATH75.IR

مثال ۹: معادلهٔ $x^۲ - ۳[x] + ۲ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$x^۲ + ۲ = ۳[x]$$

$$x^۲ + ۲ > ۰ \Rightarrow [x] > ۰$$

فرض می‌کنیم $n \le x < n + ۱$ و $[x] = n$ و $(n \ge ۰)$

$$n \le x < n + ۱ \Rightarrow n^۲ \le x^۲ < (n + ۱)^۲$$

$$n^۲ + ۲ \le x^۲ + ۲ < (n + ۱)^۲ + ۲ \Rightarrow n^۲ + ۲ \le ۳[x] < (n + ۱)^۲ + ۲$$

$$\Rightarrow n^۲ + ۲ \le ۳n < n^۲ + ۲n + ۳$$

$$\begin{cases} n^۲ + ۲ \le ۳n \Rightarrow n^۲ - ۳n + ۲ \le ۰ \Rightarrow ۱ \le n \le ۲ \\ ۳n < n^۲ + ۲n + ۳ \Rightarrow n^۲ - n + ۳ > ۰ \text{ همواره برقرار است} \end{cases}$$

بنابراین $۱ \le n \le ۲$ جواب دستگاه است. با توجه به $n \in Z$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} n = ۱ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow x^۲ - ۳ \times ۱ + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱ \\ n = ۲ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow x^۲ - ۳ \times ۲ + ۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲ \end{cases}$$

چون با شرط $n \ge ۰$ معادله را حل کرده‌ایم و $n \le x < n + ۱$ پس فقط جوابهای مثبت را در نظر گرفته‌ایم.

نمودار تابع جزء صحیح

جزء صحیح در واقع تابعی است از R به Z با ضابطهٔ $y = [x]$.

$$\begin{cases} f : R \longrightarrow Z \\ f(x) = [x] \end{cases}$$

می‌خواهیم نمودار این تابع را در بازهٔ $[-۳ , ۳]$ رسم کنیم. برای این منظور بازهٔ $[-۳ , ۳]$ را به چند زیر بازه تقسیم می‌کنیم و در هر زیر بازه، ضابطهٔ تابع را بدست می‌آوریم.

$$-۳ \le x < -۲ \Rightarrow [x] = -۳ \quad y = -۳$$

$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \quad y = -۲$$

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \quad y = -۱$$

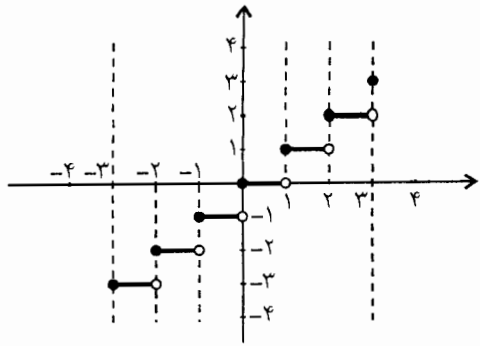
$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \quad y = ۰$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \quad y = ۱$$

MATH75.IR

$۲ \le x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \qquad y = ۲$

$x = ۳ \Rightarrow [x] = ۳ \qquad y = ۳$



مثال ۱۰: نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}[۳x]$ را در بازهٔ $]-۲ , ۱[$ رسم کنید.

حل: بازهٔ $]-۲ , ۱[$ را به زیر بازه‌هایی به طول $\frac{۱}{۳}$ تقسیم می‌کنیم.

$$-۲ \le x < \frac{-۵}{۳} \Rightarrow -۶ \le ۳x < -۵ \Rightarrow [۳x] = -۶ \Rightarrow y = -۳$$

$$\frac{-۵}{۳} \le x < \frac{-۴}{۳} \Rightarrow -۵ \le ۳x < -۴ \Rightarrow [۳x] = -۵ \Rightarrow y = \frac{-۵}{۲}$$

$$\frac{-۴}{۳} \le x < -۱ \Rightarrow -۴ \le ۳x < -۳ \Rightarrow [۳x] = -۴ \Rightarrow y = -۲$$

$$-۱ \le x < -\frac{۲}{۳} \Rightarrow -۳ \le ۳x < -۲ \Rightarrow [۳x] = -۳ \Rightarrow y = \frac{-۳}{۲}$$

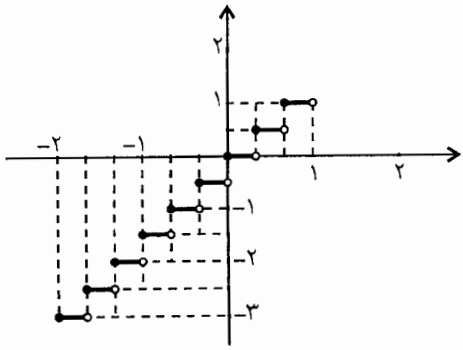
$$\frac{-۲}{۳} \le x < \frac{-۱}{۳} \Rightarrow -۲ \le ۳x < -۱ \Rightarrow [۳x] = -۲ \Rightarrow y = -۱$$

$$\frac{-۱}{۳} \le x < ۰ \Rightarrow -۱ \le ۳x < ۰ \Rightarrow [۳x] = -۱ \Rightarrow y = \frac{-۱}{۲}$$

$$۰ \le x < \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۰ \le ۳x < ۱ \Rightarrow [۳x] = ۰ \Rightarrow y = ۰$$

$$\frac{۱}{۳} \le x < \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۱ \le x < ۲ \Rightarrow [۳x] = ۱ \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{۲}{۳} \le x < ۱ \Rightarrow ۲ \le ۳x < ۳ \Rightarrow [۳x] = ۲ \Rightarrow y = ۱$$



MATH75.IR

مثال ۱۱: نمودار تابع $y = \left[\frac{۱}{۲}x\right] + ۱$ را در بازهٔ $[-۳ , ۳[$ رسم کنید.

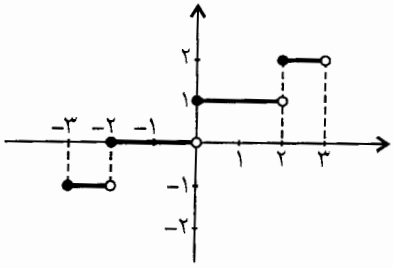
حل:

$$-۳ \le x < -۲ \Rightarrow \frac{-۳}{۲} \le \frac{۱}{۲}x < -۱ \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = -۲ \Rightarrow y = -۱$$

$$-۲ \le x < ۰ \Rightarrow -۱ \le \frac{۱}{۲}x < ۰ \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = -۱ \Rightarrow y = ۰$$

$$۰ \le x < ۲ \Rightarrow ۰ \le \frac{۱}{۲}x < ۱ \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

$$۲ \le x < ۳ \Rightarrow ۱ \le \frac{۱}{۲}x < \frac{۳}{۲} \Rightarrow \left[\frac{۱}{۲}x\right] = ۱ \Rightarrow y = ۲$$



مثال ۱۲: نمودار تابع $y = ۲x - [x]$ را در بازهٔ $[-۲ , ۲[$ رسم کنید

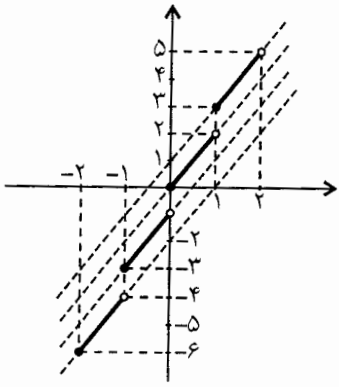
حل:

$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = ۲x - ۲$$

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۲x - ۱$$

$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۲x$$

$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = ۲x + ۱$$



مثال ۱۳: نمودار تابع $y = |[x]|$ را در بازهٔ $[-۲ , ۳[$ رسم کنید.

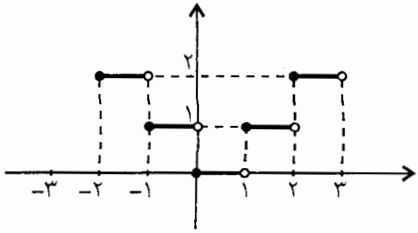
حل:

$$-۲ \le x < -۱ \Rightarrow [x] = -۲ \Rightarrow y = ۲$$

$$-۱ \le x < ۰ \Rightarrow [x] = -۱ \Rightarrow y = ۱$$

MATH75.IR

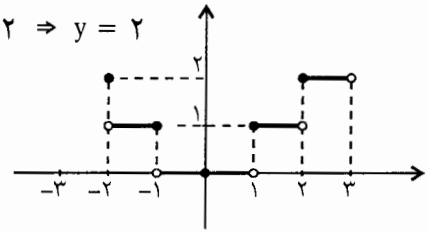
$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow [x] = ۰ \Rightarrow y = ۰$$
$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow [x] = ۱ \Rightarrow y = ۱$$
$$۲ \le x < ۳ \Rightarrow [x] = ۲ \Rightarrow y = ۲$$



در مقایسه با نمودار $y = [x]$ ملاحظه می‌کنیم که قسمتی از نمودار $y = [x]$ که پایین محور طول قرار گرفته بود قرینه‌اش را نسبت به محور طول رسم کرده‌ایم.

مثال ۱۴: نمودار تابع $y = [|x|]$ را در بازهٔ $]-۲ , ۳[$ رسم کنید.

$$x = -۲ \Rightarrow |x| = ۲ \Rightarrow [|x|] = ۲ \Rightarrow y = ۲$$
$$-۲ < x \le -۱ \Rightarrow ۱ \le |x| < ۲ \Rightarrow [|x|] = ۱ \Rightarrow y = ۱$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < |x| < ۱ \Rightarrow [|x|] = ۰ \Rightarrow y = ۰$$
$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow ۰ \le |x| < ۱ \Rightarrow [|x|] = ۰ \Rightarrow y = ۰$$
$$۱ \le x < ۲ \Rightarrow ۱ \le |x| < ۲ \Rightarrow [|x|] = ۱ \Rightarrow y = ۱$$
$$۲ \le x < ۳ \Rightarrow ۲ \le |x| < ۳ \Rightarrow [|x|] = ۲ \Rightarrow y = ۲$$



مثال ۱۵: نمودار تابع $y = [x^۲]$ را در بازهٔ $]-۲ , ۲[$ رسم کنید.

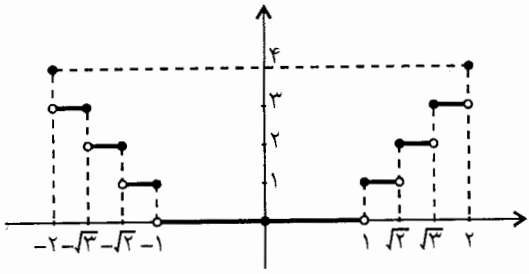
حل: روش اول:

$$x = -۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow y = [x^۲] = ۴$$
$$-۲ < x \le -\sqrt{۳} \Rightarrow ۳ \le x^۲ < ۴ \Rightarrow y = [x^۲] = ۳$$
$$-\sqrt{۳} < x \le -\sqrt{۲} \Rightarrow ۲ \le x^۲ < ۳ \Rightarrow y = [x^۲] = ۲$$
$$-\sqrt{۲} < x \le -۱ \Rightarrow ۱ \le x^۲ < ۲ \Rightarrow y = [x^۲] = ۱$$
$$-۱ < x < ۰ \Rightarrow ۰ < x^۲ < ۱ \Rightarrow y = [x^۲] = ۰$$
$$۰ \le x < ۱ \Rightarrow ۰ \le x^۲ < ۱ \Rightarrow y = [x^۲] = ۰$$
$$۱ \le x < \sqrt{۲} \Rightarrow ۱ \le x^۲ < ۲ \Rightarrow y = [x^۲] = ۱$$
$$\sqrt{۲} \le x < \sqrt{۳} \Rightarrow ۲ \le x^۲ < ۳ \Rightarrow y = [x^۲] = ۲$$

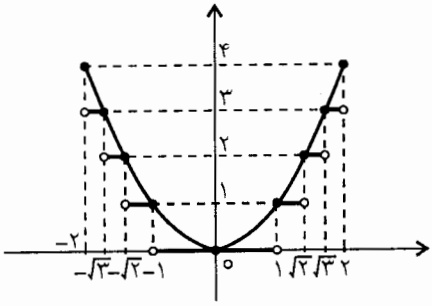
MATH75.IR

$\sqrt{۳} \le x < ۲ \Rightarrow ۳ \le x^۲ < ۴ \Rightarrow y = [x^۲] = ۳$

$x = ۲ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow y = [x^۲] = ۴$



روش دوم: برای رسم نمودار $y = [x^۲]$ در بازهٔ $[-۲ , ۲]$ ابتدا نمودار تابع $y = x^۲$ را در بازهٔ فوق رسم می‌کنیم سپس به ازای هر عدد صحیح k که $k \le y < k + ۱$ نمودار تابع $y = x^۲$ برخط افقی $y = k$ تصویر می‌کنیم.



نکته: به طور کلی برای رسم نمودار توابعی به صورت $f(x) = [g(x)]$ ابتدا نمودار تابع $y = g(x)$ را رسم می‌کنیم. به ازای هر عدد صحیح k در صورتیکه $k \le y < k + ۱$ باشد نمودار تابع $y = g(x)$ را بر خط $y = k$ تصویر می‌کنیم.

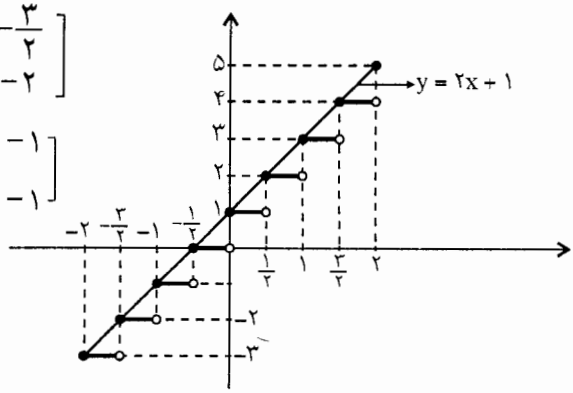
مثال ۱۶: نمودار تابع $y = [۲x + ۱]$ را در بازهٔ $[-۲ , ۲]$ رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار $y = [۲x + ۱] = [۲x] + ۱$ می‌توانیم نمودار $y = [۲x]$ را رسم کرده و آنرا یک واحد در راستای محور عرض به بالا انتقال دهیم. اما روش دیگر این است که ابتدا نمودار خط $y = ۲x + ۱$ را رسم کنیم. سپس هر قسمت از نمودار را که بین دو خط موازی $y = k$ و $y = k + ۱$ قرار می‌گیرد بر خط $y = k$ تصویر کنیم. در هر حالت لازم است نقطهٔ برخورد خط $y = ۲x + ۱$ و خط $y = k$ را بدست آوریم.

MATH75.IR

$$\begin{cases} y = ۲x + ۱ \\ y = -۲ \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y = ۲x + ۱ \\ y = -۱ \end{cases} \Rightarrow x = -۱ \Rightarrow \begin{bmatrix} -۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$



دامنه و برد توابع جزء صحیح

مثال ۱۷: دامنهٔ تعریف تابع $y = \frac{\sqrt{۲۵ - x^۲}}{[x] - ۴}$ را تعیین کنید.

حل:

$$[x] - ۴ = ۰ \Rightarrow [x] = ۴ \Rightarrow ۴ \le x < ۵$$

$$۲۵ - x^۲ \ge ۰ \Rightarrow x^۲ \le ۲۵ \Rightarrow -۵ \le x \le ۵$$

$$D = [-۵ , ۵] - [۴ , ۵[= [-۵ , ۴[\cup \{۵\}$$

مثال ۱۸: دامنه و برد تابع $y = ۲[x] + ۲[-x]$ را بدست آورید.

حل: تابع در مجموعهٔ اعداد حقیقی معین است لذا دامنهٔ تابع اعداد حقیقی است.

$$y = ۲([x] + [-x]) = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۲ & x \notin Z \end{cases}$$

برد تابع $= \{-۲ , ۰\}$

مثال ۱۹: دامنه و برد تابع $f(x) = \frac{[x + ۱] + [-x] - ۱}{[x - ۱] + [-x + ۱]}$ را تعیین کنید.

حل:

$$y = \frac{[x] + ۱ + [-x] - ۱}{[x] - ۱ + [-x] + ۱} = \frac{[x] + [-x]}{[x] + [-x]}$$

$$[x] + [-x] = ۰ \Rightarrow x \in Z \Rightarrow D_f = R - Z$$

برای تعیین برد با توجه به اینکه $x \in R - Z$ خواهیم داشت $y = \frac{-۱}{-۱} = ۱$ ، $R_f = \{۱\}$

مثال ۲۰: دامنه و برد تابع $f(x) = \frac{[x - [x]]}{[۲ - x] + [x - ۲]}$ را بدست آورید.

MATH75.IR

حل:

$$y = \frac{[x - [x]]}{۲ + [-x] + [x] - ۲} = \frac{[x - [x]]}{[-x] + [x]}$$

$$[-x] + [x] = ۰ \Rightarrow x \in Z \Rightarrow D_f = R - Z$$

می‌دانیم $۰ \leq x - [x] < ۱$ بنابراین $[x - [x]] = ۰$

$$x \in R - Z \Rightarrow f(x) = ۰ \Rightarrow R_f = \{۰\}$$

مثال ۲۱: دامنه و برد تابع $y = \frac{x}{[۵ - x] + [x - ۵]}$ را بدست آورید.

حل:

$$y = \frac{x}{۵ + [-x] + [x] - ۵} = \frac{x}{[-x] + [x]}$$

$$[-x] + [x] = ۰ \Rightarrow x \in Z \Rightarrow D_f = R - Z$$

$$x \in R - Z \Rightarrow y = \frac{x}{-۱} = -x$$

$$R_f = R - Z$$

مثال ۲۲: برد تابع $y = ۵x - ۵[x] + ۱$ را تعیین کنید.

حل:

$$۰ \leq x - [x] < ۱ \Rightarrow ۰ \leq ۵x - ۵[x] < ۵$$

$$\Rightarrow ۱ \leq ۵x - ۵[x] + ۱ < ۶$$

$$R_f = [۱ , ۶[$$

MATH75.IR

تمرینهای فصل چهارم

۱ـ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $[x] + [x - [x]] = ۱۰$

ب) $\left[x + \frac{۱}{۳}\right] + \left[x + \frac{۲}{۳}\right] = ۳$

ج) $x + \{x\} + [x] = \frac{۲۲}{۷}$

د) $[x](x - [x]) = ۱$

هـ) $x^۲ - ۸[x] + ۷ = ۰$

و) $[x] + |x| = ۳/۷$

ز) $[x - ۱] = \left[\frac{x + ۲}{۲}\right]$

ح) $[x]^۲ - ۵[x] + ۶ = ۰$

ط) $\left[\frac{۲x - ۴}{x - ۱}\right] = -۳$

ی) $[x] + [۲x] + [۴x] = ۱۵$

ک) $[۳x] = ۳[x]$

ل) $\left[\frac{۳x + ۱}{۲}\right] = \frac{۴(۴ - x)}{۳}$

م) $[x + ۱] + [x - ۲] - [x + ۳] = ۲$

ن) $[۳x + [۳x + [۳x]]] = ۲۷$

س) $[x + [x]] = ۹$

ع) $۲\left[\frac{x}{۴}\right] + \left[\frac{x + ۱۶}{۴}\right] = -۲$

ف) $\frac{[x + ۲[x]] + [x]}{۴} + [x - ۳] = ۳$

ص) $\left[\frac{۲}{x - ۱}\right] + \left[\frac{۲}{۱ - x}\right] = ۰$

۲ـ درستی تساویهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\left[\frac{n}{۲}\right] = \frac{n}{۲} + \frac{(-۱)^n - ۱}{۴}$ $(n \in Z)$

ب) $\left[\frac{n}{۲}\right] - \left[\frac{n + ۱}{۲}\right] = n$ $(n \in Z)$

ج) $\left[\frac{n}{۲}\right] - \left[-\frac{n}{۲}\right] = n$ $(n \in Z)$

۳ـ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی k و هر عدد حقیقی x رابطهٔ زیر برقرار است.

$k[x] \leq [kx] + k - ۱$

۴ـ اگر $[x + [x + [x + [x]]]] - [x + [x + ۳[x]]] + ۳[x + ۲[x]] = ۲۴$ باشد حدود x را پیدا کنید.

MATH75.IR

۵ـ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = \frac{[x + ۲[x + [x]]]}{۵} + \frac{[x + ۳[x - ۲[x]]]}{۲} + ۳\left[x - \frac{[x + [x]]}{۲}\right]$$

۶ـ ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n:

$$[\sqrt{n^۲}] + [\sqrt{n^۲ + ۱}] + ... + [\sqrt{(n + ۱)^۲ - ۱}] = n(۲n + ۱)$$

۷ـ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$[\sqrt{۱}] + [\sqrt{۲}] + ... + [\sqrt{۳۵}]$$

۸ـ تحقیق کنید تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = (-۱)^{[x]}(x - [x]) \end{cases}$ یک به یک و پوشا هست یا خیر؟

۹ـ ثابت کنید $[x + y] \geq [x] + [y]$.

۱۰ـ آیا تابع $\begin{cases} f : R \longrightarrow R \\ f(x) = x - [x] \end{cases}$ یک به یک و پوشا هست یا خیر؟

۱۱ـ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای درستی تساوی $[-x] + [-y] = [-x - y]$ آن است که حداقل یکی از اعداد x و y صحیح باشند.

۱۲ـ تابع $f(x) = [x] - \left[\frac{x + ۱}{۲}\right]$ مفروض است. اولاً $f(-۲/۵)$ و $f\left(\frac{۳}{۴}\right)$ را بدست آورید. ثانیاً ثابت کنید.

$$f(x + ۲) - f(x) = ۱$$

۱۳ـ اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = |x| + ۱$ باشد $f(g(۷/۵))$ و $g(f(-۲/۵))$ را بدست آورید.

۱۴ـ اگر $f(x) = [x] - \left[\frac{x + ۲}{۳}\right]$ حاصل $f(x + ۳) - f(x - ۱)$ را بدست آورید.

۱۵ـ تابع $f(x) = x - [x]$ زوج است یا فرد؟

۱۶ـ نمودار تابع زیر را در بازهٔ معین شده رسم کنید.

الف) $y = x - [x]$ $[-۲ , ۲]$

ب) $y = [x - ۱]$ $[-۲ , ۲[$

ج) $y = |[x] - ۱|$ $[-۲ , ۲[$

د) $y = [۲x + ۳]$ $[-۲ , ۲[$

هـ) $y = \left[\frac{x + ۱}{۲}\right] - ۱$ $[-۳ , ۳[$

و) $y = [۲x] + |x|$ $[-۱ , ۱[$

MATH75.IR

ز) $y = ۲x - [۲x]$ $[-۲ , ۲[$

ح) $y = x[x^۲]$ $[-۲ , ۲[$

ط) $y = x - [\sqrt{x}]$ $[۰ , ۲۵[$

ی) $y = \frac{x - ۱}{[x]}$ $[-۲ , ۲[$

ک) $y = [۳x] + |x + ۱|$ $[-۱ , ۱[$

ل) $y = \left[\frac{۱}{|x|}\right]$ $\left[-\frac{۳}{۲} , \frac{۳}{۲}\right[$

م) $y = [۲x] + \left[\frac{x}{۲}\right] + x$ $[-۲ , ۲[$

ن) $y = x[x] - x|x|$ $[-۲ , ۲]$

س) $y = \left[\frac{x^۲ + ۱}{x^۲ + ۲}\right] + \frac{[x^۲ + ۱]}{[x^۲ + ۱]}$ $[-۲ , ۱]$

ع) $y = [x] - ۳\left[\frac{x}{۳}\right] + \left[\frac{x^۲}{x^۲ + ۱}\right]$ $[-۳ , ۳]$

ف) $y = [x^۲ - ۳x + ۲]$ $[-۲ , ۲[$

ص) $y = ۲x^۲ - ۲[|x|]$ $[-۴ , ۴]$

ق) $y = [|x - ۲| + ۱\backslash۵]$ $[۱ , ۲[$

ر) $y = [|x^۲ - ۴|]$ $[-۲ , ۲]$

۱۷ـ نمودار رابطهٔ $[y] = [x]$ را در بازهٔ $[-۳ , ۳]$ رسم کنید.

۱۸ـ دامنهٔ توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = \sqrt{[x] - ۲}$

ب) $y = \frac{x}{۲[x] + ۱}$

ج) $y = \frac{۱}{[x + [x - ۳]]}$

د) $y = \frac{۱}{\sqrt{[[x] + x]}}$

ه) $y = \frac{۱}{\sqrt{[x] + [-x]}}$

MATH75.IR

و) $y = \sqrt{|x| - [x]}$

ز) $y = \dfrac{\sqrt{[x] + ۳}}{[x] - ۲}$

۱۹ـ دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = \dfrac{[-x] + [x + ۷] - ۷}{[x - ۷] + [-x + ۷]}$

ب) $y = \dfrac{x}{[۴ - x] + [x - ۴]}$

ج) $y = \dfrac{x + [x - [x]]}{x + [x] + [-x]}$

د) $y = (-۱)^{[x-۲]+[۲-x]}$

ه) $y = \left[\dfrac{x^۴ + x^۲ + ۳}{x^۴ + x^۲ + ۴}\right] + \dfrac{x - [x]}{[x + ۱] + [۱ - x]}$

و) $y = \dfrac{[x + ۲] + [-x]}{[۲ - x] + [x]}$

ز) $y = ۲x - ۲[x] + ۱$

ح) $y = \left[\dfrac{x^۴ + ۴}{x^۴ + ۵}\right]$

ط) $y = \dfrac{۲^{-[x]}}{۲^{[-x]}} + \dfrac{۲ - x}{x - ۲}$

ی) $y = \begin{cases} \dfrac{x}{[x]} & x \leq ۰ \\ ۰ & x \geq ۰ \end{cases}$

ک) $y = \sqrt{x - [x]}$

ل) $y = \sqrt{[x] - [x^۲]}$

م) $y = \dfrac{x - [x]}{\sqrt{x - [x]}}$

۲۰ـ اگر $(۱ + \sqrt{۲})^۶ + (۱ - \sqrt{۲})^۶ = ۱۹۸$ باشد حاصل $[(۱ + \sqrt{۲})^۶]$ را بدست آورید.

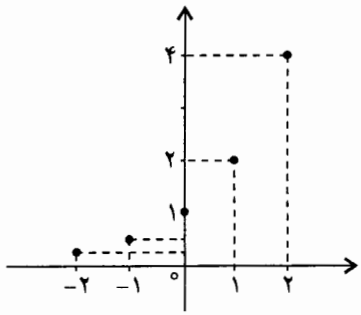
MATH75.IR

فصل پنجم

تابع نمایی و لگاریتم

نمودار تابع $f(x) = ۲^x$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح رسم کنید.

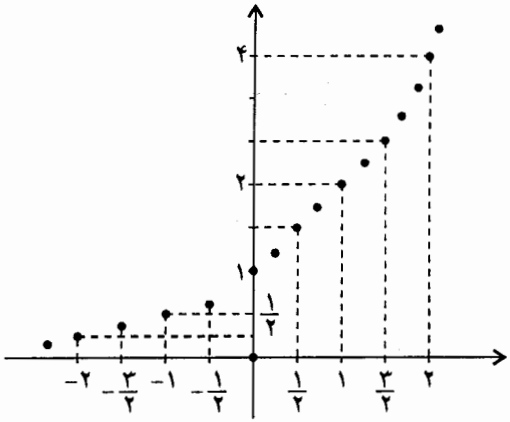
x	−۲	−۱	۰	۱	۲
$y=۲^x$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴



نمودار تابع $f(x)=۲^x$ را در مجموعهٔ اعداد گویا رسم کنید.

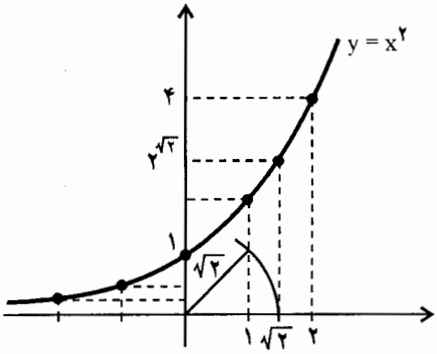
x	−۲	$-\frac{۳}{۲}$	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲
$y=۲^x$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	$\sqrt{۲}$	۲	$\sqrt{۸}$	۴

MATH75.IR



نمودار تابع در برخی نقاط سوراخ است که این نقاط طولشان گنگ است.

باید توجه داشته باشیم که توانهای گنگ اعداد به‌کمک دنباله‌ها در کلاسهای بالاتر تعریف می‌شود و نمودار تابع $f(x)=۲^x$ به‌صورت پیوسته می‌باشد.

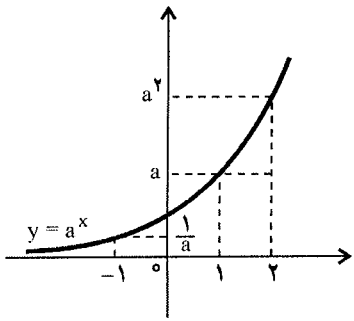


برای نمایش عدد $۲^{\sqrt{۲}}$ کافی است عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور طول پیدا کرده و از آنجا خطی بر محور طول عمود عمود کنیم تا نمودار تابع را قطع کند. عرض این نقطه عدد $۲^{\sqrt{۲}}$ می‌باشد.

به‌طور کلی نمودار تابع $y=a^x$ با شرط $a>۱$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty \cdots$		-۱		۰		۱		۲		$\cdots +\infty$
$y=a^x$	$\|\| \; ۰$	↗	$\frac{۱}{a}$	↗	۱	↗	a	↗	$a^۲$	↗	$\|\| \; +\infty$

MATH75.IR

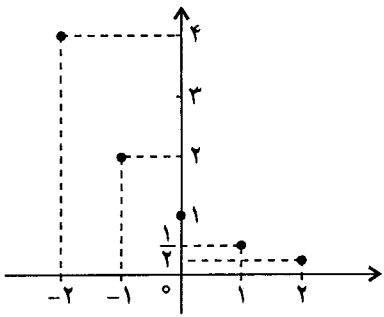


$$x_۱ < x_۲ \overset{a>۱}{\Rightarrow} a^{x_۱} < a^{x_۲} \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

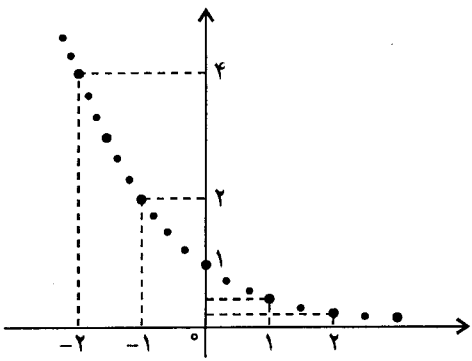
بنابراین تابع $f(x) = a^x$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی اکیداً صعودی و یک به‌یک است.

نمودار تابع $f(x) = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را در مجموعهٔ اعداد صحیح رسم کنید.

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
$y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$



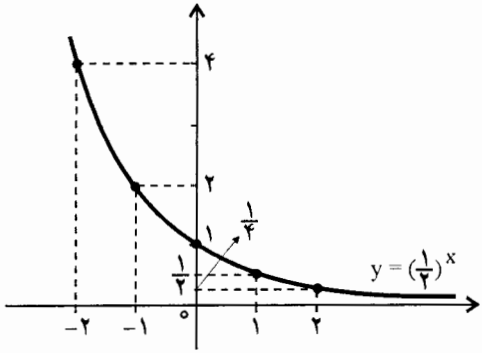
نمودار تابع $y = \left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ در مجموعهٔ اعداد گویا نقاط بیشتری را دربرمی‌گیرد اما پیوسته نیست.



MATH75.IR

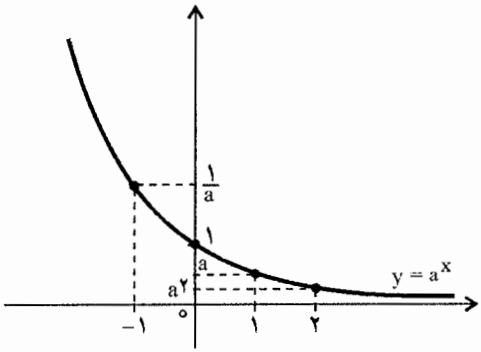
اما نمودار تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی به‌صورت پیوسته می‌باشد.

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
$y=a^x$	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$



به‌طور کلی نمودار تابع $y=a^x$ درصورتیکه $۰ < a < ۱$ به‌صورت زیر است:

x	$-\infty \cdots$		-۲		-۱		۰		۱		۲	$\cdots +\infty$
$y=a^x$	$+\infty$	↘	$\frac{۱}{a^۲}$	↘	$\frac{۱}{a}$	↘	۱	↘	a	↘	$a^۲$	↘ ۰



$$x_۱ < x_۲ \xRightarrow{۰<a<۱} a^{x_۱} < a^{x_۲} \Rightarrow f(x_۱) < f(x_۲)$$

تابع $y=a^x$ با شرط $۰ < a < ۱$ اکیداً نزولی است. اگر $a=۱$ یا $a=۰$ تابع ثابت است. $f(x)=۱$ یا $f(x)=۰$.

نکته: تمام خواص توانهای گویا برای توانهای حقیقی نیز برقرار است.

MATH75.IR

نکته: اگر $a > ۱$ آنگاه:

$$x < ۰ \Leftrightarrow a^x < ۱$$
$$x > ۰ \Leftrightarrow a^x > ۱$$

نکته: اگر $۰ < a < ۱$ آنگاه:

$$x < ۰ \Leftrightarrow a^x > ۱$$
$$x > ۰ \Leftrightarrow a^x < ۱$$

نکته: اگر a و b مثبت باشند و $x \in R$ آنگاه:

$$a < b \Leftrightarrow a^x < b^x \qquad (x > ۰)$$
$$a < b \Leftrightarrow a^x > b^x \qquad (x > ۰)$$

نکته: اگر $a > ۰$ و $y \in R$ و x آنگاه:

$$a > ۱ \quad : x < y \Leftrightarrow a^x < a^y$$
$$۰ < a < ۱ \quad : x < y \Leftrightarrow a^x > a^y$$

نکته: دامنهٔ تابع نمایی $f(x) = a^x$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن بازهٔ $(۰ , +\infty)$ می‌باشد.

نکته: تابع $\begin{cases} f: R \to (۰ , +\infty) \\ f(x) = a^x \end{cases}$ یک به‌یک و پوشا است.

مثال ۱: دامنه و برد تابع $y = ۵^{[x]+[-x]}$ را بدست آورید.

حل:

$$D_f = R$$

$$[x]+[-x] = \begin{cases} ۰ & x \in Z \\ -۱ & x \notin Z \end{cases}$$

$$x \in Z \Rightarrow y = ۵^۰ = ۱$$
$$x \notin Z \Rightarrow y = ۵^{-۱} = \frac{۱}{۵}$$
$$\Rightarrow \quad R_f = \left\{\frac{۱}{۵} , ۵\right\}$$

مثال ۲: دامنه و برد تابع $f(x) = ۵^{\frac{\sqrt{x^۲-۴x+۴}}{x-۲}}$ را تعیین کنید.

حل:

$$D_f = R-\{۲\}$$

$$f(x) = ۵^{\frac{\sqrt{(x-۲)^۲}}{x-۲}} = ۵^{\frac{|x-۲|}{x-۲}}$$

MATH75.IR

$$f(x) = \begin{cases} ۵ & x > ۲ \\ \frac{۱}{۵} & x < ۲ \end{cases} \Rightarrow R_f = \left\{\frac{۱}{۵}, ۵\right\}$$

مثال ۳: تحقیق کنید تابع $\begin{cases} f: R \to R \\ f(x) = ۲^{۵x+۲} - ۲^{۵x-۱} \end{cases}$ یک به‌یک و پوشا هست یا خیر؟

حل:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \Rightarrow ۲^{۵x_۱+۲} - ۲^{۵x_۱-۱} = ۲^{۵x_۲+۲} - ۲^{۵x_۲-۱}$$

$$\Rightarrow ۲^{۵x_۱}(۲^۲ - ۲^{-۱}) = ۲^{۵x_۲}(۲^۲ - ۲^{-۱}) \Rightarrow ۲^{۵x_۱} = ۲^{۵x_۲}$$

$$\Rightarrow ۵x_۱ = ۵x_۲ \Rightarrow x_۱ = x_۲$$

بنابراین تابع f یک به‌یک است.

تابع f پوشا نیست. زیرا اگر y را یک عدد منفی اختیار کنیم هیچ x ی در R یافت نمی‌شود که $f(x) = y$.

نکته: با توجه به‌اینکه تابع نمایی $y = a^x$ یک به‌یک است داریم:

اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ آنگاه معادلهٔ $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ با معادلهٔ $f(x) = g(x)$ هم‌ارز است.

مثال ۴: معادلهٔ توانی مقابل را حل کنید. $۸^{۲x-۱} \times ۲^{-۲x} = ۳۲^x$

حل:

$$۲^{۶x-۳} \times ۲^{-۲x} = ۲^{۵x} \Rightarrow ۲^{۴x-۳} = ۲^{۵x}$$

$$\Rightarrow ۴x - ۳ = ۵x \Rightarrow \boxed{x = -۳}$$

توابع لگاریتمی

تابع $f: R \to (۰, +\infty)$ با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ که در آن a عددی مثبت و مخالف یک می‌باشد یک به‌یک و وارون‌پذیر است که وارون آنرا با نماد $\log_a$ نشان می‌دهیم.

$$\boxed{y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y}$$

تابع $\log_a : R^+ \to R$ هر عدد حقیقی مثبت مانند x را به‌عدد $y = \log_a x$ نظیر می‌کند به‌طوری‌که $x = a^y$.

عدد حقیقی a را مبنای لگاریتم می‌نامیم و مشاهده می‌کنیم که مبنا همواره مثبت و مخالف یک است.

اگر مبنای لگاریتم ۱۰ باشد آن را لگاریتم اعشاری و اگر مبنا برابر e ($e \simeq ۲/۷۱$) باشد آن را لگاریتم طبیعی یا لگاریتم نپری می‌گویند. مبنای ۱۰ را معمولاً نمی‌نویسند: ($\log_{۱۰} x = \log x$)

لگاریتم در مبنای e را به‌صورت ln نشان می‌دهند.

$$\log_e x = \ln x$$

MATH75.IR

مثال ۵: حاصل $\log_a ۱$ و $\log_a a$ و $\log ۱۰۰۰$ و $\log ۰/۰۱$ و $\log_۲ \sqrt{۲}$ و $\log_۲ ۰/۲۵$ و $\log_{۶۴} \frac{۱}{۸}$ را بدست آورید.

حل:

$$a^۰ = ۱ \Rightarrow \log_a ۱ = ۰$$

$$a^۱ = a \Rightarrow \log_a a = ۱$$

$$۱۰^۳ = ۱۰۰۰ \Rightarrow \log ۱۰۰۰ = ۳$$

$$۱۰^{-۲} = ۰/۰۱ \Rightarrow \log ۰/۰۱ = -۲$$

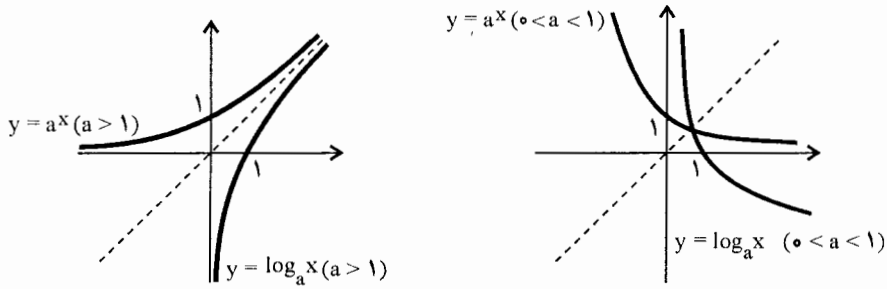
$$\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow \log_۲ \sqrt{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$۲^{-۲} = ۰/۲۵ \Rightarrow \log_۲ ۰/۲۵ = -۲$$

$$۶۴^{-\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۸} \Rightarrow \log_{۶۴} \frac{۱}{۸} = -\frac{۱}{۲}$$

نمودار تابع لگاریتمی

با توجه به‌اینکه تابع $y = \log_a x$ وارون تابع نمایی $y=a^x$ می‌باشد برای رسم نمودار تابع $y=\log_a x$ کافی است قرینهٔ نمودار $y=a^x$ را نسبت به‌خط $y=x$ رسم کنیم.



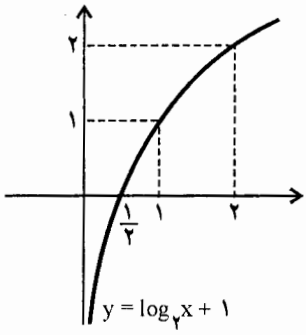
نکته: اگر $a>۱$، تابع $y=\log_a x$ اکیداً صعودی است زیرا $y=a^x$ وقتی $a>۱$ اکیداً صعودی است. همچنین اگر $۰<a<۱$، تابع $y=\log_a x$ اکیداً نزولی است.

نکته: همانطوری که از نمودار تابع لگاریتم برمی‌آید درصورتیکه $a>۱$ باشد و x از مقادیر بزرگتر از صفر به‌صفر نزدیک شود $\log_a x$ کوچک و کوچکتر می‌شود و اگر x بزرگ شود $\log_a x$ نیز بزرگ و بزرگتر می‌شود. همچنین در حالت $۰<a<۱$ اگر x از مقادیر بزرگتر از صفر به‌صفر نزدیک شود $\log_a x$ زیاد می‌شود و اگر x افزایش یابد مقدار تابع $\log_a x$ کم می‌شود.

MATH75.IR

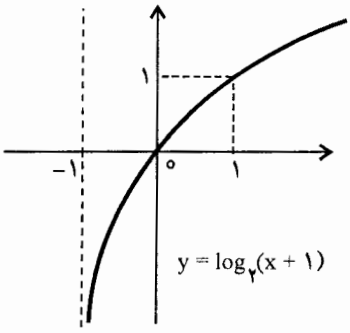
مثال ۶: نمودار تابعهای $y=\log_2 x+1$ و $y=\log_2(x+1)$ را رسم کنید.

حل: برای رسم تابع $y=\log_2 x+1$ کافی است $y=\log_2 x$ را رسم کرده و یک واحد به‌جهت مثبت محور عرض آن را انتقال دهیم.



x	۰		$\frac{1}{2}$		۱		۲		$+\infty$
$y=\log_2 x+1$	‖	$-\infty$ ↗	۰	↗	۱	↗	۲	↗	$+\infty$

برای رسم نمودار تابع $y=\log_2(x+1)$ کافی است نمودار تابع $y=\log_2 x$ را یک واحد در راستای محور طول به‌سمت چپ ببریم.

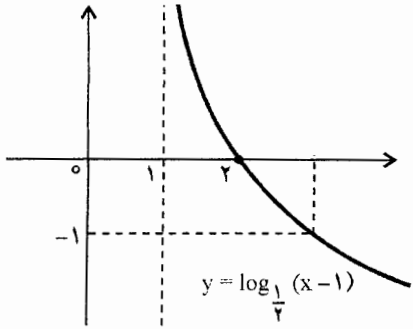


x	-1		۰		۱		$+\infty$
$y=\log_2(x+1)$	‖ $-\infty$	↗	۰	↗	۱	↗	$+\infty$

مثال ۷: نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ کافی است نمودار تابع $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ را یک واحد در راستای محور طول به‌راست انتقال دهیم.

MATH75.IR



x	۱		۲		۳		$+\infty$
$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$	$+\infty$	↘	۰	↘	-1	↘	$-\infty$

مثال ۸: دامنهٔ تابع $y = \log_{x+1} \frac{x^2-x-6}{x-1}$ را بدست آورید.

حل:

$$\begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x-1} > 0 \\ x+1 > 0 \text{ و } x \neq 1 \end{cases}$$

$x^2-x-6 = (x-3)(x+2) = 0 \rightarrow x = 3$ یا $x=-2$

$x-1 = 0 \rightarrow x = 1$ $\qquad$ $x+1 = 0 \rightarrow x = -1$

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		$+\infty$
x^2-x-6		+	۰	−		−		−	۰	+	
$x-1$		−		−		−	۰	+		+	
$\frac{x^2-x-6}{x-1}$		−	۰	+		+	ن	−	۰	+	
$x+1$		−		−	۰	+		+		+	
نتیجه						جواب				جواب	

$D = (-1, 1) \cup (3, +\infty)$

مثال ۹: دامنه و برد تابع $y = \log\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$ را بدست آورید.

حل:

$$y = \log \frac{x^2-1}{x-1} = \log \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \overset{x \neq 1}{=\!=} \log(x+1)$$

MATH75.IR

$$D_f = \{x|x \in R , x + ۱ > ۰ , x \neq ۱\} = \{x|x \in R , x > -۱ , x \neq ۱\}$$

$$= (-۱ , ۱) \cup (۱ , +\infty)$$

$$y = \log(x+۱) \Rightarrow x+۱ = ۱۰^y \Rightarrow x = ۱۰^y - ۱ \quad (x \in D_f)$$

$$\begin{cases} ۱۰^y - ۱ > -۱ \rightarrow ۱۰^y > ۰ \rightarrow y \in R \\ ۱۰^y - ۱ \neq ۱ \rightarrow ۱۰^y \neq ۲ \rightarrow y \neq \log ۲ \end{cases}$$

$$R_f = R - \{\log ۲\}$$

خواص لگاریتم

۱ـ اگر M و N اعدادی مثبت و a عددی مثبت و مخالف یک باشد آنگاه:

$$\boxed{\log_a M.N = \log_a M + \log_a N}$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\log_a M = x$ و $\log_a N = y$. بنابراین:

$$M = a^x \quad و \quad N = a^y \Rightarrow MN = a^{x+y}$$

$$\Rightarrow \log_a MN = x+y \Rightarrow \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

نکته: اگر $A_i > ۰$ باشد به‌طور کلی داریم:

$$\log_a (A_۱ \times A_۲ \times \cdots \times A_n) = \log_a A_۱ + \log_a A_۲ + \cdots + \log_a A_n$$

۲ـ اگر $N > ۰$ و M و $a > ۰$ و $a \neq ۱$، آنگاه:

$$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$$

اثبات:

$$\begin{matrix} \log_a M = x \rightarrow a^x = M \\ \log_a N = y \rightarrow a^y = N \end{matrix} \Rightarrow \frac{M}{N} = a^{x-y}$$

$$\Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = x-y \Rightarrow \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

۳ـ اگر $x > ۰$ و $a > ۰$ و $a \neq ۱$ آنگاه:

$$\boxed{\log_a x^n = n \log_a x}$$

اثبات:

$$\log_a x^n = b \Rightarrow x^n = a^b \Rightarrow x = a^{\frac{b}{n}}$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \log_a x = \frac{b}{n} \Rightarrow n \log_a x = b \Rightarrow n \log_a x = \log_a x^n$$

۴ـ اگر $x>0$ و $a>0$ و $a\neq 1$ آنگاه:

$$\boxed{a^{\log_a x} = x}$$

اثبات: اگر فرض کنیم $\log_a x = b$ آنگاه بنا به‌تعریف $x=a^b$. بنابراین:

$$x = a^b = a^{\log_a x}$$

۵ـ اگر $x>0$ و $a>0$ و $a\neq 1$ آنگاه:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

اثبات:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$$

۶ـ اگر $x>0$ و $a>0$ و $a\neq 1$ آنگاه:

$$\boxed{\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x}$$

اثبات: $\log_a \frac{1}{x} = \log_a 1 - \log_a x = 0 - \log_a x = -\log_a x$

نکته: $-\log_a x$ را کُلگاریتم نیز می‌نامند و می‌نویسند $\operatorname{colog}_a x = -\log_a x$،

$$\operatorname{colog}_a x = -\log_a x = \log_a \frac{1}{x}$$

۷ـ اگر $x>0$ و $a>0$ و $a\neq 1$ و $m\in N$ آنگاه:

$$\boxed{\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x}$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\log_{a^m} x = b$ درنتیجه:

$$x = (a^m)^b \Rightarrow x = a^{mb} \Rightarrow \log_a x = mb \Rightarrow \frac{1}{m} \log_a x = b$$

(اگر m صحیح یا گویا باشد قانون فوق همچنان معتبر است)

۸ـ

$$\boxed{\log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x}$$

اثبات: $\log_{a^n} x^m = m \log_{a^n} x = m \times \frac{1}{n} \log_a x = \frac{m}{n} \log_a x$

۹ـ اگر a و b مثبت و مخالف یک باشند آنگاه:

$$\boxed{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\log_b a = x$

MATH75.IR

$$\Rightarrow a = b^x \Rightarrow \log_a a = \log_a b^x \Rightarrow 1 = x \log_a b$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\log_a b} \Rightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

۱۰ـ اگر a و b مثبت و $b \neq 1$ و $c \neq 1$ آنگاه:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}}$$

اثبات:

$$\log_c a = x \Rightarrow a = c^x \Rightarrow \log_b a = \log_b c^x$$

$$\Rightarrow \log_b a = x \log_b c \Rightarrow \log_b a = \log_c a \times \log_b c$$

$$\Rightarrow \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

نتیجه: اگر a و b و c و d مثبت و c و d مخالف یک باشند آنگاه:

$$\boxed{\frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{\log_d a}{\log_d b}}$$

نتیجه:

$$\boxed{\log_b a \times \log_c b = \log_c a}$$

$$\boxed{\log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a}$$

این قانون را می‌توان تعمیم داد.

۱۱ـ اگر a و b و c مثبت و $c \neq 1$ آنگاه:

$$\boxed{a^{\log_c b} = b^{\log_c a}}$$

اثبات: با توجه به‌یک به‌یک بودن تابع لگاریتم اگر نشان دهیم لگاریتم این دو عبارت مساویند خودشان نیز مساوی می‌شوند.

$$\log_c a^{\log_c b} = \log_c b \times \log_c a \qquad (1)$$

$$\log_c b^{\log_c a} = \log_c a \times \log_c b \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \log_c a^{\log_c b} = \log_c b^{\log_c a} \Rightarrow a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

۱۲ـ اگر $b > 0$ و $a > 0$ و $a \neq 1$ آنگاه:

$$\boxed{\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = 0} \quad \text{و} \quad \boxed{\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = 0}$$

MATH75.IR

اثبات: $\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = \log_a b + \log_{a^{-1}} b = \log_a b - \log_a b = 0$

$\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = \log_a b + \log_a b^{-1} = \log_a b - \log_a b = 0$

مثال ۱۰: اگر $\log 2 = k$ حاصل $\log_4 625$ را برحسب k بدست آورید.

حل: $\log_4 625 = \frac{\log 625}{\log 4} = \frac{\log 5^4}{\log 2^2} = \frac{4\log 5}{2\log 2}$

$= \frac{2\log \frac{10}{2}}{\log 2} = \frac{2(\log 10 - \log 2)}{\log 2} = \frac{2(1-k)}{k}$

مثال ۱۱: نشان دهید: $\log_{81} \frac{1}{3} = -\frac{1}{4}$.

حل:

$\log_{81} \frac{1}{3} = \log_{3^4} 3^{-1} = \frac{-1}{4}\log_3 3 = \frac{-1}{4} \times 1 = \frac{-1}{4}$

مثال ۱۲: نشان دهید: $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$.

حل:

$\log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}}\log_2 2 = 6 \times 1 = 6$

مثال ۱۳: با فرض اینکه $2a + 3b > 0$ بوده و داشته باشیم، $4a^2 + 9b^2 = 13ab$ ثابت کنید:

$\log \frac{2a+3b}{5} = \frac{\log a + \log b}{2}$

حل: $4a^2 + 9b^2 + 12ab = 13ab + 12ab \Rightarrow (2a+3b)^2 = 25ab$

$\Rightarrow \left(\frac{2a+3b}{5}\right)^2 = ab \Rightarrow \log\left(\frac{2a+3b}{5}\right)^2 = \log ab$

$\Rightarrow 2\log \frac{2a+3b}{5} = \log a + \log b \Rightarrow \log \frac{2a+3b}{5} = \frac{\log a + \log b}{2}$

مثال ۱۴: نشان دهید: $\log_{\sqrt[m]{b}} \sqrt[m]{a} = \log_b a$

حل: $\log_{\sqrt[m]{b}} \sqrt[m]{a} = \frac{\log \sqrt[m]{a}}{\log \sqrt[m]{b}} = \frac{\frac{1}{m}\log a}{\frac{1}{m}\log b} = \frac{\log a}{\log b} = \log_b a$

MATH75.IR

مثال ۱۵: ثابت کنید: $\log_a b \times \log_c d = \log_a d \times \log_c b$

حل:

$$\log_a b \times \log_c d = \frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log d}{\log c} = \frac{\log b}{\log c} \times \frac{\log d}{\log a} = \log_c b \times \log_a d$$

مثال ۱۶: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = \log_{۵۰} ۲ + \log_{۵۰} \frac{۳}{۲} + \log_{۵۰} \frac{۴}{۳} + \cdots + \log_{۵۰} \frac{۵۰}{۴۹}$$

حل:

$$A = \log_{۵۰} \left(۲ \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۴}{۳} \times \cdots \times \frac{۵۰}{۴۹}\right) = \log_{۵۰} ۵۰ = ۱$$

مثال ۱۷: اگر $\log_{۱۲} ۲۷ = a$، حاصل $\log_{۶} ۱۶$ را حساب کنید.

حل:

$$\log_{۱۲} ۲۷ = a \Rightarrow \log_{۲۷} ۱۲ = \frac{۱}{a} \Rightarrow \log_{۳۳} (۲^۲ \times ۳) = \frac{۱}{a}$$

$$\Rightarrow \log_{۳۳} ۲^۲ + \log_{۳۳} ۳ = \frac{۱}{a} \Rightarrow \frac{۲}{۳} \log_۳ ۲ + \frac{۱}{۳} \log_۳ ۳ = \frac{۱}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۳} \log_۳ ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{a} \Rightarrow ۲ \log_۳ ۲ = \frac{۳-a}{a} \Rightarrow \log_۳ ۲ = \frac{۳-a}{۲a}$$

$$\Rightarrow \log_۲ ۳ = \frac{۲a}{۳-a}$$

$$\log_{۶} ۱۶ = \log_{۶} ۲^۴ = ۴ \log_{۶} ۲ = \frac{۴}{\log_{۶} ۲} = \frac{۴}{\log_۲ ۳ + \log_۲ ۲} = \frac{۴}{\log_۲ ۳ + ۱}$$

$$= \frac{۴}{\frac{۲a}{۳-a} + ۱} = \frac{۴(۳-a)}{۲a+۳-a} = \frac{۱۲-۴a}{a+۳}$$

مثال ۱۸: حاصل عبارت $\log_۸ \log_۴ \log_۲ ۱۶$ را حساب کنید.

حل:

$$\log_۸ \log_۴ \log_۲ ۲^۴ = \log_۸ \log_۴ ۴ \log_۲ ۲ = \log_۸ \log_۴ ۴ = \log_۸ ۱ = ۰$$

مثال ۱۹: حاصل عبارت $۸۱^{\log_۹ \sqrt{۵} + \log_۳ \sqrt[۴]{۲}}$ را بدست آورید.

حل:

$$۸۱^{\log_۹ \sqrt{۵} + \log_۳ \sqrt[۴]{۲}} = ۳^{۴ \log_۹ \sqrt{۵} + ۴ \log_۳ \sqrt[۴]{۲}} = ۳^{\log_۹ ۲۵} \times ۳^{\log_۳ ۲}$$

MATH75.IR

$$= ۳^{\log_۳ ۵} \times ۳^{\log_۳ ۲} = ۵ \times ۲ = ۱۰$$

مثال ۲۰: اگر a و b و c اضلاع مثلثی باشند و رابطهٔ زیر بین اضلاع مثلث برقرار باشد، ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است.

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = ۲ \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a$$

حل:

$$\frac{۱}{\log_a c+b} + \frac{۱}{\log_a c-b} = \frac{۲}{\log_a c+b \cdot \log_a c-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\log_a c-b + \log_a c+b}{\log_a c+b \cdot \log_a c-b} = \frac{۲}{\log_a c+b \cdot \log_a c-b} \Rightarrow \log_a c-b + \log_a c+b = ۲$$

$$\log_a c^۲-b^۲ = ۲ \Rightarrow c^۲-b^۲ = a^۲ \Rightarrow c^۲ = a^۲+b^۲$$

بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است.

مثال ۲۱: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{۱}{\log_۲ ۱۰۰!} + \frac{۱}{\log_۳ ۱۰۰!} + \frac{۱}{\log_۴ ۱۰۰!} + \cdots + \frac{۱}{\log_{۱۰۰} ۱۰۰!}$$

حل:

$$\frac{۱}{\log_۲ ۱۰۰!} + \frac{۱}{\log_۳ ۱۰۰!} + \frac{۱}{\log_۴ ۱۰۰!} + \cdots + \frac{۱}{\log_{۱۰۰} ۱۰۰!} =$$

$$\log_{۱۰۰!} ۲+\log_{۱۰۰!} ۳+\log_{۱۰۰!} ۴ + \cdots +\log_{۱۰۰!} ۱۰۰ = \log_{۱۰۰!} ۲\times۳\times\cdots\times۱۰۰$$

$$= \log_{۱۰۰!} ۱۰۰! = ۱$$

مثال ۲۲: اگر $\log_{۳۰} ۳ = a$ و $\log_{۳۰} ۵ = b$ مقدار $\log_{۳۰} ۸$ را برحسب a و b بدست آورید.

حل:

$$\log_{۳۰} ۸ = \log_{۳۰} ۲^۳ = ۳ \log_{۳۰} ۲ = ۳ \log_{۳۰} \frac{۳۰}{۱۵} = ۳ \log_{۳۰} ۳۰-۳ \log_{۳۰} ۱۵$$

$$= ۳-۳(\log_{۳۰} ۳+\log_{۳۰} ۵) = ۳-۳ (a+b) = ۳-۳a-۳b$$

معادلات لگاریتمی

با توجه به‌اینکه لگاریتم تابعی یکنوا و یک به‌یک است می‌توان گفت اگر $\log_a x = \log_a y$ آنگاه $x=y$، (x و y مثبت و a عددی مثبت و مخالف یک است) از این ویژگی برای حل معادلات لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

MATH75.IR

مثال ۲۳: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log(x^{۲}+۳x-۴) = \log(۵x-۱)$ ب) $\log(۱۰-x)-\log(x+۲) = \log ۲$

ج) $\log(x+۳)+\log(x-۳)-\log x = ۳\log ۲$ د) $\log_{۳} x+\log_{۵}x = \log_{۳} ۲۲۵$

حل:

الف) $\log(x^{۲}+۳x-۴) = \log(۵x-۱) \Rightarrow x^{۲}+۳x-۴ = ۵x-۱$

$\Rightarrow x^{۲}-۲x-۳ = ۰ \Rightarrow (x-۳)(x+۱) = ۰ \Rightarrow x=۳$ یا $x=-۱$

به‌ازای $x=-۱$ مقدار عبارت $x^{۲}+۳x-۴$ منفی می‌شود که لگاریتم آن تعریف نشده است.

بنابراین جواب معادله $x=۳$ است.

در واقع برای حل معادلهٔ فوق باید داشته باشیم

$$\begin{cases} x^{۲}+۳x-۴ > ۰ \rightarrow x < -۴ \text{ یا } x>۱ \\ ۵x-۱ > ۰ \rightarrow x > \frac{۱}{۵} \\ x^{۲}+۳x-۴ = ۵x-۱ \rightarrow x = -۱ \text{ یا } x=۳ \end{cases}$$

که اشتراک جوابها $x=۳$ است.

ب) باید داشته باشیم

$$\begin{cases} ۱۰-x > ۰ \rightarrow x < ۱۰ \\ x+۲ > ۰ \rightarrow x > -۲ \end{cases} \Rightarrow -۲ < x < ۱۰$$

$$\log(۱۰-x)-\log(x+۲) = \log ۲ \Rightarrow \log \frac{۱۰-x}{x+۲} = \log ۲$$

$$\frac{۱۰-x}{x+۲} = ۲ \Rightarrow ۱۰-x = ۲x+۴ \Rightarrow ۳x=۶ \Rightarrow x=۲$$

ج)

$$\begin{cases} x+۳ > ۰ \\ x-۳ > ۰ \Rightarrow x > ۳ \\ x > ۰ \end{cases}$$

$$\log(x+۳)+\log(x-۳)-\log x = ۳\log ۲ \Rightarrow \log \frac{(x+۳)(x-۳)}{x} = \log ۸$$

$$\Rightarrow \frac{x^{۲}-۹}{x} = ۸ \Rightarrow x^{۲}-۸x-۹ = ۰ \Rightarrow x=-۱ \text{ یا } x=۹$$

جواب $x=۹$ قابل قبول است.

د) $$\log_{۳} x+\log_{۵}x = \log_{۳} ۲۲۵ \Rightarrow \frac{\log x}{\log ۳} + \frac{\log x}{\log ۵} = \frac{\log ۲۲۵}{\log ۳}$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \frac{\log ۵ \times \log x + \log ۳ \times \log x}{\log ۳ \times \log ۵} = \frac{۲ \log ۱۵}{\log ۳}$$

$$\Rightarrow \log x(\log ۵ + \log ۳) = ۲\log ۵ \log ۱۵ \Rightarrow \log x \times \log ۱۵ = ۲\log ۵ \log ۱۵$$

$$\Rightarrow \log x = ۲\log ۵ \Rightarrow \log x = \log ۲۵ \Rightarrow x = ۲۵$$

مثال ۲۴: معادلهٔ $\log_۲ (x+۱۴) + \log_۴ (x+۱۴) + \log_{۱۶} (x+۱۴) = ۷$ را حل کنید.

حل:

$$\log_۲ (x+۱۴) + \frac{۱}{۲} \log_۲ (x+۱۴) + \frac{۱}{۴} \log_۲ (x+۱۴) = ۷$$

$$\frac{۷}{۴} \log_۲ (x+۱۴) = ۷ \rightarrow \log_۲ (x+۱۴) = ۴ \Rightarrow x+۱۴ = ۱۶ \Rightarrow x = ۲$$

مثال ۲۵: معادلهٔ $(\sqrt{x})^{\log_۵ x - ۱} = ۵$ را حل کنید.

حل: از طرفین در مبنای ۵ لگاریتم می‌گیریم.

$$\log_۵ (\sqrt{x})^{\log_۵ x - ۱} = \log_۵ ۵ \Rightarrow (\log_۵ x - ۱) \log_۵ \sqrt{x} = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} (\log_۵ x - ۱) \log_۵ x = ۱ \Rightarrow (\log_۵ x)^۲ - \log_۵ x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow \log_۵ x = ۲ \text{ یا } \log_۵ x = -۱$$

$$\Rightarrow x = ۲۵ \text{ یا } x = \frac{۱}{۵}$$

مثال ۲۶: معادلهٔ $\log(x+۶) - \frac{۱}{۲} \log (۲x-۳) = ۲ - \log ۲۵$ را حل کنید.

حل: باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+۶ > ۰ \\ ۲x-۳ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -۶ \\ x > \frac{۳}{۲} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{۳}{۲}$$

$$\log (x+۶) - \log (۲x-۳)^{\frac{۱}{۲}} = \log ۱۰۰ - \log ۲۵$$

$$\log (x+۶) - \log \sqrt{۲x-۳} = \log \frac{۱۰۰}{۲۵} \Rightarrow \log \frac{x+۶}{\sqrt{۲x-۳}} = \log ۴$$

$$\Rightarrow \frac{x+۶}{\sqrt{۲x-۳}} = ۴ \Rightarrow x+۶ = ۴\sqrt{۲x-۳}$$

$$\Rightarrow x^۲ + ۱۲x + ۳۶ = ۳۲x - ۴۸ \Rightarrow x^۲ - ۲۰x + ۸۴ = ۰$$

MATH75.IR

$\Rightarrow x=۶$ یا $x=۱۴$

مثال ۲۷: معادلهٔ $\log_{۵-x}(x-۱)+\log_{۵-x}(x+۲) = \log_{۵-x}۴$ را حل کنید.

حل: باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x-۱>۰ \rightarrow x>۱ \\ x+۲>۰ \rightarrow x>-۲ \\ ۵-x>۰ \rightarrow x<۵ \\ ۵-x\neq ۱ \rightarrow x\neq ۴ \end{cases} \Rightarrow ۱<x<۵ \text{ و } x\neq ۴$$

$$\log_{۵-x}(x-۱)+\log_{۵-x}(x+۲) = \log_{۵-x}۴ \Rightarrow \log_{۵-x}(x-۱)(x+۲) = \log_{۵-x}۴$$

$$\Rightarrow \log_{۵-x}(x^۲+x-۲) = \log_{۵-x}۴ \Rightarrow x^۲+x-۲ = ۴$$

$$\Rightarrow x^۲+x-۶ = ۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x=-۳ \text{ یا } x=۲$$

جواب $x=-۳$ قابل قبول نیست.

مثال ۲۸: معادلهٔ $۱+\log_۵ \log_{۳۲} \log_۲ x = \log_۵ ۲$ را حل کنید.

حل:

$$\log_۵ \log_{۳۲} \log_۲ x = (\log_۵ ۲) - ۱ \Rightarrow \log_۵ \log_{۳۲} \log_۲ x = \log_۵ ۲-\log_۵ ۵$$

$$\Rightarrow \log_۵ \log_{۳۲} \log_۲ x = \log_۵ \left(\frac{۲}{۵}\right) \Rightarrow \log_{۳۲} \log_۲ x = \frac{۲}{۵}$$

$$\Rightarrow \log_۲ x = (۳۲)^{\frac{۲}{۵}} \Rightarrow \log_۲ x = ۴ \Rightarrow x=۲^۴ = ۱۶$$

مثال ۲۹: معادلهٔ $۹^{\log_{\frac{۱}{۳}}(x+۲)} = ۷^{\log_{\frac{۱}{۷}}(۲x^۲+۳x+۲)}$ را حل کنید.

حل:

$$(x+۲)^{\log_{\frac{۱}{۳}}۹} = (۲x^۲+۳x+۲)^{\log_{\frac{۱}{۷}}۷}$$

$$(x+۲)^{-۲} = (۲x^۲+۳x+۲)^{-۱} \Rightarrow (x+۲)^۲ = ۲x^۲+۳x+۲$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x+۴ = ۲x^۲+۳x+۲ \Rightarrow x^۲-x-۲ = ۰$$

$$\Rightarrow x=-۱ \text{ یا } x=۲$$

MATH75.IR

مثال ۳۰: معادلهٔ $۶^{\log x}+۸^{\log x}=x$ را حل کنید.

حل:

$$۶^{\log x}+۸^{\log x}=x^{\log ۱۰} \Rightarrow ۶^{\log x}+۸^{\log x}=۱۰^{\log x}$$

$$\Rightarrow \frac{۶^{\log x}}{۱۰^{\log x}}+\frac{۸^{\log x}}{۱۰^{\log x}}=۱ \Rightarrow \left(\frac{۳}{۵}\right)^{\log x}+\left(\frac{۴}{۵}\right)^{\log x}=۱$$

اگر قرار دهیم $\sin\alpha=\frac{۳}{۵}$، آنگاه خواهیم داشت: $\cos\alpha=\frac{۴}{۵}$. بنابراین:

$$\log x=۲ \rightarrow x=۱۰^{۲}=۱۰۰$$

مثال ۳۱: معادلهٔ $\log_x ۲ \times \log_{\frac{x}{۱۶}} ۲=\log_{\frac{x}{۶۴}} ۲$ را حل کنید.

حل:

$$\log_x ۲ \times \frac{۱}{\log_۲ \frac{x}{۱۶}}=\frac{۱}{\log_۲ \frac{x}{۶۴}} \Rightarrow \log_x ۲ \times \frac{۱}{\log_۲ x-\log_۲ ۱۶}=\frac{۱}{\log_۲ x-۶}$$

$$\log_۲ x=y \rightarrow \frac{۱}{y}\times\frac{۱}{y-۴}=\frac{۱}{y-۶} \Rightarrow \frac{۱}{y^۲-۴y}=\frac{۱}{y-۶}$$

$$\Rightarrow y^۲-۴y=y-۶ \Rightarrow y^۲-۵y+۶=۰ \Rightarrow y=۲ \text{ یا } y=۳$$

$$\log_۲ x=۳ \Rightarrow \boxed{x=۸} \quad \text{یا} \quad \log_۲ x=۲ \Rightarrow \boxed{x=۴}$$

مثال ۳۲: دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases}\log x^۲y^۳=۲\\ \log\frac{x}{y}=۱\end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases}\log x^۲+\log y^۳=۲\\ \log x-\log y=۱\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۲\log x+۳\log y=۲\\ ۳\log x-۳\log y=۳\end{cases}$$

$$۵\log x=۵ \Rightarrow \log x=۱ \rightarrow \boxed{x=۱۰}$$

$$\log\frac{۱۰}{y}=۱ \Rightarrow \frac{۱۰}{y}=۱۰ \Rightarrow \boxed{y=۱}$$

MATH75.IR

مثال ۳۳: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \log_{27} x - \log_4 y = -1 \\ \log_3 x - \log_2 y = -1 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} \log_{3^3} x - \log_{2^2} y = -1 \\ \log_3 x - \log_2 y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} 6 \\ -3 \end{array} \begin{cases} \frac{1}{3}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_2 y = -1 \\ \log_3 x - \log_2 y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_3 x - 3\log_2 y = -6 \\ -3\log_3 x + 3\log_2 y = 3 \end{cases} \Rightarrow -\log_3 x = -3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$$

$$\log_2 y = \log_3 x + 1 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow y = 2^4 = 16$$

مثال ۳۴: دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2 \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{cases} \frac{\log x}{\log y} + \frac{\log y}{\log x} - 2 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{(\log x)^2 + (\log y)^2 - 2\log x \log y}{\log x \log y} \\ x^2 + y = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\log x - \log y)^2 = 0 \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = \log y \\ x^2 + y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 + y = 12 \Rightarrow x^2 + x = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \quad \text{غ ق ق} \\ x = 3 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

نامعادلات لگاریتمی

قبل از بررسی نامعادلات لگاریتمی باید به‌نکات زیر توجه داشته باشیم:

اگر $a > 1$ آنگاه:

$$\begin{cases} x \geq 1 \Leftrightarrow \log_a x \geq 0 \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0 \end{cases}$$

MATH75.IR

اگر $0 < a < 1$ آنگاه:

$$\begin{cases} x \geq 1 \Leftrightarrow \log_a x \leq 0 \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0 \end{cases}$$

بنابراین اگر ($a>1$ و $x \geq 1$) یا ($0 < a < 1$ و $0 < x < 1$) $\log_a x$ مثبت است.

و اگر ($a > 1$ و $0 < x < 1$) یا ($0 < a < 1$ و $x \geq 1$) $\log_a x$ منفی است.

مثال ۳۵: علامت لگاریتمهای زیر را تعیین کنید.

$$\log_3 5 \quad \text{و} \quad \log_{\frac{1}{3}} 5 \quad \text{و} \quad \log_3 \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$$

حل:

$$\log_3 5 > 0 \quad \text{و} \quad \log_{\frac{1}{3}} 5 < 0 \quad \text{و} \quad \log_3 \frac{1}{2} < 0 \quad \text{و} \quad \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$$

می‌دانیم اگر مبنای لگاریتم برزگتر از واحد باشد لگاریتم تابعی اکیداً صعودی است. بنابراین اگر $a>1$ آنگاه:

$$\boxed{0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x < \log_a y}$$

همچنین اگر مبنای لگاریتم بین صفر و یک باشد تابع لگاریتم اکیداً نزولی است. لذا اگر $0 < a < 1$ آنگاه:

$$\boxed{0 < x < y \Leftrightarrow \log_a x > \log_a y}$$

از این ویژگیها برای حل نامعادلات لگاریتمی استفاده می‌کنیم.

مثال ۳۶: نامعادلهٔ $\log x + \log(x-1) < \log 2$ را حل کنید.

حل:

$$\log x\,(x-1) < \log 2$$

باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \rightarrow x > 1 \\ x(x-1) < 2 \rightarrow x^2-x-2 < 0 \rightarrow -1 < x < 2 \\ x(x-1) > 0 \rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب دستگاه فوق اشتراک مجموعهٔ جوابهای هریک از نامعادلات دستگاه است.

$$A = (1, 2)$$

MATH75.IR

مثال ۳۷: نامعادلهٔ $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) < \log_{\frac{1}{2}}(2x-7)$ را حل کنید.

حل:

$$\begin{cases} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ 2x-7>0 \Rightarrow x>3/5 \quad \Rightarrow 3/5<x<5 \\ x-2>2x-7 \Rightarrow x<5 \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب $= (3/5\ ,\ 5)$

مثال ۳۸: نامعادلهٔ $\log_3 \frac{4}{x+1} > \log_3(3-x)$ را حل کنید:

حل:

$$\begin{cases} \frac{4}{x+1}>0 \rightarrow x>-1 \\ 3-x>0 \rightarrow x<3 \\ \frac{4}{x+1}>3-x \rightarrow \frac{4}{x+1}-(3-x)>0 \rightarrow \frac{4-3x-3+x^2+x}{x+1}>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x+1}>0 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{x+1}>0 \rightarrow x>-1 \text{ و } x\neq 1$$

مجموعهٔ جواب عبارتست از:

$$A=(-1\ ,\ 3)-\{1\}$$

نکته: اگر $a>1$ خواهیم داشت:

$$\log_a x<k \Leftrightarrow 0<x<a^k$$

$$\log_a x>k \Leftrightarrow x>a^k$$

نکته: اگر $0<a<1$ آنگاه:

$$\log_a x<k \Leftrightarrow x>a^k$$

$$\log_a x>k \Leftrightarrow x<a^k$$

مثال ۳۹: نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-3x}{x}\right)>-2$$

حل:

$$\frac{2-3x}{x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow \frac{2-3x}{x}<9$$

$$\Rightarrow \frac{2-3x}{x}-9<0 \Rightarrow \frac{2-12x}{x}<0 \Rightarrow x<0 \text{ یا } x>6$$

MATH75.IR

از طرف دیگر باید $\frac{۲-۳x}{x} > ۰$ درنتیجه $۰ < x < \frac{۳}{۲}$. پس این نامعادله جواب ندارد. یعنی:

$A = \varnothing$

مثال ۴۰: نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\log_{۲}\left(\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۲}\right) < ۱$$

$$\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۲} < ۲^{۱} \Rightarrow \frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۲} - ۲ < ۰$$

$$\frac{x^{۲}-۳x+۲-۲x+۴}{x-۲} < ۰ \Rightarrow \frac{x^{۲}-۵x+۶}{x-۲} < ۰$$

$x^{۲}-۵x+۶ = ۰ \rightarrow (x-۲)(x-۳) = ۰ \rightarrow x=۲$ یا $x=۳$

$x-۲ = ۰ \rightarrow x=۲$ $\qquad$ $x^{۲}-۳x+۲ = ۰ \rightarrow x=۱$ یا $x=۲$

x	$-\infty$		۲		۳		$+\infty$
$x^{۲}-۵x+۶$		+	۰	−	۰	+	
$x-۲$		−	۰	+		+	
$\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x-۲}$		−	ن	−	۰	+	
نتیجه		جواب		جواب			

$A_{۱} = (-\infty \text{ و } ۲) \cup (۲ \text{ و } ۳)$

با توجه به‌اینکه $\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۲}$ باید مثبت باشد خواهیم داشت:

$$\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۲} = \frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۲} \overset{x \neq ۲}{=\!=} x-۱ > ۰ \rightarrow x > ۱ \text{ و } x \neq ۲$$

مجموعه جواب $= (۱ \text{ و } ۲) \cup (۲ \text{ و } ۳)$

مثال ۴۱: نامعادله $۵^{\log_x \frac{۸-۱۲x}{x-۶}} > ۲۵$ را حل کنید. $(x>۱)$.

حل:

$$۵^{\log_x \frac{۸-۱۲x}{x-۶}} > ۵^{۲} \Rightarrow \log_x \frac{۸-۱۲x}{x-۶} > ۲$$

MATH75.IR

$$\begin{cases} \dfrac{۸-۱۲x}{x-۶} > ۰ \\ \dfrac{۸-۱۲x}{x-۶} > x^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۸-۱۲x}{x-۶} > ۰ \\ \dfrac{-x^۳+۶x^۲-۱۲x+۸}{x-۶} > ۰ \Rightarrow \dfrac{(-x+۲)^۳}{x-۶} > ۰ \end{cases}$$

$$۸-۱۲x = ۰ \rightarrow x = \frac{۲}{۳} \qquad x-۶ = ۰ \rightarrow x = ۶$$

$$(-x+۲)^۳ = ۰ \rightarrow x=۲$$

x	$-\infty$		$\frac{۲}{۳}$		۲		۶		$+\infty$
$\frac{۸-۱۲x}{x-۶}$		$-$	۰	$+$		$+$	ن	$-$	
$\frac{(-x+۲)^۳}{x-۶}$		$-$		$-$	۰	$+$	ن	$-$	
						جواب			

مجموعهٔ جواب = (۶ و ۲)

مثال ۴۲: نامعادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\log_۳ \log_۴ \frac{۴x-۱}{x+۱} - \log_{\frac{۱}{۳}} \log_{\frac{۱}{۴}} \frac{x+۱}{۴x-۱} < ۰$$

حل:

$$\log_۳ \log_۴ \frac{۴x-۱}{x+۱} + \log_۳ \log_۴ \frac{۴x-۱}{x+۱} < ۰$$

$$۲\log_۳ \log_۴ \frac{۴x-۱}{x+۱} < ۰ \Rightarrow ۰ < \log_۴ \frac{۴x-۱}{x+۱} < ۱ \Rightarrow ۱ < \frac{۴x-۱}{x+۱} < ۴$$

$$\begin{cases} \dfrac{۴x-۱}{x+۱} > ۱ \\ \dfrac{۴x-۱}{x+۱} < ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۴x-۱-x-۱}{x+۱} > ۰ \\ \dfrac{۴x-۱-۴x-۴}{x+۱} < ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۳x-۲}{x+۱} > ۰ \rightarrow x < -۱ \text{ یا } x > \dfrac{۲}{۳} \\ \dfrac{-۵}{x+۱} < ۰ \rightarrow x > -۱ \end{cases}$$

مجموعهٔ جواب = $\left(\frac{۲}{۳} \text{ و } +\infty\right)$

MATH75.IR

تمرینهای فصل پنجم

۱ـ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۲^{x^۲}$

ب) $y = ۲^{x-[x]}$

ب) $y = [۲^x]$

د) $y = ۲^{x-۱}+۱$

ه) $y = \log(x+۲)$

و) $y = \left[\log_{\frac{۱}{۲}} x\right]$

ز) $y = \log |x|$

ح) $y = \log_{\frac{۱}{۲}}(x+۱)$

۲ـ دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = ۲^{[x]+[-x]}$

ب) $y = ۵^{-x}$

ج) $y = \log_۲ \sqrt{۱-x^۲}$

د) $y = \sqrt{\log_{\frac{۱}{۲}} x}$

۳ـ یک به‌یک و پوشا بودن توابع زیر را بررسی کنید.

الف) $\begin{cases} f : (۱ \text{ و } +\infty) \to R \\ f(x) = \log_۳ \log_۵ x \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f : (۲ \text{ و } +\infty) \to R \\ f(x) = \log_۳ (x-۲) \end{cases}$

۴ـ آیا دو تابع $f(x) = \log x^۲$ و $g(x) = ۲ \log x$ باهم مساویند یا خیر؟ چرا؟

۵ـ اگر $f(x) = \log (x+ \sqrt{x^۲-۱})$، مطلوبست محاسبهٔ $f(۴x^۳-۳x)$.

۶ـ اگر $f(x) = \log \frac{۱+x}{۱-x}$ و $f(z) = f(x)+f(y)$، عدد حقیقی z را بدست آورید.

۷ـ توابع f و g با ضابطه‌های $f(x) = \log \frac{x+۲}{۲-x}$، $g(x) = ۱-\cos x$ داده شده‌اند. اولاً دامنهٔ تابع fog را بدست آورید. ثانیاً ضابطهٔ آنرا مشخص کنید.

۸ـ تابع f به‌ازای هر $n \in N$ تعریف شده است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $f(۱) = ۱$

۲) $\forall n > ۱ : f(n) = f(n-۱)+a^n$

مطلوبست محاسبهٔ $f(n)$.

MATH75.IR

۹ـ دامنهٔ توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x) = \log_5 \log_4 \log_3 (x+3)$ ب) $f(x) = \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

۱۰ـ تعیین کنید تابع $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ زوج است یا فرد؟

۱۱ـ اگر $f(x)=a^x$ و $g(x) = \log_a x$ ضابطهٔ $fog(x)$ را بیابید.

۱۲ـ ضابطهٔ معکوس تابع $f(x) = \log(x+1)$ را بدست آورید.

۱۳ـ اگر $\log_{ab} a = 4$ حاصل $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$ را حساب کنید.

۱۴ـ اگر $\log_6 15 = a$ و $\log_{12} 18 = b$ مطلوبست محاسبهٔ $\log_{25} 24$.

۱۵ـ اگر $\log_{12} 18 = a$ و $\log_{24} 54 = b$ ثابت کنید $ab+5(a-b) = 1$.

۱۶ـ اگر $\log_{12} 24 = b$ و $\log_7 12 = a$ مطلوبست محاسبهٔ $\log_{54} 168$.

۱۷ـ ثابت کنید:

$$\log_a N \times \log_b N + \log_b N \times \log_c N + \log_c N \times \log_a N = \frac{\log_a N \times \log_b N \times \log_c N}{\log_{abc} N}$$

۱۸ـ ثابت کنید:

$$\frac{1}{\log_a 2 \cdot \log_a 4} + \frac{1}{\log_a 4 \cdot \log_a 8} + \cdots + \frac{1}{\log_a 2^{n-1} \cdot \log_a 2^n} = \frac{n-1}{n} (\log_2 a)^2$$

۱۹ـ حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$\log_{\sqrt[5]{5}} 2\sqrt{5} - \log_{\sqrt[3]{5}} 5\sqrt{5} + \log_{(\sqrt{3}+1)} (4+2\sqrt{3})$$

۲۰ـ اگر داشته باشیم: $x = \log_a bc$ و $y = \log_b ca$ و $z = \log_c ab$

ثابت کنید: $x+y+z+2 = xyz$

۲۱ـ اگر $a = \log_b c$ و $b = \log_c a$ و $c = \log_a b$، ثابت کنید:

الف) $abc = 1$

ب) $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$

۲۲ـ اگر $a^2+b^2=c^2$، ثابت کنید:

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$$

MATH75.IR

۲۳ـ اگر $a^{۲}+b^{۲} = ۷ab$، ثابت کنید:

$$\log \frac{a+b}{۳} = \frac{۱}{۲}(\log a + \log b)$$

۲۴ـ اگر $\log ۲ = a$ و $\log ۳ = b$، مطلوبست حاصل $\log_{۱۵} \sqrt[۵]{۱۱/۲۵}$.

۲۵ـ ثابت کنید:

$$(\log_{۱۳} ۱۹)^{-۱} + (\log_{۸} ۱۹)^{-۱} > ۲$$

۲۶ـ ثابت کنید: $\dfrac{\log_a n \cdot \log_b n}{\log_a n + \log_b n} = \log_{ab} n$

۲۷ـ اگر $۴ab = ۴a^{۲} + ۹b^{۲}$ و $b > ۰$ و a ثابت کنید: $\log \dfrac{۲a+۳b}{۴} = \dfrac{\log a + \log b}{۲}$

۲۸ـ اگر $\log ۳ = a$ و $\log ۲ = b$، ثابت کنید: $\log_{۵} ۶ = \dfrac{a+b}{۱-b}$.

۲۹ـ اگر $xyz = ۱$ باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\left(\log_z \frac{x}{y} + \log_x \frac{y}{z} + \log_y \frac{z}{x}\right)\left(\log_{\frac{x}{y}} z + \log_{\frac{y}{z}} x + \log_{\frac{z}{x}} y\right)$$

۳۰ـ با فرض $x = \log_d abc$ و $y = \log_b acd$ و $z = \log_c abd$ و $t = \log_a bcd$، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{x+۱} + \frac{۱}{y+۱} + \frac{۱}{z+۱} + \frac{۱}{t+۱} = ۱$$

۳۱ـ اگر داشته باشیم $\log ax^{۳} - \log bx^{۲} - \log cx + \log d = ۰$ رابطهٔ بین a، b، c و d را بدست آورید.

۳۲ـ اگر اعداد مثبت a، b و c در رابطهٔ $\dfrac{bc}{\log a} = \dfrac{ac}{\log b} = \dfrac{ab}{\log c}$ صدق کنند، ثابت کنید:

$$a^{a(c-d)} \times b^{b(a-c)} \times b^{c(b-a)} = ۱$$

۳۳ـ اگر $x^{m} = y^{n} = (xy)^{mn}$ ثابت کنید: $m+n=۱$.

۳۴ـ ثابت کنید $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}} = \log a$.

۳۵ـ اگر $\log_a u + \log_b u + \log_c u = \log_{abc} u$ باشد چه رابطه‌ای بین a و b و c برقرار است؟

۳۶ـ عددهای $\log_{۳} ۴$ و $\log_{۵} ۶$ را مقایسه کنید.

۳۷ـ عددهای $\log_{۱۳} ۱۵۰$ و $\log_{۱۷} ۲۹۹$ را مقایسه کنید.

۳۸ـ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

MATH75.IR

الف) $\log tg۱° \times \log tg۲° \times \cdots \times \log tg۸۹°$

ب) $\log tg۱° + \log tg۲° + \cdots + \log tg۸۹°$

۳۹ـ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log(x+۱) - \frac{۱}{۲}\log(x-۱) = \log ۳$

ب) $\frac{۱}{۱-۴\log x} + \frac{۴}{۲+\log x} = ۳$

ج) $\log_{\frac{x}{۲}} x^۲ - ۱۴\log_{۱۶x} x^۳ + ۴۰\log_{۴x}\sqrt{x} = ۰$

د) $\log_۳ \log_۸ \log_۲(x-۳) = \log_۳ ۲$

هـ) $\log_۴(\log_۲ x) + \log_۲(\log_۴ x) = ۲$

و) $۶^{\log x} + ۸^{\log x} = x$

ز) $\sqrt{\log_۲ x^۴} + ۴\log_۴\sqrt{\frac{۲}{x}} = ۲$

ح) $\log_{\sqrt{x}} ۲ + ۴\log_۴ x^۲ + ۹ = ۰$

ط) $\log_x ۳ \cdot \log_{\frac{x}{۳}} ۳ + \log_{\frac{x}{۸۱}} ۳ = ۰$

ی) $۳^x + ۴^x = ۵^x$

ک) $\log_x ax \times \log_a x = ۱ + \log_x\sqrt{a} \quad (a > ۰ \text{ و } a \neq ۱)$

ل) $\sqrt{\log_x \sqrt{x}} = ۱۰$

م) $۱۰^{۱+x^۲} - ۱۰^{۱-x^۲} = ۹۹$

ن) $(\sqrt{۴-\sqrt{۱۵}})^x + (\sqrt{۴+\sqrt{۱۵}})^x = (۲\sqrt{۲})^x$

س) $x^{۱-\log x} = ۰/۰۱$

ع) $x^{\log_x ۲(x^۲-۱)} = ۵$

ف) $\log_{\frac{x}{۲}} ۲ \times \log_x ۲ = ۱$

ص) $\sqrt{\log_x \sqrt{۵x}} \times \log_۵ x = -۱$

MATH75.IR

ق) $\log_x ۲ \times \log_{\frac{x}{۱۶}} ۲ = \log_{\frac{x}{۶۴}} ۲$

ر) $\log_۲ ۲ (x-۱)^۲ = ۵+\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۱)$

ش) $\log_x \sqrt{۵} + \log_x (۵x)-۲/۲۵ = (\log_x \sqrt{۵})^۲$

ت) $\log_۳ x+\log_۵ x = \log_۳ ۲۲۵$

ث) $\log_۹ x-\log_{۲۷} x + \log_{۸۱} x = \frac{۵}{۲۴}$

خ) $۱+a+a^۲+ \cdots +a^{x-۱}+a^x = (۱+a)(۱+a^۲)(۱+a^۳)(۱+a^۴)(۱+a^۸)$

ذ) $۵^۲ \times ۵^۴ \times ۵^۶ \times \cdots \times ۵^{۲x} = ۰/۰۴^{-۲۸}$

ض) $\log_۸ x+\left(\log_۸ x\right)^۲+\left(\log_۸ x\right)^۳+ \cdots = \frac{۱}{۲}$

ظ) $\frac{\log x^۲}{(\log x)^۲} + \frac{\log x^۳}{(\log x)^۳} + \frac{\log x^۴}{(\log x)^۴} + \ldots = ۸$

غ) $۳ \times ۱۶^x+۳۷ \times ۳۶^x = ۲۶ \times ۸۱^x$

پ) $۲۷^x+۱۲^x = ۲ \times ۸^x$

ژ) $\log_{x^۲-۱} (x^۳+۶) = \log_{x^۲-۱} (۴x^۲-x)$

گ) $\log_{x+۴} (x^۲-۱) = \log_{x+۴} (۵-x)$

۴۰ـ دستگاههای زیر را حل کنید.

الف) $\begin{cases} \log x+\log y = ۰ \\ x^۲+y^۲ = ۲ \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \log \sqrt{xy} = ۱+\log ۲ \\ ۲^{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = ۵۱۲ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} ۲^{\log ۲x} \times ۳^{\log y} = ۶ \\ ۳^{\log ۲x} \times ۲^{\log y} = ۶ \end{cases}$

د) $\begin{cases} \log_y x+\log_x y = \frac{۵}{۲} \\ x+y = ۶ \end{cases}$

هـ) $\begin{cases} \log_۳ x-\log_۲ y = -۱ \\ \log_{۲۷} x-\log_۴ y = -۱ \end{cases}$

و) $\begin{cases} \log_a x+\log_{a^۲} y = \frac{۳}{۲} \\ \log_{b^۲} x-\log_{b^۲} y = ۱ \end{cases}$

ز) $\begin{cases} \log_۴ x-\log_۲ y = ۰ \\ x^۲-۵y^۲+۴ = ۰ \end{cases}$

ح) $\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = ۲\sqrt{۳} \\ (x+y)\, ۲^{y-x} = ۳ \end{cases}$

MATH75.IR

۴۱ـ نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $(\sqrt{۳})^x \times ۳ > \frac{۱}{۲۷}$

ب) $\log_{x-۳} ۷ < ۳$

ج) $\log_{\frac{۱}{۳}} \sqrt{۲x-۱} - \log_{\frac{۱}{۳}} (x-۲) > ۰$

د) $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} < ۱۰$

ه) $x^{\sqrt{x}} > \sqrt{x^x}$

و) $x^{\log_۳ x-۴} \geq \frac{۱}{۲۷}$

ح) $\log_۴ \log_۲ x+\log_۲ \log_۴ x > ۲$

ط) $\log_۴ \log_۲ \log_{\sqrt{۵}} x < \frac{۱}{۲}$

ی) $۴-\log x \geq ۳\sqrt{\log x}$

ک) $\log_{\frac{۱}{۲}}\left(\log_۶ \frac{x^۲+x}{x+۴}\right) < ۰$

ل) $\log_{\frac{۱}{۳}}(x^۲-۶x+۱۸)-۲\log_{\frac{۱}{۳}}(x-۴) < ۰$

م) $\log_۲ x-\log_x ۳۲ \leq ۴$

ن) $\begin{cases} \log_{۲-x}(۲-y) > ۰ \\ \log_{۴-y}(۲x-۲) > ۰ \end{cases}$

س) $\log_{\frac{۱}{۲}} \log_۲ \log_{x-۱} ۹ > ۰$

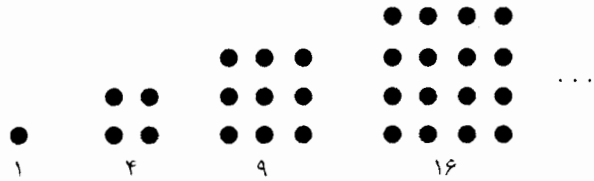
MATH75.IR

فصل ششم

دنباله ـ تصاعد

مجموعهٔ اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. اولین عضو این مجموعه عدد یک است و عدد دوم با افزودن یک واحد به عدد یک و عدد سوم با افزودن یک واحد به عدد دوم و بطور کلی عدد $(n + ۱)$ام با افزودن یک واحد به عدد nام بدست آمده است. مجموعهٔ اعداد طبیعی که بدین ترتیب ساخته شده یک دنباله است.

اینک مجموعهٔ اعداد مربعی را در نظر بگیرید.



بین مجموعهٔ اعداد مربعی یعنی مجموعهٔ $A = \{۱ , ۴ , ۹ , ۱۶ , ...\}$ و مجموعهٔ اعداد طبیعی یک تناظر یک به یک برقرار است.

$$\begin{array}{l} N = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ... , n , ...\} \\ \qquad\;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \;\; \updownarrow \qquad \updownarrow \\ A = \{۱ , ۴ , ۹ , ۱۶ , ... , n^۲ , ...\} \end{array}$$

اگر این تناظر را به صورت مجموعهٔ زوجهای مرتب بنویسیم:

$$B = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۴) , (۳ , ۹) , (۴, ۱۶) , ... , (n , n^۲) , ...\}$$

ملاحظه می‌کنیم تابعی از مجموعهٔ اعداد طبیعی به مجموعهٔ A تعریف شده که تابعی

MATH75.IR

یک‌به‌یک می‌باشد.

$$\begin{cases} f : N \longrightarrow A \\ f(n) = n^{۲} \end{cases}$$

به طور کلی به مجموعه‌ای از اعداد که چنان مرتب شده باشند که بین اعضای آن مجموعه و اعداد طبیعی یک تناظر یک به یک وجود داشته باشد یک دنباله گفته می‌شود.

در دنبالهٔ اعداد مربعی عدد ۱ از مجموعهٔ N به عدد یک از A نظیر شده که آنرا جملهٔ اول دنباله می‌نامیم و عدد ۲ از N به عدد ۴ از A نظیر شده که ۴ را جملهٔ دوم دنباله می‌نامیم و به طور کلی عدد طبیعی n از N به عدد $n^{۲}$ از A نظیر شده که $n^{۲}$ را جملهٔ nام دنباله می‌گوییم.

تعریف: دنباله تابعی است که دامنه‌اش قطعه‌ای از اعداد طبیعی یا خود اعداد طبیعی باشد.

اگر دامنهٔ تابع قطعه‌ای از اعداد طبیعی باشد دنباله متناهی و اگر دامنه خود اعداد طبیعی باشد دنباله نامتناهی است.

مثال ۱: دنبالهٔ اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۱۰ یک دنبالهٔ متناهی است زیرا دامنهٔ آن مجموعهٔ $N_{۴} = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ است.

$$f = \{(۱ , ۲) , (۲ , ۴) , (۳ , ۶) , (۴ , ۸)\}$$

مثال ۲: دنبالهٔ اعداد طبیعی فرد یک دنبالهٔ نامتناهی است. زیرا دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

$$\begin{array}{c} \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , \dots , n , \dots\} \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow \\ \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , \dots , ۲n - ۱ , \dots\} \end{array}$$

$$f = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۳) , (۳ , ۵) , (۴ , ۷) , \dots , (n , ۲n - ۱) , \dots\}$$

نمایش دنباله: برای نمایش دنباله یک حرف مانند t را انتخاب کرده و مرتبهٔ هر جمله را به صورت اندیسی بر آن حرف می‌نویسند. مثلاً جملهٔ اول دنباله را با $t_{۱}$ و جملهٔ دوم را با $t_{۲}$ و جملهٔ nام را با t_n و خود دنباله را با نماد $\{t_n\}$ نشان می‌دهند. مثلاً در دنبالهٔ اعداد طبیعی فرد داریم:

$$t_{۱} = ۱ \ , \quad t_{۲} = ۳ \ , \quad t_{۳} = ۵ \ , \quad t_n = ۲n - ۱$$

جملهٔ $t_n = ۲n - ۱$ را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامند.

نکته: اگر دنباله را به صورت تابعی از N تعریف کنیم جملهٔ عمومی ضابطهٔ تابع می‌باشد.

مثال ۳: جملهٔ عمومی یک دنباله به صورت $t_n = \frac{n}{n + ۱}$ است، این دنباله را مشخص کنید.

MATH75.IR

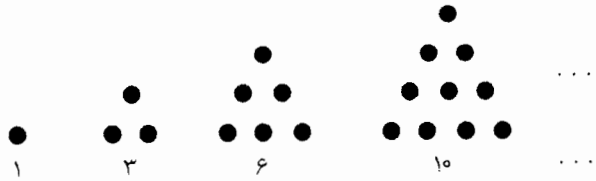
حل:

$$t_۱ = \frac{۱}{۱+۱} \ , \ t_۲ = \frac{۲}{۲+۱} \ , \ t_۳ = \frac{۳}{۳+۱} \ , \ldots$$

$$\frac{۱}{۲} , \frac{۲}{۳} , \frac{۳}{۴} , \frac{۴}{۵} , \ldots$$

$$\{t_n\} = \{(۱ , \frac{۱}{۲}) , (۲ , \frac{۲}{۳}) , (۳ , \frac{۳}{۴}) , \ldots , (n , \frac{n}{n+۱}) , \ldots\}$$

مثال ۴: دنبالهٔ اعداد مثلثی را در نظر بگیرید و جمله عمومی دنباله را تعیین کنید.



حل:

تعداد نقطه‌ها در اولین مثلث ۱

تعداد نقطه‌ها در دومین مثلث $۱ + ۲ = ۳$

تعداد نقطه‌های سومین مثلث $۱ + ۲ + ۳ = \frac{۳ \times (۳+۱)}{۲} = ۶$

تعداد نقطه‌های چهارمین مثلث $۱ + ۲ + ۳ + ۴ = \frac{۴(۴+۱)}{۲} = ۱۰$

.....

.....

تعداد نقطه‌های nامین مثلث $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ اعداد مثلثی به صورت $t_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$ است.

$$\begin{array}{ccccccccccc} ۱ & , & ۲ & , & ۳ & , & ۴ & , & \ldots & , & n & , & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ ۱ & , & ۳ & , & ۶ & , & ۱۰ & , & & , & \frac{n(n+۱)}{۲} & , & \ldots \end{array}$$

$$\{t_n\} = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۳) , (۳ , ۶) , (۴ , ۱۰) , \ldots , (n , \frac{n(n+۱)}{۲}) , \ldots\}$$

نکته: اگر هر جفت از جملات متوالی دنبالهٔ مثلثی را با هم جمع کنیم دنبالهٔ مربعی پدید می‌آید.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} ۱ & , & ۳ & , & ۶ & , & ۱۰ & , & ۱۵ & , & ۲۱ & , & \ldots \\ & ۴ & & ۹ & & ۱۶ & & ۲۵ & & ۳۶ & & , & \ldots \end{array}$$

MATH75.IR

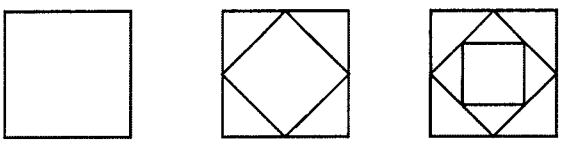
مثال ۵: جملهٔ عمومی یک دنباله که روی اعداد طبیعی تعریف شده است به صورت $f(n) = \frac{۲n}{n^۲ + ۱}$ است. جملهٔ دهم این دنباله چیست؟

حل:

$$n = ۱۰ \Rightarrow f(۱۰) = \frac{۲ \times ۱۰}{۱۰^۲ + ۱} = \frac{۲۰}{۱۰۱}$$

مثال ۶: مربعی به ضلع ۱ سانتیمتر را در نظر بگیرید. اگر وسطهای اضلاع این مربع را متوالیاً به هم وصل کنیم مربع دیگری پدید می‌آید. بار دیگر اوساط اضلاع مربع جدید را به هم وصل می‌کنیم تا مربع دیگری پدید آید. مساحت این مربعها یک دنباله می‌سازند. این دنباله را مشخص کنید.

حل:



$S_۱ = ۱$ $\quad S_۲ = \frac{۱}{۲}$ $\quad S_۳ = \frac{۱}{۴}$ $\quad \dots \quad S_n = \frac{۱}{۲^{n-۱}}$

$$\{S_n\} = \{(۱ , ۱) , (۲ , \frac{۱}{۲}) , (۳ , \frac{۱}{۴}), \dots , (n , \frac{۱}{۲^{n-۱}}) , \dots\}$$

رابطهٔ بازگشتی: در بسیاری از دنباله‌ها بین هر جمله و جملهٔ قبل از آن رابطه‌ای برقرار است که به آن رابطهٔ بازگشتی می‌گویند.

به عنوان مثال در دنبالهٔ اعداد طبیعی رابطهٔ بازگشتی به صورت $t_n = t_{n-۱} + ۱$ است. همچنین در دنبالهٔ ... , ۴۱ , ۲۹ , ۱۸ , ۸ رابطهٔ بازگشتی به صورت زیر است.

$$t_۱ = ۸ \quad , t_۲ = ۸ + (۲ + ۸) = ۱۸ \quad , \quad t_۳ = ۱۸ + (۳ + ۸) = ۲۹$$

$$t_n = t_{n-۱} + (n + ۸)$$

دنبالهٔ فیبوناتچی: دنبالهٔ ... , ۵۵ , ۳۴ , ۲۱ , ۱۳ , ۸ , ۵ , ۳ , ۲ , ۱ , ۱ به دنبالهٔ فیبوناتچی معروف است که در آن رابطهٔ بازگشتی به صورت زیر است.

$$t_n = t_{n-۱} + t_{n-۲} \qquad (n \geq ۳) \quad , \quad t_۱ = t_۲ = ۱$$

مثال ۷: جملات یازدهم و دوازدهم در دنبالهٔ فیبوناتچی به ترتیب ۸۹ و ۱۴۴ است. جملهٔ پانزدهم این دنباله چیست؟

حل:

$$t_{۱۳} = t_{۱۲} + t_{۱۱} = ۱۴۴ + ۸۹ = ۲۳۳$$

MATH75.IR

$t_{۱۴} = t_{۱۳} + t_{۱۲} = ۲۳۳ + ۱۴۴ = ۳۷۷$

$t_{۱۵} = t_{۱۴} + t_{۱۳} = ۳۷۷ + ۲۳۳ = ۶۱۰$

مجموع جملات دنبالهٔ فیبوناتچی:

$۱ + ۱ = ۲ = ۲ \times ۱ + (۱ - ۱)$

$۱ + ۱ + ۲ = ۴ = ۲ \times ۲ + (۱ - ۱)$

$۱ + ۱ + ۲ + ۳ = ۷ = ۲ \times ۳ + (۲ - ۱)$

$۱ + ۱ + ۲ + ۳ + ۵ = ۱۲ = ۲ \times ۵ + (۳ - ۱)$

$۱ + ۱ + ۲ + ۳ + ۵ + ۸ = ۲۰ = ۲ \times ۸ + (۵ - ۱)$

$۱ + ۱ + ۲ + ۳ + ۵ + ۸ + ۱۳ = ۳۳ = ۲ \times ۱۳ + (۸ - ۱)$

با توجه به الگوی فوق در می‌یابیم مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ فیبوناتچی از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\boxed{S_n = ۲t_n + (t_{n-۱} - ۱)}$$

مثال ۸: مجموع ده جملهٔ اول دنبالهٔ فیبوناتچی چقدر است؟

حل:

$۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۸ , ۱۳ , ۲۱ , ۳۴ , ۵۵$

$t_{۱۰} = ۵۵ , \ t_{۹} = ۳۴$

$S_{۱۰} = ۲ \times ۵۵ + (۳۴ - ۱) = ۱۱۰ + ۳۳ = ۱۴۳$

نکته: کسر مسلسل $۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{۱ + \cfrac{۱}{\vdots}}}$ برابر نسبت $\frac{۱ + \sqrt{۵}}{۲} \approx ۱/۶۱۸$ (که به نسبت طلایی معروف است) می‌باشد.

نکته: در دنبالهٔ فیبوناتچی نسبت هر دو جملهٔ متوالی $\frac{t_n + ۱}{t_n}$ با افزایش n به نسبت طلایی نزدیک می‌شود.

$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۱}{۱} = ۱$ $\qquad \frac{t_۳}{t_۲} = \frac{۲}{۱} = ۲$ $\qquad \frac{t_۴}{t_۳} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$

$\frac{t_۵}{t_۴} = \frac{۵}{۳} = ۱/۶۷$ $\qquad \frac{t_۶}{t_۵} = \frac{۸}{۵} = ۱/۶$ $\qquad \frac{t_۷}{t_۶} = \frac{۱۳}{۸} = ۱/۶۲۵$

MATH75.IR

$\frac{t_۸}{t_۷} = \frac{۲۱}{۱۳} = ۱/۶۱۵$ $\frac{t_۹}{t_۸} = \frac{۳۴}{۲۱} = ۱/۶۱۹$ $\frac{t_{۱۰}}{t_۹} = \frac{۵۵}{۳۴} = ۱/۶۱۸$

تصاعد حسابی (عددی)

تصاعد حسابی دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن برابر است با جملهٔ قبلی به اضافهٔ یک مقدار ثابت که این مقدار ثابت را قدر نسبت تصاعد می‌نامیم و آنرا با d نشان می‌دهیم.

رابطهٔ بازگشتی در تصاعد حسابی به صورت زیر است.

$$t_n = t_{n-۱} + d$$

بنابراین با در دست داشتن یک جمله از تصاعد حسابی و قدر نسبت آن با افزودن قدر نسبت به آن جمله، می‌توان جملهٔ بعدی و به همین ترتیب جمله‌های بعدی را بدست آورد. همچنین با کم کردن قدر نسبت از جملهٔ مفروض می‌توان جملهٔ قبلی و جملات قبل از آن را بدست آورد.

دنبالهٔ ... , ۱۸ , ۱۳ , ۸ , ۳ یک تصاعد حسابی است که در آن قدر نسبت برابر ۵ و جملهٔ اول برابر ۳ می‌باشد.

$$t_۱ = ۳ \ , \quad d = ۵$$

در تصاعد حسابی اگر قدر نسبت مثبت باشد تصاعد صعودی و اگر قدر نسبت منفی باشد تصاعد نزولی می‌باشد.

جملهٔ nام یک تصاعد حسابی

جملهٔ اول	$t_۱$
جملهٔ دوم	$t_۲ = t_۱ + d$
جملهٔ سوم	$t_۳ = t_۲ + d = t_۱ + d + d = t_۱ + ۲d$
جملهٔ چهارم	$t_۴ = t_۳ + d = (t_۱ + ۲d) + d = t_۱ + ۳d$

.
.
.

جملهٔ nام	$t_n = t_۱ + (n - ۱)d$

مثال ۹: اولاً در تصاعد حسابی زیر جملهٔ بیستم را بدست آورید. ثانیاً معین کنید چندمین جملهٔ آن ۲۲۵ است.

$$-۱۵ , -۷ , ۱ , ۹ , ۱۷ , ...$$

MATH75.IR

حل:

$$d = -۷ - (-۱۵) = ۸$$

$$t_{۲۰} = t_۱ + ۱۹d = -۱۵ + ۱۹ \times ۸ = ۱۳۷$$

$$t_n = -۱۵ + (n - ۱) \times ۸ \Rightarrow ۲۲۵ = -۱۵ + ۸n - ۸$$

$$۲۲۵ + ۲۳ = ۸n \Rightarrow ۲۴۸ = ۸n \Rightarrow \boxed{n = ۳۱}$$

مثال ۱۰: جملهٔ هفدهم یک تصاعد حسابی ۴۸ و جملهٔ سی و یکم آن ۹۰ است. تصاعد را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} t_{۱۷} = ۴۸ \\ t_{۳۱} = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ + ۱۶d = ۴۸ \\ t_۱ + ۳۰d = ۹۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t_۱ - ۱۶d = -۴۸ \\ t_۱ + ۳۰d = ۹۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۴d = ۴۲ \Rightarrow d = ۳$$

$$t_۱ + ۱۶ \times ۳ = ۴۸ \Rightarrow t_۱ = ۰$$

$$۰ , ۳ , ۶ , ۹ , ۱۲ , ...$$

مثال ۱۱: در یک تصاعد حسابی $t_۴ + t_{۱۱} = ۱۰۵$ و $t_۳ + t_۷ = ۸۰$. تصاعد را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} t_۴ + t_{۱۱} = ۱۰۵ \\ t_۳ + t_۷ = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱ + ۳d + t_۱ + ۱۰d = ۱۰۵ \\ t_۱ + ۲d + t_۱ + ۶d = ۸۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲t_۱ + ۱۳d = ۱۰۵ \\ ۲t_۱ + ۸d = ۸۰ \end{cases} \Rightarrow ۱۳d - ۸d = ۱۰۵ - ۸۰ \Rightarrow ۵d = ۲۵ \Rightarrow \boxed{d = ۵}$$

$$۲t_۱ + ۸ \times ۵ = ۸۰ \Rightarrow ۲t_۱ = ۴۰ \Rightarrow \boxed{t_۱ = ۲۰}$$

$$۲۰ , ۲۵ , ۳۰ , ۳۵ , ...$$

نکته: در یک تصاعد حسابی مجموع جمله‌های متساوی البعد از طرفین برابرند و اگر تصاعد جملهٔ وسط داشته باشد مجموع دو برابر جملهٔ وسط می‌باشند (جمله وسط جملهٔ $\frac{n+۱}{۲}$ام است)

$$t_۱ + t_n = t_۲ + t_{n-۱} = t_۳ + t_{n-۲} = ... = ۲t_{\frac{n+۱}{۲}}$$

MATH75.IR

مثال ۱۲: در تصاعد زیر داریم:

۵ , ۱۲ , ۱۹ , ۲۶ , ۳۳ , ۴۰ , ۴۷

$$۵ + ۴۷ = ۱۲ + ۴۰ = ۱۹ + ۳۳ = ۲ \times ۲۶$$

اگر تعداد جملات تصاعد زوج باشد خواهیم داشت:

$$t_۱ + t_n = t_۲ + t_{n-۱} = t_۳ + t_{n-۲} = ... = ۲t_۱ + (n - ۱)d$$

نکته: اگر در یک تصاعد حسابی جملهٔ اول و جملهٔ nام معلوم باشند، از فرمول جملهٔ عمومی نتیجه می‌گیریم:

$$\boxed{d = \frac{t_n - t_۱}{n - ۱}}$$

نکته: به طور کلی اگر t_m و t_n دو جمله از یک تصاعد حسابی و $m > n$ باشد آنگاه:

$$\boxed{d = \frac{t_m - t_n}{m - n}}$$

زیرا:

$$\frac{t_m - t_n}{m - n} = \frac{[t_۱ + (m - ۱)d] - [t_۱ + (n - ۱)d]}{m - n}$$

$$= \frac{t_۱ + md - d - t_۱ - nd + d}{m - n} = \frac{md - nd}{m - n} = \frac{d(m - n)}{m - n} = d$$

مثال ۱۳: جملهٔ دوازدهم یک تصاعد حسابی ۱۲۷ و جملهٔ هفتم آن ۹۲ است قدر نسبت این تصاعد چیست؟

حل:

$$d = \frac{t_{۱۲} - t_۷}{۱۲ - ۷} = \frac{۱۲۷ - ۹۲}{۱۲ - ۷} = \frac{۳۵}{۵} = ۷$$

نکته: تعداد جملات در یک تصاعد حسابی متناهی که جملهٔ اول آن $t_۱$ و جملهٔ nام آن t_n و قدر نسبت آن d می‌باشد از فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{n = \frac{t_n - t_۱}{d} + ۱}$$

مثال ۱۴: تعداد جملات در تصاعد زیر چندتاست؟

۴۰ , ۴۷ , ۵۴ , ..., ۲۰۸

حل: $t_۱ = ۴۰$ و $t_n = ۲۰۸$ و $d = ۷$.

MATH75.IR

$$n = \frac{۲۰۸ - ۴۰}{۷} + ۱ = \frac{۱۶۸}{۷} + ۱ = ۲۴ + ۱ = ۲۵$$

نکته: سه عدد a، b و c تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. در این صورت داریم:

$$b - a = c - b \Rightarrow ۲b = a + c \Rightarrow b = \frac{a + c}{۲}$$

b را واسطهٔ حسابی (واسطهٔ عددی) بین a و c می‌نامند.

مثال ۱۵: a را چنان تعیین کنید که سه جملهٔ زیر یک تصاعد حسابی تشکیل دهند.

$$a^۲ + ۲ \ , \ a^۲ + ۸ \ , \ ۱۲a - ۶$$

حل:

$$۲(a^۲ + ۸) = a^۲ + ۲ + ۱۲a - ۶$$

$$۲a^۲ + ۱۶ = a^۲ + ۱۲a - ۴ \Rightarrow a^۲ - ۱۲a + ۲۰ = ۰ \Rightarrow a = ۲ \text{ یا } a = ۱۰$$

مثال ۱۶: a و b را چنان تعیین کنید که عبارات زیر تشکیل تصاعد عددی بدهند.

$$a + b \ , \ ۲a + b + ۱ \ , \ ۳b + ۲a - ۲ \ , \ ۵a + b + ۱$$

حل:

$$\begin{cases} (a + b) + (۳b + ۲a - ۲) = ۲(۲a + b + ۱) \\ (۲a + b + ۱) + (۵a + b + ۱) = ۲(۳b + ۲a - ۲) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳a + ۴b - ۲ = ۴a + ۲b + ۲ \\ ۷a + ۲b + ۲ = ۶b + ۴a - ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + ۲b = ۴ \\ ۳a - ۴b = -۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۲ \ , \ b = ۳$$

مثال ۱۷: بین دو عدد ۷− و ۲۳ پنج واسطهٔ حسابی درج کنید.

حل: در واقع می‌خواهیم پنج عدد بین ۷− و ۲۳ بنویسیم که به همراه این اعداد تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند. در این صورت جملهٔ اول را ۷− و جملهٔ هفتم را ۲۳ در نظر می‌گیریم.

$$t_۱ = -۷$$

$$t_۷ = ۲۳ \Rightarrow t_۱ + ۶d = ۲۳ \Rightarrow -۷ + ۶d = ۲۳$$

$$\Rightarrow ۶d = ۳۰ \Rightarrow d = ۵$$

بنابراین تصاعد به صورت زیر است.

$$-۷ \ , \ -۲ \ , \ ۳ \ , \ ۸ \ , \ ۱۳ \ , \ ۱۸ \ , \ ۲۳$$

MATH75.IR

مجموع جملات یک تصاعد حسابی متناهی

فرض کنید جملهٔ اول یک تصاعد حسابی $t_۱$ و جملهٔ آخر آن t_n و مجموع n جملهٔ تصاعد S_n باشد.

$$S_n = t_۱ + t_۲ + t_۳ + \dots + t_{n-۲} + t_{n-۱} + t_n$$

$$\begin{cases} S_n = t_۱ + (t_۱ + r) + (t_۱ + ۲r) + \dots + (t_n - ۲r) + (t_n - r) + t_n \\ S_n = t_n + (t_n - r) + (t_n - ۲r) + \dots + (t_۱ + ۲r) + (t_۱ + r) + t_۱ \end{cases}$$

$$۲S_n = (t_۱ + t_n) + (t_۱ + t_n) + (t_۱ + t_n) + \dots + (t_۱ + t_n)$$

$$۲S_n = n(t_۱ + t_n) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n(t_۱ + t_n)}{۲}}$$

نکته: دستور فوق را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد.

$$S_n = \frac{n}{۲}(t_۱ + t_n) = \frac{n}{۲}[t_۱ + t_۱ + (n - ۱)d] = \frac{n}{۲}[۲t_۱ + (n - ۱)d]$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{۲}[۲t_۱ + (n - ۱)d]}$$

مثال ۱۸: حاصل جمعهای زیر را تعیین کنید.

الف) $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n$

ب) $۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۲n$

ج) $۱ + ۳ + ۵ + \dots + (۲n - ۱)$

حل:

الف) $۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$

ب) $۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۲n = \frac{n(۲n + ۲)}{۲} = n(n + ۱)$

ج) $۱ + ۳ + ۵ + \dots + (۲n - ۱) = \frac{n(۱ + ۲n - ۱)}{۲} = \frac{n \times ۲n}{۲} = n^۲$

مثال ۱۹: مجموع بیست جملهٔ اول از تصاعد زیر را بدست آورید.

$-۲۱ , -۱۶ , -۱۱ , -۶ , \dots$

حل:

$$t_{۲۰} = t_۱ + ۱۹d = -۲۱ + ۱۹ \times ۵ = -۲۱ + ۹۵ = ۷۴$$

$$S_{۲۰} = \frac{۲۰(-۲۱ + ۷۴)}{۲} = ۵۳۰$$

MATH75.IR

روش دوم:

$$S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}[۲ \times (-۲۱) + (۲۰ - ۱) \times ۵] = ۱۰(-۴۲ + ۹۵) = ۵۳۰$$

مثال ۲۰: مجموع بیست و یک جملهٔ اول یک تصاعد حسابی برابر ۹۰۳ و جملهٔ هفتم آن ۲۷ می‌باشد. جملهٔ اول و قدر نسبت تصاعد را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} S_{۲۱} = ۹۰۳ \\ t_{۷} = ۲۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲۱}{۲}(۲t_{۱} + ۲۰d) = ۹۰۳ \\ t_{۱} + ۶d = ۲۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲t_{۱} + ۲۰d = ۸۶ \\ t_{۱} + ۶d = ۲۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t_{۱} - ۱۰d = -۴۳ \\ t_{۱} + ۶d = ۲۷ \end{cases} \Rightarrow -۴d = -۱۶ \Rightarrow \boxed{d = ۴}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{۱} = ۳}$$

مثال ۲۱: مجموع همهٔ اعداد سه رقمی که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۱۱ برابر ۷ باشد چقدر است؟

حل:

$$۱۰۶ , ۱۱۷ , ۱۲۸ , ... , ۹۹۷$$

$$n = \frac{۹۹۷ - ۱۰۶}{۱۱} + ۱ = ۸۲$$

$$S_{۸۲} = \frac{۸۲(۱۰۶ + ۹۹۷)}{۲} = ۴۵۲۲۳$$

مثال ۲۲: در یک تصاعد حسابی مجموع ۵ جملهٔ اول ۵۵ و مجموع ۵ جملهٔ آخر ۲۱۵ و مجموع همهٔ جملات ۳۵۱ می‌باشد. جملهٔ اول و قدر نسبت تصاعد را حساب کنید.

حل:

$$\begin{cases} t_{۱} + (t_{۱} + d) + (t_{۱} + ۲d) + (t_{۱} + ۳d) + (t_{۱} + ۴d) = ۵۵ \\ t_{n} + (t_{n} - d) + (t_{n} - ۲d) + (t_{n} - ۳d) + (t_{n} - ۴d) = ۲۱۵ \end{cases}$$

$$(t_{۱} + t_{n}) + (t_{۱} + t_{n}) + (t_{۱} + t_{n}) + (t_{۱} + t_{n}) + (t_{۱} + t_{n}) = ۲۷۰$$

$$۵(t_{۱} + t_{n}) = ۲۷۰ \Rightarrow t_{۱} + t_{n} = ۵۴$$

$$S_{n} = \frac{n}{۲}(t_{۱} + t_{n}) \Rightarrow ۳۵۱ = \frac{n}{۲}(۵۴) \Rightarrow \boxed{n = ۱۳}$$

$$\begin{cases} S_{۵} = ۵۵ \\ S_{۸} = ۳۵۱ - ۲۱۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۵}{۲}(۲t_{۱} + ۴d) = ۵۵ \\ ۴(۲t_{۱} + ۷d) = ۱۳۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{۱} + ۲d = ۱۱ \\ ۲t_{۱} + ۷d = ۳۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{۱} = ۳} \quad , \quad \boxed{d = ۴}$$

MATH75.IR

مثال ۲۳: مجموع ۵ جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی ۱۰ و حاصلضرب این جمله‌ها ۳۲۰ است. تصاعد را مشخص کنید.

حل: جمله‌های فوق را به صورت $(x - ۲d , x - d , x , x + d , x + ۲d)$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} x - ۲d + x - d + x + x + d + x + ۲d = ۱۰ \Rightarrow ۵x = ۱۰ \Rightarrow x = ۲ \\ (x - ۲d)(x - d)x(x + d)(x + ۲d) = ۳۲۰ \end{cases}$$

$$x(x^۲ - d^۲)(x^۲ - ۴d^۲) = ۳۲۰ \Rightarrow ۲(۴ - d^۲)(۴ - ۴d^۲) = ۳۲۰$$

$$۸(۴ - d^۲)(۱ - d^۲) = ۳۲۰ \Rightarrow (۴ - d^۲)(۱ - d^۲) = ۴۰$$

$$\Rightarrow d^۴ - ۵d^۲ + ۴ = ۴۰ \Rightarrow d^۴ - ۵d^۲ - ۳۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (d^۲ - ۹)(d^۲ + ۴) = ۰ \Rightarrow d^۲ - ۹ = ۰ \Rightarrow d = \pm ۳$$

بنابراین تصاعد به یکی از دو صورت زیر است.

$-۴ , -۱ , ۲ , ۵ , ۸$

$۸ , ۵ , ۲ , -۱ , -۴$

مثال ۲۴: مجموع سه عدد که تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند ۲۱ و مجموع مربعات آنها ۱۶۵ است. آن سه عدد کدامند؟

حل: فرض کنیم این سه جمله بصورت زیر باشند:

$x - d , x , x + d$

$$x - d + x + x + d = ۲۱ \Rightarrow ۳x = ۲۱ \Rightarrow x = ۷$$

$$(x - d)^۲ + x^۲ + (x + d)^۲ = ۱۶۵ \Rightarrow (۷ - d)^۲ + ۷^۲ + (۷ + d)^۲ = ۱۶۵$$

$$\Rightarrow ۴۹ - ۱۴d + d^۲ + ۴۹ + ۴۹ + ۱۴d + d^۲ = ۱۶۵$$

$$۲d^۲ + ۱۴۷ = ۱۶۵ \Rightarrow ۲d^۲ = ۱۸ \Rightarrow d^۲ = ۹ \Rightarrow d = \pm ۳$$

بنابراین سه عدد فوق ۴ و ۷ و ۱۰ می‌باشند.

مثال ۲۵: اگر $m + n = s + r$ ثابت کنید $t_m + t_n = t_s + t_r$.

حل:

$$\begin{aligned} t_m + t_n &= t_۱ + (m - ۱)d + t_۱ + (n - ۱)d \\ &= t_۱ + md - d + t_۱ + nd - d \\ &= ۲t_۱ + (m + n)d - ۲d \\ &= ۲t_۱ + (s + r)d - ۲d \end{aligned}$$

MATH75.IR

$$= (t_1 + sd - d) + (t_1 + rd - d)$$
$$= [t_1 + (s - 1)d] + [t_1 + (r - 1)d]$$
$$= t_s + t_r$$

مثال ۲۶: ثابت کنید در هر تصاعد عددی با بیش از دو جمله $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = d$.

حل:

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} =$$
$$\frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d] - (n-1)[2t_1 + (n-2)d] + \frac{n-2}{2}[2t_1 + (n-3)d]$$
$$= nt_1 + \frac{n(n-1)d}{2} - (2n-2)t_1 - (n-1)(n-2)d + (n-2)t_1 + \frac{(n-2)(n-3)d}{2}$$
$$= (n - 2n + 2 + n - 2)t_1 + [\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)(n-2) + \frac{(n-2)(n-3)}{2}]d$$
$$= 0 \times t_1 + (\frac{n^2 - n - 2n^2 + 6n - 4 + n^2 - 5n + 6}{2})d = d$$

مثال ۲۷: اگر a^2 و b^2 و c^2 تشکیل یک تصاعد عددی (حسابی) بدهند ثابت کنید $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}$ نیز تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند.

حل: با توجه به اینکه a^2 و b^2 و c^2 تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند داریم:

$$a^2 + c^2 = 2b^2 \Rightarrow (a+c)^2 = 2b^2 + 2ac$$
$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{b+c+a+b}{(a+b)(b+c)} = \frac{2b+a+c}{b^2 + (a+c)b + ac}$$
$$= \frac{(2b+a+c)}{(b^2+ac) + (a+c)b} = \frac{(2b+a+c)}{\frac{1}{2}(a+c)^2 + (a+c)b}$$
$$= \frac{(2b+a+c)}{(a+c)[\frac{1}{2}(a+c) + b]} = \frac{(2b+a+c)}{(a+c)(\frac{a+c+2b}{2})} = \frac{2}{a+c}$$

بنابراین $\frac{1}{a+b}$ و $\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}$ تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند.

مثال ۲۸: اگر $t_1 + t_2 + t_3 = 15$ و $t_6 + t_7 + t_8 = 60$ باشد t_{12} چیست؟

حل:

$$t_1 + t_2 + t_3 = (t_1 + t_3) + t_2 = 2t_2 + t_2 = 3t_2 = 15 \Rightarrow t_2 = 5$$
$$t_6 + t_7 + t_8 = (t_6 + t_8) + t_7 = 2t_7 + t_7 = 3t_7 = 60 \Rightarrow t_7 = 20$$

MATH75.IR

$$\begin{cases} t_۱ + d = ۵ \\ t_۱ + ۶d = ۲۰ \end{cases} \Rightarrow d = ۳ \ , \ t_۱ = ۲ \qquad t_{۱۲} = t_۱ + ۱۱d = ۲ + ۱۱ \times ۳ = ۳۵$$

تصاعد هندسی

تصاعد هندسی دنباله‌ای است که هر جملهٔ آن با ضرب کردن جملهٔ پیش از آن در عددی ثابت و مخالف یک بدست می‌آید.

عدد ثابت مذکور را قدر نسبت تصاعد می‌نامیم و آنرا با q نشان می‌دهیم. بنابراین قدر نسبت یک تصاعد هندسی به این ترتیب بدست می‌آید که یک جملهٔ دلخواه آنرا به جملهٔ پیش از آن تقسیم کنیم.

هر یک از دنباله‌های زیر یک تصاعد هندسی می‌باشند

الف) $۲ , ۶ , ۱۸ , ۵۴ , ...$

ب) $۹ , -۱۸ , ۳۶ , -۷۲ , ...$

در تصاعد قسمت الف جملهٔ اول ۲ و قدر نسبت ۳ است. $t_۱ = ۲ \ , \ q = ۳$

در تصاعد قسمت ب جملهٔ اول ۹ و قدر نسبت ۲− است. $t_۱ = ۹ , q = -۲$

جملهٔ nام یک تصاعد هندسی

جملهٔ اول	$t_۱$
جملهٔ دوم	$t_۲ = t_۱ \times q = t_۱q$
جملهٔ سوم	$t_۳ = t_۲ \times q = t_۱q^۲$
جملهٔ چهارم	$t_۴ = t_۳ \times q = t_۱q^۳$
. . . . .	
جملهٔ nام	$t_n = t_۱q^{n-۱}$

مثال ۲۹: جملهٔ دهم تصاعد ... , ۲۰ , ۱۰− , ۵ چیست؟

حل:

$$q = \frac{-۱۰}{۵} = -۲ \qquad t_۱ = ۵$$

$$t_{۱۰} = t_۱q^۹ = ۵ \times (-۲)^۹ = ۵ \times (-۵۱۲) = -۲۵۶۰$$

مثال ۳۰: جملهٔ هفتم یک تصاعد هندسی مساوی هشت برابر جملهٔ چهارم آن است. نسبت

MATH75.IR

جملهٔ دوازدهم به جملهٔ هشتم آن را حساب کنید.

حل:

$$t_۷ = ۸t_۴ \Rightarrow t_۱q^۶ = ۸t_۱q^۳ \Rightarrow q^۶ = ۸q^۳ \Rightarrow q^۳ = ۸ \Rightarrow q = ۲$$

$$\frac{t_{۱۲}}{t_۸} = \frac{t_۱q^{۱۱}}{t_۱q^۷} = q^۴ = ۲^۴ = ۱۶$$

مثال ۳۱: در یک تصاعد هندسی جملهٔ ششم ۵۳ و جملهٔ هشتم ۴۷۷ است. جملهٔ دهم را بدست آورید.

$$\begin{cases} t_۶ = ۵۳ \\ t_۸ = ۴۷۷ \end{cases} \Rightarrow \frac{t_۸}{t_۶} = \frac{۴۷۷}{۵۳} \Rightarrow \frac{t_۱q^۷}{t_۱q^۵} = ۹ \Rightarrow q^۲ = ۹ \Rightarrow q = \pm ۳$$

$$q = ۳ \Rightarrow t_۶ = ۵۳ \Rightarrow t_۱q^۵ = ۵۳ \Rightarrow t_۱ \times ۳^۵ = ۵۳ \Rightarrow t_۱ = \frac{۵۳}{۲۴۳}$$

$$\Rightarrow t_{۱۰} = t_۱q^۹ = \frac{۵۳}{۲۴۳} \times ۳^۹ = ۵۳ \times ۳^۴ = ۴۲۹۳$$

$$q = -۳ \Rightarrow t_۱ = \frac{-۵۳}{۲۴۳} \Rightarrow t_{۱۰} = \frac{-۵۳}{۲۴۳} \times (-۳)^۹ = ۴۲۹۳$$

نکته: اگر t_m و t_n جملات mام و nام یک تصاعد هندسی باشند آنگاه:

$$\frac{t_m}{t_n} = q^{m-n}$$

واسطه‌های هندسی

در هر تصاعد هندسی جمله یا جمله‌هایی را که بین دو جملهٔ نامتوالی قرار دارند واسطه یا واسطه‌های هندسی بین آن دو جمله می‌نامند. در تصاعد هندسی (۵ , ۱۰ , ۲۰ , ۴۰ , ۸۰) اعداد ۱۰ و ۲۰ و ۴۰ سه واسطهٔ هندسی بین اعداد ۵ و ۸۰ می‌باشند.

نکته: اگر a و b و c سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند آنگاه:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^۲ = a \cdot c \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot c}$$

یعنی b واسطهٔ هندسی بین a و c است در صورتیکه مجذور b برابر حاصلضرب a و c باشند.

مثال ۳۲: بین ۱۰ و ۳۲۰ چهار واسطهٔ هندسی درج کنید.

حل: باید یک تصاعد هندسی شامل شش جمله بنویسیم که جملهٔ اول آن ۱۰ و جملهٔ ششم آن ۳۲۰ است.

$$t_۱ = ۱۰$$

$$t_۶ = ۳۲۰ \Rightarrow t_۱q^۵ = ۳۲۰ \Rightarrow ۱۰q^۵ = ۳۲۰ \Rightarrow q^۵ = ۳۲ \Rightarrow q = ۲$$

۱۰ , ۲۰ , ۴۰ , ۸۰ , ۱۶۰ , ۳۲۰

MATH75.IR

مثال ۳۳: مقدار m را چنان تعیین کنید که عبارات $m - ۱$ و $۲m + ۶$ و $۴m + ۴۴$ تشکیل یک تصاعد هندسی بدهند.

حل:

$$(۲m + ۶)^۲ = (m - ۱)(۴m + ۴۴)$$

$$۴(m + ۳)^۲ = (m - ۱)۴(m + ۱۱) \Rightarrow m^۲ + ۶m + ۹ = m^۲ + ۱۰m - ۱۱$$

$$\Rightarrow ۲۰ = ۴m \Rightarrow \boxed{m = ۵}$$

مثال ۳۴: اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۲mx + ۲m - ۱ = ۰$ باشند m را چنان تعیین کنید که x'' و ۳ و $۲x'$ سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند.

حل:

$$۲x' \times x'' = ۹ \Rightarrow x'x'' = \frac{۹}{۲} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۹}{۲}$$

$$\frac{۲m - ۱}{۱} = \frac{۹}{۲} \Rightarrow ۴m - ۲ = ۹ \Rightarrow \boxed{m = \frac{۱۱}{۴}}$$

مثال ۳۵: اگر a و b و c جمله‌های متوالی یک تصاعد هندسی باشند ثابت کنید معادلهٔ $ax^۲ + ۲bx + c = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد.

حل:

$$ax^۲ + ۲bx + c = ۰$$

$$\Delta' = b^۲ - ac = b^۲ - b^۲ = ۰$$

پس معادله ریشهٔ مضاعف دارد.

مثال ۳۶: نشان دهید اگر در یک تصاعد هندسی هر جمله را از جملهٔ ما بعد آن کم کنیم، باقیمانده‌ها تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

حل:

$$a , aq , aq^۲ , aq^۳ , aq^۴ , ...$$

$$aq - a = a(q - ۱) \qquad aq^۲ - aq = aq(q - ۱)$$

$$aq^۳ - aq^۲ = aq^۲(q - ۱) \qquad aq^۴ - aq^۳ = aq^۳(q - ۱)$$

ملاحظه می‌شود تصاعد زیر تصاعد هندسی با قدر نسبت q است.

$$a(q - ۱) , aq(q - ۱) , aq^۲(q - ۱) , aq^۳(q - ۱) , ...$$

مثال ۳۷: اگر $m + n = s + r$ ثابت کنید در تصاعد هندسی:

$$t_m \times t_n = t_s \times t_r$$

MATH75.IR

حل:

$$t_m \times t_n = t_1 q^{m-1} \times t_1 q^{n-1} = t_1^2 \times q^{m+n-2} = t_1^2 \times q^{s+r-2} = t_1^2 \times q^{s-1} \times q^{r-1}$$
$$= t_1 q^{s-1} \times t_1 q^{r-1} = t_s \times t_r$$

مثال ۳۸: مجموع جمله‌های اول و چهارم یک تصاعد هندسی ۵۶ و مجموع جمله‌های دوم و سوم آن ۲۴ است. تصاعد را مشخص کنید.

حل:

$$\begin{cases} t_1 + t_4 = 56 \\ t_2 + t_3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + t_1 q^3 = 56 \\ t_1 q + t_1 q^2 = 24 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1(1+q)(1-q+q^2) = 56 \\ t_1 q(1+q) = 24 \end{cases} \xRightarrow{\text{تقسیم}} \frac{1-q+q^2}{q} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 3q^2 - 3q + 3 = 7q \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow q = 3 \text{ یا } q = \frac{1}{3}$$

$$q = 3 \Rightarrow t_1 + t_1 q^3 = 56 \Rightarrow t_1 + 27t_1 = 56 \Rightarrow t_1 = 2$$

$2, 6, 18, 54, \ldots$

$$q = \frac{1}{3} \Rightarrow t_1 + \frac{t_1}{27} = 56 \Rightarrow t_1 = 54$$

$54, 18, 6, 2, \ldots$

مثال ۳۹: در یک تصاعد هندسی اگر $t_3 \times t_5 = 16$ و $t_1 \times t_3 = 4$ و جمله‌ها همه مثبت باشند، تصاعد را مشخص کنید.

حل:

$$3 + 5 = 4 + 4 \Rightarrow t_3 \times t_5 = t_4 \times t_4 \Rightarrow 16 = t_4^2 \Rightarrow t_4 = 4$$

$$1 + 3 = 2 + 2 \Rightarrow t_1 \times t_3 = t_2 \times t_2 \Rightarrow 4 = t_2^2 \Rightarrow t_2 = 2$$

$$\begin{cases} t_2 = 2 \\ t_4 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 q = 2 \\ t_1 q^3 = 4 \end{cases} \Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \sqrt{2} \Rightarrow t_1 = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, \ldots$

مثال ۴۰: در یک تصاعد هندسی $t_4 - t_2 = 6$ و $q = \sqrt{3}$ است. جملهٔ اول تصاعد را بدست آورید.

حل:

$$t_4 - t_2 = 6$$

MATH75.IR

$$t_1q^3 - t_1q = 6 \Rightarrow t_1 \times (\sqrt{3})^3 - t_1 \times \sqrt{3} = 6$$

$$3\sqrt{3}\, t_1 - \sqrt{3}\, t_1 = 6 \Rightarrow t_1 = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

مثال ۴۱: در یک تصاعد هندسی $t_1 + t_2 + t_3 = 21$ و $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 = 64$ است. قدر نسبت تصاعد چیست؟

حل:

$$\begin{cases} t_1 + t_1q + t_1q^2 = 21 \\ t_1(t_1q)(t_1q^2) = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1(q^2 + q + 1) = 21 \\ t_1^3q^3 = 64 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1(q^2 + q + 1) = 21 \\ t_1q = 4 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1(q^2 + q + 1)}{t_1q} = \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow 4q^2 - 17q + 4 = 0 \Rightarrow q = 4 \text{ یا } q = \frac{1}{4}$$

مثال ۴۲: در یک تصاعد هندسی جملهٔ اول ۱۰ و قدر نسبت ۵ است. نخستین جملهٔاین تصاعد که از ۱۰۰۰۰ بزرگتر است دارای چه مرتبه‌ای است؟ از چه مرتبه‌ای به بعد جمله‌ها بزرگتر از 5^{10} می‌باشند؟

حل: فرض می‌کنیم اولین جملهٔ بزرگتر از ۱۰۰۰۰ جملهٔ nام باشد

$$t_n > 10000 \Rightarrow t_1q^{n-1} > 10000 \Rightarrow 10 \times 5^{n-1} > 10000$$

$$\Rightarrow 5^{n-1} > 1000 \Rightarrow n \geq 6$$

بنابراین اولین جملهٔ بزرگتر از ۱۰۰۰۰ جملهٔ ششم است.

$$t_m > 5^{10} \Rightarrow t_1q^{m-1} > 5^{10} \Rightarrow 10 \times 5^{m-1} > 5^{10} \Rightarrow 2 \times 5^m > 5^{10}$$

$$\Rightarrow 5^m > \frac{5^{10}}{2} \Rightarrow 5^m > \frac{5^{10}}{2} > \frac{5^{10}}{5} = 5^9$$

پس m باید بزرگتر یا مساوی ۱۰ باشد.

نکته: در هر تصاعد هندسی محدود حاصلضرب هر دو جمله که از دو طرف به یک فاصله باشند برابر است با حاصلضرب جمله‌های اول و آخر، و اگر تعداد جمله‌ها فرد باشد برابر است با مجذور جملهٔ وسط.

نکته: قدر مطلق حاصل‌ضرب جمله‌های یک تصاعد هندسی محدود که آنرا با P_n نشان می‌دهیم برابر است با:

MATH75.IR

$$|P_n| = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

زیرا:

$$P_n = t_1 \times t_2 \times t_3 \times \dots \times t_n$$

$$P_n = t_n \times t_{n-1} \times t_{n-2} \times \dots \times t_1$$

$$P_n^2 = (t_1 \cdot t_n) \times (t_2 \cdot t_{n-1}) \times (t_3 \cdot t_{n-2}) \times \dots \times (t_n \cdot t_1)$$

$$= (t_1 \cdot t_n) \times (t_1 \cdot t_n) \times (t_1 \cdot t_n) \times \dots \times (t_1 \cdot t_n)$$

$$= (t_1 \cdot t_n)^n$$

$$\Rightarrow \quad |P_n| = \sqrt{(t_1 \cdot t_n)^n}$$

مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی

فرض کنیم t_1 جملهٔ اول و t_n جملهٔ nام و q قدر نسبت تصاعد هندسی باشد. مجموع این n جملهٔ را با S_n نشان می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$$

$$S_n = t_1 + t_1 q + t_1 q^2 + \dots + t_1 q^{n-1}$$

$$qS_n = t_1 q + t_1 q^2 + t_1 q^3 + \dots + t_1 q^n$$

$$qS_n - S_n = t_1 q^n - t_1$$

$$S_n(q - 1) = t_1(q^n - 1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_n = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_n = \frac{t_1(1 - q^n)}{1 - q}}$$

با توجه به اینکه $t_n = t_1 q^{n-1}$ و یا $qt_n = t_1 q^n$ می‌توانیم دستور فوق را به صورت زیر نیز بیان کنیم

$$S_n = \frac{qt_n - t_1}{q - 1}$$

مثال ۴۳: در یک تصاعد هندسی $t_1 = 3$ و $q = 4$ و $n = 5$ است. t_n و S_n را بدست آورید.

حل:

$$t_n = t_5 = t_1 q^4 = 3 \times 4^4 = 768$$

$$S_n = S_5 = \frac{t_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{3(4^5 - 1)}{4 - 1} = 4^5 - 1 = 1023$$

MATH75.IR

مثال ۴۴: در یک تصاعد هندسی $t_1 = ۶$ و $q = ۲$ است. مجموع پنج جملهٔ نخست این تصاعد چیست؟

حل:

$$S_۵ = \frac{t_۱(q^۵ - ۱)}{q - ۱} = \frac{۶(۲^۵ - ۱)}{۲ - ۱} = ۶ \times ۳۱ = ۱۸۶$$

مثال ۴۵: در یک تصاعد هندسی $t_۵ - t_۱ = ۲۰$ و $S_۴ = ۱۰$ است. قدر نسبت تصاعد را بدست آورید.

حل:

$$S_۴ = \frac{t_۱(q^۴ - ۱)}{q - ۱} = ۱۰$$

$$\Rightarrow \frac{t_۱q^۴ - t_۱}{q - ۱} = ۱۰ \Rightarrow \frac{t_۵ - t_۱}{q - ۱} = ۱۰ \Rightarrow \frac{۲۰}{q - ۱} = ۱۰$$

$$۲۰ = ۱۰q - ۱۰ \Rightarrow ۱۰q = ۳۰ \Rightarrow \boxed{q = ۳}$$

مثال ۴۶: در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جملهٔ اول هفده برابر مجموع چهار جملهٔ نخست می‌باشد. قدر نسبت تصاعد را بدست آورید.

حل:

$$S_۸ = ۱۷S_۴ \Rightarrow \frac{t_۱(q^۸ - ۱)}{q - ۱} = ۱۷ \times \frac{t_۱(q^۴ - ۱)}{q - ۱}$$

$$\Rightarrow q^۸ - ۱ = ۱۷(q^۴ - ۱) \Rightarrow q^۸ - ۱۷q^۴ + ۱۶ = ۰$$

$$\Rightarrow (q^۴ - ۱)(q^۴ - ۱۶) = ۰ \Rightarrow q^۴ - ۱۶ = ۰ \Rightarrow q = \pm ۲$$

یک داستان

در افسانه‌ها آمده است که مخترع شطرنج، بازی اختراعی خود را نزد حاکم منطقه برد و حاکم اختراع هوشمندانهٔ وی را پسندید و به او گفت هر چه به عنوان پاداش می‌خواهد بگوید. مخترع کم توقع نیز خطاب به حاکم گفت پاداش زیادی نمی‌خواهم قربان، دستور فرمائید یک دانه گندم درخانهٔ شمارهٔ یک قراردهند و دو برابر آنرا در خانهٔ دوم و دو برابر آنرا درخانهٔ بعدی و همین طور الی آخر.

حاکم با تعجب گفت فقط همین! تو می‌توانستی چیزی با ارزشتر طلب کنی. مخترع با فروتنی گفت متشکرم قربان، همین از سرمان هم زیاد است.

MATH75.IR

حاکم محاسبان دربار را فراخواند و امر کرد، آنچه مخترع خواسته را محاسبه کرده و به او بدهند. اما چند روز گذشت و از محاسبان خبری نشد. حاکم آنها را احضار کرد و یکی از محاسبان گفت تمام گندمهای موجود در انبارها حتی کفاف قسمتی از این درخواست را تأمین نمی‌کند.

طبق محاسبه‌ای که امروز انجام گرفته برای بدست آوردن این تعداددانهٔ گندم کل مساحت کرهٔ زمین باید ۶ بار زیر گشت گندم برود.

$$۱ + ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + ... + ۲^{۶۳} = \frac{۱ \times (۲^{۶۴} - ۱)}{۲ - ۱} = ۲^{۶۴} - ۱$$

مثال ۴۷: حاصلجمع زیر را بدست آورید.

$$S = ۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + ... + \underbrace{۹۹۹ ... ۹}_{\text{n رقم}}$$

حل:

$$S = (۱۰ - ۱) + (۱۰^{۲} - ۱) + (۱۰^{۳} - ۱) + ... + (۱۰^{n} - ۱)$$

$$= (۱۰ + ۱۰^{۲} + ۱۰^{۳} + ... + ۱۰^{n}) - (\underbrace{۱ + ۱ + ۱ + ... + ۱}_{\text{n تا}})$$

$$= \frac{۱۰(۱۰^{n} - ۱)}{۱۰ - ۱} - n = \frac{۱۰}{۹}(۱۰^{n} - ۱) - n$$

مثال ۴۸: حاصلجمع زیر را بدست آورید.

$$S = ۱ + ۱۱ + ۱۱۱ + ... + \underbrace{۱۱۱ ... ۱}_{\text{۱۰۰ تا}}$$

حل:

$$S = \frac{۱}{۹}(۹ + ۹۹ + ۹۹۹ + ... + \underbrace{۹۹۹ ... ۹}_{\text{۱۰۰ تا}})$$

$$= \frac{۱}{۹} \times [(۱۰ - ۱) + (۱۰^{۲} - ۱) + (۱۰^{۳} - ۱) + ... + (۱۰^{۱۰۰} - ۱)]$$

$$= \frac{۱}{۹}[(۱۰ + ۱۰^{۲} + ۱۰^{۳} + ... + ۱۰^{۱۰۰}) - (\underbrace{۱ + ۱ + ۱ + ... + ۱}_{\text{۱۰۰ تا}})]$$

$$= \frac{۱}{۹}[\frac{۱۰(۱۰^{۱۰۰} - ۱)}{۱۰ - ۱} - ۱۰۰] = \frac{۱}{۹}[\frac{۱۰}{۹}(۱۰^{۱۰۰} - ۱) - ۱۰۰]$$

$$= \frac{۱}{۸۱}(۱۰^{۱۰۱} - ۱۰) - \frac{۱۰۰}{۹} = \frac{۱۰^{۱۰۱} - ۱۰ - ۹۰۰}{۸۱} = \frac{۱۰^{۱۰۱} - ۹۱۰}{۸۱}$$

مثال ۴۹: احمد و علی با هم چنین قرار داد کرده‌اند که احمد روز اول بهمن ماه ده تومان به علی بدهد و روز دوم ۲۰ تومان و روز سوم ۳۰ تومان و به همین ترتیب تا روز پانزدهم و علی روز شانزدهم یک ریال و روز هفدهم ۲ ریال و روز هجدهم ۴ ریال و روز نوزدهم ۸ ریال و به همین

MATH75.IR

ترتیب تا روز سی‌ام. در این معامله کدامیک سود برده‌اند؟

حل: پولهایی که احمد به علی داده یک تصاعد حسابی تشکیل داده‌اند که جملهٔ اول آن ۱۰ و قدر نسبت آن نیز ۱۰ می‌باشند.

$$S = \frac{۱۵}{۲}[۲ \times ۱۰ + ۱۴ \times ۱۰] = \frac{۱۵}{۲}(۱۶۰) = ۱۲۰۰$$

$۱۲۰۰ \times ۱۰ = ۱۲۰۰۰$ ریال احمد به علی داده

پولهایی که علی به احمد داده یک تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند که جملهٔ اول آن ۱ و قدر نسبت آن ۲ است.

$$S = \frac{۱(۲^{۱۵} - ۱)}{۲ - ۱} = ۲^{۱۵} - ۱ = ۳۲۷۶۷$$ ریال علی به احمد داده

$۳۲۷۶۷ - ۱۲۰۰۰ = ۲۰۷۶۷$ ریال احمد سود برده است

مثال ۵۰: حاصلضرب سه عدد که تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند برابر ۲۷۴۴ و مجموع آنها ۴۹ است. آن سه عدد کدامند؟

حل:

$$\frac{x}{q}, x, qx$$

$$\frac{x}{q} \times x \times qx = ۲۷۴۴ \Rightarrow x^۳ = ۲۷۴۴ \Rightarrow x^۳ = ۱۴^۳ \Rightarrow x = ۱۴$$

$$\frac{۱۴}{q} + ۱۴ + ۱۴q = ۴۹ \Rightarrow ۱۴q + \frac{۱۴}{q} - ۳۵ = ۰$$

$$۱۴q^۲ - ۳۵q + ۱۴ = ۰ \Rightarrow ۲q^۲ - ۵q + ۲ = ۰ \Rightarrow q = ۲ \text{ یا } q = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین سه عدد ۷ و ۱۴ و ۲۸ می‌باشند.

مثال ۵۱: مجموع چهار جملهٔ اول از یک تصاعد هندسی ۲۴۰ و مجموع جمله‌های دوم و چهارم سه برابر مجموع جمله‌های اول و سوم است. جملهٔ اول و قدر نسبت تصاعد را تعیین کنید.

حل:

$$\begin{cases} t_۲ + t_۴ = ۳(t_۱ + t_۳) \\ t_۱ + t_۲ + t_۳ + t_۴ = ۲۴۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_۱q + t_۱q^۳ = ۳t_۱ + ۳t_۱q^۲ \\ t_۱ + t_۱q + t_۱q^۲ + t_۱q^۳ = ۲۴۰ \end{cases}$$

$$q + q^۳ = ۳ + ۳q^۲ \Rightarrow q(۱ + q^۲) = ۳(۱ + q^۲) \Rightarrow \boxed{q = ۳}$$

$$t_۱(۱ + q + q^۲ + q^۳) = ۲۴۰ \Rightarrow t_۱(۱ + ۳ + ۹ + ۲۷) = ۲۴۰$$

$$\Rightarrow ۴۰t_۱ = ۲۴۰ \Rightarrow \boxed{t_۱ = ۶}$$

MATH75.IR

مثال ۵۲: حاصل جمع زیر را بدست آورید.

$$S = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ... + n^۲$$

حل: اتحاد $(a + ۱)^۳ = a^۳ + ۳a^۲ + ۳a + ۱$ را در نظر بگیرید:

$$a = ۱ \Rightarrow ۲^۳ = ۱^۳ + ۳ \times ۱^۲ + ۳ \times ۱ + ۱$$

$$a = ۲ \Rightarrow ۳^۳ = ۲^۳ + ۳ \times ۲^۲ + ۳ \times ۲ + ۱$$

$$a = ۳ \Rightarrow ۴^۳ = ۳^۳ + ۳ \times ۳^۲ + ۳ \times ۳ + ۱$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a = n \Rightarrow (n + ۱)^۳ = n^۳ + ۳ \times n^۲ + ۳ \times n + ۱$$

$$۲^۳ + ۳^۳ + ۴^۳ + ... + (n + ۱)^۳ = (۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + ... + n^۳) + ۳(۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ... + n^۲) + ۳(۱ + ۲ + ۳ + ... + n) + \underbrace{(۱ + ۱ + ۱ + ... + ۱)}_{n \text{ تا}} \Rightarrow$$

$$(n + ۱)^۳ = ۱ + ۳s + ۳ \times \frac{n(n + ۱)}{۲} + n$$

$$۳S = (n + ۱)^۳ - \frac{۳n(n + ۱)}{۲} - (n + ۱)$$

$$۳S = \frac{۲(n + ۱)^۳ - ۳n(n + ۱) - ۲(n + ۱)}{۲} = \frac{(n + ۱)(۲n^۲ + ۴n + ۲ - ۳n - ۲)}{۲}$$

$$۳S = \frac{(n + ۱)(۲n^۲ + n)}{۲} = \frac{n(n + ۱)(۲n + ۱)}{۲}$$

$$\boxed{S = \frac{n(n + ۱)(۲n + ۱)}{۶}}$$

نکته: تعداد مربعهایی که در صفحهٔ شطرنج (۸×۸) می‌توان شمرد برابر است با:

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ... + ۸^۲ = \frac{۸ \times (۸ + ۱) \times (۲ \times ۸ + ۱)}{۶} = \frac{۸ \times ۹ \times ۱۷}{۶} = ۲۰۴$$

مثال ۵۳: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$S = ۱ + ۱۰ + ۷۵ + ۵۰۰ + ... + ۱۱ \times ۵^{۱۰}$$

MATH75.IR

حل: با دقت در جملات موجود در S ملاحظه می‌گردد که:

$$S = ۱ \times ۵^{۰} + ۲ \times ۵^{۱} + ۳ \times ۵^{۲} + ۴ \times ۵^{۳} + \dots + ۱۱ \times ۵^{۱۰}$$

از آنجا خواهیم داشت:

$$۵S = ۱ \times ۵^{۱} + ۲ \times ۵^{۲} + ۳ \times ۵^{۳} + ۴ \times ۵^{۴} + \dots + ۱۱ \times ۵^{۱۱}$$

و همچنین:

$$-S = -۱ \times ۵^{۰} - ۲ \times ۵^{۱} - ۳ \times ۵^{۲} - ۴ \times ۵^{۳} - \dots - ۱۱ \times ۵^{۱۰}$$

با جمع دو رابطهٔ اخیر:

$$۴S = (-۱ \times ۵^{۰} - ۱ \times ۵^{۱} - ۱ \times ۵^{۲} - ۱ \times ۵^{۳} - \dots - ۱ \times ۵^{۱۰}) + ۱۱ \times ۵^{۱۱}$$

$$۴S = -(۱ + ۵ + ۲۵ + ۱۲۵ + \dots + ۵^{۱۰}) + ۱۱ \times ۵^{۱۱}$$

$$۴S = -\frac{۱(۵^{۱۱} - ۱)}{۵ - ۱} + ۱۱ \times ۵^{۱۱}$$

$$۴S = \frac{۱ - ۵^{۱۱}}{۴} + ۱۱ \times ۵^{۱۱} = \frac{۱ - ۵^{۱۱} + ۴۴ \times ۵^{۱۱}}{۴}$$

$$۴S = \frac{۱ + ۴۳ \times ۵^{۱۱}}{۴} \Rightarrow S = \frac{۴۳ \times ۵^{۱۱} + ۱}{۱۶}$$

مجموع جمله‌های تصاعد هندسی نزولی نامتناهی

تصاعد هندسی زیر را در نظر بگیرید

$$۱ , \frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۴} , \frac{۱}{۸} , \frac{۱}{۱۶} , \dots$$

در این تصاعد $t_۱ = ۱$ و $q = \frac{۱}{۲}$ است. بنابراین:

$$S_n = \frac{t_۱(۱ - q^n)}{۱ - q} = \frac{۱ \times [۱ - (\frac{۱}{۲})^n]}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{\frac{۱}{۲}}$$

$$= ۲[۱ - (\frac{۱}{۲})^n] = ۲ - (\frac{۱}{۲})^{n-۱}$$

می‌توان گفت n هر چه باشد مجموع جمله‌های تصاعد فوق از ۲ کوچکتر است و با زیاد شدن n مقدار S_n به ۲ نزدیکتر می‌شود.

$$S_۵ = ۲ - (\frac{۱}{۲})^۴ = ۲ - ۰/۰۶۲۵ = ۱/۹۳۷۵$$

$$S_{۱۰} = ۲ - (\frac{۱}{۲})^۹ = ۲ - ۰/۰۰۱۹۵۳ = ۱/۹۹۸۰۴۷$$

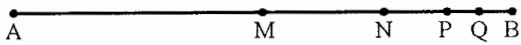
MATH75.IR

$$S_{۱۵} = ۲ - (\frac{۱}{۲})^{۱۴} = ۲ - ۰/۰۰۰۰۶۱ = ۱/۹۹۹۹۳۹$$

$$S_{۲۰} = ۲ - (\frac{۱}{۲})^{۱۹} = ۲ - ۰/۰۰۰۰۰۲ = ۱/۹۹۹۹۹۸$$

ملاحظه می‌شود با افزایش n مجموع S_n به ۲ نزدیکتر می‌شود.

برای تعبیر هندسی مطلب فوق پاره خط AB به طول ۲ واحد را در نظر بگیرید.



وسط پاره خط AB را M و وسط پاره خط MB را N و وسط پاره خط NB را P و وسط PB را Q می‌نامیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$AM = ۱ \quad , \quad MN = \frac{۱}{۲} \quad , \quad NP = \frac{۱}{۴} \quad , \quad PQ = \frac{۱}{۸} \quad , \quad ...$$

لذا:

$$AM + MN + NP + PQ = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸}$$

اگر در عمل فوق تقسیمات را ادامه دهیم مجموع پاره خطهای فوق را هر قدر که بخواهیم می‌توانیم به طول AB نزدیک کنیم ولی هرگز این مجموع دقیقاً برابر طول AB نمی‌شود. به عبارت دیگر حاصل $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + ...$ را هر قدر که بخواهیم می‌توانیم به عدد ۲ نزدیک کنیم ولی هیچگاه به ۲ نمی‌رسیم که اصطلاحاً می‌گوییم حد مجموع فوق عدد ۲ است.

$$S = \frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{t_۱}{۱ - q}$$

نکته: به طور کلی در یک تصاعد هندسی نامتناهی اگر $|q| < ۱$ به عبارت دیگر $-۱ < q < ۰$ یا $۰ < q < ۱$ باشد، حد مجموع جمله‌ها از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{S = \frac{t_۱}{۱ - q}}$$

چراکه در فرمول $S_n = \frac{t_۱(۱ - q^n)}{۱ - q}$ با توجه به اینکه q کمتر از واحد می‌باشد با افزایش n مقدار q^n به صفر نزدیک شده و S_n به عدد $\frac{t_۱(۱ - ۰)}{۱ - q}$ نزدیک می‌شود.

مثال ۵۴: حد مجموع جمله‌های تصاعد هندسی زیر را بدست آورید.

$$۲ , \frac{۲}{۳} , \frac{۲}{۹} , \frac{۲}{۲۷} , ...$$

MATH75.IR

حل:

$$q = \frac{۱}{۳} < ۱$$

$$S = \frac{t_۱}{۱ - q} = \frac{۲}{۱ - \frac{۱}{۳}} = \frac{۲}{\frac{۲}{۳}} = ۳$$

مثال ۵۵: تصاعدی هندسی تعیین کنید که جملهٔ اول آن ۱۸ و حد مجموع جمله‌های آن ۵۴ باشد.

حل:

$$S = \frac{t_۱}{۱ - q} \Rightarrow ۵۴ = \frac{۱۸}{۱ - q} \Rightarrow ۵۴ - ۵۴q = ۱۸$$

$$\Rightarrow ۵۴q = ۳۶ \Rightarrow q = \frac{۲}{۳}$$

$$۱۸ , ۱۲ , ۸ , \frac{۱۶}{۳} , \ldots$$

مثال ۵۶: تصاعدی هندسی تعیین کنید که جملهٔ دوم آن ۵ و حد مجموع جمله‌های آن ۲۰ باشد.

حل:

$$\begin{cases} ۲۰ = \frac{t_۱}{۱ - q} \\ t_۲ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲۰ - ۲۰q = t_۱ \\ t_۱q = ۵ \Rightarrow t_۱ = \frac{۵}{q} \end{cases}$$

$$۲۰ - ۲۰q = \frac{۵}{q} \Rightarrow ۲۰q - ۲۰q^۲ = ۵ \Rightarrow ۴q^۲ - ۴q + ۱ = ۰ \Rightarrow q = \frac{۱}{۲} , \ t_۱ = ۱۰$$

$$۱۰ , ۵ , \frac{۵}{۲} , \frac{۵}{۴} , \ldots$$

مثال ۵۷: حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$S = \frac{۲}{۵} + \frac{۳}{۵^۲} + \frac{۲}{۵^۳} + \frac{۳}{۵^۴} + \ldots$$

حل:

$$S = (\frac{۲}{۵} + \frac{۲}{۵^۳} + \frac{۲}{۵^۵} + \ldots) + (\frac{۳}{۵^۲} + \frac{۳}{۵^۴} + \frac{۳}{۵^۶} + \ldots)$$

$$= ۲(\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۵^۳} + \frac{۱}{۵^۵} + \ldots) + ۳(\frac{۱}{۵^۲} + \frac{۱}{۵^۴} + \frac{۱}{۵^۶} + \ldots) =$$

$$۲(\frac{\frac{۱}{۵}}{۱ - \frac{۱}{۲۵}}) + ۳(\frac{\frac{۱}{۲۵}}{۱ - \frac{۱}{۲۵}})$$

$$= ۲ \times \frac{۵}{۲۴} + ۳ \times \frac{۱}{۲۴} = \frac{۱۳}{۲۴}$$

MATH75.IR

مثال ۵۸: کسر مولد عدد $۰/\overline{۵}$ را بدست آورید.

حل:

$$۰/\overline{۵} = ۰/۵۵۵ \ldots = \frac{۵}{۱۰} + \frac{۵}{۱۰۰} + \frac{۵}{۱۰۰۰} + \ldots =$$

$$۵(\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰۰} + \ldots) = ۵ \times \frac{\frac{۱}{۱۰}}{۱ - \frac{۱}{۱۰}} = ۵ \times \frac{\frac{۱}{۱۰}}{\frac{۹}{۱۰}} = ۵ \times \frac{۱}{۹} = \frac{۵}{۹}$$

مثال ۵۹: کسر مولد عدد اعشاری $۲/۵\overline{۴}$ را تعیین کنید.

حل:

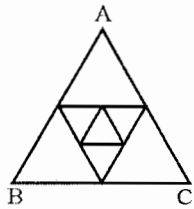
$$۲/۵\overline{۴} = ۲ + \frac{۵}{۱۰} + \frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۴}{۱۰۰۰} + \frac{۴}{۱۰۰۰۰} + \ldots$$

$$= ۲ + \frac{۱}{۲} + ۴(\frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰۰} + \frac{۱}{۱۰۰۰۰} + \ldots)$$

$$= \frac{۵}{۲} + ۴ \times \frac{\frac{۱}{۱۰۰}}{۱ - \frac{۱}{۱۰}} = \frac{۵}{۲} + ۴ \times \frac{\frac{۱}{۱۰۰}}{\frac{۹}{۱۰}} = \frac{۵}{۲} + ۴ \times \frac{۱}{۹۰}$$

$$= \frac{۵}{۲} + \frac{۴}{۹۰} = \frac{۲۲۹}{۹۰}$$

مثال ۶۰: مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a را در نظر بگیرید و اوساط اضلاع آنرا به هم وصل کنید تا مثلث متساوی الاضلاع دیگری بدست آید، دوباره وسطهای اضلاع مثلث حاصل را به هم وصل کنید و این عمل را ادامه دهید. اگر تعداد مثلثها به بی‌نهایت میل کند، حد مجموع محیطها و مساحتهای مثلثها را تعیین کنید.



حل: می‌دانیم اگر وسطهای اضلاع یک مثلث متساوی الاضلاع را به هم وصل کنیم مثلث متساوی الاضلاع دیگری پدید می‌آید که محیط آن نصف محیط مثلث اصلی و مساحت آن $\frac{۱}{۴}$

MATH75.IR

مساحت مثلث اصلی است. بنابراین محیطها یک تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ و مساحتها یک تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل می‌دهند.

محیطها:

$$۳a , \frac{۳a}{۲} , \frac{۳a}{۴} , \frac{۳a}{۸} , ...$$

$$S_۱ = \frac{۳a}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۶a$$

مساحتها:

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲ , \frac{\sqrt{۳}}{۱۶} a^۲ , \frac{\sqrt{۳}}{۶۴} a^۲ , ...$$

$$S_۲ = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴} a^۲}{۱ - \frac{۱}{۴}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} a^۲$$

مثال ۶۱: حاصل عبارت زیر به چه عددی نزدیک می‌شود؟

$$A = \frac{\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۲۷} + ...}{\frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۲۵} + \frac{۱}{۱۲۵} + ...}$$

حل:

$$\text{حد مجموع صورت} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۱ - \frac{۱}{۳}} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

$$\text{حد مجموع مخرج} = \frac{\frac{۱}{۵}}{۱ - \frac{۱}{۵}} = \frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۴}{۵}} = \frac{۱}{۴}$$

$$\text{حد مجموع } A = \frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

مثال ۶۲: حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی نزولی نامتناهی ۶ و حد مجموع مجذورات آنها ۱۲ است. جملهٔ اول و قدر نسبت تصاعد را تعیین کنید.

حل: اگر هر یک از جملات یک تصاعد هندسی را مجذور کنیم دنبالهٔ حاصل خود یک تصاعد هندسی می‌شود که جمله اول و قدر نسبت آن به ترتیب مجذور جملهٔاول و مجذور قدر نسبت

MATH75.IR

تصاعد اولیه می‌باشد.

$$\begin{cases} \dfrac{t_1}{1-q} = 6 \\ \dfrac{t_1^2}{1-q^2} = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{t_1^2}{(1-q)^2} = 36 \\ \dfrac{t_1^2}{(1-q)(1+q)} = 12 \end{cases}$$

دو طرف تساویها را بر هم تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{1+q}{1-q} = \frac{3}{1} \Rightarrow 1+q = 3-3q \Rightarrow 4q = 2 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t_1}{1-q} = 6 \Rightarrow \frac{t_1}{1-\frac{1}{2}} = 6 \Rightarrow t_1 = 3$$

دنبالهٔ توافقی: اگر جملات یک تصاعد حسابی را معکوس کنیم دنباله دیگری بدست می‌آید که آنرا دنبالهٔ توافقی می‌نامند.

دنبالهٔ زیر یک دنبالهٔ توافقی است.

$$\frac{1}{t}, \frac{1}{t+d}, \frac{1}{t+2d}, \dots, \frac{1}{t_1+(n-1)d}$$

نکته: اگر b واسطهٔ توافقی بین a و c باشد یعنی a و b و c یک تصاعد توافقی تشکیل دهند آنگاه $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{b}$ و $\frac{1}{c}$ تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند که در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = \frac{2ac}{a+c}}$$

دنبالهٔ تفاضلات متناهی

فرض می‌کنیم t_1، t_2، t_3 و ... و t_n، دنباله‌ای از اعداد باشد. آنگاه دنبالهٔ زیر یک دنبالهٔ تفاضلات متناهی دنبالهٔ فوق نامیده می‌شود.

$$t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_4 - t_3, \dots, t_n - t_{n-1}, \dots$$

دنبالهٔ تصاعد حسابی همواره یک دنبالهٔ تفاضلات متناهی است که دنبالهٔ تفاضلات متناهی آن یک دنبالهٔ ثابت است.

$$t_1, t_1 + d, t_1 + 2d, t_1 + 3d, \dots$$

MATH75.IR

$d , d , d , d , ...$

به طور کلی دنبالهٔ تفاضلات متناهی هر دنباله‌ای که جمله‌های آن از یک چند جمله‌ای درجهٔ اول بدست آید (یعنی جملهٔ عمومی آن به صورت $an + b$ باشد) همواره دنباله‌ای ثابت است.

اما اگر جملهٔ عمومی یک دنباله برحسب n از درجهٔ دوم باشد دنبالهٔ تفاضلات متناهی آن ثابت نیست بلکه تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند اما دومین مجموعهٔ تفاضلات متناهی آن ثابت است.

به عنوان مثال دنباله‌ای که جملهٔ عمومی آن $n^۲ - n + ۱$ است به صورت زیر است:

$۱ , ۳ , ۷ , ۱۳ , ۲۱ , ...$

اولین دنبالهٔ تفاضلات متناهی آن عبارت است از:

$\Delta_۱ : ۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ...$

دومین دنبالهٔ تفاضلات آن به صورت زیر است:

$\Delta_۲ : ۲ , ۲ , ۲ , ۲ , ...$

اگر یک دنباله، مجموعه‌ای از تفاضلات متناهی ثابت به وجود آوردمی توان جملهٔ مولد یا جملهٔ عمومی این دنباله را مشخص کرد.

در مورد دنباله‌های درجهٔ اول $an + b$ چون خود دنباله، تصاعد عددی است و n قدر نسبت می‌باشد، جملهٔ عمومی به سادگی بدست می‌آید.

اما اگر جملهٔ مولد، چند جمله‌ای درجهٔ دوم $an^۲ + bn + c$ باشد این چند جمله‌ای دنبالهٔ زیر را تولید می‌کند

$a + b + c \ , \ ۴a + ۲b + c \ , \ ۹a + ۳b + c \ , \ ۱۶a + ۴b + c , ...$

که اولین دنبالهٔ تفاضلات متناهی آن عبارت است از:

$\Delta_۱ : ۳a + b , ۵a + b , ۷a + b , ...$

و دومین دنبالهٔ تفاضلات متناهی آن دنبالهٔ زیر است.

$\Delta_۲ : ۲a , ۲a , ۲a , ...$

لذا اولین جملهٔ دنباله که با $an^۲ + bn + c$ تولید می‌شود $a + b + c$ و اولین جملهٔ مجموعهٔ تفاضلات متناهی مرتبهٔ اول $۳a + b$ و اولین جملهٔ مجموعهٔ تفاضلات مرتبهٔ دوم $۲a$ می‌باشد بنابراین می‌توانیم جملهٔ مولد را پیدا کنیم.

مثال ۶۳: جملهٔ عمومی دنبالهٔ زیر را تعیین کنید.

MATH75.IR

۲ , ۳ , ۶ , ۱۱ , ۱۸ , ...

حل:

Δ_1: ۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ... تفاضلات متناهی مرتبهٔ اول

Δ_2: ۲ , ۲ , ۲ , ۲ , ... تفاضلات متناهی مرتبهٔ دوم

$$\begin{cases} ۲a = ۲ \Rightarrow a = ۱ \\ ۳a + b = ۱ \Rightarrow ۳ + b = ۱ \Rightarrow b = -۲ \\ a + b + c = ۲ \Rightarrow ۱ - ۲ + c = ۲ \Rightarrow c = ۳ \end{cases}$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنبالهٔ فوق عبارت است از:

$$t_n = n^۲ - ۲n + ۳$$

مثال ۶۴: در دنبالهٔ ... , ۶۶ , ۴۱ , ۲۲ , ۹ , ۲ جملهٔ دهم چیست؟

حل:

تفاضلات مرتبهٔ اول: ۷ , ۱۳ , ۱۹ , ۲۵ , ...

تفاضلات مرتبهٔ دوم: ۶ , ۶ , ۶ , ۶ , ...

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۳a + b = ۷ \Rightarrow ۹ + b = ۷ \Rightarrow b = -۲ \\ a + b + c = ۲ \Rightarrow ۳ - ۲ + c = ۲ \Rightarrow c = ۱ \end{cases}$$

بنابراین جملهٔ عمومی دنباله بصورت $t_n = ۳n^۲ - ۲n + ۱$ است.

$$t_{۱۰} = ۳ \times ۱۰^۲ - ۲ \times ۱۰ + ۱ = ۲۸۱$$

نکته: به همین ترتیب می‌توان نشان داد که اگر جملهٔ مولد دنباله چند جمله‌ای درجهٔ سوم $an^۳ + bn^۲ + cn + d$ باشد جملهٔ اول دنباله $a + b + c + d$ و اولین جملهٔ نخستین دنباله تفاضلات متناهی مرتبهٔ اول $۷a + ۳b + c$ و جملهٔ اول دنبالهٔ تفاضلات مرتبهٔ دوم $۱۲a + ۲b$ و جملهٔ اول تفاضلات مرتبهٔ سوم $۶a$ می‌باشد.

MATH75.IR

تمرین‌های فصل ششم

دنباله و تصاعد

۱ـ در تصاعد زیر جمله بیستم و مجموع ده جملهٔ اول را بدست آورید:

۳ , ۸ , ۱۳ , ۱۸ , ...

۲ـ بین دو عدد ۱۰ و ۲۸ پنج واسطهٔ حسابی درج کنید.

۳ـ پنج جملهٔ متوالی از تصاعد حسابی زیر را معین کنید که مجموع آنها ۱۸۷/۵ باشد.

$\frac{۳}{۲}, \frac{۹}{۲}, \frac{۱۵}{۲}, \frac{۲۱}{۲}, ...$

۴ـ مجموع پنج عدد که تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند ۱۵ و حاصلضربشان ۱۱۵۵ است. این پنج عدد کدامند؟

۵ـ مجموع سه عدد که تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند ۱۲ و مجموع مربعات آنها ۶۶ است. این اعداد را بدست آورید.

۶ـ جملهٔ دوازدهم و جملهٔ هشتاد و پنجم و جملهٔ آخر یک تصاعد حسابی به ترتیب ۳۸ و ۲۵۷ و ۳۹۵ است. تصاعد را مشخص کنید.

۷ـ مجموع همهٔ اعداد سه رقمی که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۱۰ برابر ۷ باشد را حساب کنید.

۸ـ مجموع همهٔ عددهایی که در جدول ضرب اعداد ۱ تا ۱۰ وجود دارد را حساب کنید.

۹ـ یک ساعت دیواری طوری ساخته شده که علاوهٔ بر آن که در سر هر ساعت به تعداد همان ساعت زنگ می‌زند (مثلاً در سر ساعت ۳ سه بار و در سر ساعت ۴ چهار بار) در رأس هر نیم ساعت نیز یک بار زنگ می‌زند (مثلاً در ساعت‌های نیم و ۱/۵ و ۲/۵ و ...) تعیین کنید که این ساعت در یک شبانه روز چند بار زنگ می‌زند.

۱۰ـ جملهٔ پانزدهم و پنجاهم و جملهٔ آخر یک تصاعد حسابی به ترتیب ۵۷ و ۱۶۲ و ۲۵۸ می‌باشد. مجموع جملات این تصاعد را حساب کنید.

۱۱ـ چهار عدد تشکیل یک تصاعد حسابی داده‌اند که حاصلضرب جمله‌های اول و چهارم $\frac{۹۱}{۹}$ و حاصلضرب جمله‌های دوم و سوم ۱۱ می‌باشند. این چهار عدد کدامند؟

۱۲ـ مجموع سه جملهٔ اول یک تصاعد عددی ۲۷ و مجموع سه جملهٔ آخر آن ۵۷ و مجموع

MATH75.IR

جملات آن ۱۱۲ می‌باشد. جملهٔ اول و قدر نسبت و تعداد جملات را تعیین کنید.

۱۳ـ مجموع ۵ جملهٔ اول یک تصاعد حسابی ۴۵ و مجموع ۵ جملهٔ بعدی آن ۹۵ است جملهٔ اول و قدر نسبت را معین کنید.

۱۴ـ در یک تصاعد حسابی که شامل ۲۰ جمله است مجموع جملات ششم، نهم، دوازدهم و پانزدهم برابر ۲۰ است. مجموع همهٔ جملات تصاعد را تعیین کنید.

۱۵ـ پانزدهمین عددی که از ۶۰ بزرگتر می‌باشد و بر ۸ بخشپذیر است چیست؟

۱۶ـ بین دو عدد ۴ و ۶ حداقل چند واسطهٔ حسابی باید درج کرد تا مجموع کلیهٔ اعداد حاصل بزرگتر از ۵۰ باشد. این اعداد را حساب کنید.

۱۷ـ اگر a و b و c جمله‌های یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید اعداد زیر نیز تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند.

$$a^2 + ab + b^2 \quad , \quad c^2 + ac + a^2 \quad , \quad b^2 + bc + c^2$$

۱۸ـ زاویه‌های یک چهار ضلعی تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهند. اگر زاویهٔ کوچکتر 60° باشد قدر نسبت و اندازهٔ سه زاویهٔ دیگر را حساب کنید.

۱۹ـ مجموع هفت جملهٔ نخست از یک تصاعد حسابی ۴۹ و مجموع ۱۷ جملهٔ نخست آن ۲۸۹ است. مطلوبست مجموع n جملهٔ تصاعد.

۲۰ـ اگر S_1 و S_2 و S_3 به ترتیب مجموع n جملهٔ اول سه تصاعد عددی باشند که جملهٔ اول هر سه تصاعد یک و قدر نسبت آنها به ترتیب ۱ و ۲ و ۳ است نشان دهید S_1 و S_2 و S_3 تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند.

۲۱ـ دو متحرک به فاصلهٔ ۲۰۱۰ متری یکدیگر قرار دارند و در یک لحظه به سوی هم حرکت می‌کنند. متحرک اول در ثانیهٔ اول ۸ متر و در ثانیهٔ دوم ۱۳ متر و در ثانیهٔ سوم ۱۸ متر و ... راه را طی می‌کند. متحرک دوم در ثانیهٔ اول ۷ متر و در ثانیهٔ دوم ۱۱ متر و در ثانیهٔ سوم ۱۵ متر و ... راه را طی می‌کند. تعیین کنید پس از چه مدت به هم می‌رسند؟

۲۲ـ اگر a و b و c و d چهار جملهٔ متوالی از یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید $abcd + (b - c)^4$ مربع کامل است.

۲۳ـ مجموع اولین n_1 و n_2 و n_3 جملهٔ یک تصاعد حسابی را به ترتیب S_1 و S_2 و S_3 می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$$

MATH75.IR

۲۴ـ اگر a و b و c تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند و f تابعی حقیقی باشد ثابت کنید عبارات زیر نیز جملات یک تصاعد حسابی می‌باشند.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ ,\ \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\ ,\ \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

۲۵ـ مقدار x را چنان تعیین کنید که $\log 2$ و $\log(2^x-2)$ و $\log(2^x+2)$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند.

۲۶ـ یک تصاعد حسابی ۲۰ جمله دارد که در آن مجموع جملات مرتبهٔ فرد ۲۰۰ و مجموع جملات مرتبهٔ زوج ۲۳۰ است. جملهٔ هفدهم این تصاعد را بدست آورید.

۲۷ـ در یک تصاعد عددی $\frac{S_{12}}{S_{18}}=\frac{4}{9}$. نشان دهید $\frac{t_{12}}{t_{18}}=\frac{23}{35}$.

۲۸ـ در مثلث قائم الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ داریم $4a=5b$ ثابت کنید اضلاع مثلث تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند.

۲۹ـ در یک تصاعد حسابی $S_n=S_m$. ثابت کنید $S_{m+n}=0$. $(m\neq n)$

۳۰ـ در یک تصاعد حسابی $\frac{S_m}{S_n}=\frac{m^2}{n^2}$. ثابت کنید $\frac{t_m}{t_n}=\frac{2m-1}{2n-1}$.

۳۱ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ $(m-1)x^2-(3m+2)x+12=0$ را x' و x'' بنامیم و x' و ۴ و x'' تشکیل تصاعد حسابی بدهند مقدار m را حساب کنید.

۳۲ـ در یک تصاعد حسابی مجموع سه جملهٔ اول ۱۲ و مجموع سه جملهٔ آخر ۶۶ و مجموع تمام جملات ۱۱۷ می‌باشد. تصاعد را مشخص کنید.

۳۳ـ در یک تصاعد حسابی $t_n+t_{n+1}+\dots+t_{n+27}=14$ و $t_n+t_{n+1}+\dots+t_{n+33}=204$. قدر نسبت تصاعد را بدست آورید.

۳۴ـ اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ جملات یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}}=\frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}}$$

سپس حاصل عبارت زیر را تعیین کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}}+\frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{18}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{26}+\sqrt{30}}$$

۳۵ـ اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ مخالف صفر و جملات یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

MATH75.IR

۳۶ـ اگر $y^2 + yz + z^2$ و $x^2 + xz + z^2$ و $x^2 + xy + y^2$ تصاعد حسابی تشکیل دهند نشان دهید x و y و z نیز تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند.

۳۷ـ اگر $\log_a x$ و $\log_b x$ و $\log_c x$ به ترتیب جملات یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید.

$$c^2 = (ac)^{\log_a b}$$

۳۸ـ در یک تصاعد حسابی $t_m + t_n = t_p + t_q$ ثابت کنید.

$$m + n = p + q$$

۳۹ـ تصاعدی حسابی بنویسید که جملهٔ اول آن ۱ و مجموع ۵ جملهٔ اول آن ربع مجموع ۵ جملهٔ بعدی آن باشد.

۴۰ـ در تصاعد (... , ۵۲ , ۳۵ , ۱۸ , ۱) جمله‌ای را تعیین کنید که همهٔ ارقام آن ۳ باشد.

۴۱ـ اگر S_n و S_{2n} به ترتیب مجموع n جملهٔ اول و ۲n جملهٔ اول یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید:

$$d = \frac{S_{2n} - 2S_n}{n^2}$$

۴۲ـ مجموع n جملهٔ اول یک تصاعد حسابی با قدر نسبت ۴ برابر ۲۱ و مجموع ۲n جملهٔ اول آن ۷۸ می‌باشد. جملهٔ اول این تصاعد را محاسبه کنید.

۴۳ـ اگر a و b و c به ترتیب جمله‌های مرتبهٔ mام و nام و pام یک تصاعد عددی باشند ثابت کنید:

$$a(n - p) + b(p - m) + c(m - n) = 0$$

۴۴ـ در معادلهٔ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ چه رابطه‌ای بین ضرایب باید برقرار باشد تا ریشه‌ها تصاعد حسابی تشکیل دهند.

۴۵ـ در یک تصاعد عددی مجموع ۵ جملهٔ اول ۱۰ و مجموع پنج جملهٔ آخر ۱۴۵ و مجموع همهٔ جملات آن ۲۱۷ است. تصاعد را مشخص کنید.

۴۶ـ مجموع اعداد بزرگتر از ۱۸۰ و کوچکتر از ۸۸۰ که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۲۳ برابر ۵ شود را حساب کنید.

۴۷ـ در یک تصاعد حسابی $S_n = 5n^2 + 2n$، جملهٔ اول و جملهٔ دهم و قدر نسبت تصاعد را مشخص کنید.

۴۸ـ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 40^2 - 39^2$$

۴۹ـ ثابت کنید اگر اندازه‌های زوایای یک پنج ضلعی محدب تصاعد حسابی پدید آورند، اندازهٔ

MATH75.IR

یکی از زاویه‌های آن ۱۰۸ درجه است.

۵۰ـ بین دو عدد ۱۱ و ۱۱۱ چند واسطهٔ حسابی می‌توان درج کرد که بزرگترین آنها از کوچکترین آنها ۹۲ واحد بزرگتر باشد.

۵۱ـ اگر مجموع $n + 1$ جمله یک تصاعد حسابی برابر $2n^2 + 5n + 3$ باشد جملهٔ nام این تصاعد را بدست آورید.

۵۲ـ اگر در یک تصاعد حسابی $t_{2n+1} = 8n + 3$ باشد، جملهٔ اول و مجموع n جملهٔ اول آنرا تعیین کنید.

۵۴ـ در داستانها آمده است که شخصی در برابر خدمتی که کرده بود، این پاداش را خواست که روز اول خدمت، یک سکهٔ طلای ۵ گرمی و در روزهای بعد هر روز به تعداد دو برابر روز قبل سکه‌های طلای ۵ گرمی دریافت کند تا روزی که شخصاً قادر به حمل سکه‌های دریافتی در آن روز نباشد. اگر حداکثر باری که آن شخص بتواند حمل کند ۱۰۰ کیلوگرم باشد معلوم کنید شخص روی هم چند سکهٔ طلای ۵ گرمی دریافت می‌کند.

۵۵ـ تصاعدی حسابی بنویسید که جملهٔ اول آن یک و مجموع ۵ جملهٔ اول آن $\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جملهٔ بعدی آن باشد.

۵۶ـ در یک تصاعد حسابی مجموع جملات پنجم و نهم برابر ۵۰ می‌باشد. مجموع ۱۳ جملهٔ اول این تصاعد چیست؟

۵۷ـ مجموع جملهٔ پنجم و سوم یک تصاعد حسابی صعودی ۳۴ و تفاضل جملهٔ دوم و ششم آن برابر ۲۰ است. جملهٔ هفتم تصاعد چیست؟

۵۸ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ $x^4 + px^2 + q = 0$ تشکیل تصاعد حسابی بدهند بین p و q چه رابطه‌ای برقرار است.

۵۹ـ جملهٔ چهارم یک تصاعد حسابی ۲ و مجموع یازده جملهٔ اول آن یازده برابر مجموع شش جملهٔ اول آن می‌باشد. این تصاعد را مشخص کنید.

۶۰ـ اگر S_n و S_{2n} و S_{3n} به ترتیب مجموع n جملهٔ اول و 2n جملهٔ اول و 3n جملهٔ اول یک تصاعد حسابی باشند ثابت کنید: $3(S_{2n} - S_n) = S_{3n}$

۶۱ـ مجموع هفده جملهٔ اول یک تصاعد حسابی ۳۲۳− و جملهٔ دهم آن ۲۴− است. تصاعد را مشخص کنید.

۶۲ـ جملهٔ بیستم یک تصاعد حسابی را تعیین کنید که در آن داشته باشیم:

MATH75.IR

$t_۲ \times t_۵ = ۵۲ \ , \ t_۲ + t_۳ + t_۴ + t_۵ = ۳۴$

۶۳ـ اولین و آخرین جمله از یک تصاعد حسابی ۷ جمله‌ای مساوی ۱۱ و ۳۵ می‌باشند. تصاعد حسابی دیگری داریم که جملات اول و آخر آن ۱۳ و ۳۸ است. اگر جملهٔ چهارم هر دو تصاعد یکی باشد، تعداد جملات تصاعد دوم را پیدا کنید.

۶۴ـ اگر هر یک از تصاعدهای زیر ۱۰۰ جمله داشته باشند، چند جملهٔ مساوی بین این دو تصاعد وجود دارد؟

۵ , ۸ , ۱۱ , ۱۴ , ...

۳ , ۷ , ۱۱ , ۱۵ , ...

۶۵ـ تعداد جملات یک تصاعد حسابی را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$t_۲ + t_۴ + t_۶ + ... + t_{۲n} = ۱۲۶$

$t_۲ + t_{۲n} = ۴۲$

۶۶ـ تعداد جملات یک تصاعد حسابی زوج است. اگر $S_۱$ مجموع جملات نیمهٔ اول و $S_۲$ مجموع جملات نیمهٔ دوم تصاعد باشد ثابت کنید $S_۲ - S_۱ = d \times n^۲$. (n نصف تعداد جملات است).

۶۷ـ چهار عدد تشکیل تصاعد حسابی داده‌اند و بزرگترین آنها مساوی مجموع مربعات سه جملهٔ دیگر است. این چهار عدد را پیدا کنید.

۶۸ـ تصاعدی حسابی را تعیین کنید که مجموع هر چند جملهٔ اول آن برابر با چهار برابر مجذور تعداد جمله‌های آن باشند.

۶۹ـ در یک تصاعد حسابی $t_۶ + t_۹ + t_{۱۲} + t_{۱۵} = ۲۰$ حاصل $S_{۲۰}$ چیست؟

۷۰ـ اگر x و y و z جملات یک تصاعد هندسی باشند ثابت کنید $\frac{۱}{\log_x a}$ و $\frac{۱}{\log_y a}$ و $\frac{۱}{\log_z a}$ تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند.

۷۱ـ جملهٔ بیست و پنجم یک تصاعد هندسی ۱۶ برابر جملهٔ بیست و یکم آن است. اگر جملهٔ پنجم تصاعد ۶۴ باشد، قدر نسبت و جملهٔ اول تصاعد را تعیین کنید.

۷۲ـ بین ۶ و ۴۸۶ چهار واسطهٔ هندسی درج کنید.

۷۳ـ در یک تصاعد هندسی مجموع دو جملهٔ اول و چهارم ۵۶ و مجموع دو جملهٔ دوم وسوم ۲۴ می‌باشد. تصاعد را مشخص کنید.

۷۴ـ مجموع هشت جملهٔ اول یک تصاعد هندسی ۵۱۰ و مجموع چهار جملهٔ اول آن ۳۰

MATH75.IR

است. $S_{۱۰}$ را بدست آورید.

۷۵ـ مجموع سه عدد که تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند ۳۹ و مجموع بزرگترین عدد و کوچکترین عدد ۶ واحد کمتر از چهار برابر عدد وسطی است. این سه عدد را تعیین کنید.

۷۶ـ اگر loga و logb و logc تشکیل تصاعد حسابی دهند ثابت کنید a و b و c تشکیل تصاعد هندسی خواهند داد.

۷۷ـ ثابت کنید اگر اضلاع یک مثلث تصاعد هندسی بسازند، سه ارتفاع مثلث نیز تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

۷۸ـ اگر a و b و c تشکیل تصاعد هندسی دهند ثابت کنید:

$$(b-c)^۲ + (c-a)^۲ + (d-b)^۲ = (d-a)^۲$$

۷۹ـ اگر a و b و c به ترتیب جمله‌های مرتبهٔ mام و nام و pام از یک دنباله باشند ثابت کنید:

الف) برای آنکه دنباله تصاعد حسابی باشد لازم و کافی است که:

$$a(n-p) + b(p-m) + c(m-n) = ۰$$

ب) برای آنکه این دنباله یک تصاعد هندسی باشد لازم و کافی است که:

$$a^{n-p} \times b^{p-m} \times c^{m-n} = ۱$$

۸۰ـ حد مجموع عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۸} + \dots$

ب) $\frac{۳}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰۰۰} + \dots$

ج) $۲ + ۰/۹ + ۰/۰۹ + ۰/۰۰۹ + \dots$

۸۱ـ در یک تصاعد هندسی $q = \frac{۱}{۲}$ و $t_۸ = \frac{۱}{۳۲}$، حد مجموع جملات این تصاعد را حساب کنید.

۸۲ـ حاصل جمع زیر را بدست آورید.

$$S = (x - \frac{۱}{x})^۲ + (x^۲ - \frac{۱}{x^۲})^۲ + (x^۳ - \frac{۱}{x^۳})^۲ + \dots + (x^n - \frac{۱}{x^n})^۲$$

۸۳ـ حاصل جمع زیر را بدست آورید.

$$S = ۵ + ۵۵ + ۵۵۵ + \dots + \underbrace{۵۵۵ \dots ۵}_{\text{۱۰۰ رقم}}$$

۸۴ـ حد مجموع جملات یک تصاعد هندسی نزولی ۴ و حد مجموع مکعبات جمله‌های آن ۱۹۲ است. تصاعد را مشخص کنید.

MATH75.IR

۸۵ـ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = ۱! + ۲ \times ۲! + ۳ \times ۳! + ... + n \times n!$$

۸۶ـ اگر $|ar| < ۱$ حد مجموع زیر را پیدا کنید.

$$۱ + (۱ + a)r + (۱ + a + a^۲)r^۲ + (۱ + a + a^۲ + a^۳)r^۳ + ...$$

۸۷ـ اگر $S_۱ , S_۲ , ... , S_n$ به ترتیب حد مجموع بی‌نهایت جمله از تصاعدهایی هندسی باشند که جمله‌های اول آنها به ترتیب ۱ و ۲ و ۳ و... و p و قدر نسبت آنها به ترتیب $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و ... و $\frac{۱}{P + ۱}$ باشند ثابت کنید:

$$S_۱ + S_۲ + S_۳ + ... + S_n = \frac{p(p + ۳)}{۲}$$

۸۸ـ اگر $|p| < ۱$ و $|r| < ۱$ و داشته باشیم:

$$A = ۱ + p + p^۲ + ... \qquad B = ۱ + r + r^۲ + ... \qquad C = ۱ + pr + p^۲r^۲ + ...$$

ثابت کنید $C = \frac{AB}{A + B - ۱}$.

۸۹ـ دوایری به شعاعهای R و $\frac{R}{۲}$ و $\frac{R}{۴}$ و ... به صورت مماس داخلی در نقطهٔ A مفروضند، حد مجموع محیطها و مساحتهای آنها را بدست آورید.

۹۰ـ یک تصاعد هندسی بنویسید که در آن داشته باشیم:

$$t_۱ + t_۲ + t_۳ + t_۴ + t_۵ = ۳۱$$

$$t_۲ + t_۳ + t_۴ + t_۵ + t_۶ = ۶۲$$

۹۱ـ جملات دوم و سوم یک تصاعد حسابی ۱۴ و ۱۶ است. یک تصاعد هندسی بنویسید که قدر نسبت آن همان قدر نسبت تصاعد حسابی بوده و مجموع سه جملهٔ اول هر دو تصاعد یکی باشد.

۹۲ـ در یک تصاعد هندسی اولین و سومین و پنجمین جمله را به ترتیب جملات اول، چهارم و ششم یک تصاعد حسابی گرفته‌ایم. اگر جملهٔ اول تصاعد حسابی ۵ باشد جملهٔ چهارم آنرا حساب کنید.

۹۳ـ اگر a و b و c و d جملات متوالی یک تصاعد هندسی باشند درستی رابطهٔ زیر را تحقیق کنید.

$$(b - c)^۲ = ac + bd - ۲ad$$

۹۴ـ در صورتیکه m و $m + ۱$ و $m - ۱$ سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی باشند ثابت کنید معادلهٔ زیر ریشهٔ مضاعف دارد و این ریشه را حساب کنید.

MATH75.IR

$$mx^{۲} - ۲(m + ۱)x + m - ۱ = ۰$$

۹۵ـ اگر $S_۱$ و $S_۲$ و $S_۳$ به ترتیب مجموع n جمله و ۲n جمله و ۳n جملهٔ اول از یک تصاعد هندسی باشند ثابت کنید:

$$S_۱^۲ + S_۲^۲ = S_۱(S_۲ + S_۳)$$

۹۶ـ در یک تصاعد حسابی جملهٔ دوم واسطهٔ هندسی بین دو جملهٔ اول و چهارم است. ثابت کنید جملات چهارم و ششم و نهم این تصاعد تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند.

۹۷ـ مجموع ۱۰ جملهٔ اول یک تصاعد عددی مساوی ۱۵۵ و مجموع دو جملهٔ اول یک تصاعد هندسی مساوی ۹ است. اگر جملهٔ اول تصاعد عددی برابر قدر نسبت تصاعد هندسی باشد و جملهٔ اول تصاعد هندسی مساوی قدر نسبت تصاعد عددی باشد این دو تصاعد را مشخص کنید.

۹۸ـ حد مجموع زیر را حساب کنید.

$$\log_{۴}x + \log_{۱۶}x + \log_{۲۵۶}x + \dots + \log_{۲^{۲}}x$$

۹۹ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۴^x + ۴^{x-۱} + ۴^{x-۲} + \dots = \frac{۶۴}{۳}$$

۱۰۰ـ اگر a و b و c به ترتیب جملات پنجم و هفدهم و سی و هفتم تصاعد حسابی و هندسی باشند ثابت کنید:

$$a^{b-c} \times b^{c-a} \times c^{a-b} = ۱$$

۱۰۱ـ حد مجموع زیر را بدست آورید.

$$S = ۱ + \frac{۳}{۷} + \frac{۵}{۷^۲} + \frac{۷}{۷^۳} + \frac{۹}{۷^۴} + \dots$$

۱۰۲ـ جملهٔ nام و مجموع n جمله از تصاعد زیر را بدست آورید.

$$۱ \times ۳ \ , \ ۳ \times ۷ \ , ۵ \times ۱۱ \ , \ ۷ \times ۱۵ \ , \dots$$

۱۰۳ـ مثلث قائم الزاویه‌ای به وتر a و به اضلاع زاویهٔ قائمه b و c مفروض است اگر از رأس قائمه بر وتر عمود کنیم و از نقطهٔ حاصل عمودی بر ضلع قائمه و از آنجا عمودی بر وتر و این کار را ادامه دهیم مطلوبست طول هر یک از عمودها برحسب اضلاع مثلث و حد مجموع آنها.

۱۰۴ـ در سری زیر مقادیر $S_۱$, $S_۲$, $S_۳$, ... , S_n را حساب کنید.

$$S = ۳ + ۳۰ + ۳۰۰ + \dots + ۳ \times ۱۰^{n-۱} + \dots$$

MATH75.IR

۱۰۵ـ مجموع زیر را حساب کنید.

$$S = \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۱+۲} + \frac{۱}{۱+۲+۳} + \dots + \frac{۱}{۱+۲+۳+\dots+n}$$

۱۰۶ـ مجموعهای زیر را حساب کنید.

$$A = ۱ \times a + ۳ \times a^{۲} + ۵ \times a^{۳} + \dots + (۲n - ۱) \times a^{n}$$

$$B = ۱ \times ۳ + ۲ \times ۴ + ۳ \times ۵ + \dots + n(n + ۲)$$

۱۰۷ـ اوساط اضلاع یک مربع به ضلع a را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی ساخته شود. سپس اوساط اضلاع مربع جدید را به هم وصل می‌کنیم تا مربع دیگری پدید آید و این عمل را ادامه می‌دهیم. مطلوبست:

الف) حد مجموع محیطهای مربعها.

ب) حد مجموع مساحتهای مربعها.

۱۰۸ـ ثابت کنید:

$$۱^{۳} + ۲^{۳} + ۳^{۳} + \dots + n^{۳} = \left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^{۲}$$

۱۰۹ـ مجموع n جملهٔ اول یک تصاعد هندسی ۵۱۰ و مجموع $\frac{n}{۲}$ جملات اول این تصاعد ۳۰ است. اگر قدر نسبت ۲ باشد جملهٔ اول و تعداد جملات را بدست آورید.

۱۱۰ـ پدری یک پسر و یک دختر دارد سن پسر کوچکتر از سن دختر است و سن آنها تشکیل تصاعد هندسی می‌دهد. اگر سن دختر را ۱۲ سال افزایش دهیم تصاعد حسابی می‌شود و در این صورت اگر ۹۶ سال به سن پدر اضافه کنیم تصاعد هندسی می‌شود. سن فعلی هر کدام را حساب کنید.

۱۱۱ـ حاصل جمع زیر را تا n جمله بدست آورید.

$$S = ۳ + ۲۴\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴}\right) + ۲۴^{۲}\left(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۶}\right) + ۲۴^{۳}\left(\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲۷} + \frac{۱}{۶۴}\right) + \dots$$

۱۱۲ـ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$S_n = ۱ + ۲a + ۳a^{۲} + ۴a^{۳} + \dots + na^{n-۱}$$

۱۱۳ـ حاصل جمع زیر را تا n جمله بدست آورید.

$$S = ۸ + (۲ \times ۸۹) + (۳ \times ۸۹۹) + (۴ \times ۸۹۹۹) + \dots$$

۱۱۴ـ حاصل جمع زیر را بدست آورید.

$$S = \frac{۱}{۱ \times ۴} + \frac{۱}{۴ \times ۷} + \frac{۱}{۷ \times ۱۰} + \dots + \frac{۱}{۵۸ \times ۶۱}$$

MATH75.IR

۱۱۵ـ حاصل جمع زیر را بدست آورید.

$$S = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۲۴} + \dots + \frac{۱}{۴۴۰}$$

۱۱۶ـ دنبالهٔ اعداد طبیعی را چنان گروه بندی می‌کنیم که به یک عدد مجذور کامل ختم شوند مانند

(۱) , (۲ , ۳ , ۴) , (۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹) , (۱۰ , ۱۱ , ۱۲ , ۱۳ , ۱۴ , ۱۵ , ۱۶) , ...

مجموع اعداد دستهٔ kام را بدست آورید.

۱۱۷ـ دسته‌هایی از اعداد فرد را به صورت زیر تشکیل داده‌ایم

(۱) , (۳ , ۵) , (۷ , ۹ , ۱۱) , ...

به طوریکه تعداد جملات گروه nام مساوی n می‌باشد. مجموع اعداد دستهٔ nام را بدست آورید.

۱۱۸ـ اگر اعداد طبیعی را به صورت زیر بنویسیم ثابت کنید مجموع اعداد هر سطر با مجذور یک عدد فرد برابر است.

۱

۲ , ۳ , ۴

۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷

۴ , ۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹ , ۱۰

. . . . . .

. . . . . .

۱۱۹ـ از اعداد a و b و c و d و e سه عدد a و b و c تشکیل تصاعد حسابی و اعداد b و c و d تشکیل تصاعد هندسی و اعداد c و d و e تشکیل تصاعد توافقی می‌دهند. ثابت کنید a و c و e سه جملهٔ متوالی یک تصاعد هندسی هستند.

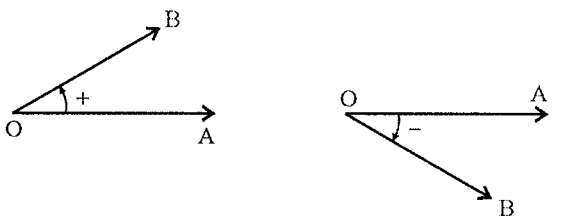
۱۲۰ـ مجموع سه عدد که تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند ۲۶ است. اگر به آن سه عدد به ترتیب ۱ و ۶ و ۳ واحد اضافه کنیم اعداد حاصل تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند. این اعداد را بدست آورید.

MATH75.IR

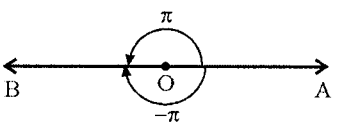
فصل هفتم

مثلثات

زاویهٔ مثلثاتی: اگر نیم خط OA را حول نقطهٔ O در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (جهت مثلثاتی) دوران دهیم زاویهٔ پدید آمده بنا به قرارداد یک زاویهٔ مثبت و اگر نیم خط OA را حول نقطهٔ O در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم زاویهٔ حاصل منفی است.



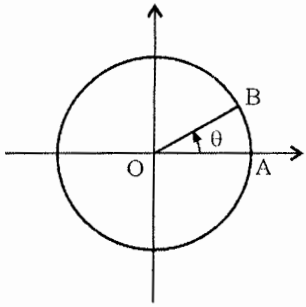
اگر نیم خط OA را چنان دوران دهیم که نیم خط حاصل در امتداد نیم خط OA قرار گیرد زاویهٔ حاصل ۱۸۰° یا ۱۸۰° − (π یا $-\pi$ رادیان) می‌شود.



در شکل زیر نیم خط OA را حول مبداء مختصات در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران داده‌ایم تا زاویهٔ θ بدست آید. اگر نیم خط OA را به اندازهٔ ۳۶۰° (یک دور کامل) دوران دهیم و به دنبال آن به اندازهٔ θ دوران داده و به نقطهٔ B برسیم اندازهٔ زاویهٔ پدید آمده $\theta + 360°$ می‌باشد و اگر دو دور کامل دوران دهیم و دوباره به نقطهٔ B برسیم اندازهٔ زاویهٔ پیموده

MATH75.IR

شده $\theta + ۷۲۰^\circ$ و به همین ترتیب اگر نیم خط OA را K دور دوران دهیم و به نقطهٔ B برسیم اندازهٔ زاویهٔ $\theta + ۳۶۰k$ می‌شود. همانطوریکه ملاحظه شد در مثلثات با زاویه‌های بزرگتر از ۳۶۰° نیز سروکار داریم.



رادیان: رادیان یکی از واحدهای اندازه‌گیری زاویه است. یک رادیان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی از یک دایره است که طول کمان مقابل آن زاویه برابر شعاع دایره باشد. با توجه به اینکه محیط دایره $۲\pi r$ است می‌توان گفت یک دایرهٔ کامل ۲π رادیان می‌باشد. اگر اندازهٔ یک زاویه برحسب درجه را با D و اندازهٔ آن برحسب رادیان را با R نشان دهیم رابطهٔ زیر همواره برقرار است که از آن می‌توان برای تبدیل واحدها به یکدیگر استفاده کرد.

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi}}$$

نکته: یک رادیان تقریباً برابر $۵۷/۳^\circ$ است. $\frac{۱۸۰}{\pi} = \frac{۱۸۰}{۳/۱۴} \approx ۵۷/۳$.

مثال ۱ : در جدول زیر اندازهٔ برخی از زاویه‌ها برحسب درجه و رادیان نوشته شده است.

درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۲۰	۱۳۵°	۱۵۰	۱۸۰	۲۱۰	۲۲۵	...
رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	$\frac{۵\pi}{۶}$	π	$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۵\pi}{۴}$	...

...	۲۴۰	۲۷۰	۳۰۰	۳۱۵	۳۳۰	۳۶۰
...	$\frac{۴\pi}{۳}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۳}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π

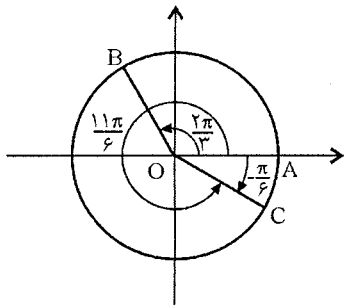
مثال ۲ : زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{۱۱\pi}{۶}$ و $\frac{-\pi}{۶}$ را روی شکل نشان دهید.

حل :

$$A\hat{O}B = \frac{۲\pi}{۳}$$

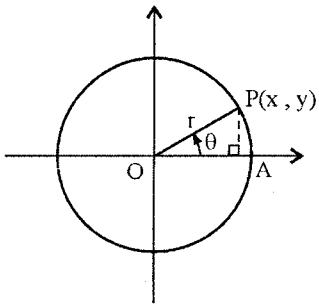
MATH75.IR

$A\hat{O}C = \frac{۱۱\pi}{۶}$



انتهای کمان مقابل به زاویهٔ $\frac{۱۱\pi}{۶}$ و انتهای کمان مقابل به زاویهٔ $-\frac{\pi}{۶}$ در یک نقطه قرار دارند.

توابع مثلثاتی: در شکل زیر پاره خط OA را در جهت مثلثاتی به اندازهٔ θ درجه دوران داده‌ایم تا پاره خط OP پدید آید. اگر (x , y) مختصات نقطهٔ P باشد توابع مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت را با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم.



$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \qquad \sec\theta = \frac{۱}{\cos\theta} = \frac{r}{x} \qquad \csc\theta = \frac{۱}{\sin\theta} = \frac{r}{y}$$

از تعاریف فوق می‌توان اتحادهای مثلثاتی زیر را نتیجه گرفت.

۱) $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$

۲) $\tan\theta \times \cot\theta = ۱$

۳) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۴) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

۵) $۱ + \tan^۲\theta = \frac{۱}{\cos^۲\theta}$

۶) $۱ + \cot^۲\theta = \frac{۱}{\sin^۲\theta}$

دامنه و برد توابع مثلثاتی: اگر θ اندازهٔ زاویهٔ اصلی برحسب رادیان باشد $(-\pi \le \theta \le \pi)$ آنگاه تمام اندازه‌های این زاویهٔ مثلثاتی $۲k\pi + \theta$ رادیان است. $(k \in Z)$ بنابراین دامنهٔ توابع sin و cos مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

با توجه به اتحاد $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ می‌توان گفت دامنهٔ تابع tan همهٔ اعداد حقیقی است به جز زاویه‌هایی که کسینوس آنها صفر شود. کسینوس زاویه‌های اصلی $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ و کلیهٔ زاویه‌های

MATH75.IR

$\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$ و $۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲}$ صفر است.

$$۲k\pi + \frac{۳\pi}{۲} = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۲} = (۲k + ۱)\pi + \frac{\pi}{۲}$$

به طور کلی می‌توان گفت دامنهٔ تابع tan همهٔ اعداد حقیقی است به جز زاویه‌های به صورت $k\pi + \frac{\pi}{۲}$. $(k \in Z)$ با در نظر گرفتن رابطهٔ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ نیز می‌توان نتیجه گرفت که دامنهٔ تابع cot همهٔ اعداد حقیقی به جزء زاویه‌های به صورت $k\pi$ می‌باشد.

دامنهٔ تابع sec همان دامنهٔ tan و دامنهٔ تابع csc همان دامنهٔ cot است.

$$D_{sin} = D_{cos} = R$$

$$D_{tan} = R - \{x | x = k\pi + \frac{\pi}{۲},\ k \in Z\} = D_{sec}$$

$$D_{cot} = R - \{x | x = k\pi\ ,\ k \in Z\} = D_{csc}$$

برد تابع سینوس و کسینوس بازهٔ $[-۱ , ۱]$ می‌باشد. زیرا:

$$x^۲ + y^۲ \geq y^۲ \overset{y \geq ۰}{\Rightarrow} \sqrt{x^۲ + y^۲} \geq y \Rightarrow ۰ \leq \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \leq ۱$$

و اگر $y < ۰$ آنگاه $-y > ۰$ در نتیجه $۰ \leq \frac{-y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \leq ۱$ یا $-۱ < \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \leq ۰$.

بنابراین در مجموع خواهیم داشت:

$$-۱ \leq \frac{y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} \leq ۱ \Rightarrow -۱ \leq \sin\theta \leq ۱$$

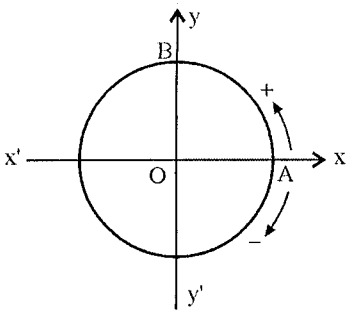
به همین ترتیب می‌توان گفت $-۱ \leq \cos\theta \leq ۱$.

برد تابعهای تانژانت و کتانژانت مجموعهٔ اعداد حقیقی است. با توجه به اینکه سینوس و کسینوس زاویهٔ θ به بازهٔ $[-۱ , ۱]$ تعلق دارد. می‌توان گفت $\frac{۱}{\sin\theta}$ و $\frac{۱}{\cos\theta}$ به مجموعهٔ $(-\infty , -۱] \cup [۱ , +\infty)$ تعلق دارد بنابراین برد توابع sec و csc عبارتند از:

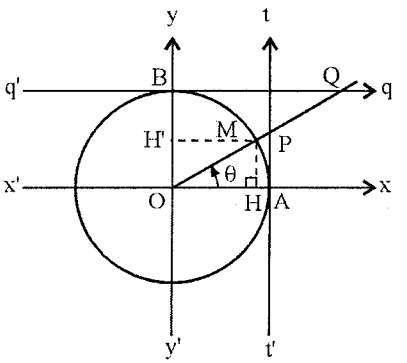
$(-\infty , -۱] \cup [۱ , +\infty)$.

دایرهٔ مثلثاتی: دایرهٔ مثلثاتی دایره‌ای است به شعاع واحد که در آن A را به عنوان مبداء حرکت در نظر می‌گیریم. اگر برای طی کمان در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم کمان حاصل مثبت و اگر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم کمان حاصل منفی است.

MATH75.IR



در دایره مثلثاتی که مرکز آن مبداء مختصات و محورهای $x'x$ و $y'y$ به ترتیب قطرهای افقی و قائم دایره باشند بنا به قرارداد محور $y'oy$ را محور سینوسها و محور $x'ox$ محور کسینوسها می‌نامند. محور $t'At$ که در نقطهٔ A بر دایره مماس است محور تانژانت و محور $q'Bq$ که در نقطهٔ B بر دایره مماس است محور کتانژانت نامیده می‌شود. مبداء محور سینوسها و کسینوسها مرکز دایره و مبداء محور تانژانت نقطهٔ A و مبداء محور کتانژانت نقطهٔ B است.



اگر از نقطهٔ A در جهت مثبت تا نقطهٔ M حرکت کنیم و زاویهٔ MOA را θ بنامیم توابع مثلثاتی زاویهٔ θ را به صورت زیر نیز تعریف می‌کنند.

$$\sin\theta = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{\overline{HM}}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \cot\theta = \frac{\overline{H'M}}{OH'} = \frac{\overline{BQ}}{OB} = \overline{BQ}$$

$$\sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = OP \qquad \csc\theta = \frac{OM}{OH'} = \frac{OQ}{OB} = OQ$$

به همین ترتیب اگر انتهای کمان مقابل به زاویهٔ θ در نواحی دوم، سوم یا چهارم باشد می‌توان نسبتهای مثلثاتی را بدست آورد.

MATH75.IR

نکته: علامت نسبتهای مثلثاتی در نواحی چهارگانه به صورت زیر است.

تابع \ ناحیه	۰	I	$\frac{\pi}{۲}$	II	π	III	$\frac{۳\pi}{۲}$	IV	۲π
sin	۰	+	۱	+	۰	−	−۱	−	۰
cos	۱	+	۰	−	−۱	−	۰	+	۱
tan	۰	+	∞	−	۰	+	∞	−	۰
cot	∞	+	۰	−	∞	+	۰	−	∞
sec	۱	+	∞	−	−۱	−	∞	+	۱
csc	∞	+	۱	+	∞	−	−۱	−	∞

جهت تغییرات توابع مثلثاتی در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$:

سینوس در نواحی اول و چهارم صعودی و در نواحی دوم و سوم نزولی است.

کسینوس در نواحی اول و دوم نزولی و در نواحی سوم و چهارم صعودی است.

تانژانت همواره صعودی است.

کتانژانت همواره نزولی است.

سکانت در نواحی اول دوم صعودی و در نواحی سوم و چهارم نزولی است.

کسکانت در نواحی اول و چهارم نزولی و در نواحی دوم و سوم صعودی است.

تابع \ θ	۰	I	$\frac{\pi}{۲}$	II	π	III	$\frac{۳\pi}{۲}$	IV	۲π
sin	۰	↗	۱	↘	۰	↘	−۱	↗	۰
cos	۱	↘	۰	↘	−۱	↗	۰	↗	۱
tan	۰	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	۰	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	۰
cot	$+\infty$	↘	۰	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۰	↘	$-\infty$
sec	۱	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	−۱	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	۱
csc	$+\infty$	↘	۱	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	−۱	↘	$-\infty$

تابعهای متناوب

تابع f را متناوب می‌گویند در صورتیکه عددی مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد به قسمی که اولاً، اگر $x \in D_f$ آنگاه $x + T$ و $x - T$ نیز عضو دامنهٔ f بوده. ثانیاً $f(x + T) = f(x)$.

MATH75.IR

کوچکترین عدد مثبتی مانند T (در صورت وجود) که در رابطهٔ $f(x + T) = f(x)$ صدق کند تناوب اصلی تابع f نامیده می‌شود. اگر T دورهٔ تناوب تابع باشد $-T$ نیز دورهٔ تناوب است. در بخشهای بعد نشان می‌دهیم که $\sin(۲k\pi + x) = \sin x$ و $\cos(۲k\pi + x) = \cos x$ بنابراین توابع سینوس و کسینوس متناوب بوده و ۲π کوچکترین عدد مثبتی است که در رابطه‌های فوق صدق می‌کند. لذا تناوب اصلی این دو تابع ۲π است. همچنین خواهیم دید که $\tan(k\pi + x) = \tan x$ و $\cot(k\pi + x) = \cot x$. بنابراین توابع tan و cot نیز متناوبند و تناوب اصلی آنها π می‌باشد.

مثال ۳: دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin ax$ را پیدا کنید.

حل: برای اینکه تابع f متناوب باشد باید داشته باشیم:

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \sin a(x + T) = \sin ax$$

$$\Rightarrow \sin(ax + aT) = \sin ax$$

برای اینکه تساوی فوق برقرار باشد باید $aT = ۲k\pi$ ، $(k \in Z)$.

$$\Rightarrow T = \frac{۲k\pi}{a}$$

بنابراین تابع f متناوب است و دورهٔ تناوب اصلی آن $\frac{۲\pi}{|a|}$ می‌باشد. به همین ترتیب می‌توان نشان داد دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \cos ax$ نیز $\frac{۲\pi}{|a|}$ است.

مثال ۴: دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \tan(ax)$ را تعیین کنید.

حل:

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \tan a(x + T) = \tan(ax)$$

$$\Rightarrow \tan(ax + aT) = \tan(ax)$$

برای اینکه این تساوی برقرار باشد لازم است $aT = k\pi$ باشد که از آنجا $T = \frac{k\pi}{a}$ می‌شود که تناوب اصلی تابع $\frac{\pi}{|a|}$ می‌باشد. دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \cot(ax)$ نیز $\frac{\pi}{|a|}$ است.

مثال ۵: نشان دهید دورهٔ تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin(\cos x)$ برابر ۲π است.

حل:

$$f(x + ۲k\pi) = \sin(\cos(x + ۲k\pi)) = \sin(\cos x) = f(x)$$

بنابراین:

$$f(x) = f(x + ۲\pi) = f(x + ۴\pi) = \dots = f(x + ۲n\pi) \ , \ n \in Z \Rightarrow T = ۲\pi$$

MATH75.IR

مثال ۶: دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \cos(\sin x)$ را پیدا کنید.

حل:

$$f(x) = \cos(\sin x) \Rightarrow f(x+\pi) = \cos(\sin(x+\pi)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x)$$

$$f(x) = f(x+\pi) = f(x+2\pi) = \dots = f(x+n\pi) \quad , \ n \in Z \Rightarrow \quad T = \pi$$

نکته: دورهٔ تناوب توابع $\sin^n ax$ و $\cos^n ax$ اگر n فرد باشد $\frac{2\pi}{|a|}$ و اگر n زوج باشد $\frac{\pi}{|a|}$ است.

همچنین دورهٔ تناوب توابع $\tan^n ax$ و $\cot^n ax$ همواره برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است. $(n \in N)$

برای تعیین دورهٔ تناوب توابع مثلثاتی که ضابطهٔ آنها به صورت حاصل جمع چندین تابع متناوب باشد دورهٔ تناوب تابع در واقع کوچکترین مضرب مشترک دوره تناوبهای هر یک از اجزای آن تابع می‌باشد.

مثال ۷: دورهٔ تناوب تابع $f(x) = \sin x + 2\sin 3x + 4\sin 5x$ را پیدا کنید.

حل: دورهٔ تناوب $\sin x$ و $2\sin 3x$ و $4\sin 5x$ به ترتیب $T_1 = 2\pi$ و $T_2 = \frac{2\pi}{3}$ و $T_3 = \frac{2\pi}{5}$ می‌باشند.

برای پیدا کردن دورهٔ تناوب تابع f کوچکترین مضرب مشترک 2π و $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{5}$ را پیدا می‌کنیم.
برای پیدا کردن کوچکترین مضرب مشترک چند کسر ابتدا آنها را هم مخرج می‌کنیم سپس کوچکترین مضرب مشترک صورتها رابدست می‌آوریم.

$$2\pi = \frac{30\pi}{15} \qquad \frac{2\pi}{3} = \frac{10\pi}{15} \qquad \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{15}$$

کوچکترین مضرب مشترک 30π و 6π و 10π برابر 30π و کوچکترین مضرب مشترک کسرهای 2π و $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{5}$ برابر $2\pi = \frac{30\pi}{15}$ می‌باشد که همان دورهٔ تناوب تابع f است.

مثال ۸: دورهٔ تناوب تابع g را بدست آورید.

$$g(x) = \sin^3 \frac{2x}{3} + \cos^5 \frac{3x}{4} + \tan \frac{4x}{3}$$

حل: دورهٔ تناوب $\sin^3 \frac{2x}{3}$ برابر است با:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$$

دورهٔ تناوب $\cos^5 \frac{3x}{4}$ برابر است با:

MATH75.IR

$$T_{۲} = \frac{۲\pi}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۸\pi}{۳}$$

دورهٔ تناوب $\tan \frac{۴x}{۳}$ برابر است با:

$$T_{۳} = \frac{\pi}{\frac{۴}{۳}} = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$۳\pi = \frac{۴۸\pi}{۱۲} \qquad \frac{۸\pi}{۳} = \frac{۳۲\pi}{۱۲} \qquad \frac{۳\pi}{۴} = \frac{۹\pi}{۱۲}$$

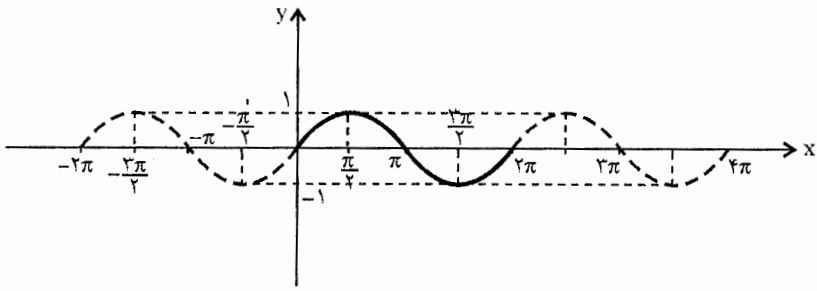
کوچکترین مضرب مشترک ۴۸π و ۳۲π و ۹π برابر ۲۸۸π است و دورهٔ تناوب تابع برابر $۲۴\pi = \frac{۲۸۸\pi}{۱۲}$ می‌باشد.

رسم توابع مثلثاتی

۱ـ رسم تابع $f(x) = \sin x$

همانطور که قبلاً اشاره شد دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن بازهٔ $[-۱ , ۱]$ و دورهٔ تناوب آن ۲π است. جدول تغییرات و نمودار این تابع در یک دورهٔ تناوب آن به صورت زیر است.

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
$y = \sin x$	۰	↗	۱	↘	۰	↘	-۱	↗	۰



با توجه به اینکه دورهٔ تناوب تابع ۲π می‌باشد نمودار تابع در بازه‌های $[۰ , ۲\pi]$ و $[۲\pi , ۴\pi]$ و $[۴\pi , ۶\pi]$ و $[-۲\pi , ۰]$ و ... یکسان می‌باشد.

در فاصلهٔ $(-\pi , \pi)$ مبداء مختصات مرکز تقارن نمودار و در فاصلهٔ $[۰ , \pi]$ خط $x = \frac{\pi}{۲}$ خط تقارن نمودار است. همچنین می‌توان گفت تابع در هر یک از بازه‌های

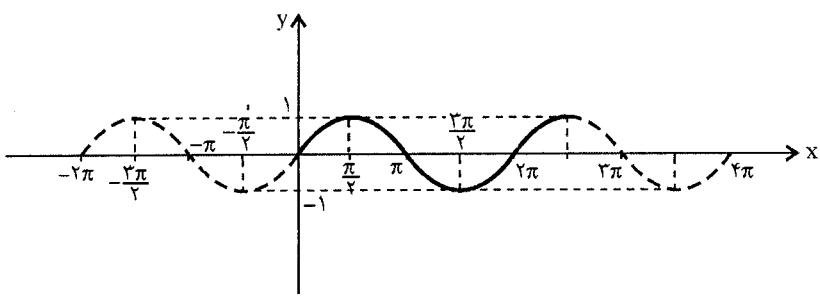
MATH75.IR

$[(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}]$ $(k \in Z)$ یک به یک است. بخصوص در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ تابع اکیداً صعودی و وارون‌پذیر است.

۲ـ رسم تابع $y = \cos x$

دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن بازهٔ $[-1, 1]$ است. دورهٔ تناوب تابع 2π می‌باشد جدول تغییرات و نمودار تابع در یک دورهٔ تناوب آن به صورت زیر است.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$y = \cos x$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1



دورهٔ تناوب تابع $y = \cos x$ نیز 2π است. لذا نمودار تابع در بازه‌های $[0, 2\pi]$ و $[2\pi, 4\pi]$ و $[4\pi, 6\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ و ... یکسان است.

این تابع در هر یک از بازه‌های $[k\pi, (k+1)\pi]$ $(k \in Z)$ یک به یک است. بخصوص در بازهٔ $[0, \pi]$ تابع اکیداً نزولی و وارون‌پذیر است.

در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ خط $x = \pi$ خط تقارن نمودار و در فاصلهٔ $[0, \pi]$ نقطهٔ $(\frac{\pi}{2}, 0)$ مرکز تقارن نمودار است.

نکته: همانطور که از نمودار توابع سینوس و کسینوس بر می‌آید نامساوی‌های زیر برقرارند.

$$-\frac{\pi}{2} \le \alpha < \beta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha < \sin\beta$$

$$\frac{\pi}{2} \le \alpha < \beta \le \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha > \sin\beta$$

$$0 \le \alpha < \beta \le \pi \Rightarrow \cos\alpha > \cos\beta$$

$$\pi \le \alpha < \beta \le 2\pi \Rightarrow \cos\alpha < \cos\beta$$

MATH75.IR

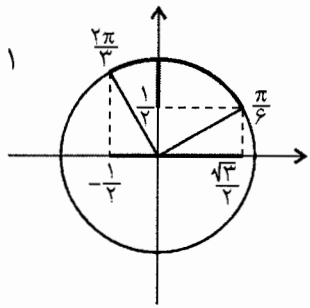
نکته: اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ یا $\frac{5\pi}{4} < \alpha < 2\pi$ باشد آنگاه $\cos\alpha > \sin\alpha$ و اگر $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{4}$ آنگاه $\sin\alpha > \cos\alpha$.

مثال ۹: اگر $\frac{\pi}{6} \le \alpha \le \frac{2\pi}{3}$ تغییرات $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را مشخص کنید.

حل: همانطور که در شکل پیدا است $\sin\alpha$ بین $\frac{1}{2}$ و ۱ و کسینوس α بین $-\frac{1}{2}$ و $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin\alpha \le 1 \\ \frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin\alpha \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin\alpha \le 1$$

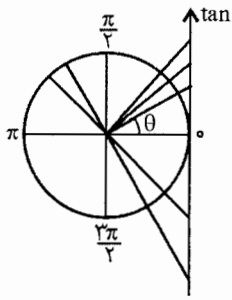
$$\frac{\pi}{6} \le \alpha \le \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \cos\alpha \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$



۳ـ رسم تابع y = tanx

دامنهٔ این تابع مجموعه $R - \{x | x \in R , x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی است. با افزایش مقدار زاویهٔ θ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ مقدار $\tan\theta$ نیز از صفر تا $+\infty$ مرتباً افزایش می‌یابد ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است). در ناحیهٔ دوم نیز وقتی زاویه از $\frac{\pi}{2}$ تا π افزایش می‌یابد تانژانت زاویه از $-\infty$ تا صفر افزایش می‌یابد. به همین ترتیب در ناحیهٔ سوم با افزایش زاویه از π تا $\frac{3\pi}{2}$ تانژانت از صفر تا $+\infty$ افزایش می‌یابد در ناحیهٔ چهارم تانژانت از $-\infty$ تا ۰ زیاد می‌شود.

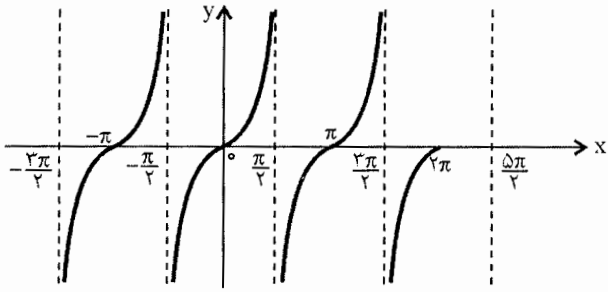
θ	۰		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\tan\theta$	۰	↗	$+\infty \parallel -\infty$	↗	۰	↗	$+\infty \parallel -\infty$	↗	۰



تغییرات تابع تانژانت در فاصلهٔ $(\pi , 2\pi)$ همانند تغییرات آن در بازهٔ $(0 , \pi)$ می‌باشد یعنی دورهٔ

MATH75.IR

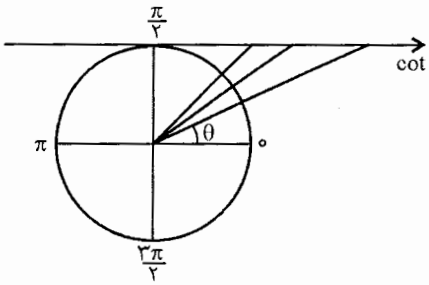
تناوب آن π می‌باشد.



همانطور که از نمودار ملاحظه می‌کنیم تابع تانژانت در بازه‌های $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ و $(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ و ... اکیداً صعودی است.

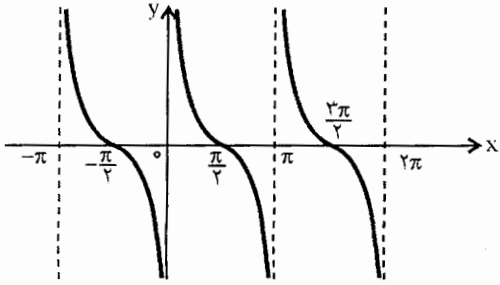
بنابراین تابع تانژانت در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ یک به یک و وارون‌پذیر است.

۴ـ رسم تابع $y = \cot x$



دامنهٔ این تابع مجموعه $R-\{x|x\in R\ ,\ x=k\pi\}$ و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی است. با افزایش مقدار زاویهٔ θ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$، $\cos\theta$ از $+\infty$ تا صفر کاهش می‌یابد ($\cot 0$ تعریف نشده) در ناحیهٔ دوم وقتی زاویه از $\frac{\pi}{2}$ تا π افزایش می‌یابد کتانژانت زاویه از ۰ تا $-\infty$ کاهش می‌یابد. با توجه به اینکه دورهٔ تناوب cot برابر π می‌باشد در نواحی سوم و چهارم نیز تغییرات کتانژانت به مانند نواحی اول و دوم است.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\tan\theta$	‖	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↘ $-\infty$	‖



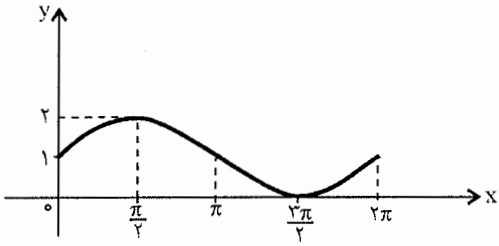
MATH75.IR

ملاحظه می‌شود که تابع cot در بازه‌های $(-\pi , ۰)$ و $(۰ , \pi)$ و $(\pi , ۲\pi)$ و ... اکیداً نزولی است.
تابع کتانژانت در بازهٔ $(۰ , \pi)$ یک به‌یک و وارون‌پذیر است.

مثال ۱۰: نمودار تابع $y = \sin x + ۱$ را در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$ رسم کنید.

حل: دامنهٔ این تابع بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$ و برد آن بازهٔ $[۰ , ۲]$ می‌باشد. برای رسم نمودار این تابع کافی است نمودار تابع $y = \sin x$ را رسم کرده و آنرا به اندازهٔ یک واحد در راستای محور عرض به سمت بالا منتقل کنیم.

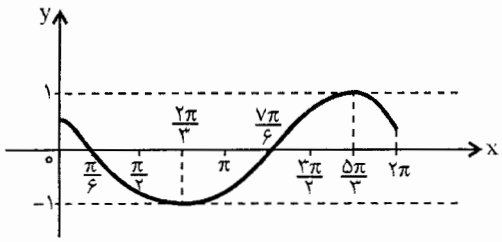
x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
y	۱	↗	۲	↘	۱	↘	۰	↗	۱



مثال ۱۱: نمودار تابع $y = \cos(x + \frac{\pi}{۳})$ را در بازهٔ $[۰ , ۲\pi]$ رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار تابع کافی است نمودار تابع $y = \cos x$ را رسم کرده و آنرا به اندازهٔ $\frac{\pi}{۳}$ در راستای محور طول به سمت چپ منتقل کنیم.

x	۰		$\frac{\pi}{۶}$		$\frac{\pi}{۲}$		$\frac{۲\pi}{۳}$		π		$\frac{۷\pi}{۶}$		$\frac{۳\pi}{۲}$		$\frac{۵\pi}{۳}$		۲π
y	$\frac{۱}{۲}$	↘	۰	↘	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↘	-۱	↗	$-\frac{۱}{۲}$	↗	۰	↗	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	↗	۱	↘	$\frac{۱}{۲}$

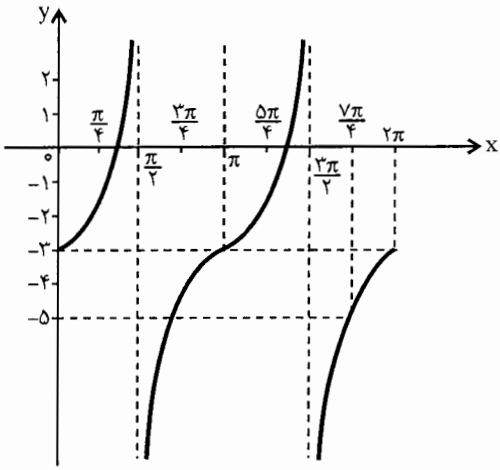


MATH75.IR

مثال ۱۲: نمودار تابع $y = 2\tan x - 3$ را در بازهٔ $[0 , 2\pi]$ رسم کنید.

حل:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
y	-3	↗	-1	↗	$+\infty$ ‖	$-\infty$	↗	-5	↗	-3	↗	-1	↗	$+\infty$ ‖	$-\infty$	↗	-5	↗	-3



توابع معکوس مثلثاتی

۱) وارون تابع سینوس: دامنهٔ این تابع R و برد آن $[-1 , 1]$ است. تابع در این فاصله یک به یک نیست. اما با توجه به نمودار تابع سینوس ملاحظه می‌شود که در بازه‌های $\left[-\frac{3\pi}{2} , -\frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ و $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ و ... تابع یک به‌یک است. در این بازه‌ها فاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ را فاصلهٔ اصلی برای تابع سینوس انتخاب می‌کنند.

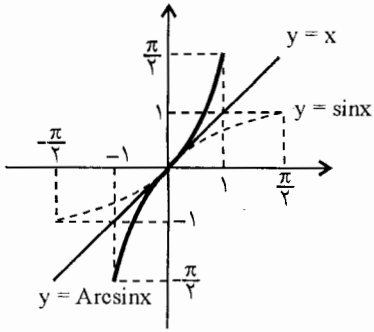
تابع $\sin : \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1 , 1]$ تابعی یک به یک و پوشاست. در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون آنرا در این فاصله به صورت $\sin^{-1}$ یا Arcsin نشان می‌دهیم.

$$\text{Arcsin} : [-1 , 1] \Rightarrow \left[-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2}\right]$$

با توجه به تعریف فوق خواهیم داشت:

$$y = \text{Arc}\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

MATH75.IR



تابع Arcsin از فاصلهٔ $[-۱ , ۱]$ به روی $\left[-\frac{\pi}{۲} , \frac{\pi}{۲}\right]$ اکیداً صعودی است.

$$\forall x_۱ , x_۲ \in [-۱ , ۱] : x_۱ < x_۲ \Rightarrow \text{Arcsin}x_۱ < \text{Arcsin}x_۲$$

مثال ۱۳: مقادیر $\text{Arcsin}\frac{۱}{۲}$ ، $\text{Arcsin}(-\frac{۱}{۲})$ ، $\text{Arcsin}(-۱)$ و $\text{Arcsin}\circ$ را بدست آورید.

حل:

$$\sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{Arcsin}\frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۶}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{۶}) = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{Arcsin}(-\frac{۱}{۲}) = -\frac{\pi}{۶}$$

$$\sin(-\frac{\pi}{۲}) = -۱ \Rightarrow \text{Arcsin}(-۱) = -\frac{\pi}{۲}$$

$$\sin\circ = \circ \Rightarrow \text{Arcsin}\circ = \circ$$

نکته: $\text{Arcsin}(-x) = -\text{Arcsin}x$

نکته: اگر $|x| \le ۱$ آنگاه $\sin(\text{Arcsin}x) = x$.

مثال ۱۴: حاصل $\text{Arcsin}(\sin\frac{۲\pi}{۳})$ چیست؟

حل:

$$\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \text{Arcsin}(\sin\frac{۲\pi}{۳}) = \text{Arcsin}\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\pi}{۳}$$

مثال ۱۵: دامنهٔ تابع $f(x) = \text{Arcsin}\frac{۱}{x}$ را تعیین کنید.

حل:

$(x \neq \circ)$

$$-۱ \le \frac{۱}{x} \le ۱ \Rightarrow \left|\frac{۱}{x}\right| \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{|x|} \le ۱ \Rightarrow |x| \ge ۱ \Rightarrow x \le -۱ \text{ یا } x \ge ۱$$

$$D =]-\infty , -۱] \cup [۱ , +\infty[$$

MATH75.IR

مثال ۱۶: دامنهٔ تابع $y = \text{Arcsin}[x]$ را بدست آورید.

حل:

$$-1 \le [x] \le 1$$

$$\left.\begin{array}{l} [x] = -1 \Rightarrow -1 \le x < 0 \\ [x] = 0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \\ [x] = 1 \Rightarrow 1 \le x < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \le x < 2 \Rightarrow D = [-1, 2[$$

۲) وارون تابع کسینوس: با توجه به نمودار تابع cos ملاحظه می‌کنیم که این تابع در دامنهٔ خود (R) یک به یک نمی‌باشد. اما در بازه‌های $[-\pi, 0]$ و $[0, \pi]$ و $[\pi, 2\pi]$ و ... یک به یک و وارون‌پذیر می‌باشد.

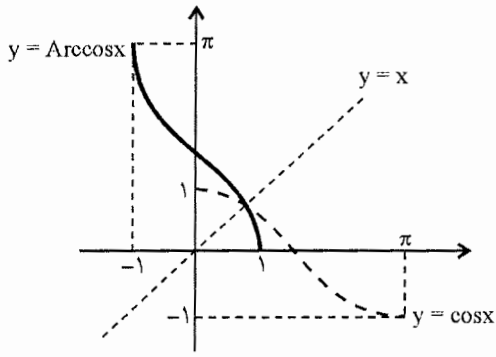
فاصلهٔ $[0, \pi]$ را فاصلهٔ اصلی تابع cos می‌نامیم.

تابع $f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ با ضابطهٔ $f(x) = \cos x$ تابعی یک به یک و پوشاست. بنابراین وارون‌پذیر است. وارون این تابع را به صورت $\cos^{-1}$ یا Arccos نشان می‌دهیم.

$$\begin{cases} \text{Arccos} : [-1, 1] \Rightarrow [0, \pi] \\ y = \text{Arc}\cos x \end{cases}$$

از تعریف فوق خواهیم داشت:

$$y = \text{Arccos}x \Leftrightarrow x = \cos y \qquad (|x| \le 1)$$



همانطور که از نمودار تابع بر می‌آید تابع Arccos در بازهٔ $[0, \pi]$ اکیداً نزولی است.

$$\forall x_1, x_2 \in [-1, 1] : x_1 < x_2 \Rightarrow \text{Arccos}x_1 > \text{Arccos}x_2$$

نکته: $\text{Arccos}(-x) = \pi - \text{Arccos}x$

MATH75.IR

نکته: $\cos(\text{Arccos}x) = x \quad |x| \leq ۱$

$\text{Arccos}\,(\cos x) = x \quad ۰ \leq x \leq \pi$

مثال ۱۷: مقادیر $\text{Arccos}\,\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ، $\text{Arccos}(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ ، $\text{Arccos}\,۰$ و $\text{Arccos}(-۱)$ را بدست آورید.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \text{Arccos}\,\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\pi}{۶}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \text{Arccos}\,(\frac{-\sqrt{۳}}{۲}) = \frac{۵\pi}{۶}$$

$$\cos\frac{\pi}{۲} = ۰ \Rightarrow \text{Arccos}\,۰ = \frac{\pi}{۲}$$

$$\cos\pi = -۱ \Rightarrow \text{Arccos}\,(-۱) = \pi$$

مثال ۱۸: حاصل $\text{Arccos}[\cos(-\frac{\pi}{۳})]$ چیست؟

حل:

$$\cos(-\frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \text{Arccos}[\cos(-\frac{\pi}{۳})] = \text{Arccos}\frac{۱}{۲} = \frac{\pi}{۳}$$

۳) وارون تابع تانژانت: اگر نمودار تابع تانژانت را در نظر بگیریم ملاحظه می‌کنیم که این تابع در دامنه‌اش یک به یک نمی‌باشد. اما در فاصله‌های $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲}, \frac{۵\pi}{۲})$ و ... تابع یک به یک می‌باشد. در این بازه‌ها، بازهٔ $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ را فاصلهٔ اصلی تابع انتخاب می‌کنیم. تابع تانژانت در این بازه اکیداً صعودی و وارون‌پذیر است.

وارون تابع $\tan: (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}) \longrightarrow R$ را با $\tan^{-۱}$ یا Arctan نشان می‌دهیم.

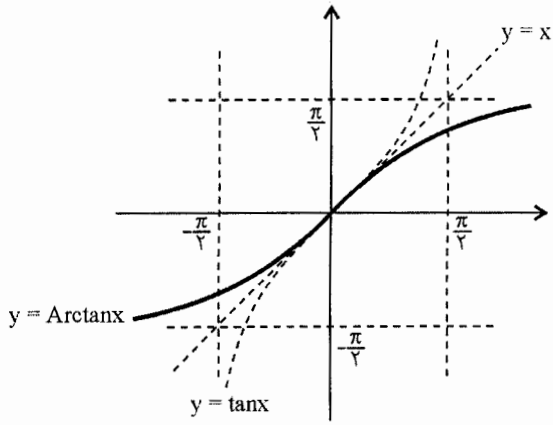
$$\text{Arctan} : R \longrightarrow (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$$

دامنهٔ تابع Arctan مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ است.

اگر $-\frac{\pi}{۲} < \theta < \frac{\pi}{۲}$ و $a \in R$ آنگاه:

$$\boxed{\text{Arctan}a = \theta \Leftrightarrow \tan\theta = a}$$

MATH75.IR



همانطور که از نمودار تابع بر می‌آید Arctan تابعی اکیداً صعودی است

$\forall x_1 , x_2 \in R : x_1 < x_2 \Rightarrow \text{Arctan}x_1 < \text{Arctan}x_2$

مبداء مختصات مرکز تقارن نمودار تابع است.

نکته: اگر x از هر عدد مثبت بزرگی بزرگتر شود مشاهده می‌کنیم Arctan با مقادیر کمتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک و نزدیکتر می‌شود. همچنین هرگاه x از هر عدد منفی کوچکی کوچکتر شود Arctan با مقادیر بزرگتر از $-\frac{\pi}{2}$ به $-\frac{\pi}{2}$ نزدیک و نزدیکتر می‌گردد.

نکته: $\tan(\text{Arctan}x) = x \quad (x \in R)$.

نکته: اگر $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ آنگاه $\text{Arctan}(\tan x) = x$.

نکته: $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}x$.

وارون تابع کتانژانت: با توجه به نمودار تابع کتانژانت ملاحظه می‌کنیم که تابع کتانژانت در بازه‌های $(-\pi , 0)$ و $(0 , \pi)$ و $(\pi , 2\pi)$ و ... یک به یک می‌باشد. بازهٔ $(0 , \pi)$ را برای تابع کتانژانت بعنوان بازهٔ اصلی اختیار می‌کنیم. تابع در این فاصله اکیداً نزولی و وارون‌پذیر است و وارون تابع $\cot : (0 , \pi) \longrightarrow R$ را با $\cot^{-1}$ یا Arccot نشان می‌دهیم.

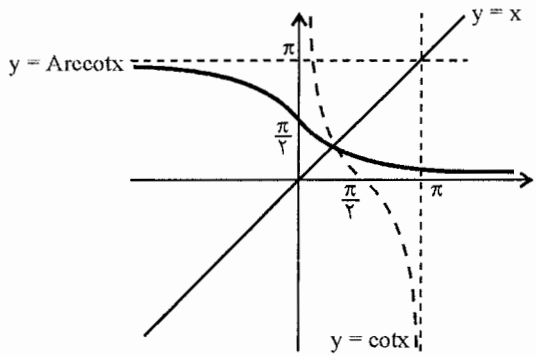
$\text{Arccot} : R \longrightarrow (0 , \pi)$

دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن $(0 , \pi)$ است.

اگر $0 < \theta < \pi$ و $a \in R$ آنگاه:

$$\boxed{\text{Arccot}a = \theta \Leftrightarrow \cot\theta = a}$$

MATH75.IR



همانطور که از نمودار تابع بر می‌آید تابع Arccot در بازهٔ $(0 , \pi)$ اکیداً نزولی است.

$\forall x_1 , x_2 \in R : x_1 < x_2 \Rightarrow \text{Arccot}x_1 > \text{Arccot}x_2$

نکته: $\text{Arccot}(-x) = \pi - \text{Arccot}x$

نکته: $\cot(\text{Arccot}x) = x \quad (x \in R)$.

نکته: اگر $0 < x < \pi$ آنگاه $\text{Arccot}(\cot x) = x$.

مثال ۱۹: حاصل $\text{Arctan}(-1)$، $\text{Arccot}(-\sqrt{3})$ و $\text{Arccot}(-1)$ را بدست آورید.

حل:

$$\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1 \Rightarrow \text{Arctan}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\cot\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} \Rightarrow \text{Arccot}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\cot\frac{3\pi}{4} = -1 \Rightarrow \text{Arccot}(-1) = \frac{3\pi}{4}$$

مثال ۲۰: دامنه و برد تابع $y = \text{Arccos}\left(\frac{5x^2 - 5}{x + 1}\right)$ را تعیین کنید.

حل:

$$y = \text{Arccos}\left(\frac{5(x - 1)(x + 1)}{x + 1}\right) \overset{x \neq -1}{=\!=} \text{Arccos}(5x - 5)$$

$$-1 \leq 5x - 5 \leq 1 \Rightarrow 4 \leq 5x \leq 6 \Rightarrow \frac{4}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}$$

$$D_f = \{x | x \in R , \frac{4}{5} \leq x \leq \frac{6}{5} , x \neq -1\} = \{x | x \in R , \frac{4}{5} \leq x \leq \frac{6}{5}\} = [\frac{4}{5} , \frac{6}{5}]$$

MATH75.IR

$f(\frac{۴}{۵}) = \text{Arc}\cos(-۱) = \pi \qquad f(\frac{۶}{۵}) = \text{Arccos}(۱) = ۰$

$R_f = [۰ , \pi]$

مثال ۲۱: دامنه و برد تابع $y = \text{Arccot}\sqrt{\frac{۱ - x^۴}{۱ - x^۲}}$ را تعیین کنید.

حل:

$$y = \text{Arccot}\sqrt{\frac{۱ - x^۴}{۱ - x^۲}} = \text{Arccot}\sqrt{\frac{(۱ - x^۲)(۱ + x^۲)}{۱ - x^۲}} \overset{x \neq \pm ۱}{=\!=\!=} \text{Arccot}\sqrt{x^۲ + ۱}$$

$D_f = \{x | x \in R , x \neq \pm ۱\} = R - \{-۱ , ۱\}$

$\sqrt{x^۲ + ۱} > ۰ \Rightarrow ۰ < y < \frac{\pi}{۲}$

با توجه به D_f، برد تابع با ضابطهٔ عمومی $y = \text{cot}ax$ $(a \in R)$ را فاصلهٔ $(۰ , \pi)$ در نظر می‌گیرند. لذا:

$$R_f = \{y | y \in R , ۰ < y < \frac{\pi}{۲} , y \neq f(\pm ۱) = \text{Arccot}\sqrt{۲}\}$$

$$= \{y | y \in R , ۰ < y < \frac{\pi}{۲} , y \neq \text{Arccot}\sqrt{۲}\} = (۰ , \frac{\pi}{۲}) - \{\text{Arccot}\sqrt{۲}\}$$

رابطهٔ بین توابع مثلثاتی که نسبت به هم رابطهٔ خاصی دارند

۱) رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی زاویه‌هایی که تفاضل آنها $۲k\pi$ رادیان است.

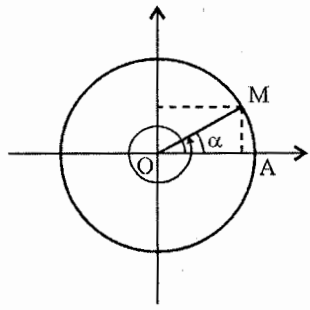
انتهای کمان مقابل به زاویهٔ $۲k\pi + \alpha$ و انتهای کمان مقابل به زاویه α یک نقطه است. بنابراین نسبتهای مثلثاتی این دو زاویه برابرند.

$\sin(۲k\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲k\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(۲k\pi + \alpha) = \cot\alpha$

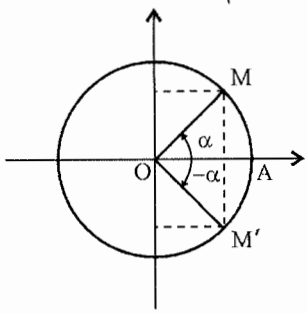


MATH75.IR

۲) رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی دو زاویهٔ قرینه:

انتهای کمانهای مقابل به دو زاویه α و $-\alpha$ نسبت به محور کسینوسها قرینهٔ یکدیگرند. لذا خواهیم داشت:

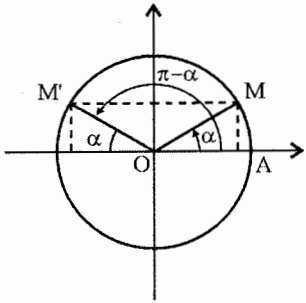
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$



۳) رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی دو زاویهٔ مکمل:

انتهای کمانهای مقابل به دو زاویهٔ α و $\pi - \alpha$ نسبت به محور سینوسها قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین خواهیم داشت:

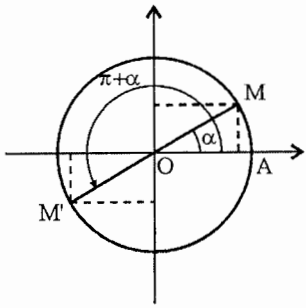
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$



۴) رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی دو زاویه که تفاضلشان π رادیان است.

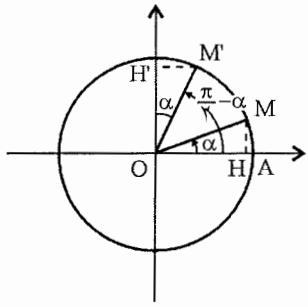
انتهای کمانهای مقابل به زاویه‌های α و $\pi + \alpha$ نسبت به مرکز دایره مثلثاتی قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$$



MATH75.IR

۵) رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی دو زاویهٔ متمم:



به سادگی ثابت می‌شود دو مثلث OHM و OH'M' برابرند و از آنجا خواهیم داشت:

$$\overline{OH'} = \overline{OH} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM} \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{۱}{\tan(\frac{\pi}{۲} - \alpha)} = \frac{۱}{\cot\alpha} = \tan\alpha$$

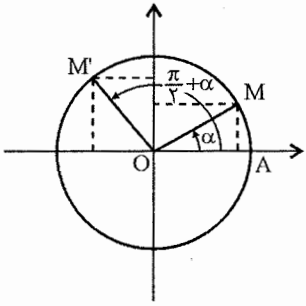
۶) رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی زاویه‌هایی که اختلافشان $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است.

$$\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \sin[\frac{\pi}{۲} - (-\alpha)] = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos[\frac{\pi}{۲} - (-\alpha)] = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha)}{\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \frac{۱}{\tan(\frac{\pi}{۲} + \alpha)} = \frac{۱}{-\cot\alpha} = -\tan\alpha$$



مثال **۲۲**: درستی رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

$$\sin(۲\pi - \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(۲\pi - \alpha) = \cos\alpha$$

MATH75.IR

$$\tan(۲\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$

$$\cot(۲\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

حل:

$$\sin(۲\pi - \alpha) = \sin[۲\pi + (-\alpha)] = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(۲\pi - \alpha) = \cos[۲\pi + (-\alpha)] = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(۲\pi - \alpha) = \frac{\sin(۲\pi - \alpha)}{\cos(۲\pi - \alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\cot(۲\pi - \alpha) = \frac{۱}{\tan(۲\pi - \alpha)} = \frac{۱}{-\tan\alpha} = -\cot\alpha$$

مثال ۲۳: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\sin(-\frac{\pi}{۳}) \ , \ \cos\frac{۲۵\pi}{۶} \ , \ \tan\frac{۳\pi}{۴} \ , \ \cot\frac{۷\pi}{۶} \ , \ \sin\frac{۵\pi}{۳} \ , \ \cos\frac{۴۱\pi}{۶}$$

حل:

$$\sin(-\frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲۵\pi}{۶} = \cos(۴\pi + \frac{\pi}{۶}) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\begin{cases} \tan\frac{۳\pi}{۴} = \tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱ \\ \tan\frac{۳\pi}{۴} = \tan(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۴} = -۱ \end{cases}$$

$$\cot\frac{۷\pi}{۶} = \cot(\pi + \frac{\pi}{۶}) = \cot\frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳}$$

$$\begin{cases} \sin\frac{۵\pi}{۳} = \sin(\pi + \frac{۲\pi}{۳}) = -\sin\frac{۲\pi}{۳} = -\sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \sin\frac{۵\pi}{۳} = \sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{cases}$$

$$\cos\frac{۴۱\pi}{۶} = \cos(۷\pi - \frac{\pi}{۶}) = \cos(۶\pi + \pi - \frac{\pi}{۶}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{۶}) = -\cos\frac{\pi}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۲۴: درستی تساوی زیر را تحقیق کنید.

$$\tan(\alpha - ۵\pi)\cot(\alpha + ۷\pi) - \cos(۳۸\pi - \alpha)\cos(\alpha - ۳۸\pi) = \sin^۲\alpha$$

MATH75.IR

حل:

$$-\tan(۴\pi + \pi - \alpha)\cot(۶\pi + \pi + \alpha) - \cos(-\alpha)\cos\alpha =$$

$$-\tan(\pi - \alpha)\cot(\pi + \alpha) - \cos\alpha\cos\alpha = \tan\alpha\cot\alpha - \cos^۲\alpha$$

$$= ۱ - \cos^۲\alpha = \sin^۲\alpha$$

مثال ۲۵: اگر $\tan\frac{\pi}{۸} = \sqrt{۲} - ۱$ مقدار عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = \frac{\cos ۲۰۲/۵ + \cos ۱۱۲/۵}{\cos ۳۳۷/۵ - \cos ۶۷/۵}$$

حل:

$$\cos(۲۰۲/۵^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ + ۲۲/۵^\circ) = -\cos ۲۲/۵^\circ = -\cos\frac{\pi}{۸}$$

$$\cos(۱۱۲/۵^\circ) = \cos(۹۰^\circ + ۲۲/۵^\circ) = -\sin ۲۲/۵^\circ = -\sin\frac{\pi}{۸}$$

$$\cos(۳۳۷/۵^\circ) = \cos(۳۶۰^\circ - ۲۲/۵^\circ) = \cos ۲۲/۵^\circ = \cos\frac{\pi}{۸}$$

$$\cos(۶۷/۵^\circ) = \cos(۹۰^\circ - ۲۲/۵^\circ) = \sin ۲۲/۵^\circ = \sin\frac{\pi}{۸}$$

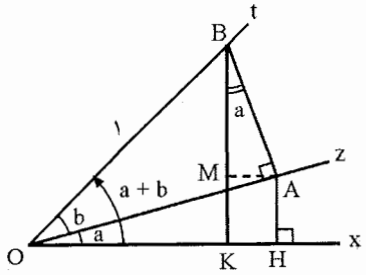
$$A = \frac{-\cos\frac{\pi}{۸} - \sin\frac{\pi}{۸}}{\cos\frac{\pi}{۸} - \sin\frac{\pi}{۸}} \xlongequal{\text{تقسیم بر } \cos\frac{\pi}{۸}} \frac{-۱ - \tan\frac{\pi}{۸}}{۱ - \tan\frac{\pi}{۸}}$$

$$= \frac{-۱ - \sqrt{۲} + ۱}{۱ - \sqrt{۲} + ۱} = -(\sqrt{۲} + ۱)$$

نسبتهای مثلثاتی مجموع دو زاویه

۱) محاسبهٔ $\sin(a + b)$

زاویهٔ xoz را مساوی a و $\widehat{zot}$ را مساوی b جدا کرده و آنها را طوری پهلوی هم قرار می‌دهیم که دو زاویهٔ مجاور تشکیل دهند. بر روی ot پاره خط OB را برابر واحد جدا کرده و از B عمود BA را بر oz فرود می‌آوریم. سپس از A عمود AH را بر ox رسم می‌کنیم. با توجه به شکل خواهیم داشت.



MATH75.IR

$$\sin b = \overline{AB} \ , \ \cos b = \overline{OA} \ , \ \sin a = \frac{\overline{HA}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{HA}}{\cos b} \ , \ \cos a = \frac{\overline{OH}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OH}}{\cos b}$$

$$\sin(a+b) = \overline{KB} \ , \ \cos(a+b) = \overline{OK}$$

از نقطهٔ A عمود AM را بر KB فرود می‌آوریم. چهار ضلعی KHAM مستطیل است. در نتیجه $KM = HA$ و $MA = KH$.

زاویهٔ MBA برابر a می‌باشد (چرا؟) و در مثلث قائم الزاویهٔ BMA داریم:

$$\cos(M\hat{B}A) = \cos a = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MB}}{\sin b}$$

$$\sin(M\hat{B}A) = \sin a = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MA}}{\sin b}$$

حال اگر در تساوی $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ به جای هر یک از مقادیر $\overline{KB}$ و $\overline{KM}$ و $\overline{MB}$ مقدارهای مساوی با آنها را قرار دهیم نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}$$

۲) محاسبهٔ $\cos(a+b)$

به همین ترتیب اگر در تساوی $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ به جای هر یک از مقدارهای $\overline{OK}$ و $\overline{OH}$ و $\overline{KH}$ مقادیر مساوی با آنها قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a \sin b}$$

۳) محاسبهٔ $\tan(a+b)$

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \,.\, \tan b}$$

۳) محاسبهٔ $\cot(a+b)$

$$\cot(a+b) = \frac{1}{\tan(a+b)} = \frac{1 - \tan a \,.\, \tan b}{\tan a + \tan b}$$

MATH75.IR

$$= \frac{۱ - \frac{۱}{\cot a} \cdot \frac{۱}{\cot b}}{\frac{۱}{\cot a} + \frac{۱}{\cot b}} = \frac{\cot a \,.\, \cot b - ۱}{\cot a + \cot b}$$

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی تفاضل دو زاویه

اگر در فرمولهای فوق b را به b− تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$\boxed{\sin(a - b) = \sin a \,.\, \cos b - \cos a \,.\sin b}$$

$$\boxed{\cos(a - b) = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\sin b}$$

$$\boxed{\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{۱ + \tan a \,.\, \tan b}}$$

$$\boxed{\cot(a - b) = \frac{\cot a \,.\, \cot b + ۱}{\cot b - \cot a}}$$

مثال ۲۶: حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\sin\frac{۷\pi}{۱۲} \;,\; \cos\frac{\pi}{۱۲} \;,\; \tan\frac{۵\pi}{۱۲}$$

حل:

$$\sin\frac{۷\pi}{۱۲} = \sin(\frac{\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۳}\cos\frac{\pi}{۴} + \cos\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۴}$$

$$= \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۴} + \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos\frac{\pi}{۱۲} = \cos(\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۶}) = \cos\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۶} + \sin\frac{\pi}{۴}\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۴} + \frac{\sqrt{۲}}{۴} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۱۲} = \tan(\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۶}) = \frac{\tan\frac{\pi}{۴} + \tan\frac{\pi}{۶}}{۱ - \tan\frac{\pi}{۴}\tan\frac{\pi}{۶}}$$

$$= \frac{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۳}}{۱ - ۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{\frac{۳ + \sqrt{۳}}{۳}}{\frac{۳ - \sqrt{۳}}{۳}} = \frac{۳ + \sqrt{۳}}{۳ - \sqrt{۳}}$$

MATH75.IR

مثال ۲۷: اگر A و B و C زاویه‌های یک مثلث باشند ثابت کنید.

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \,.\, \tan B \,.\, \tan C$$

حل:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \pi - (\hat{B} + \hat{C})$$

$$\Rightarrow \quad \tan\hat{A} = \tan[\pi - (\hat{B} + \hat{C})] = -\tan(\hat{B} + \hat{C})$$

$$\Rightarrow \quad \tan\hat{A} = -\frac{\tan\hat{B} + \tan\hat{C}}{۱ - \tan\hat{B} \,.\, \tan\hat{C}}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\hat{A} + \tan\hat{B} + \tan\hat{C} = \tan\hat{A} \,.\, \tan\hat{B} \,.\, \tan\hat{C}$$

مثال ۲۸: عبارتهای $\sin(a + b + c)$ و $\cos(a - b + c)$ را برحسب مقادیر نسبتهای مثلثاتی a و b و c بنویسید.

حل:

$$\sin(a + b + c) = \sin[(a + b) + c] = \sin(a + b)\cos c + \cos(a + b)\sin c$$

$$= (\sin a\cos b + \cos a\sin b)\cos c + (\cos a\cos b - \sin a\sin b)\sin c$$

$$= \sin a\cos b\cos c + \cos a\sin b\cos c + \cos a\cos b\sin c - \sin a\sin b\sin c$$

$$\cos(a - b + c) = \cos[(a - b) + c] = \cos(a - b)\cos c - \sin(a - b)\sin c$$

$$= (\cos a\cos b + \sin a\sin b)\cos c - (\sin a\cos b - \cos a\sin b)\sin c$$

$$= \cos a\cos b\cos c + \sin a\sin b\cos c - \sin a\cos b\sin c + \cos a\sin b\sin c$$

مثال ۲۹: درستی تساویهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = ۲\sin a\cos b$

ب) $\cos(a - b) - \cos(a + b) = ۲\sin a\sin b$

حل:

الف) $\sin(a + b) + \sin(a - b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b + \sin a\cos b - \cos a\sin b$

$= ۲\sin a\cos b$

ب) $\cos(a - b) - \cos(a + b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b - \cos a\cos b + \sin a\sin b$

$= ۲\sin a\sin b$

MATH75.IR

محاسبهٔ مقادیر نسبتهای مثلثاتی زاویه ۲a برحسب نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ a

۱)

$$\sin 2a = \sin(a + a) = \sin a\cos a + \cos a\sin a = 2\sin a\cos a$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$$

۲)

$$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a\cos a - \sin a\sin a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a}$$

نتیجه:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - \sin^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\boxed{\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a} \Rightarrow \boxed{\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$$

$$\boxed{\cos 2a = 2\cos^2 a - 1} \Rightarrow \boxed{\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

$$\boxed{\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}}$$

۳)

$$\tan 2a = \tan(a + a) = \frac{\tan a + \tan a}{1 - \tan a \,.\, \tan a} = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 + \cos^2 a}}$$

۴)

$$\cot 2a = \cot(a + a) = \frac{\cot a\cot a - 1}{\cot a + \cot a} = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}}$$

مثال ۳۰: $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب $\tan\frac{x}{2}$ بدست آورید.

حل: با توجه به اینکه $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$ خواهیم داشت:

MATH75.IR

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} - \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} + \dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}$$

مثال ۳۱: نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ 120° را به کمک نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ 60° حساب کنید.

حل:

$$\sin 120^\circ = 2\sin 60\cos 60 = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60 - \sin^2 60 = \frac{1}{4}-\frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

MATH75.IR

$$\tan ۱۲۰^\circ = \frac{۲\tan ۶۰}{۱ - \tan^۲ ۶۰} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۱ - ۳} = -\sqrt{۳}$$

$$\cot ۱۲۰^\circ = \frac{\cot^۲ ۶۰ - ۱}{۲\cot ۶۰} = \frac{\frac{۱}{۳} - ۱}{۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۳}} = \frac{\frac{-۲}{۳}}{\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

مثال ۳۲: نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ ۱۵° را به کمک نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ ۳۰° بدست آورید.

حل:

$$\sin^۲ ۱۵^\circ = \frac{۱ - \cos ۳۰}{۲} = \frac{۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲} = \frac{۲ - \sqrt{۳}}{۴}$$

$$\Rightarrow \quad \sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\cos^۲ ۱۵^\circ = \frac{۱ + \cos ۳۰}{۲} = \frac{۱ + \frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲} = \frac{۲ + \sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \cos ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ + \sqrt{۳}}}{۴} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \quad \tan ۱۵^\circ = \frac{\sin ۱۵^\circ}{\cos ۱۵^\circ} = \frac{\sqrt{۶} - \sqrt{۲}}{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}} = ۲ - \sqrt{۳}$$

$$\cot ۱۵^\circ = \frac{۱}{\tan ۱۵^\circ} = \frac{۱}{۲ - \sqrt{۳}} = ۲ + \sqrt{۳}$$

مثال ۳۳: درستی رابطهٔ $\tan \frac{x}{۲} = \frac{\sin x}{۱ + \cos x}$ را بررسی کنید و به کمک آن $\tan ۲۲/۵^\circ$ را حساب کنید.

حل:

$$\frac{\sin x}{۱ + \cos x} = \frac{۲\sin \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲}}{۲\cos^۲ \frac{x}{۲}} = \frac{\sin \frac{x}{۲}}{\cos \frac{x}{۲}} = \tan \frac{x}{۲}$$

$$\tan ۲۲/۵^\circ = \frac{\sin ۴۵}{۱ + \cos ۴۵} = \frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲ + \sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}(۲ - \sqrt{۲})}{۲} = \sqrt{۲} - ۱$$

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ $۳a$ برحسب نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ a

(۱

$$\sin ۳a = \sin(۲a + a) = \sin ۲a \cos a + \cos ۲a \sin a$$

$$= ۲\sin a \cos a \,.\, \cos a + (۱ - ۲\sin^۲ a)\sin a$$

MATH75.IR

$$= ۲\sin a\cos^۲ a + \sin a - ۲\sin^۳ a$$

$$= ۲\sin a(۱ - \sin^۲ a) + \sin a - ۲\sin^۳ a$$

$$= ۲\sin a - ۲\sin^۳ a + \sin a - ۲\sin^۳ a$$

$$= ۳\sin a - ۴\sin^۳ a$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin ۳a = ۳\sin a - ۴\sin^۳ a}$$

۲)

$$\cos ۳a = \cos(۲a + a) = \cos ۲a\cos a - \sin ۲a\sin a$$

$$= (۲\cos^۲ a - ۱)\cos a - ۲\sin a\cos a\sin a$$

$$= ۲\cos^۳ a - \cos a - ۲\sin^۲ a\cos a$$

$$= ۲\cos^۳ a - \cos a - ۲(۱ - \cos^۲ a)\cos a$$

$$= ۲\cos^۳ a - \cos a - ۲\cos a + ۲\cos^۳ a$$

$$= ۴\cos^۳ a - ۳\cos a$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos ۳a = ۴\cos^۳ a - ۳\cos a}$$

۳)

$$\tan ۳a = \tan(۲a + a) = \frac{\tan ۲a + \tan a}{۱ - \tan ۲a \,.\, \tan a}$$

$$= \frac{\dfrac{۲\tan a}{۱ - \tan^۲ a} + \tan a}{۱ - \dfrac{۲\tan a}{۱ - \tan^۲ a} \times \tan a} = \frac{۲\tan a + \tan a - \tan^۳ a}{۱ - \tan^۲ a - ۲\tan^۲ a} = \frac{۳\tan a - \tan^۳ a}{۱ - ۳\tan^۲ a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan ۳a = \frac{۳\tan a - \tan^۳ a}{۱ - ۳\tan^۲ a}}$$

۴)

$$\cot ۳a = \frac{۱}{\tan ۳a} = \frac{۱ - ۳\tan^۲ a}{۳\tan a - \tan^۳ a}$$

$$= \frac{۱ - \dfrac{۳}{\cot^۲ a}}{\dfrac{۳}{\cot a} - \dfrac{۱}{\cot^۳ a}} = \frac{\dfrac{\cot^۲ a - ۳}{\cot^۲ a}}{\dfrac{۳\cot^۲ a - ۱}{\cot^۳ a}}$$

$$= \frac{\cot^۳ a - ۳\cot a}{۳\cot^۲ a - ۱}$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cot 3a = \frac{3\cot a - \cot^3 a}{1 - 3\cot^2 a}}$$

مثال ۳۴: درستی رابطه‌های زیر را تحقیق کنید.

الف) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

ب) $\sin 6x \sin 2x = \sin^2 4x - \sin^2 2x$

ج) $\tan x + \tan(x + \frac{\pi}{3}) + \tan(x + \frac{2\pi}{3}) = 3\tan 3x$

حل:

الف) $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

ب) $\sin 6x \sin 2x = \sin(4x + 2x)\sin(4x - 2x)$

$= (\sin 4x \cos 2x + \cos 4x \sin 2x)(\sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x)$

$= \sin^2 4x \cos^2 2x - \cos^2 4x \sin^2 2x$

$= \sin^2 4x(1 - \sin^2 2x) - (1 - \sin^2 4x)\sin^2 2x$

$= \sin^2 4x - \sin^2 4x \sin^2 2x - \sin^2 2x + \sin^2 4x \sin^2 2x$

$= \sin^2 4x - \sin^2 2x$

ج) $\tan x + \tan(x + \frac{\pi}{3}) + \tan(x + \frac{2\pi}{3})$

$$= \tan x + \frac{\tan x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan x} + \frac{\tan x - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan x} =$$

$$\frac{\tan x - 3\tan^3 x + \tan x + \sqrt{3}\tan^2 x + \sqrt{3} + 3\tan x + \tan x - \sqrt{3} - \sqrt{3}\tan^2 x + 3\tan x}{1 - 3\tan^2 x}$$

$$= \frac{9\tan x - 3\tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \frac{3(3\tan x - \tan^3 x)}{1 - 3\tan^2 x} = 3\tan 3x$$

مثال ۳۵: ثابت کنید $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$.

حل:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)$$

MATH75.IR

$$= \sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}\sin x + \sin\frac{\pi}{۴}\cos x)$$

$$= \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{۲}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos x)$$

$$= \sqrt{۲}(\sin\frac{\pi}{۴}\sin x + \cos\frac{\pi}{۴}\cos x)$$

$$= \sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴})$$

نکته: به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\cos x - \sin x = \sqrt{۲}\cos(x + \frac{\pi}{۴}) = \sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۴} - x)$$

چند رابطهٔ مهم:

۱) $\boxed{۴\sin x\sin(۶۰ - x)\sin(۶۰ + x) = \sin ۳x}$

$$۴\sin x\sin(۶۰ - x)\sin(۶۰ + x) =$$

$$۴\sin x(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x - \frac{۱}{۲}\sin x)(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x + \frac{۱}{۲}\sin x) =$$

$$۴\sin x(\frac{۳}{۴}\cos^۲ x - \frac{۱}{۴}\sin^۲ x) = \sin x(۳(۱ - \sin^۲ x) - \sin^۲ x)$$

$$= \sin x(۳ - ۴\sin^۲ x) = ۳\sin x - ۴\sin^۳ x = \sin ۳x$$

۲) $\boxed{۴\cos x\cos(۶۰ - x)\cos(۶۰ + x) = \cos ۳x}$

$$۴\cos x\cos(۶۰ - x)\cos(۶۰ + x) =$$

$$۴\cos x(\frac{۱}{۲}\cos x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x)(\frac{۱}{۲}\cos x - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x) =$$

$$۴\cos x(\frac{۱}{۴}\cos^۲ x - \frac{۳}{۴}\sin^۲ x) = \cos x(\cos^۲ x - ۳\sin^۲ x)$$

$$= \cos x(\cos^۲ x - ۳(۱ - \cos^۲ x)) = \cos x(۴\cos^۲ x - ۳)$$

MATH75.IR

$$= ۴\cos^۳x - ۳\cos x = \cos ۳x$$

۳) $\boxed{\tan x \tan(۶۰ - x)\tan(۶۰ + x) = \tan ۳x}$

$$\tan x \tan(۶۰ - x)\tan(۶۰ + x) =$$

$$\frac{\sin x \sin(۶۰ - x)\sin(۶۰ + x)}{\cos x \cos(۶۰ - x)\cos(۶۰ + x)} = \frac{\sin ۳x}{\cos ۳x} = \tan ۳x$$

۴) $\boxed{\cot x \cot(۶۰ - x)\cot(۶۰ + x) = \cot ۳x}$

$$\cot x \cot(۶۰ - x)\cot(۶۰ + x) = \frac{۱}{\tan x \tan(۶۰ - x)\tan(۶۰ + x)}$$

$$= \frac{۱}{\tan ۳x} = \cot ۳x$$

مثال ۳۶: ثابت کنید:

$$\sin ۱۰^\circ \sin ۵۰^\circ \sin ۷۰^\circ = \frac{۱}{۸}$$

حل:

$$\sin ۱۰^\circ \sin ۵۰^\circ \sin ۷۰^\circ = \sin ۱۰^\circ \sin(۶۰ - ۱۰)\sin(۶۰ + ۱۰)$$

$$= \frac{۱}{۴}\sin(۳ \times ۱۰) = \frac{۱}{۴}\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۸}$$

مثال ۳۷: اگر n یک عدد طبیعی باشد ثابت کنید:

$$A = \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{۲\pi}{n} + \dots + \cos\frac{(n - ۱)\pi}{n} = ۰$$

حل:

$$A = [\cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{(n - ۱)\pi}{n}] + [\cos\frac{۲\pi}{n} + \cos\frac{(n - ۲)\pi}{n}] + \dots$$

$$= [\cos\frac{\pi}{n} + \cos(\pi - \frac{\pi}{n})] + [\cos\frac{۲\pi}{n} + \cos(\pi - \frac{۲\pi}{n})] + \dots$$

$$= \cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{۲\pi}{n} - \cos\frac{۲\pi}{n} + \dots = ۰$$

مثال ۳۸: اگر A و B و C زاویه‌های یک مثلث باشند ثابت کنید:

$$\sin\frac{۳A}{۲} = -\cos\frac{۳B + ۳C}{۲}$$

MATH75.IR

حل:

$$A + B + C = \pi \Rightarrow \frac{۳A}{۲} + \frac{۳B}{۲} + \frac{۳C}{۲} = \frac{۳\pi}{۲}$$

$$\frac{۳A}{۲} = \frac{۳\pi}{۲} - \frac{۳B + ۳C}{۲} \Rightarrow \sin\frac{۳A}{۲} = \sin\left(\frac{۳\pi}{۲} - \frac{۳B + ۳C}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{۳A}{۲} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{۲} - \frac{۳B + ۳C}{۲}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \frac{۳B + ۳C}{۲}\right)$$

$$= -\cos\frac{۳B + ۳C}{۲}$$

مثال ۳۹: در مثلث قائم الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) ثابت کنید:

$$\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \sin A$$

حل:

$$B + C = \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \cos B = \sin C \quad , \quad \cos C = \sin B$$

$$\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin C + \sin B} = ۱ = \sin ۹۰^\circ = \sin A$$

مثال ۴۰: اگر $x + y = \frac{\pi}{۴}$ و $\tan x \tan y = \frac{۱}{۶}$ باشد $\tan x$ و $\tan y$ را حساب کنید.

حل:

$$\tan(x + y) = \tan\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{۱ - \tan x \tan y} = ۱$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan y = ۱ - \frac{۱}{۶} \Rightarrow \tan x + \tan y = \frac{۵}{۶}$$

$$S = \tan x + \tan y = \frac{۵}{۶} \qquad P = \tan x \tan y = \frac{۱}{۶}$$

$$Z^۲ - \frac{۵}{۶}Z + \frac{۱}{۶} = ۰ \Rightarrow ۶Z^۲ - ۵Z + ۱ = ۰ \Rightarrow Z = \frac{۱}{۲} \text{ یا } Z = \frac{۱}{۳}$$

$$\begin{cases} \tan x = \frac{۱}{۲} \\ \tan y = \frac{۱}{۳} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} \tan x = \frac{۱}{۳} \\ \tan y = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

مثال ۴۱: درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید.

$$\tan(a - b) + \tan(b - c) + \tan(c - a) = \tan(a - b)\tan(b - c)\tan(c - a)$$

MATH75.IR

حل: فرض می‌کنیم $a - b = x$ و $b - c = y$ و $c - a = z$.

$$x + y + z = ۰ \Rightarrow x + y = -z$$

$$\tan(x + y) = \tan(-z) \Rightarrow \frac{\tan x + \tan y}{۱ - \tan x \tan y} = -\tan z$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan y = -\tan z + \tan x \tan y \tan z$$

$$\Rightarrow \tan x + \tan y + \tan z = \tan x \tan y \tan z$$

$$\Rightarrow \tan(a - b) + \tan(b - c) + \tan(c - a) = \tan(a - b)\tan(b - c)\tan(c - a)$$

مثال ۴۲: اگر $\tan(x - y) = \frac{۱}{۸}$ و $\tan(x + y) = \frac{۱}{۲}$ باشد $\tan x$ و $\tan y$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\tan ۲x = \tan[(x + y) + (x - y)] = \frac{\tan(x + y) + \tan(x - y)}{۱ - \tan(x + y)\tan(x - y)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۲}}{۱ - \frac{۱}{۸} \times \frac{۱}{۲}} = \frac{\frac{۵}{۸}}{\frac{۱۵}{۱۶}} = \frac{۲}{۳}$$

$$\frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \tan^۲ x - ۳\tan x - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \tan x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۹ + ۴}}{۲} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}$$

$$\tan ۲y = \tan[(x + y) - (x - y)] = \frac{\tan(x + y) - \tan(x - y)}{۱ + \tan(x + y)\tan(x - y)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۸}}{۱ + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۸}} = \frac{\frac{۳}{۸}}{\frac{۱۷}{۱۶}} = \frac{۶}{۱۷}$$

$$\frac{۲\tan y}{۱ - \tan^۲ y} = \frac{۶}{۱۷} \Rightarrow ۳\tan^۲ y + ۱۷\tan y - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \tan y = \frac{-۱۷ \pm \sqrt{۳۲۵}}{۶} = \frac{-۱۷ \pm ۵\sqrt{۱۳}}{۶}$$

مثال ۴۳: درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\tan ۵x - \tan ۳x - \tan ۲x = \tan ۵x \tan ۳x \tan ۲x$$

حل:

$$\tan ۵x - \tan ۳x - \tan ۲x = \tan(۳x + ۲x) - (\tan ۳x + \tan ۲x)$$

MATH75.IR

$$= \frac{\tan ۳x + \tan ۲x}{۱ - \tan ۳x \tan ۲x} - (\tan ۳x + \tan ۲x)$$

$$= \frac{\tan ۳x + \tan ۲x - \tan ۳x - \tan ۲x + \tan ۳x \tan ۲x(\tan ۳x + \tan ۲x)}{۱ - \tan ۳x \tan ۲x}$$

$$= \frac{\tan ۳x \tan ۲x(\tan ۳x + \tan ۲x)}{۱ - \tan ۳x \tan ۲x}$$

$$= \tan ۳x \tan ۲x\left(\frac{\tan ۳x + \tan ۲x}{۱ - \tan ۳x \tan ۲x}\right) = \tan ۳x \tan ۲x \tan ۵x$$

مثال ۴۴: حاصل عبارت زیر را حساب کنید.

$$A = \cos\frac{\pi}{۶۵} \cos\frac{۲\pi}{۶۵} \cos\frac{۴\pi}{۶۵} \cos\frac{۸\pi}{۶۵} \cos\frac{۱۶\pi}{۶۵} \cos\frac{۳۲\pi}{۶۵}$$

حل:

$$A = \frac{۲\sin\frac{\pi}{۶۵} \cos\frac{\pi}{۶۵} \cos\frac{۲\pi}{۶۵} \cos\frac{۴\pi}{۶۵} \cos\frac{۸\pi}{۶۵} \cos\frac{۱۶\pi}{۶۵} \cos\frac{۳۲\pi}{۶۵}}{۲\sin\frac{\pi}{۶۵}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{۲\pi}{۶۵} \cos\frac{۲\pi}{۶۵} \cos\frac{۴\pi}{۶۵} \cos\frac{۸\pi}{۶۵} \cos\frac{۱۶\pi}{۶۵} \cos\frac{۳۲\pi}{۶۵}}{۲\sin\frac{\pi}{۶۵}} =$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲}\sin\frac{۴\pi}{۶۵} \cos\frac{۴\pi}{۶۵} \cos\frac{۸\pi}{۶۵} \cos\frac{۱۶\pi}{۶۵} \cos\frac{۳۲\pi}{۶۵}}{۲\sin\frac{\pi}{۶۵}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۴}\sin\frac{۸\pi}{۶۵} \cos\frac{۸\pi}{۶۵} \cos\frac{۱۶\pi}{۶۵} \cos\frac{۳۲\pi}{۶۵}}{۲\sin\frac{\pi}{۶۵}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۸}\sin\frac{۱۶\pi}{۶۵} \cos\frac{۱۶\pi}{۶۵} \cos\frac{۳۲\pi}{۶۵}}{۲\sin\frac{\pi}{۶۵}}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۱۶}\sin\frac{۳۲\pi}{۶۵} \cos\frac{۳۲\pi}{۶۵}}{۲\sin\frac{\pi}{۶۵}} = \frac{\frac{۱}{۳۲}\sin\frac{۶۴\pi}{۶۵}}{۲\sin\frac{\pi}{۶۵}}$$

MATH75.IR

$$= \frac{\sin\frac{۶۴\pi}{۶۵}}{۶۴\sin\frac{\pi}{۶۵}} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{۶۵})}{۶۴\sin\frac{\pi}{۶۵}} = \frac{\sin\frac{\pi}{۶۵}}{۶۴\sin\frac{\pi}{۶۵}} = \frac{۱}{۶۴}$$

مثال ۴۵: ثابت کنید $\text{Arctan}m + \text{Arccot}m = \frac{\pi}{۲}$.

حل: فرض می‌کنیم $\text{Arctan}m = \alpha$ و $\text{Arccot}m = \beta$.

$$\text{Arctan}m = \alpha \longrightarrow \tan\alpha = m$$

$$\text{Arccot}m = \beta \longrightarrow \cot\beta = m$$

با توجه به اینکه $\tan\alpha = \cot\beta$ می‌توان گفت $\alpha + \beta = \frac{\pi}{۲}$. لذا

$$\text{Arctan}m + \text{Arccot}m = \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۴۶: ثابت کنید $\text{Arctan}۷ + ۲\text{Arctan}۳ = \frac{۵\pi}{۴}$.

حل:

$$\text{Arctan}۷ = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = ۷$$

$$\text{Arctan}۳ = \beta \Rightarrow \tan\beta = ۳$$

$$\tan ۲\beta = \frac{۲\tan\beta}{۱ - \tan^۲\beta} = \frac{۶}{۱ - ۹} = \frac{-۳}{۴}$$

برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $\alpha + ۲\beta = \frac{۵\pi}{۴}$. برای این منظور نشان می‌دهیم:

$$\tan(\alpha + ۲\beta) = \tan\frac{۵\pi}{۴}$$

$$\tan(\alpha + ۲\beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}۲\beta}{۱ - \tan\alpha\tan ۲\beta} = \frac{۷ - \frac{۳}{۴}}{۱ - ۷ \times (-\frac{۳}{۴})} = \frac{۲۸ - ۳}{۴ + ۲۱} = \frac{۲۵}{۲۵} = ۱$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۴} = \tan(\pi + \frac{\pi}{۴}) = \tan\frac{\pi}{۴} = ۱$$

بنابراین:

$$\tan(\alpha + ۲\beta) = \tan\frac{۵\pi}{۴}$$

مثال ۴۷: ثابت کنید:

$$\text{Arc}\cos\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴} + ۲\text{Arcsin}\frac{\sqrt{۵} + ۱}{۴} = \pi$$

حل:

$$\text{Arccos}\frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{۵} - ۱}{۴}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{۱۰ + ۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

MATH75.IR

$$\text{Arcsin}\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}=\beta \Rightarrow \sin\beta=\frac{\sqrt{۵}+۱}{۴}\ ,\ \cos\beta=\frac{\sqrt{۱۰-۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

$$\cos۲\beta=۲\cos^۲\beta-۱=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۴}\ ,\ \sin۲\beta=\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

باید نشان دهیم $\alpha+۲\beta=\pi$. برای این منظور کافی است ثابت کنیم:

$$\sin(\alpha+۲\beta)=\sin\pi$$

$$\sin\alpha\cos۲\beta+\cos\alpha\sin۲\beta=\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}\times\frac{۱-\sqrt{۵}}{۴}+\frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}\times\frac{\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}}{۴}$$

$$=\frac{-(\sqrt{۵}-۱)\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}+(\sqrt{۵}-۱)(\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}})}{۱۶}=۰=\sin\pi$$

مثال ۴۸: اگر $-۱\le m\le ۰$ ثابت کنید $\text{Arccos}m=\pi-\text{Arcsin}\sqrt{۱-m^۲}$.

حل:

$$\text{Arccos}m=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=m \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{۱-m^۲}$$

$$\text{Arcsin}\sqrt{۱-m^۲}=\beta \Rightarrow \sin\beta=\sqrt{۱-m^۲}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{۱-m^۲}=\sin\beta \Rightarrow \sin\alpha=\sin(\pi-\beta)$$

$$\Rightarrow \alpha=\pi-\beta \Rightarrow \text{Arccos}m=\pi-\text{Arcsin}\sqrt{۱-m^۲}$$

مثال ۴۹: اگر $\text{Arctan}x+\text{Arctan}y+\text{Arctan}z=\frac{\pi}{۲}$. ثابت کنید:

$$xy+yz+zx=۱$$

حل:

$$\text{Arctan}x=\alpha \Rightarrow \tan\alpha=x$$

$$\text{Arctan}y=\beta \Rightarrow \tan\beta=y$$

$$\text{Arctan}z=\gamma \Rightarrow \tan\gamma=z$$

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}-\gamma$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\frac{\pi}{۲}-\gamma) \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha\tan\beta}=\cot\gamma$$

$$\frac{x+y}{۱-xy}=\frac{۱}{z} \Rightarrow xz+yz=۱-xy \Rightarrow xy+yz+xz=۱$$

MATH75.IR

قابل محاسبه کردن عبارتهای مثلثاتی به وسیلهٔ لگاریتم

یک عبارت وقتی قابل محاسبه با لگاریتم است که فقط شامل اعمال ضرب و تقسیم باشد.

تبدیل مجموع یا تفاضل به حاصلضرب

دو رابطهٔ زیر را قبلاً ثابت کرده‌ایم.

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

دو رابطه را با هم جمع می‌کنیم

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = ۲\sin a\cos b$$

اگر فرض کنیم $a + b = p$ و $a - b = q$ تساوی فوق به صورت زیر در می‌آید.

$$\boxed{\sin p + \sin q = ۲\sin\frac{p + q}{۲}\cos\frac{p - q}{۲}}$$

اگر در این تساوی q را به q− تبدیل کنیم خواهیم داشت:

$$\boxed{\sin p - \sin q = ۲\sin\frac{p - q}{۲}\cos\frac{p + q}{۲}}$$

به طریق مشابه فرمولهای زیر نیز اثبات می‌شود.

$$\boxed{\cos p + \cos q = ۲\cos\frac{p + q}{۲}\cos\frac{p - q}{۲}}$$

$$\boxed{\cos p - \cos q = -۲\sin\frac{p + q}{۲}\sin\frac{p - q}{۲}}$$

برای تبدیل مجموع دو تانژانت به حاصلضرب می‌نویسیم:

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin p}{\cos p} + \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p\cos q + \cos p\sin q}{\cos p\cos q}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tan p + \tan q = \frac{\sin(p + q)}{\cos p\cos q}}$$

به همین ترتیب فرمولهای زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

MATH75.IR

$$\boxed{\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}}$$

$$\boxed{\cot p + \cot q = \frac{\sin(p+q)}{\sin p \sin q}}$$

$$\boxed{\cot p - \cot q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}}$$

تبدیل حاصلضرب به مجموع یا تفاضل

دو تساوی زیر را با هم جمع می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = ۲\sin a\cos b$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sin a\cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود:

$$\boxed{\cos a\cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]}$$

$$\boxed{\sin a\sin b = -\frac{۱}{۲}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]}$$

مثال ۵۰: کسر $A = \frac{\sin ۸x + \sin ۵x + \sin ۲x}{\cos ۸x + \cos ۵x + \cos ۲x}$ را ساده کنید.

حل:

$$A = \frac{۲\sin\frac{۸x+۲x}{۲}\cos\frac{۸x-۲x}{۲} + \sin ۵x}{۲\cos\frac{۸x+۲x}{۲}\cos\frac{۸x-۲x}{۲} + \cos ۵x} = \frac{۲\sin ۵x\cos ۳x + \sin ۵x}{۲\cos ۵x\cos ۳x + \cos ۵x}$$

$$= \frac{\sin ۵x(۲\cos ۳x + ۱)}{\cos ۵x(۲\cos ۳x + ۱)} = \tan ۵x$$

مثال ۵۱: کسر $B = \frac{\cos ۳۷^\circ + \sin ۳۷^\circ}{\cos ۳۷^\circ - \sin ۳۷^\circ}$ را ساده کنید.

MATH75.IR

حل:

$$\frac{\cos ۳۷^\circ + \sin ۳۷^\circ}{\cos ۳۷^\circ - \sin ۳۷^\circ} = \frac{\cos ۳۷^\circ + \cos(۹۰^\circ - ۳۷^\circ)}{\cos ۳۷^\circ - \cos(۹۰^\circ - ۳۷^\circ)} = \frac{\cos ۳۷^\circ + \cos ۵۳^\circ}{\cos ۳۷^\circ - \cos ۵۳^\circ}$$

$$= \frac{۲\cos\frac{۳۷ + ۵۳}{۲}\cos\frac{۳۷ - ۵۳}{۲}}{-۲\sin\frac{۳۷ + ۵۳}{۲}\sin\frac{۳۷ - ۵۳}{۲}} = \frac{\cos ۴۵\cos(-۸)}{-\sin ۴۵\sin(-۸)} = \frac{\cos ۸^\circ}{\sin ۸^\circ} = \cot ۸^\circ$$

مثال ۵۲: عبارت $C = \cos ۱۶^\circ + \sin ۵۶^\circ + \sin ۵۰^\circ$ را قابل محاسبه با لگاریتم نمائید.

حل:

$$C = \cos ۱۶^\circ + \cos ۳۴^\circ + \sin ۵۰^\circ = ۲\cos\frac{۱۶ + ۳۴}{۲}\cos\frac{۳۴ - ۱۶}{۲} + ۲\sin ۲۵\cos ۲۵$$

$$= ۲\cos ۲۵^\circ\cos ۹^\circ + ۲\sin ۲۵^\circ\cos ۲۵^\circ = ۲\cos ۲۵^\circ(\cos ۹^\circ + \cos ۶۵^\circ)$$

$$= ۲\cos ۲۵^\circ(۲\cos\frac{۹ + ۶۵}{۲}\cos\frac{۶۵ - ۹}{۲}) = ۴\cos ۲۵^\circ\cos ۳۷^\circ\cos ۲۸^\circ$$

مثال ۵۳: عبارت $\tan ۴۰^\circ + \cot ۱۰^\circ$ را به حاصلضرب تبدیل کنید.

حل:

$$\tan ۴۰ + \cot ۱۰ = \tan ۴۰ + \tan ۸۰ = \frac{\sin(۴۰ + ۸۰)}{\cos ۴۰\cos ۸۰}$$

$$= \frac{\sin ۱۲۰}{\cos ۴۰\cos ۸۰} = \frac{\sqrt{۳}}{۲\cos ۴۰\cos ۸۰}$$

مثال ۵۴: نشان دهید $\sin ۱۰ + \sin ۵۰ - \sin ۷۰ = ۰$.

حل:

$$\sin ۱۰ + (\sin ۵۰ - \sin ۷۰) = \sin ۱۰ + ۲\cos\frac{۵۰ + ۷۰}{۲}\sin\frac{۵۰ - ۷۰}{۲}$$

$$= \sin ۱۰ + ۲\cos ۶۰\sin(-۱۰) = \sin ۱۰ - ۲\cos ۶۰\sin ۱۰$$

$$= \sin ۱۰ - ۲ \times \frac{۱}{۲}\sin ۱۰ = ۰$$

مثال ۵۵: عبارت زیر را به حاصلضرب تبدیل کنید.

$$\sin a + \sin ۳a + \sin ۹a - \sin ۵a$$

MATH75.IR

حل:

$$(\sin a - \sin 5a) + (\sin 9a + \sin 3a) =$$

$$(2\cos\frac{a+5a}{2}\sin\frac{a-5a}{2}) + (2\sin\frac{9a+3a}{2}\cos\frac{9a-3a}{2}) =$$

$$2\cos 3a\sin(-2a) + 2\sin 6a\cos 3a = -2\cos 3a\sin 2a + 2\sin 6a\cos 3a$$

$$= 2\cos 3a(\sin 6a - \sin 2a) = 2\cos 3a(2\cos\frac{6a+2a}{2}\sin\frac{6a-2a}{2})$$

$$= 4\cos 3a\cos 4a\sin 2a$$

مثال ۵۶: عبارتهای زیر به صورت مجموع یا تفاضل دو نسبت مثلثاتی بنویسید.

الف) $\sin 50^\circ \sin 70^\circ$ ب) $\sin 105^\circ \cos 65^\circ$

ج) $\cos 70^\circ \sin 10^\circ$ د) $\cos 80^\circ \cos 20^\circ$

حل:

الف) $\sin 50^\circ \sin 70^\circ = -\frac{1}{2}[\cos(50+70) - \cos(50-70)]$

$$= -\frac{1}{2}[\cos 120 - \cos 20] = \frac{1}{2}\cos 20 - \frac{1}{2}\cos 120$$

ب) $\sin 105^\circ \cos 65^\circ = \frac{1}{2}[\sin(105+65) + \sin(105-65)]$

$$= \frac{1}{2}\sin 170 + \frac{1}{2}\sin 40$$

ج) $\cos 70^\circ \sin 10^\circ = \frac{1}{2}[\sin(70+10) - \sin(70-10)]$

$$= \frac{1}{2}\sin 80 - \frac{1}{2}\sin 60$$

د) $\cos 80^\circ \cos 20^\circ = \frac{1}{2}[\cos(80+20) + \cos(80-20)]$

$$= \frac{1}{2}\cos 100 + \frac{1}{2}\cos 60$$

مثال ۵۷: درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin 3\alpha\sin 6\alpha + \sin 4\alpha\sin 13\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 3\alpha\cos 6\alpha + \sin 4\alpha\cos 13\alpha} = \tan 9\alpha$$

MATH75.IR

حل:

$$= \text{طرف اول}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+2\alpha)-\cos(\alpha-2\alpha)]-\frac{1}{2}[\cos(3\alpha+6\alpha)-\cos(3\alpha-6\alpha)]-\frac{1}{2}[\cos(4\alpha+13\alpha)-\cos(4\alpha-13\alpha)]}{\frac{1}{2}[\sin(\alpha+2\alpha)+\sin(\alpha-2\alpha)]+\frac{1}{2}[\sin(3\alpha+6\alpha)+\sin(3\alpha-6\alpha)]+\frac{1}{2}[\sin(4\alpha+13\alpha)+\sin(4\alpha-13\alpha)]}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}(\cos 3\alpha - \cos\alpha + \cos 9\alpha - \cos 3\alpha + \cos 17\alpha - \cos 9\alpha)}{\frac{1}{2}(\sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin 9\alpha - \sin 3\alpha + \sin 17\alpha - \sin 9\alpha)}$$

$$= \frac{-(\cos 17\alpha - \cos\alpha)}{(\sin 17\alpha - \sin\alpha)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{17\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{17\alpha-\alpha}{2}}{2\cos\frac{17\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{17\alpha-\alpha}{2}} = \frac{\sin 9\alpha}{\cos 9\alpha} = \tan 9\alpha$$

مثال ۵۸: ثابت کنید $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

حل:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right] =$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right] =$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\sin(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi}{7})+\sin(\frac{\pi}{7}-\frac{2\pi}{7})+\sin(\frac{\pi}{7}+\frac{4\pi}{7})+\sin(\frac{\pi}{7}-\frac{4\pi}{7})\right.$$

$$\left.+\sin(\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7})+\sin(\frac{\pi}{7}-\frac{6\pi}{7})\right] =$$

$$\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\sin\pi-\sin\frac{\pi}{7}\right] = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\times(-\sin\frac{\pi}{7}) = \frac{-1}{2}$$

MATH75.IR

مثال ۵۹: عبارت زیر را به حاصلضرب تبدیل کنید.

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c)$$

حل:

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) =$$

$$۲\sin\frac{a + b}{۲}\cos\frac{a - b}{۲} + ۲\sin\frac{c - a - b - c}{۲}\cos\frac{c + a + b + c}{۲} =$$

$$۲\sin\frac{a + b}{۲}\cos\frac{a - b}{۲} - ۲\sin\frac{a + b}{۲}\cos\frac{۲c + a + b}{۲} =$$

$$۲\sin\frac{a + b}{۲}\left[\cos\frac{a - b}{۲} - \cos\frac{۲c + a + b}{۲}\right] =$$

$$۲\sin\frac{a + b}{۲}\left[۲\sin\frac{a + c}{۲}\sin\frac{b + c}{۲}\right] = ۴\sin\frac{a + b}{۲}\sin\frac{a + c}{۲}\sin\frac{b + c}{۲}$$

مثال ۶۰: مجموع زیر را حساب کنید.

$$A = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + ۲b) + \dots + \cos(a + ۷b)$$

حل: عبارت A را در $۲\sin\frac{b}{۲}$ ضرب می‌کنیم $(b \neq ۲k\pi)$.

$$(۲\sin\frac{b}{۲})A = ۲\sin\frac{b}{۲}\cos a + ۲\sin\frac{b}{۲}\cos(a + b) + ۲\sin\frac{b}{۲}\cos(a + ۲b) + \dots$$

$$+ ۲\sin\frac{b}{۲}\cos(a + ۷b)$$

$$(۲\sin\frac{b}{۲})A = [\sin(\frac{b}{۲} + a) + \sin(\frac{b}{۲} - a)] + [\sin(\frac{۳b}{۲} + a) + \sin(-\frac{b}{۲} - a)] +$$

$$[\sin(\frac{۵b}{۲} + a) + \sin(-\frac{۳}{۲}b - a)] + \dots + [\sin(\frac{۱۵b}{۲} + a) + \sin(-\frac{۱۳b}{۲} - a)]$$

$$(۲\sin\frac{b}{۲})A = \sin(\frac{b}{۲} - a) + \sin(\frac{۱۵b}{۲} + a)$$

$$= ۲\sin\frac{b + ۱۵b}{۴}\cos\frac{۷b + ۲a}{۲}$$

$$= ۲\sin ۴b\cos\frac{۷b + ۲a}{۲}$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \quad A = \frac{\sin ۴b \cos\frac{۷b + ۲a}{۲}}{\sin\frac{b}{۲}}$$

نکته: در حالت کلی فرمول فوق به صورت زیر است. $(b \neq ۲k\pi)$

$$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + ۲b) + \cos(a + ۳b) + \dots + \cos(a + nb)$$

$$= \frac{\sin\frac{(n + ۱)b}{۲} \cos\frac{nb + ۲a}{۲}}{\sin\frac{b}{۲}}$$

مثال ۶۱: مجموع $B = ۱ + \cos b + \cos ۲b + \dots + \cos nb$ را حساب کنید.

حل: در نکته فوق اگر a را صفر اختیار کنیم خواهیم داشت: $(b \neq ۲k\pi)$

$$B = \cos ۰ + \cos b + \cos ۲b + \dots + \cos nb = \frac{\sin\frac{(n + ۱)b}{۲} \cos\frac{nb}{۲}}{\sin\frac{b}{۲}}$$

MATH75.IR

معادلهٔ مثلثاتی

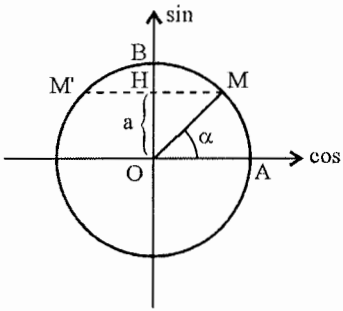
تساوی دو عبارت را که شامل مقادیر نسبتهای مثلثاتی یک زاویه بوده و برابری دو طرف به ازای بعضی از مقادیر این زاویه برقرار شود، معادلهٔ مثلثاتی می‌نامند.

الف) حل معادلاتی به صورت $\sin x = a$. $(-1 \le a \le 1)$

می‌خواهیم تمام زاویه‌هایی که سینوس آنها برابر a است را بدست آوریم (با فرض $0 \le a \le 1$).
برای این منظور در دایرهٔ مثلثاتی روی محور سینوسها نقطهٔ H را روی نیم خط OB چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{OH} = a$ باشد و از نقطهٔ H خطی موازی محور کسینوسها رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ M و M′ قطع کند. تمام زاویه‌های مقابل به کمانهای مثلثاتی AM و AM′ زاویه‌های هستند که سینوسشان برابر a است. بنا به قرارداد زاویهٔ روبرو به کمانی که انتهای آن در ربع اول واقع بوده و اندازهٔ آن بین ۰ و $\frac{\pi}{2}$ رادیان می‌باشد زاویهٔ اصلی نامیده می‌شود. اگر اندازهٔ زاویهٔ اصلی برابر α باشد آنگاه:

$\text{Arc sin}\, a = \alpha$

اگر α زاویهٔ اصلی باشد تمام زاویه‌های مقابل به کمان AM به صورت $2k\pi + \alpha$ و تمام زاویه‌های مقابل به کمان AM′ به صورت $2k\pi + \pi - \alpha$ نشان داده می‌شوند.



به طور کلی از آنچه بیان شد، نتیجه می‌شود اگر $\sin x = \sin\alpha$ آنگاه :

$$\boxed{x = 2k\pi + \alpha} \qquad (k \in z)$$

یا

$$\boxed{x = 2k\pi + \pi - \alpha} \Rightarrow \boxed{x = (2k + 1)\pi - \alpha}$$

اگر $-1 \le a \le 0$ باشد نیز به همین نتایج می‌رسیم.

MATH75.IR

مثال ۶۲: معادلهٔ $۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کرده و جوابهایی را که بین صفر و ۲π قرار می‌گیرد تعیین کنید.

حل:

$$۲\sin x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۲\sin x = \sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۳}$$

$$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

$$x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$$

$$k = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۳} \text{ یا } x = \frac{۲\pi}{۳}$$

مثال ۶۳: معادلهٔ $۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل:

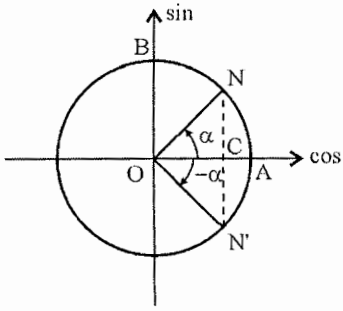
$$\sin x = \frac{۳ \pm \sqrt{۹ - ۸}}{۴} = \frac{۳ \pm ۱}{۴}$$

$$\sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\sin x = ۱ \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

ب) حل معادلاتی به صورت $\cos x = b$. $(-۱ \le b \le ۱)$

با فرض اینکه $۰ \le b \le ۱$ در دایرهٔ مثلثاتی روی محور کسینوسها مطابق شکل نقطهٔ C را چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{OC} = b$، سپس از نقطهٔ C خطی موازی محور سینوس رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ N و N′ قطع کند کلیهٔ زاویه‌های مقابل به کمانهای مثلثاتی AN و AN′ زوایای مطلوب می‌باشند. زاویه‌های مقابل به کمان AN به صورت $۲k\pi + \alpha$ و زاویه‌های مقابل به کمان AN′ به صورت $۲k\pi - \alpha$ نشان داده می‌شود. زاویهٔ α که در ناحیهٔ اول است زاویهٔ اصلی نامیده می‌شود و داریم $\text{Arccos}\, b = \alpha$.



MATH75.IR

به طور کلی اگر $\cos x = \cos\alpha$ باشد آنگاه

$$\boxed{x = ۲k\pi \pm \alpha}$$

اگر $-۱ \le a < ۰$ نیز به همین نتیجه می‌رسیم.

مثال ۶۴: معادلهٔ $۲\cos^۲x + \cos x - ۳ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$\cos x = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱ + ۲۴}}{۴} = \frac{-۱ \pm ۵}{۴} \Rightarrow \cos x = ۱ \text{ یا } \cos x = -\frac{۳}{۲}$$

$$\cos x = ۱ = \cos ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi}$$

$\cos x = -\frac{۳}{۲}$ امکان‌پذیر نیست.

مثال ۶۵: معادلهٔ مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x\cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$\sin x(۱ + \cos x) + (\cos x + ۱) = ۰$$

$$(۱ + \cos x)(\sin x + ۱) = ۰$$

$$۱ + \cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = -۱ \Rightarrow \cos x = \cos\pi \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi = (۲k + ۱)\pi$$

$$\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = -۱ \Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۲}) \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

ج) حل معادلاتی به صورت $\tan x = c$

فرض می‌کنیم $c \ge ۰$ و روی محور تانژانت نقطهٔ D را چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{AD} = c$. سپس از D به مرکز دایره مثلثاتی وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در دو نقطهٔ P و P′ قطع کند. کلیهٔ زوایای مقابل به کمانهای مثلثاتی AP و AP′ زاویه‌های مطلوب می‌باشند که تانژانت همهٔ این زاویه‌ها برابر c خواهد شد. اگر θ زاویه‌ای باشد که انتهای کمان مقابل به آن در ربع اول بوده و $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ و $\tan\theta = c$ در این صورت θ را زاویهٔ اصلی نامیده و خواهیم داشت $\theta = \text{Arctan}c$.

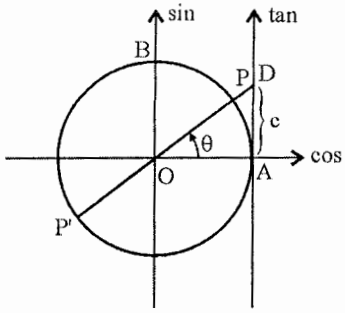
اگر θ اندازهٔ زاویهٔ اصلی باشد اندازهٔ تمام زوایای مقابل به کمان AP به صورت $۲k\pi + \theta$ و اندازهٔ تمام زوایای مقابل به کمان AP′ به صورت $۲k\pi + \pi + \theta$ یا $(۲k + ۱)\pi + \theta$ نشان داده می‌شود که اجتماع این دو به صورت $k\pi + \theta$ می‌باشد.

به طور کلی اگر $\tan x = \tan\theta$ باشد آنگاه:

$$\boxed{x = k\pi + \theta}$$

MATH75.IR

در حالتی که $c < ۰$ نیز به همین نتیجه می‌رسیم.



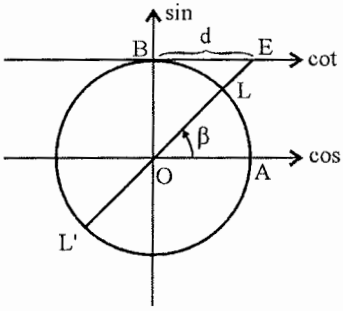
د) حل معادلاتی به صورت $\cot x = d$

فرض می‌کنیم $d > ۰$ و روی محور کتانژانت نقطهٔ E را چنان اختیار می‌کنیم که $\overline{BE} = d$ و از E به مرکز دایره وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقاط L و L′ قطع کند. تمام زوایای مقابل به کمانهای AL و AL′ زاویه‌های مطلوب می‌باشند.

اگر β اندازهٔ زاویهٔ اصلی مقابل به کمان AL باشد بسادگی می‌توان گفت کلیهٔ زاویه‌هایی که کتانژانت آنها برابر d باشد عبارتند از $x = k\pi + \beta$.

در حالتی که $d < ۰$ باشد نیز به همین نتیجه می‌رسیم.

به طور کلّی اگر $\cot x = \cot\beta$ آنگاه $x = k\pi + \theta$.



مثال ۶۶: معادلهٔ $\tan x - ۲\cot x = ۱$ را حل کنید.

حل:

$$\tan x - \frac{۲}{\tan x} - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan^۲ x - \tan x - ۲ = ۰$$

$$\tan x = \frac{۱ \pm \sqrt{۱ + ۸}}{۲} = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow \tan x = -۱ \text{ یا } \tan x = ۲$$

MATH75.IR

$$\tan x = -۱ = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{\pi}{۴}}$$

$$\tan x = ۲ \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \text{Arctan}۲}$$

مثال ۶۷: معادلهٔ $\cos ۴x = \cos x$ را حل کنید.

حل:

$$\cos ۴x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} ۴x = ۲k\pi + x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \\ ۴x = ۲k\pi - x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۵} \end{cases}$$

مثال ۶۸: معادلهٔ $\sin ۳x = \cos x$ را حل کنید.

حل:

$$\sin ۳x = \sin(\frac{\pi}{۲} - x)$$

$$۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۸}$$

$$۳x = ۲k\pi + \pi - (\frac{\pi}{۲} - x) \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

مثال ۶۹: معادلهٔ $\tan(x + \frac{\pi}{۷}) = \cot\frac{۲\pi}{۷}$ را حل کنید.

حل:

$$\tan(x + \frac{\pi}{۷}) = \tan(\frac{\pi}{۲} - \frac{۲\pi}{۷}) \Rightarrow \tan(x + \frac{\pi}{۷}) = \tan\frac{۳\pi}{۱۴}$$

$$x + \frac{\pi}{۷} = k\pi + \frac{۳\pi}{۱۴} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{۱۴}}$$

مثال ۷۰: معادلهٔ $\sin^۲(x - \frac{\pi}{۸}) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳$ را حل کنید.

حل:

$$\cos^۲\left[\frac{\pi}{۲} - (x - \frac{\pi}{۸})\right] + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۳$$

$$\cos^۲(\frac{۵\pi}{۸} - x) + ۲\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) - ۳ = ۰$$

با توجه به اینکه مجموع ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم صفر است می‌توان گفت یکی از جوابها ۱ و دیگری ۳- است.

MATH75.IR

$$\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = ۱ \Rightarrow \cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = \cos ۰ \Rightarrow \frac{۵\pi}{۸} - x = ۲k\pi$$

$$\Rightarrow x = -۲k\pi + \frac{۵\pi}{۸}$$

$\cos(\frac{۵\pi}{۸} - x) = -۳$ غیرممکن

مثال ۷۱: معادلهٔ $\sin ۲x = \tan x$ را حل کنید.

حل:

$$۲\sin x\cos x - \tan x = ۰$$

$$۲\sin x\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = ۰ \Rightarrow \frac{۲\sin x\cos^۲ x - \sin x}{\cos x} = ۰$$

$$\frac{\sin x(۲\cos^۲ x - ۱)}{\cos x} = ۰ \Rightarrow \sin x(۲\cos^۲ x - ۱) = ۰$$

$$\sin x = ۰ = \sin ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi} \text{ یا } \boxed{x = ۲k\pi + \pi} \Rightarrow \boxed{x = k\pi}$$

$$۲\cos^۲ x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}}$$

$$\cos x = \frac{-\sqrt{۲}}{۲} = \cos\frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi \pm \frac{۳\pi}{۴}}$$

مثال ۷۲: معادلهٔ $۱ - \cos ۲x = \sin ۲x$ را حل کنید.

حل:

$$\sin ۲x + \cos ۲x = ۱$$

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\sin ۲x + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{۴}\sin ۲x + \sin\frac{\pi}{۴}\cos ۲x = \sin\frac{\pi}{۴}$$

$$\sin(۲x + \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۲x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{x = k\pi} \\ ۲x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{۴}} \end{cases}$$

مثال ۷۳: معادلهٔ $\sin(x + \frac{\pi}{۳})\cos(x - \frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را حل کنید.

حل:

$$(\sin x\cos\frac{\pi}{۳} + \cos x\sin\frac{\pi}{۳})(\cos x\cos\frac{\pi}{۳} + \sin x\sin\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$(\frac{۱}{۲}\sin x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x)(\frac{۱}{۲}\cos x + \frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

MATH75.IR

$$\frac{۱}{۴}\sin x\cos x + \frac{\sqrt{۳}}{۴}\sin^۲ x + \frac{\sqrt{۳}}{۴}\cos^۲ x + \frac{۳}{۴}\sin x\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\sin x\cos x + \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sin^۲ x + \cos^۲ x) = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\frac{۱}{۲}\sin ۲x + \frac{\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \sin ۲x = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x = k\pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲}}$$

مثال ۷۴: معادلهٔ $۳\tan x - \tan(\frac{\pi}{۴} - x) = ۳$ را حل کنید.

حل:

$$۳\tan x - \frac{\tan\frac{\pi}{۴} - \tan x}{۱ + \tan\frac{\pi}{۴}\tan x} = ۳$$

$$۳\tan x - \frac{۱ - \tan x}{۱ + \tan x} = ۳ \Rightarrow ۳\tan x(۱ + \tan x) - (۱ - \tan x) - ۳(۱ + \tan x) = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\tan^۲ x + \tan x - ۴ = ۰ \Rightarrow \tan x = ۱ \text{ یا } \tan x = -\frac{۴}{۳}$$

$$\tan x = ۱ = \tan\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{۴}}$$

$$\tan x = -\frac{۴}{۳} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \operatorname{Arctan}(-\frac{۴}{۳})}$$

مثال ۷۵: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\operatorname{Arccot} x + \operatorname{Arccot} ۲x = \frac{۳\pi}{۴}$$

حل:

$$\operatorname{Arccot} x = \alpha \Rightarrow \cot\alpha = x$$

$$\operatorname{Arccot} ۲x = \beta \Rightarrow \cot\beta = ۲x$$

$$\alpha + \beta = \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow \cot(\alpha + \beta) = \cot\frac{۳\pi}{۴}$$

$$\frac{\cot\alpha\cot\beta - ۱}{\cot\alpha + \cot\beta} = -۱ \Rightarrow \frac{x \times ۲x - ۱}{x + ۲x} = -۱ \Rightarrow \frac{۲x^۲ - ۱}{۳x} = -۱$$

$$۲x^۲ + ۳x - ۱ = ۰ \Rightarrow \boxed{x = \frac{-۳ \pm \sqrt{۱۷}}{۴}}$$

MATH75.IR

مثال ۷۶: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\text{Arcsin}x - \text{Arccos}x = \text{Arcsin}(۳x - ۲)$$

حل:

$$\text{Arcsin}x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x\,,\quad \cos\alpha = \sqrt{۱ - x^۲}$$

$$\text{Arccos}x = \beta \Rightarrow \cos\beta = x\,,\quad \sin\beta = \sqrt{۱ - x^۲}$$

$$\text{Arcsin}(۳x - ۲) = \gamma \Rightarrow \sin\gamma = ۳x - ۲$$

$$\alpha - \beta = \gamma \Rightarrow \sin(\alpha - \beta) = \sin\gamma$$

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin\gamma \Rightarrow x \times x - \sqrt{۱ - x^۲} \times \sqrt{۱ - x^۲} = ۳x - ۲$$

$$x^۲ - (۱ - x^۲) = ۳x - ۲ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{x = ۱} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = \frac{۱}{۲}}$$

مثال ۷۷: معادلهٔ $۱ + \sin x + \cos x + \sin ۲x + \cos ۲x = ۰$ را حل کنید.

حل:

$$۱ + \sin x + \cos x + ۲\sin x\cos x + ۲\cos^۲ x - ۱ = ۰$$

$$(\sin x + ۲\sin x\cos x) + (\cos x + ۲\cos^۲ x) = ۰$$

$$\sin x(۱ + ۲\cos x) + \cos x(۱ + ۲\cos x) = ۰$$

$$(۱ + ۲\cos x)(\sin x + \cos x) = ۰$$

$$۱ + ۲\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$$

$$\sin x + \cos x = ۰ \Rightarrow \cos x = -\sin x \Rightarrow \cos x = \sin(-x)$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos(\frac{\pi}{۲} + x) \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} + x & \text{غیر ممکن} \\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} - x \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

معادلات کلاسیک

معادلهٔ کلاسیک نوع اول: هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a\sin x + b\cos x = c$ معادلهٔ کلاسیک نوع اول نامیده می‌شود.

برای حل معادلهٔ کلاسیک نوع اول دو روش ذکر می‌کنیم.

روش اول: $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب $\tan\frac{x}{۲}$ می‌نویسیم:

MATH75.IR

$$a\sin x + b\cos x = c$$

$$a \times \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + b \times \frac{1-\tan^2\frac{x^2}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = c$$

$$2a\tan\frac{x}{2} + b - b\tan^2\frac{x}{2} = c + c\tan^2\frac{x}{2}$$

$$(b+c)\tan^2\frac{x}{2} - 2a\tan\frac{x}{2} + (c-b) = 0 \quad (1)$$

با حل این معادله $\tan\frac{x}{2}$ بدست می‌آید.

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c} \quad , \quad \tan\frac{x}{2} = \frac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$$

اگر α و β زاویه‌هایی باشند که تانژانت آنها مساوی ریشه‌های معادله باشند آنگاه:

$$\tan\frac{x}{2} = \tan\alpha \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + 2\alpha$$

$$\tan\frac{x}{2} = \tan\beta \Rightarrow \frac{x}{2} = k\pi + \beta \Rightarrow x = 2k\pi + 2\beta$$

معادلهٔ کلاسیک نوع اول وقتی جواب دارد که معادله (۱) دارای جواب باشد. یعنی $\Delta' \geq 0$.

$$a^2 - (b+c)(c-b) \geq 0 \Rightarrow a^2 - (c^2 - b^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 - c^2 + b^2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{a^2 + b^2 \geq c^2}$$

مثال ۷۸: معادلهٔ $4\sin x - \sqrt{2}\cos x = 2\sqrt{2} - 1$ را حل کنید.

حل:

$$4 \times \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - \sqrt{2} \times \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = 2\sqrt{2} - 1$$

$$(\sqrt{2}-1)\tan^2\frac{x}{2} - 8\tan\frac{x}{2} + (3\sqrt{2}-1) = 0$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - (\sqrt{2}-1)(3\sqrt{2}-1)}}{\sqrt{2}-1} = \frac{4 \pm \sqrt{9+4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{4 \pm (2\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}-1} =$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}-1 = \tan\frac{\pi}{8}$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \frac{x}{۲} = k\pi + \frac{\pi}{۸} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

یا:

$$\tan\frac{x}{۲} = \frac{۵ + ۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۲} - ۱} = ۷\sqrt{۲} + ۹$$

$$\frac{x}{۲} = k\pi + \text{Arctan}(۷\sqrt{۲} + ۹) \Rightarrow x = ۲k\pi + ۲\text{Arctan}(۷\sqrt{۲} + ۹)$$

مثال ۷۹: معادلهٔ مثلثاتی $\sqrt{۳}\sin(۲x - \frac{\pi}{۳}) - \cos(۲x - \frac{\pi}{۳}) = ۰$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را بر $\cos(۲x - \frac{\pi}{۳})$ تقسیم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\sqrt{۳}\tan(۲x - \frac{\pi}{۳}) - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan(۲x - \frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\Rightarrow \tan(۲x - \frac{\pi}{۳}) = \tan\frac{\pi}{۶} \Rightarrow ۲x - \frac{\pi}{۳} = k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۴}$$

روش دوم:

برای حل معادلهٔ $a\sin x + b\cos x = c$ دو طرف معادله را بر a که مخالف صفر فرض می‌شود، تقسیم و قرار می‌دهیم: $\frac{b}{a} = \tan\varphi$ خواهیم داشت:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin x + \tan\varphi \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow \sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

با فرض اینکه $\cos\varphi \le ۱$. $-۱ \le \frac{c}{a}$ آنگاه قرار می‌دهیم: $\frac{c}{a}\cos\varphi = \sin\alpha$ پس $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi = \sin\alpha$ و جوابهای معادله به صورت $x = ۲k\pi - \varphi + \alpha$ و $x = ۲k\pi + \pi - \varphi - \alpha$ خواهد شد.

مثال ۸۰: معادلهٔ مثلثاتی $(\sqrt{۳} + ۱)\sin x + (\sqrt{۳} - ۱)\cos x = \sqrt{۲}$ را حل کنید.

$(\tan\frac{\pi}{۱۲} = ۲ - \sqrt{۳})$

MATH75.IR

حل:

$$\sin x + \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳} + ۱}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳} + ۱}$$

$$\sin x + (۲ - \sqrt{۳})\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳} + ۱} \Rightarrow \sin x + \tan\frac{\pi}{۱۲}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳} + ۱}$$

$$\sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{۱۲}}{\cos\frac{\pi}{۱۲}}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳} + ۱}$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{۱۲} + \sin\frac{\pi}{۱۲}\cos x = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳} + ۱}\cos\frac{\pi}{۱۲}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{۱۲}) = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳} + ۱} \times \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{۱۲}) = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{۱۲} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x + \frac{\pi}{۱۲} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \text{ یا } x = ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴}$$

مثال ۸۱: حدود m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ زیر جواب داشته باشد.

$$(m - ۱)\sin x + ۲m\cos x = ۵$$

حل:

$$(m - ۱)^۲ + ۴m^۲ \geq ۲۵ \Rightarrow ۵m^۲ - ۲m - ۲۴ \geq ۰$$

از حل این نامعادله به شرایط $m \geq \frac{۱۲}{۵}$ یا $m \leq -۲$ می‌رسیم.

معادلهٔ کلاسیک نوع دوم

هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a\tan x + b\cot x = c$ را یک معادلهٔ کلاسیک نوع دوم می‌نامند. برای حل این معادله قرار می‌دهیم $\cot x = \frac{۱}{\tan x}$ در این صورت خواهیم داشت:

$$a\tan x + \frac{b}{\tan x} = c \Rightarrow a\tan^۲ x - c\tan x + b = ۰$$

$$\tan x = \frac{c \pm \sqrt{c^۲ - ۴ab}}{۲a}$$

اگر α و φ زوایایی باشند که تانژانت آنها مساوی ریشه‌های معادله باشند خواهیم داشت:

MATH75.IR

$$\tan x = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha$$

$$\tan x = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} = \tan\varphi \Rightarrow x = k\pi + \varphi$$

معادلهٔ کلاسیک نوع دوم در صورتی جواب دارد که $c^2 - 4ab \geq 0$ باشد.

مثال ۸۲: معادله $\tan x - (\sqrt{2} - 1)\cot x = \sqrt{2} - 2$ را حل کنید. $(\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1)$

حل:

$$\tan x - (\sqrt{2} - 1) \times \frac{1}{\tan x} - (\sqrt{2} - 2) = 0$$

$$\tan^2 x - (\sqrt{2} - 2)\tan x - (\sqrt{2} - 1) = 0$$

$$\tan x = \frac{(\sqrt{2} - 2) \pm \sqrt{2 + 4 - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 4}}{2} = \frac{(\sqrt{2} - 2) \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\tan x = \sqrt{2} - 1 = \tan\frac{\pi}{8} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8}$$

$$\tan x = -1 = \tan(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

طریقهٔ دوم برای حل معادلهٔ $a\tan x + b\cot x = c$.

معادلهٔ فوق را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$a \cdot \frac{\sin x}{\cos x} + b \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = c$$

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x = c\sin x\cos x$$

$$a \times \frac{1 - \cos 2x}{2} + b \times \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2}c\sin 2x$$

$$a - a\cos 2x + b + b\cos 2x = c\sin 2x$$

$$c\sin 2x + (a - b)\cos 2x = a + b$$

این معادله یک معادلهٔ کلاسیک نوع اول است. برای حل آن کافی است دو طرف معادله را بر c تقسیم کرده و قرار داد کنیم: $\frac{a - b}{c} = \tan\varphi$.

مثال ۸۳: معادلهٔ مثلثاتی $(\sqrt{6} + 2)\tan x + (\sqrt{6} - 2)\cot x = 4$ را حل کنید.

MATH75.IR

حل:

$$(\sqrt{۶}+۲)\frac{\sin x}{\cos x}+(\sqrt{۶}-۲)\frac{\cos x}{\sin x}=۴$$

$$(\sqrt{۶}+۲)\sin^{۲}x+(\sqrt{۶}-۲)\cos^{۲}x=۴\sin x\cos x$$

$$(\sqrt{۶}+۲)\frac{۱-\cos ۲x}{۲}+(\sqrt{۶}-۲)\frac{۱+\cos ۲x}{۲}=۲\sin ۲x$$

$$۲\sin ۲x+۲\cos ۲x=\sqrt{۶}\Rightarrow \sin ۲x+\cos ۲x=\frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

$$\sin ۲x+\tan\frac{\pi}{۴}\cos ۲x=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\Rightarrow \sin ۲x\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}\cos ۲x=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$\sin(۲x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۶}}{۲}\cos\frac{\pi}{۴}\Rightarrow \sin(۲x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\begin{cases} ۲x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲۴} \\ ۲x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}\Rightarrow x=k\pi+\frac{۵\pi}{۲۴} \end{cases}$$

معادلهٔ کلاسیک نوع سوم

هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a\sin^{۲}x+b\cos^{۲}x+c\sin x\cos x=d$ را معادلهٔ کلاسیک نوع سوم می‌نامند.

برای حل معادله با فرض $\cos x\neq ۰$ دو طرف تساوی را بر $\cos^{۲}x$ تقسیم می‌کنیم

$$a\tan^{۲}x+b+c\tan x=\frac{d}{\cos^{۲}x}=d(۱+\tan x^{۲})$$

$$(a-d)\tan^{۲}x+c\tan x+(b-d)=۰$$

با حل این معادله $\tan x$ و از آنجا زاویهٔ x بدست می‌آید.

شرط وجود جواب برای معادلهٔ فوق آن است که:

$$c^{۲}-۴(a-d)(b-d)\geq ۰$$

اگر $\cos x=۰$ باشد آنگاه $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}$ جواب معادله است.

نکته: در معادلهٔ کلاسیک نوع سوم اگر $a=d$ باشد $\cos x$ برابر صفر می‌شود و برای حل معادله باید دو طرف معادله را بر $\sin^{۲}x$ تقسیم کنیم.

MATH75.IR

روش دوم حل معادلهٔ کلاسیک نوع سوم

$$a\sin^{۲}x + b\cos^{۲}x + c\sin x\cos x = d$$

$$a \times \frac{۱ - \cos ۲x}{۲} + b \times \frac{۱ + \cos ۲x}{۲} + \frac{۱}{۲} c\sin ۲x = d$$

$$c\sin ۲x + (b - a)\cos ۲x = ۲d - a - b$$

که این معادله کلاسیک نوع اول است.

مثال ۸۴: معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$۳\sin^{۲}x - \sqrt{۳}\cos^{۲}x - (۱ + \sqrt{۳})\sin x\cos x = ۲$$

حل: چون $a \neq d$، دو طرف معادله را بر $\cos^{۲}x$ تقسیم می‌کنیم.

$$۳\tan^{۲}x - \sqrt{۳} - (۱ + \sqrt{۳})\tan x = \frac{۲}{\cos^{۲}x} = ۲(۱ + \tan^{۲}x)$$

$$\tan^{۲}x - (۱ + \sqrt{۳})\tan x - (۲ + \sqrt{۳}) = ۰$$

$$\tan x = \frac{(۱ + \sqrt{۳}) \pm \sqrt{۱۲ + ۶\sqrt{۳}}}{۲} = \frac{(۱ + \sqrt{۳}) \pm \sqrt{(۳ + \sqrt{۳})^{۲}}}{۲}$$

$$\tan x = \frac{۱ + \sqrt{۳} + ۳ + \sqrt{۳}}{۲} = ۲ + \sqrt{۳} = \tan\frac{۵\pi}{۱۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲}$$

$$\tan x = \frac{۱ + \sqrt{۳} - ۳ - \sqrt{۳}}{۲} = -۱ = \tan(-\frac{\pi}{۴}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$$

مثال ۸۵: معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$۲\sin^{۲}x + ۳\cos^{۲}x - \sqrt{۳}\sin x\cos x = ۲$$

حل: چون $a = d$ پس در این معادله $\cos x = ۰$ و برای حل معادله دو طرف را بر $\sin^{۲}x$ تقسیم می‌کنیم. لذا:

$$۲ + ۳\cot^{۲}x - \sqrt{۳}\cot x = \frac{۲}{\sin^{۲}x} = ۲(۱ + \cot^{۲}x)$$

$$\cot^{۲}x - \sqrt{۳}\cot x = ۰ \Rightarrow \cot x(\cot x - \sqrt{۳}) = ۰$$

$$\cot x = ۰ = \cot\frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$\cot x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow \cot x = \sqrt{۳} = \cot\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

MATH75.IR

معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم

هر معادلهٔ مثلثاتی به صورت $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x = c$ به معادلهٔ کلاسیک نوع چهارم موسوم است. برای حل این معادله دو طریقه ذکر می‌کنیم:

الف) برای حل معادلهٔ $a(\sin x + \cos x) + b\sin x\cos x = c$ مجموع و حاصلضرب $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ به ترتیب زیر تعیین می‌کنیم

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2\sin\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\cos\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = \frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$= \frac{1}{2}[2\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - 1] = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}$$

اگر به جای $\sin x + \cos x$ و $\sin x\cos x$ مقدارهایشان را در معادله قرار دهیم خواهیم داشت:

$$a\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) + b\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{b}{2} = c$$

$$2b\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + 2a\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4}) - b - 2c = 0$$

از حل این معادله ابتدا $\cos(x - \frac{\pi}{4})$ و سپس اندازهٔ زاویهٔ x تعیین می‌شود.

ب) حل معادلهٔ $a(\sin x - \cos x) + b\sin x\cos x = c$

در این صورت تفاضل و حاصلضرب $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ به ترتیب زیر تعیین می‌کنیم.

$$\sin x - \cos x = \sin x - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = 2\cos\frac{\pi}{4}\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}[1 - 2\sin^2(x - \frac{\pi}{4})] = \frac{1}{2} - \sin^2(x - \frac{\pi}{4})$$

اگر به جای $\sin x - \cos x$ و $\sin x\cos x$ مقادیرشان را در معادله جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$2b\sin^2(x - \frac{\pi}{4}) - 2a\sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 2c - b = 0$$

از حل این معادله ابتدا $\sin(x - \frac{\pi}{4})$ سپس زاویهٔ x بدست می‌آید.

MATH75.IR

روش دیگر برای حل معادلهٔ $a(\sin x \pm \cos x) + b\sin x\cos x = c$ این است که فرض می‌کنیم $\sin x \pm \cos x = y$ و از آنجا خواهیم داشت:

$$(\sin x \pm \cos x)^2 = y^2 \Rightarrow 1 \pm 2\sin x\cos x = y^2 \Rightarrow \sin x\cos x = \pm\frac{y^2 - 1}{2}$$

اگر y را به جای $\sin x + \cos x$ و $\frac{y^2 - 1}{2}$ را به جای $\sin x\cos x$ قرار دهیم خواهیم داشت:

$$by^2 + 2ay - b - 2c = 0$$

که با حل این معادله y_1 و y_2 جوابهای معادله بدست می‌آید و از آنجا:

$$\sin x + \cos x = y_1 \quad \text{و} \quad \sin x + \cos x = y_2$$

این معادله‌ها کلاسیک نوع اول می‌باشند که با حل آنها زاویهٔ x تعیین می‌شود. باید توجه داشت که گاهی اوقات که جوابهای y_1 و y_2 را در رابطهٔ مفروض قرار می‌دهیم، ممکن است جواب خارجی پیدا شود.

مثال ۸۶: معادلهٔ $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 6\sin x\cos x = 5$ را حل کنید.

حل:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin x\cos x = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos(x - \frac{\pi}{4}) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$$

جواب دیگر معادله $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{4}{3}$ است که قابل قبول نیست.

مثال ۸۷: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 2\sqrt{2}$$

حل:

$$\sin x + \cos x = y \Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = y^2$$

$$\Rightarrow \sin x\cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$$

$$\sqrt{3}\,y + 2\sqrt{2}\left(\frac{y^2 - 1}{2}\right) = 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}\,y^2 + \sqrt{3}\,y - 3\sqrt{2} = 0$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{۶}}{۲} \text{ یا } y = -\sqrt{۶}$$

$$\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{۶}}{۲} \quad \Rightarrow \quad \sin x + \tan\frac{\pi}{۴}\cos x = \frac{\sqrt{۶}}{۲}$$

$$\sin x\cos\frac{\pi}{۴} + \cos x\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۶}}{۲}\cos\frac{\pi}{۴}$$

$$\sin(x + \frac{\pi}{۴}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳}$$

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \quad \Rightarrow \quad x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۱۲} \\ x + \frac{\pi}{۴} = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \quad \Rightarrow \quad x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۱۲} \end{cases}$$

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{۶} \quad \Rightarrow \quad \sin(x + \frac{\pi}{۴}) = -\frac{۲\sqrt{۳}}{۲}$$ غیرقابل قبول

نامساویها و ماکزیمم و مینیمم عبارات مثلثاتی

مثال ۸۸: اگر $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ باشد ثابت کنید $\tan\alpha + \cot\alpha \geq ۲$.

حل: در ناحیهٔ اول تانژانت مثبت است.

$$(\tan\alpha - ۱)^۲ \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad \tan^۲\alpha + ۱ - ۲\tan\alpha \geq ۰$$

$$\Rightarrow \quad \tan^۲\alpha + ۱ \geq ۲\tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \tan a + \frac{۱}{\tan a} \geq ۲$$

$$\Rightarrow \quad \tan\alpha + \cot\alpha \geq ۲$$

مثال ۸۹: اگر α و β زاویه‌های حاده باشند ثابت کنید $\sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{۱}{۲}$.

حل:

$$(\sin\alpha - \cos\alpha)^۲ \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha - ۲\sin\alpha\cos\alpha \geq ۰$$

$$\Rightarrow \quad ۱ - ۲\sin\alpha\cos\alpha \geq ۰ \quad \Rightarrow \quad ۲\sin\alpha\cos\alpha \leq ۱ \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{۱}{۲}$$

مثال ۹۰: اگر $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ باشد ثابت کنید:

$$۱ < \sin\alpha + \cos a \leq \sqrt{۲}$$

حل: با توجه به اینکه سینوس و کسینوس اعدادی حقیقی از بازهٔ $[-۱ , ۱]$ می‌باشند می‌توان گفت:

$$\left.\begin{array}{l} \sin^۲\alpha < \sin\alpha \\ \cos^۲\alpha < \cos\alpha \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha < \sin\alpha + \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad ۱ < \sin\alpha + \cos\alpha$$

$$\sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \quad ۲\sin\alpha\cos\alpha \leq ۱ \quad \Rightarrow \quad ۱ + ۲\sin\alpha\cos\alpha \leq ۲$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^{۲} \leq ۲ \Rightarrow \sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{۲}$$

لذا:

$$۱ < \sin\alpha + \cos\alpha \leq \sqrt{۲}$$

مثال ۹۱: اگر α و β زاویه‌های حاده باشند ثابت کنید:

$$۲ + \tan\alpha + \tan\beta < \frac{۲}{\cos\alpha} + \frac{۲}{\cos\beta}$$

حل:

$$\sin\alpha + \cos\alpha < ۲ \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + ۱ < \frac{۲}{\cos\alpha}$$

$$\sin\beta + \cos\beta < ۲ \Rightarrow \frac{\sin\beta}{\cos\beta} + ۱ < \frac{۲}{\cos\beta}$$

$$\tan\alpha + \tan\beta + ۲ < \frac{۲}{\cos\alpha} + \frac{۲}{\cos\beta}$$

نکته: بیشترین مقدار توانهای فرد sinax و cosax $(a \in R)$ برابر یک و کمترین مقدار آنها برابر منفی یک است.

$$\begin{cases} -۱ \leq \sin ax \leq ۱ \\ -۱ \leq \cos ax \leq ۱ \end{cases} \quad \underset{\Rightarrow}{n \in N} \quad \begin{cases} -۱ \leq \sin^{۲n-۱} ax \leq ۱ \\ -۱ \leq \cos^{۲n-۱} ax \leq ۱ \end{cases}$$

نکته: بیشترین مقدار توانهای زوج sinax و cosax$(a \in R)$ برابر یک و کمترین مقدار آنها برابر صفر است.

$$\begin{cases} -۱ \leq \sin ax \leq ۱ \\ -۱ \leq \cos ax \leq ۱ \end{cases} \quad \underset{\Rightarrow}{n \in N} \quad \begin{cases} ۰ \leq \sin^{۲n} ax \leq ۱ \\ ۰ \leq \cos^{۲n} ax \leq ۱ \end{cases}$$

مثال ۹۲: ماکزیمم و مینیمم عبارات زیر را بدست آورید.

$$A = \sin^{۵} \frac{x}{۴} \qquad B = \sin^{۴}(x - \pi)$$

حل:

$$\left| \begin{array}{l} \min A = -۱ \\ \max A = +۱ \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \min B = ۰ \\ \max B = ۱ \end{array} \right.$$

مثال ۹۳: بیشترین و کمترین مقدار عبارات زیر را تعیین کنید.

$$A = \sqrt{۳}\sin^{۴} x + ۱ \qquad B = -۶\cos^{۳} \frac{x}{۳} + ۶$$

MATH75.IR

حل:

$$\begin{cases} \sin^{۴}x = +۱ \Rightarrow A = \sqrt{۳} \times ۱ + ۱ = \sqrt{۳} + ۱ \\ \sin^{۴}x = ۰ \Rightarrow A = \sqrt{۳} \times ۰ + ۱ = ۱ \end{cases} \Rightarrow \min A = ۱ \ , \ \max A = \sqrt{۳} + ۱$$

$$\begin{cases} \cos\frac{x}{۳} = +۱ \Rightarrow B = -۶ \times (+۱)^{۳} + ۶ = ۰ \\ \cos\frac{x}{۳} = -۱ \Rightarrow B = -۶ \times (-۱)^{۳} + ۶ = ۱۲ \end{cases} \Rightarrow \min B = ۰ \ , \ \max B = ۱۲$$

مثال ۹۲: کمترین و بیشترین مقدار عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = \sin^{۲}x - ۳\sin x + ۵$$

حل:

$$A = \sin^{۲}x - ۳\sin x + \frac{۹}{۴} - \frac{۹}{۴} + ۵$$

$$= (\sin x - \frac{۳}{۲})^{۲} + \frac{۱۱}{۴}$$

عبارت $(\sin x - \frac{۳}{۲})^{۲}$ صفر نمی‌تواند باشد و کمترین مقدار آن زمانی است که $\sin x = ۱$ باشد.

$$\min A = (۱ - \frac{۳}{۲})^{۲} + \frac{۱۱}{۴} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱۱}{۴} = ۳$$

$$\max A = (-۱ - \frac{۳}{۲})^{۲} + \frac{۱۱}{۴} = \frac{۲۵}{۴} + \frac{۱۱}{۴} = ۹$$

مثال ۹۳: کمترین و بیشترین مقدار عبارت زیر را بدست آورید.

$$B = ۳\tan^{۲}x + ۲\tan x + ۷$$

حل:

$$B = ۳(\tan^{۲}x + \frac{۲}{۳}\tan x) + ۷$$

$$= ۳[\tan^{۲}x + \frac{۲}{۳}\tan x + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۹}] + ۷$$

$$= ۳(\tan x + \frac{۱}{۳})^{۲} + \frac{۲۰}{۳}$$

$\min B = \frac{۲۰}{۳}$ B ماکزیمم ندارد.

مثال ۹۴: بیشترین و کمترین مقدار عبارت زیر را بدست آورید.

$$A = a\sin x + b\cos x$$

حل: دو طرف را بر $\sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$ تقسیم می‌کنیم

MATH75.IR

$$\frac{A}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\cos x \qquad (۱)$$

اعداد $\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ و $\frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ کوچکتر از واحد و مجموع مربعاتشان برابر ۱ است. بنابراین یکی از این دو را $\cos\theta$ و دیگری را $\sin\theta$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{a}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \cos\theta \qquad \frac{b}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \sin\theta$$

بنابراین رابطهٔ (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{A}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \cos\theta\sin x + \sin\theta\cos x$$

$$A = \sqrt{a^۲+b^۲}\ \sin(x+\theta)$$

$$-۱ \le \sin(x+\theta) \le ۱ \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{a^۲+b^۲} \le \sqrt{a^۲+b^۲}\ \sin(x+\theta) \le \sqrt{a^۲+b^۲}$$

$$\min A = -\sqrt{a^۲+b^۲}$$

$$\max A = \sqrt{a^۲+b^۲}$$

مثال ۹۵: اگر $\hat{A}+\hat{B} = \frac{\pi}{۲}$ باشد ماکزیمم عبارت $\cos A + \cos B$ را حساب کنید.

حل: با توجه به اینکه مجموع $\hat{A}$ و $\hat{B}$ مقدار ثابتی است عبارت $\cos A + \cos B$ وقتی ماکزیمم است که $\hat{A} = \hat{B}$.

$$\hat{A} = \hat{B} = \frac{\pi}{۴}$$

$$\text{Max}(\cos A + \cos B) = \cos\frac{\pi}{۴} + \cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۲} = \sqrt{۲}$$

MATH75.IR

فرمولهای مثلثات

۱) $\sin^{۲}x + \cos^{۲}x = ۱$

۲) $\sin^{۲}nx + \cos^{۲}nx = ۱$

۳) $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

۴) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

۵) $\tan x \times \cot x = ۱$

۶) $\tan nx \times \cot nx = ۱$

۷) $۱ + \tan^{۲}x = \dfrac{۱}{\cos^{۲}x}$

۸) $۱ + \cot^{۲}x = \dfrac{۱}{\sin^{۲}x}$

۹) $\sin^{۴}x + \cos^{۴}x = ۱ - ۲\sin^{۲}x\cos^{۲}x$

۱۰) $\sin^{۶}x + \cos^{۶}x = ۱ - ۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x$

۱۱) $\csc x \,.\, \cos x = \cot x$

۱۲) $\sec x \times \sin x = ۱$

۱۳) $\sin^{۲}x = \dfrac{\tan^{۲}x}{۱ + \tan^{۲}x}$

۱۴) $\cos^{۲}x = \dfrac{\cot^{۲}x}{۱ + \cot^{۲}x}$

۱۵) $\tan x + \cot x = \dfrac{۱}{\sin x \cos x}$

۱۶) $\tan x + \cot x = \dfrac{۲}{\sin ۲x}$

۱۷) $\tan^{۲}x + \dfrac{۱}{\cos^{۲}y} = \tan^{۲}y + \dfrac{۱}{\cos^{۲}x}$

۱۸) $\dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \,.\, \tan y$

۱۹) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

۲۰) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

۲۱) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$

۲۲) $\sin(\dfrac{\pi}{۲} - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\dfrac{\pi}{۲} - \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(\dfrac{\pi}{۲} - \alpha) = \cot\alpha$

$\cot(\dfrac{\pi}{۲} - \alpha) = \tan\alpha$

MATH75.IR

۲۳) $\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$

$\tan(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\cot\alpha$

$\cot(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\tan\alpha$

۲۴) $\sin(۲k\pi + \alpha) = \sin\alpha$

$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲k\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(۲k\pi + \alpha) = \cot\alpha$

۲۵) $\sin(۲k\pi - \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(۲k\pi - \alpha) = \cos\alpha$

$\tan(۲k\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(۲k\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

۲۶) $\sin(k\pi + \alpha) = (-۱)^k\sin\alpha$

$\cos(k\pi + \alpha) = (-۱)^k\cos\alpha$

$\tan(k\pi + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(k\pi + \alpha) = \cot\alpha$

۲۷) $\sin(k\pi - \alpha) = (-۱)^{k+۱}\sin\alpha$

$\cos(k\pi - \alpha) = (-۱)^k\cos\alpha$

$\tan(k\pi - \alpha) = -\tan\alpha$

$\cot(k\pi - \alpha) = -\cot\alpha$

۲۸) $\sin(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = \sin\alpha$

$\tan(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\cot\alpha$

$\cot(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) = -\tan\alpha$

۲۹) $\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$

۳۰) $\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$

۳۱) $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{۱ - \tan a\tan b}$

۳۲) $\cot(a + b) = \frac{\cot a\cot b - ۱}{\cot a + \cot b}$

۳۳) $\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$

۳۴) $\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$

۳۵) $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{۱ + \tan a\tan b}$

MATH75.IR

۳۶) $\cot(a - b) = \dfrac{\cot a \cot b + ۱}{\cot b - \cot a}$

۳۷) $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^۲ a - \sin^۲ b$

۳۸) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^۲ a - \sin^۲ b$

۳۹) $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}\sin(x + \frac{\pi}{۴})$

۴۰) $\sin x - \cos x = \sqrt{۲}\sin(x - \frac{\pi}{۴})$

۴۱) $\cos x + \sin x = \sqrt{۲}\cos(x - \frac{\pi}{۴})$

۴۲) $\cos x - \sin x = \sqrt{۲}\cos(x + \frac{\pi}{۴})$

۴۳) $\sin ۲a = ۲\sin a \cos a$

۴۴) $\sin a = ۲\sin\frac{a}{۲}\cos\frac{a}{۲}$

۴۵) $\cos ۲a = \cos^۲ a - \sin^۲ a$

۴۶) $\cos ۲a = ۲\cos^۲ a - ۱$

۴۷) $\cos ۲a = ۱ - ۲\sin^۲ a$

۴۸) $\sin^۲ a = \dfrac{۱ - \cos ۲a}{۲}$

۴۹) $\cos^۴ a - \sin^۴ a = \cos ۲a$

۵۰) $\tan a + \cot a = \dfrac{۲}{\sin ۲a}$

۵۱) $\cos^۲ a = \dfrac{۱ + \cos ۲a}{۲}$

۵۲) $\tan ۲a = \dfrac{۲\tan a}{۱ - \tan^۲ a}$

MATH75.IR

۵۳) $\cot ۲a = \dfrac{\cot^۲ a - ۱}{۲\cot a}$

۵۴) $\tan a = \dfrac{۲\tan\frac{a}{۲}}{۱ - \tan^۲\frac{a}{۲}}$

۵۵) $\sin a = \dfrac{۲\tan\frac{a}{۲}}{۱ + \tan^۲\frac{a}{۲}}$

۵۶) $\cos a = \dfrac{۱ - \tan^۲\frac{a}{۲}}{۱ + \tan^۲\frac{a}{۲}}$

۵۷) $\tan^۲ a = \dfrac{۱ - \cos ۲a}{۱ + \cos ۲a}$

۵۸) $\cot^۲ a = \dfrac{۱ + \cos ۲a}{۱ - \cos ۲a}$

۵۹) $\sin ۳x = ۳\sin x - ۴\sin^۳ x$

۶۰) $\cos ۳x = ۴\cos^۳ x - ۳\cos x$

۶۱) $\tan ۳x = \dfrac{۳\tan x - \tan^۳ x}{۱ - ۳\tan^۲ x}$

۶۲) $\cot ۳x = \dfrac{\cot^۳ x - ۳\cot x}{۳\cot^۲ x - ۱}$

۶۳) $\cot a - \tan a = ۲\cot ۲a$

۶۴) $۴\sin x \sin(\frac{\pi}{۳} - x) \sin(\frac{\pi}{۳} + x) = \sin ۳x$

۶۵) $۴\cos x \cos(\frac{\pi}{۳} - x) \cos(\frac{\pi}{۳} + x) = \cos ۳x$

۶۶) $\tan x \tan(\frac{\pi}{۳} - x) \tan(\frac{\pi}{۳} + x) = \tan ۳x$

۶۷) $\cot x \cot(\frac{\pi}{۳} - x) \cot(\frac{\pi}{۳} + x) = \cot ۳x$

۶۸) $\tan a = \dfrac{\sin ۲a}{۱ + \cos ۲a} = \dfrac{۱ - \cos ۲a}{\sin ۲a}$

۶۹) $\tan\frac{a}{۲} = \dfrac{\sin a}{۱ + \cos a} = \dfrac{۱ - \cos a}{\sin a}$

MATH75.IR

۷۰) $\cot a = \frac{\sin ۲a}{۱ - \cos ۲a} = \frac{۱ + \cos ۲a}{\sin ۲a}$

۷۱) $\cot\frac{a}{۲} = \frac{\sin a}{۱ - \cos a} = \frac{۱ + \cos a}{\sin a}$

۷۲) $\sin^۴ x + \cos^۴ x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^۲ ۲a$

۷۳) $\sin^۶ x + \cos^۶ x = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^۲ ۲a$

۷۴) $\frac{۱ + \tan x}{۱ - \tan x} = \tan(\frac{\pi}{۴} + x)$

۷۵) $\frac{۱ - \tan x}{۱ + \tan x} = \tan(\frac{\pi}{۴} - x)$

۷۶) $\frac{۱ - \sin ۲x}{۱ + \sin ۲x} = \tan^۲(\frac{\pi}{۴} - x)$

۷۷) $\tan a + \tan(a \pm ۶۰) + \tan(a \pm ۱۲۰) = ۳\tan ۳a$

۷۸) $\cot a + \cot(a \pm ۶۰) + \cot(a \pm ۱۲۰) = ۳\cot ۳a$

۷۹) $\mathrm{Arcsin}(-x) = -\mathrm{Arcsin}x$

۸۰) $\mathrm{Arccos}(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}x$

۸۱) $\mathrm{Arctan}(-x) = -\mathrm{Arctan}x$

۸۲) $\mathrm{Arccot}(-x) = \pi - \mathrm{Arccot}x$

۸۳) $\mathrm{Arcsin}(\sin x) = \sin(\mathrm{Arcsin}x) = x \qquad (-۱ \le x \le ۱)$

۸۴) $\mathrm{Arccos}(\cos x) = \cos(\mathrm{Arccos}x) = x \qquad (۰ \le x \le ۱)$

۸۵) $\mathrm{Arctan}(\tan x) = \tan(\mathrm{Arctan}x) = x \qquad (-\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲})$

۸۶) $\mathrm{Arccot}(\cot x) = \cot(\mathrm{Arccot}x) = x \qquad (۰ < x < \pi)$

۸۷) $\mathrm{Arcsin}x + \mathrm{Arccos}x = \frac{\pi}{۲} \qquad (-۱ \le x \le ۱)$

۸۸) $\mathrm{Arctan}x + \mathrm{Arccot}x = \frac{\pi}{۲} \qquad (x \in R)$

MATH75.IR

۸۹) $\text{Arcsin}(\cos x) = \frac{\pi}{۲} - x \qquad (-۱ \leq x \leq ۱)$

۹۰) $\text{Arccos}(\sin x) = \frac{\pi}{۲} - x \qquad (-۱ \leq x \leq ۱)$

۹۱) $\text{Arctan}(\cot x) = \frac{\pi}{۲} - x \qquad (x \in R)$

۹۲) $\text{Arccot}(\tan x) = \frac{\pi}{۲} - x \qquad (x \in R)$

۹۳) $\text{Arccot}\frac{۱}{x} = \pi + \text{Arc tan}\, x \qquad (x < ۰)$

۹۴) $\text{Arctan}\, x = \text{Arccot}\, x \qquad (x > ۰)$

۹۵) $\sin a + \sin b = ۲\sin\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}$

۹۶) $\sin a - \sin b = ۲\cos\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a-b}{۲}$

۹۷) $\cos a + \cos b = ۲\cos\frac{a+b}{۲}\cos\frac{a-b}{۲}$

۹۸) $\cos a - \cos b = -۲\sin\frac{a+b}{۲}\sin\frac{a-b}{۲}$

۹۹) $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$

۱۰۰) $\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$

۱۰۱) $\cot a + \cot b = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$

۱۰۲) $\cot a - \cot b = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}$

۱۰۳) $\sin a \,.\, \cos b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

۱۰۴) $\cos a \,.\, \sin b = \frac{۱}{۲}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$

۱۰۵) $\cos a \,.\, \cos b = \frac{۱}{۲}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

۱۰۶) $\sin a \,.\, \sin b = \frac{۱}{۲}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

MATH75.IR

تمرینهای فصل هفتم

۱ـ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۲\sin x + ۱$

ب) $y = \sin ۲x$

ج) $y = |\sin x|$

د) $y = ۴\tan x$

هـ) $y = |\cos x - ۱|$

و) $y = |\cot x|$

ز) $y = \cos(x - \frac{\pi}{۳})$

ح) $y \quad [\sin x]$

۲ـ دامنهٔ توابع زیر را تعیین کنید.

الف) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

ب) $y = \frac{۵}{\sqrt{۱۲ - ۶\sin x}}$

ج) $y = \sqrt{\sin^۲ x - [\sin x]}$

د) $y = \sqrt{۱ + \tan^۲ x}$

هـ) $y = \log \sin x$

و) $y = \text{Arc}\cos\frac{۱}{x^۲ - ۱}$

ز) $y = \text{Arccos}\log x$

ح) $\text{Arcsin}x + \text{Arctan}x$

ط) $y = ۲\text{Arcsin}\frac{۲x - ۱}{۵}$

ی) $y = \text{Arcsin}\left(\frac{|x|}{|x| + ۱}\right)$

۳ـ آیا دو تابع $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \cot x$ مساویند؟ چرا؟

۴ـ دامنه و برد توابع زیر را بدست آورید.

الف) $y = \cos^۲ x - ۲\cos x + ۳$

ب) $y = \sin^۴ x - ۴\sin^۲ x$

ج) $y = \cos^۲ x + ۳\sin x + ۲$

د) $y = \tan^۲ x + ۴\tan x + ۵$

هـ) $y = \frac{۲\sin x + ۳}{\sin x + ۲}$

و) $y = \tan\sqrt{\frac{x - ۱}{۱ - x}}$

ز) $y = \text{Arccos}۵x$

ح) $y = \sqrt{x - |x|} + \sqrt{x - \sin x}$

MATH75.IR

ط) $y = ۳\sin x + ۴\cos x$ ی) $y = \sin^{۱۰۰}x + \cos^{۲۰۰}x$

ک) $y = [\tan x + \cot x]$ ل) $y = |۲\sin x - ۱|$

۵ـ اگر $f(x) = \sqrt{۱ + ۲\sqrt{x(۱ - x)}}$ آنگاه حاصل $f(\cos^{۲}x)$ را حساب کنید. $(۰ \le x < ۲\pi)$

۶ـ اگر $f(x) = x^{۲} - ۲$ مقدار $f(f(f(۲\cos x)))$ چیست؟

۷ـ تابع $f: [۰ , \pi] \longrightarrow [-۱ , ۱]$، با ضابطهٔ $f(x) = \sin^{۴}\frac{x}{۲} - \cos^{۴}\frac{x}{۲}$ مفروض است. یک به یک و پوششی بودن تابع را بررسی کنید.

۸ـ از رابطهٔ $f(x)\sin x + f(-x)\cos x = x$ تابع $f(x)$ را حساب کنید.

۹ـ ثابت کنید اگر f تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}\frac{x}{۲} + \operatorname{Arctan}\frac{x}{۳}}{\operatorname{Arccot}\frac{x}{۲} + \operatorname{Arccot}\frac{x}{۳}}$ باشد، آنگاه $f(۱) = \frac{۱}{۳}$.

۱۰ـ وارون تابع $y = \sin x - ۲$ را بدست آورید.

۱۱ـ اگر $f(\frac{۱}{x}) = \sqrt[۸]{\frac{۲x - ۱}{x^{۲}}}$ و $g(x) = ۲\cos^{۲}x$ مقدار $f(g(\frac{\pi}{۳}))$ را حساب کنید.

۱۲ـ اگر $f(x) = \operatorname{Arccos}(\log x)$ و $g(x) = \frac{۱}{x}$ باشد مقدار $f(g(۱۰))$ را حساب کنید.

۱۳ـ اگر $f(x) = [x]$ و $g(x) = \sin x$ باشد نمودار توابع fog و gof را در فاصلهٔ $[-۲\pi , \pi)$ رسم کنید.

۱۴ـ ضابطهٔ تابع معکوس تابع $y = \sin(\cos x)$ را تعیین کنید.

۱۵ـ اگر $f(x) = \sin x + \cos x$ و $g(x) = x^{۲} - x$، مطلوبست fog و gof.

۱۶ـ تحقیق کنید تابع زیر یک به یک هست یا خیر؟ ($S_۱$ دایره‌ای است به مرکز مبدا و شعاع واحد)

$$\begin{cases} f : [۰ , ۱] \longrightarrow S_۱ \\ f(x) = (\cos ۲/۶x , \sin ۲/۶x) \end{cases}$$

۱۷ـ مقدار عددی عبارت زیر را حساب کنید.

$$A = \frac{۲\sin\frac{۴۹\pi}{۱۰} - \sin\frac{۷\pi}{۵} + \sin\frac{۱۸\pi}{۵} - ۲\cos\frac{۳\pi}{۵}}{\cos(\frac{-۳\pi}{۵}) + ۲\cos\frac{۱۳\pi}{۵} - \sin\frac{۱۹\pi}{۱۰}}$$

MATH75.IR

۱۸ـ در مثلث ABC، $\hat{A} = ۱۲۰^\circ$، ثابت کنید $\tan ۳B + \tan ۳C = ۰$.

۱۹ـ ثابت کنید:

الف) $\sin^۲x - \sin^۲y = \sin(x + y)\sin(x - y)$

ب) $\cos^۲x - \cos^۲y = -\sin(x + y)\sin(x - y)$

ج) $\cos^۲x - \sin^۲y = \cos(x + y)\cos(x - y)$

۲۰ـ حاصل عبارات زیر را حساب کنید.

الف) $\sin\frac{۸۹\pi}{۶}$

ب) $\cot\frac{۵۱\pi}{۴}$

ج) $\tan\frac{۶۷\pi}{۶}$

د) $\cot\frac{۱۴\pi}{۳}$

هـ) $\sin\frac{۱۰\pi}{۶}$

و) $\cot ۱۱۵^\circ \times \cot ۱۵۵^\circ$

۲۱ـ درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x + \tan\alpha\cos x = \frac{۱}{\cos\alpha}\sin(\alpha + x)$

ب) $\cos x + \tan\alpha\sin x = \frac{۱}{\cos\alpha}\cos(\alpha - x)$

ج) $a\sin x + b\cos x = \frac{a}{\cos\alpha}\sin(\alpha + x) \qquad (\tan\alpha = \frac{b}{a})$

۲۲ـ اگر a و b با هم صفر نباشند ثابت کنید:

$$a\sin t + b\cos t = \sqrt{a^۲ + b^۲}\sin(t + \alpha)$$

(α زاویه‌ای است که $\tan\alpha = \frac{b}{a}$)

۲۳ـ اگر مثلث ABC قائم الزاویه باشد ثابت کنید:

$$\sin^۲A + \sin^۲B + \sin^۲C = ۲$$

۲۴ـ اگر $\tan(\alpha + \beta) = ۳$ و $\tan(\alpha - \beta) = ۲$ باشد، $\tan ۲\alpha$ و $\tan ۲\beta$ را حساب کنید.

۲۵ـ اگر $\alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ باشد، حاصل $(۱ + \tan\alpha)(۱ + \tan\beta)$ را بدست آورید.

۲۶ـ ثابت کنید:

$$\cos x\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۴}\cos\frac{x}{۸} = \frac{\sin ۲x}{\cos\frac{x}{۸}}$$

MATH75.IR

۲۷ـ ثابت کنید:

$$\sin^{۴}\frac{\pi}{۸} + \sin^{۴}\frac{۳\pi}{۸} + \sin^{۴}\frac{۵\pi}{۸} + \sin^{۴}\frac{۷\pi}{۸} = \frac{۳}{۲}$$

۲۸ـ ثابت کنید:

الف) $\sin^{۴}x + \cos^{۴}x = ۱ - \frac{۱}{۲}\sin^{۲}۲x$

ب) $\sin^{۶}x + \cos^{۶}x = ۱ - \frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x$

۲۹ـ ثابت کنید:

$$\frac{۱ + \cos x + \cos ۲x}{\sin x + \sin ۲x} = \cot x$$

۳۰ـ ثابت کنید:

$$\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴} + x) - \sin^{۲}(\frac{\pi}{۴} - x) = \sin ۲x$$

۳۱ـ ثابت کنید:

$$\tan(۳۰ + \frac{x}{۲})\tan(۳۰ - \frac{x}{۲}) = \frac{۲\cos x - ۱}{۲\cos x + ۱}$$

۳۲ـ ثابت کنید:

$$\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\cos ۲x}}} = \cos\frac{x}{۴}$$

۳۳ـ درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید:

الف) $۱ + \sin x = \left(\sin\frac{x}{۲} + \cos\frac{x}{۲}\right)^{۲}$

ب) $۱ - \sin x = \left(\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲}\right)^{۲}$

ج) $۱ - \cos x = ۲\sin^{۲}\frac{x}{۲}$

د) $۱ + \cos x = ۲\cos^{۲}\frac{x}{۲}$

هـ) $\tan\frac{x}{۲} = \frac{\sin x}{۱ + \cos x}$

و) $\tan\frac{x}{۲} = \frac{۱ - \cos x}{\sin x}$

ز) $\tan^{۲}(\frac{\pi}{۴} - x) = \frac{۱ - \sin ۲x}{۱ + \sin ۲x}$

ح) $\cot x + \tan x = \frac{۲}{\sin ۲x}$

ط) $\cot x - \tan x = ۲\cot ۲x$

MATH75.IR

۳۴ـ نشان دهید:

$$۶۴\sin ۱۰^\circ \sin ۲۰^\circ \sin ۳۰^\circ \sin ۴۰^\circ \ \dots \ \sin ۹۰^\circ = \frac{۳}{۴}$$

۳۵ـ ثابت کنید:

$$\frac{\tan(x + \frac{۷\pi}{۲}) + \sin(۷\pi - x) + ۳\cos(x - \frac{۱۱\pi}{۲}) + \cot(x - ۸\pi)}{\cot(x - \frac{۵\pi}{۲}) + \sin(\frac{۷\pi}{۲} + x) + ۳\cos(x - ۱۲\pi) + \tan(x - ۷\pi)} = -\tan x$$

۳۶ـ ثابت کنید:

الف) $\sin\frac{\pi}{k} + \sin\frac{۲\pi}{k} + \dots + \sin\frac{۲k - ۱}{k}\pi = ۰ \quad (k \in N)$

ب) $\tan(\frac{۱}{k}\ ۲\pi) + \tan(\frac{۲}{k}\ ۲\pi) + \dots + \tan(\frac{k - ۱}{k}\ ۲\pi) = ۰$

۳۷ـ اگر A و B و C زاویه‌های یک مثلث باشند نشان دهید:

الف) $\tan\frac{۳B}{۲} = \cot\frac{۳A + ۳C}{۲}$

ب) $\sin(A + \frac{B}{۲}) = \cos\frac{C - A}{۲}$

۳۸ـ در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه است. ثابت کنید:

الف) $\frac{\sin B + \cos B}{\sin C + \text{cocC}} = \tan\frac{A}{۲}$

ب) $\sin A \sin B \sin(A - B) + \sin B \sin C \sin(B - C) + \sin C \sin A \sin(C - A) +$

$\sin(A - B)\sin(B - C)\sin(C - A) = ۰$

۳۹ـ اگر $-\frac{\pi}{۳} < x < \frac{\pi}{۳}$ حدود m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\cos x = \frac{۲m + ۱}{۲m - ۱}$$

۴۰ـ درستی تساویهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\cos(\frac{\pi}{۴} - x)\cos(\frac{\pi}{۴} + x) - \sin(\frac{\pi}{۴} - x)\sin(\frac{\pi}{۴} + x) = ۰$

ب) $\sin^۲ a + \sin^۲ b + \cos^۲(a + b) = ۱ - ۲\cos(a + b)\sin a \sin b$

۴۱ـ بیشترین و کمترین مقدار هر یک از عبارات زیر را بدست آورید.

MATH75.IR

الف) $\sin x + \cos x$ ب) $\sin^4 x + \cos^4 x$

ج) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x$ د) $\sin^6 x + \cos^6 x$

۴۲ـ اگر $x + y + z = k\pi$ ثابت کنید:

$$\cot x\cot y + \cot y\cot z + \cot z\cot x = 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۴۳ـ اگر $x + y + z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ ثابت کنید:

الف) $\cot x + \cot y + \cot z = \cot x\cot y\cot z$

ب) $\tan x\tan y + \tan y\tan z + \tan z\tan x = 1$

۴۴ـ اگر $x + y = a$ و $\tan x + \tan y = \tan b$ و $\cot x + \cot y = \cot c$ نشان دهید $\tan a . \tan b . \tan c = \tan a - \tan b$.

۴۵ـ اگر A و B و C سه زاویهٔ یک مثلث باشند و $\cot A + \cot B + \cot C = 2$ ثابت کنید:

$$1 + \cos A\cos B\cos C = 2\sin A\sin B\sin C$$

۴۶ـ اگر $3\sin(2x + y) = 7\sin y$ ثابت کنید $2\tan(x + y) = 5\tan x$.

۴۷ـ از رابطهٔ $\tan x = \tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{\pi}{18} + \tan\frac{\pi}{9}\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{18}$ مقدار x را تعیین کنید.

۴۸ـ درستی تساویهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

ب) $\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\tan 2x} = \tan x$

ج) $\cot(\frac{\pi}{4} - x) - \cot(\frac{\pi}{4} + x) = 2\tan 2x$

د) $\cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) - \cos 2a\cos 2b = 1$

ه) $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x\tan x$

و) $\frac{2\tan(\frac{\pi}{4} - a)}{1 - \tan^2(\frac{\pi}{4} - a)} = \cot 2a$

ز) $\frac{1 - \cot^2(\frac{\pi}{4} + a)}{1 + \cot^2(\frac{\pi}{4} + a)} = \sin 2a$

MATH75.IR

ح) $3\sin x\cos 3x + \sin 3x\cos x = 2\sin 4x - \sin 2x$

ط) $\dfrac{\tan^2 2x}{2 + \tan^2 2x} = \dfrac{2\tan^2 x}{1 + \tan^4 x}$

ی) $\tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 70^\circ = \sqrt{3}$

ک) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \dfrac{1}{8}$

ل) $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 100^\circ = -\sqrt{3}$

م) $\tan 3a \tan a = \dfrac{\tan^2 2a - \tan^2 a}{1 - \tan^2 a \tan^2 2a}$

ن) $\sin 5x = 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x$

س) $\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

۴۹ـ در هر یک از عبارات زیر رابطه‌ای مستقل از θ بدست آورید.

الف) $\begin{cases} x = 3\cos\theta + \cos 3\theta \\ y = 3\sin\theta - \sin 3\theta \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x = \tan\theta + \tan 2\theta \\ y = \cot\theta + \cot 2\theta \end{cases}$

۵۰ـ اولاً رابطهٔ $\tan a + 2\cot 2a = \cot a$ را ثابت کنید. ثانیاً: از تساوی زیر مقدار x را بدست آورید.

$\cot x = \tan 20^\circ + 2\tan 40^\circ + 4\cot 80^\circ$

۵۱ـ مقدار x را از رابطهٔ $\sin x = \tan 12^\circ \tan 48^\circ \tan 54^\circ \tan 72^\circ$ بدست آورید.

۵۲ـ اگر $\sin x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$ و x زاویه‌ای حاده باشد مطلوبست محاسبهٔ $\tan(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2})$.

۵۳ـ اگر $\cos\alpha = \dfrac{x}{y + z}$ و $\cos\beta = \dfrac{y}{z + x}$ و $\cos\gamma = \dfrac{z}{x + y}$ ثابت کنید:

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} + \tan^2\frac{\beta}{2} + \tan^2\frac{\gamma}{2} = 1$$

۵۴ـ اگر $(1 + a\cos\alpha)(1 - a\cos\beta) = 1 - a^2$ باشد و $(a \neq 0, -1)$ ثابت کنید:

$$\frac{1 - a}{1 + a} = \frac{\tan^2\frac{\beta}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

MATH75.IR

۵۵ـ اگر $2\cos x = a + \frac{1}{a}$ ، ثابت کنید $2\cos 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}$.

۵۶ـ از رابطهٔ $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$ نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های 18° و 36° را حساب کنید.

۵۷ـ درستی تساویهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\text{Arcsin}m + \text{Arccos}m = \frac{\pi}{2} \quad (|m| \le 1)$

ب) $\text{Arctan}\frac{2m}{1-m^2} + \text{Arccot}\frac{2m}{1-m^2} = \frac{\pi}{2} \quad (m \ne \pm 1)$

ج) $\text{Arctan}(\sqrt{2}-1) + \text{Arctan}(\sqrt{2}+1) = \frac{\pi}{2}$

د) $\text{Arcsin}\frac{2x}{1+x^2} + \text{Arcsin}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$

ه) $\text{Arccot}m - \text{Arctan}(-m) = \frac{\pi}{2}$

و) $\text{Arcsin}x = \begin{cases} \text{Arccos}\sqrt{1-x^2} & (0 \le x \le 1) \\ -\text{Arccos}\sqrt{1-x^2} & (-1 \le x < 0) \end{cases}$

ز) $\text{Arccos}x = \begin{cases} \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} & (0 \le x \le 1) \\ \pi - \text{Arcsin}\sqrt{1-x^2} & (-1 \le x \le 0) \end{cases}$

ح) $\text{Arctan}x = \begin{cases} \text{Arccos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \ge 0) \\ -\text{Arccos}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & (x \le 0) \end{cases}$

ط) $\text{Arccos}x = \begin{cases} \text{Arctan}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (0 < x \le 1) \\ \pi + \text{Arctan}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} & (-1 \le x < 0) \end{cases}$

ی) $\text{Arctan}x = \begin{cases} \text{Arccot}\frac{1}{x} & (x > 0) \\ \text{Arccot}\frac{1}{x} - \pi & (x < 0) \end{cases}$

MATH75.IR

ک) $\text{Arccot}x = \begin{cases} \text{Arctan}\frac{۱}{x} & (x > ۰) \\ \pi + \text{Arctan}\frac{۱}{x} & (x < ۰) \end{cases}$

ل) $۲\text{Arccot}\frac{۱}{۲} + \text{Arccot}\frac{۱۳}{۹} = \text{Arccot}(-۳)$

م) $۳\text{Arctan}\frac{۱}{۲} + ۲\text{Arctan}\frac{۱}{۳} = \pi + \text{Arctan}(-۲)$

۵۸ـ اگر $\text{Arctan}x + \text{Arctan}y + \text{Arctan}z = \pi$ ثابت کنید:

$x + y + z = xyz$

۵۹ـ درستی اتحادهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{۱ - \tan^۲(۴۵ - \varphi)}{۱ + \tan^۲(۴۵ - \varphi)} = \sin ۲\varphi$

ب) $\tan\alpha \,.\, \tan ۲\alpha \,.\, \tan ۳\alpha = \tan ۳\alpha - \tan ۲\alpha - \tan\alpha$

ج) $\sin ۳a \sin^۳ a + \cos ۳a \cos^۳ a = \cos^۳ ۲a$

د) $\cos\frac{x}{۲} \cos\frac{x}{۴} \cos\frac{x}{۶} \ldots \cos\frac{x}{۲^n} = \frac{\sin x}{۲^n \sin\frac{x}{۲^n}}$

هـ) $\tan^۲\alpha + \sec^۲\beta = \tan^۲\beta + \sec^۲\alpha$

۶۰ـ ثابت کنید اگر $\alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ آنگاه:

$(۱ + \tan\alpha)(۱ + \tan\beta) = ۲$

۶۱ـ از دستگاه $\begin{cases} a\sin x + b\cos x = ۲c \\ b\sin x - a\cos x = c \end{cases}$ رابطهٔ $a^۲ + b^۲ = ۵c^۲$ را نتیجه بگیرید.

۶۲ـ اگر $۲\tan\alpha = ۳\tan\beta$ ثابت کنید:

$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\sin ۲\beta}{۵ - \cos ۲\beta}$

۶۳ـ اگر $\tan(\alpha + \beta) = m\tan(\alpha - \beta)$ ثابت کنید:

$\frac{\sin ۲\beta}{\sin ۲\alpha} = \frac{m - ۱}{m + ۱}$

۶۴ـ ثابت کنید عبارات زیر مربع کامل هستند.

الف) $۲(۱ + \cos x)(۱ + \sin x)$ ب) $(۱ + \tan A)^۲ + (۱ + \cot A)^۲ \quad (A \neq \frac{k\pi}{۲})$

۶۵ـ اگر $\tan A + \sin A = m$ و $\tan A - \sin A = n$ ثابت کنید:

$m^۲ - n^۲ = ۴\sqrt{mn}$ (A حاده است)

MATH75.IR

۶۶ـ ثابت کنید اگر $\tan x \tan(x+y) = ۳$ آنگاه $۲\cos(۲x+y) + \cos y = ۰$.

۶۷ـ اگر $\sin^۲ a = \sin^۲ b + \sin^۲ c$ ثابت کنید:

$$۱ + \cos ۲a = \cos ۲b + \cos ۲c$$

۶۸ـ اگر $\sin^۲ b = \sin a \cos a$ ثابت کنید:

$$\cos ۲b = ۲\cos^۲(۴۵^\circ + a)$$

۶۹ـ ثابت کنید:

الف) $\tan(a+b+c) = \dfrac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \,.\, \tan b \,.\, \tan c}{۱ - \tan a \,.\, \tan b - \tan b \,.\, \tan c - \tan c \,.\, \tan a}$

ب) $\cot(a+b+c) = \dfrac{\cot a \,.\, \cot b \,.\, \cot c - \cot a - \cot b - \cot c}{\cot a \,.\, \cot b + \cot b \,.\, \cot c + \cot c \,.\, \cot a - ۱}$

۷۰ـ اگر $\sin x = \dfrac{۲m - ۱}{m + ۱}$ و $m \neq -۱$ باشد حدود m را پیدا کنید.

۷۱ـ اگر $-\dfrac{\pi}{۴} < x < \dfrac{\pi}{۳}$ حدود $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ و $\cot x$ را تعیین کنید.

۷۲ـ اگر $\dfrac{۲\pi}{۳} < x < \dfrac{۵\pi}{۴}$ و $\cos x = ۲m - ۱$ حدود m را بدست آورید.

۷۳ـ از رابطهٔ $۳\sin\varphi + ۵\cos\varphi = ۵$ مقادیر $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ را بدست آورید.

۷۴ـ اگر $\dfrac{\pi}{۶} \leq x \leq \dfrac{۲\pi}{۳}$ و $\sin x = \dfrac{۲m - ۱}{m + ۱}$ باشد حدود m را تعیین کنید.

۷۵ـ اگر $\dfrac{\pi}{۴} < x < \dfrac{۳\pi}{۴}$ و $x \neq \dfrac{\pi}{۲}$ و $\tan x = ۳m - ۵$ حدود m را تعیین کنید.

۷۶ـ اگر $\tan\alpha = \dfrac{۳m - ۱}{m + ۲}$ و $\tan\beta = \dfrac{m - ۴}{m + ۱}$ و α و β مکمل یکدیگر باشند، مقدار m را تعیین کنید.

۷۷ـ اگر $\sin^۳\varphi + \cos^۳\varphi = ۱$ مقدار $\sin^۹\varphi + \cos^۹\varphi$ را حساب کنید.

۷۸ـ ثابت کنید:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\frac{۱}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{۲} & (x > ۰) \\ -\dfrac{\pi}{۲} & (x < ۰) \end{cases}$$

۷۹ـ ثابت کنید:

$$\operatorname{Arccot} x + \operatorname{Arccot}\frac{۱}{x} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{۲} & (x > ۰) \\ \dfrac{۳\pi}{۲} & (x < ۰) \end{cases}$$

MATH75.IR

۸۰ـ ماکزیمم و مینیمم عبارات زیر را تعیین کنید.

$A = ۳\sin x + ۴\cos x - ۱$

$B = \sin^۲ x - \sin x + ۱$

$C = \dfrac{-۲}{۳ + \cos ۲x}$

$D = \sin^۲ x + ۴\cos x$

$E = \dfrac{\sin x}{۲\sin x + ۱}$

۸۱ـ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $۲\cos^۲ x = \sin x - ۱$

ب) $\sin(x - \frac{۲\pi}{۳}) = \cos ۲x$

ج) $۲\sin^۲(x - \frac{\pi}{۴}) + ۳\sin(x + \frac{\pi}{۴}) - ۳ = ۰$

د) $\sin x + \cos x = ۱ + ۲\sin x\cos x$

هـ) $\tan(۱ + \frac{x}{۲})\tan(۱ - \frac{x}{۳}) = ۱$

و) $\sin x + \sqrt{۳}\cos x = ۱$

ز) $\cos(x + \frac{\pi}{۶})\cos(x - \frac{\pi}{۶}) = \frac{۱}{۴}$

ح) $\sin(x + \frac{\pi}{۶}) - \cos(x + \frac{\pi}{۳}) + \sqrt{۳}(\cos^۲ x - \sin^۲ x) = ۰$

ط) $\cos(x + \frac{\pi}{۵})\cos(x - \frac{\pi}{۵}) = \cos^۲ x - \cos^۲ ۲x$

ی) $\sin ۲x = \tan x$

ک) $\cot x - \tan x = ۲\tan\frac{x}{۲}$

ل) $\cos x - \sin x = \sqrt{۲}\cos ۲x$

م) $۱ - \cos ۲x = \sin ۲x$

ن) $\cos^۲(۱۲۰ + x) + \cos^۲(۱۲۰ - x) = \frac{۵}{۴}$

س) $\mathrm{Arctan}\,\frac{۲x}{۱ - x^۲} + ۳\mathrm{Arccos}\frac{۱}{\sqrt{۲}} = ۳\mathrm{Arcsin}\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

MATH75.IR

ع) $\text{Arcsin}(۳ - \frac{x}{۲}) - \text{Arcsin}x = \text{Arccos}x$

ف) $\text{Arctan}\frac{x - ۱}{x - ۲} + \text{Arctan}\frac{x + ۱}{x + ۲} = \frac{\pi}{۴}$

ص) $\text{Arctan}۲x + \text{Arctan}۳x = \frac{۳\pi}{۴}$

ق) $\sin ۲x + \cos^۲ x = ۰$

ر) $\cos ۳x = ۴\cos^۲ x$

ش) $\sin x + \cos x + \tan x - \frac{۱}{\cos x} = ۰$

ت) $\tan ۳x = \tan x + \tan ۲x$

ث) $\sin^۴ x + \sin^۴(\frac{\pi}{۴} + x) = \frac{۱}{۴}$

خ) $\sin ۵x = ۵\sin x$

ذ) $\cos x + \cos ۲x + \cos ۳x = ۰$

ض) $\text{Arctan}x + \text{Arctan}(۱ - x) = ۲\text{Arctan}\sqrt{x - x^۲}$

ظ) $۳\text{Arctan}(x - ۱) + \text{Arctan}(x + ۱) = \frac{۳\pi}{۴}$

غ) $\sin ۲x = \cos^۴\frac{x}{۲} - \sin^۴\frac{x}{۲}$

۸۲ـ معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

الف) $\sin x + \cos x = \sqrt{۲}\cos ۵x$

ب) $۲|\sin x| \cos x - ۱ = \cos ۴x$

ج) $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۵}{۸}$

د) $\tan x + \cot ۲x = ۲\cot ۴x$

هـ) $\sqrt{۱ + \sin x} + \cos x = ۰$

و) $\tan x - \sin x = ۱ - \tan x \,.\, \sin x$

ز) $\sin^۴ x + \cos^۴ x = \frac{۷}{۲}\sin x\cos x$

ح) $۶\tan^۲ x - ۲\cos^۲ x = \cos ۲x$

ط) $\cot(\frac{\pi}{۳}\cos ۲\pi x) = \sqrt{۳}$

MATH75.IR

ی) $۲\sin^{۲}(\frac{\pi}{۲}\cos^{۲}x) = ۱ - \cos(\pi\sin ۲x)$

ک) $\mathrm{Arctan}(۲\tan ۲x - ۶\tan x) = \frac{\pi}{۴} + x$

ل) $۱ - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = ۰$

م) $\frac{۱ + \cos x}{\cos\frac{x}{۲}} = \frac{\sin x}{۱ - \cos x}$

ن) $\tan x + \tan ۲x = \tan ۳x$

س) $\sin^{۳}x + \cos^{۳}x = \cos x$

ع) $\tan x = \tan ۲x\tan ۳x\tan ۴x$

ف) $۶\sin^{۲}۳x + \cos ۱۲x = ۴$

ص) $\log\sin x - \log\cos x - \frac{۱}{۲}\log ۳ = ۰$

ق) $۴^{\tan^{۲}x} + ۲^{\frac{۱}{\cos^{۲}x}} = ۸۰$

ر) $\tan(\cot x) = \cot(\tan x)$

ش) $(\sqrt{\sqrt{۲} + ۱})^{\sin x} + (\sqrt{\sqrt{۲} - ۱})^{\sin x} = ۲$

۸۳ـ درستی تساویهای زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos ۴۷^\circ - \cos ۶۱^\circ - \cos ۱۱^\circ + \cos ۲۵^\circ = \sin ۷^\circ$

ب) $\sin ۸۷^\circ - \sin ۵۹^\circ - \sin ۹۳^\circ + \sin ۶۱^\circ = \sin ۱^\circ$

ج) $\tan ۳۰^\circ + \tan ۴۰^\circ + \tan ۵۰^\circ + \tan ۶۰^\circ = \frac{۸\cos ۲۰^\circ}{\sqrt{۳}}$

د) $\cos ۴۸^\circ + \cos ۱۲^\circ = \sqrt{۳}\cos ۱۸^\circ$

۸۴ـ عبارات زیر را به حاصلضرب تبدیل کنید.

الف) $\cos ۱۱x + ۳\cos ۹x + ۳\cos ۷x + \cos ۵x$

ب) $۱ + \cos a + \cos ۲a$

ج) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$

د) $\frac{\cos a + ۲\cos ۲a + \cos ۳a}{\sin a + ۲\sin ۲a + \sin ۳a}$

ه) $\cos(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \sin(\alpha + \beta)\sin\gamma$

MATH75.IR

و) $\sin a + \cos a + \sin 2a + \cos 2a + \sin 3a + \cos 3a$

ز) $1 - \sin a + \cos a - \tan a$

ح) $\dfrac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$

۸۵ـ عبارتهای زیر را به مجموع دو نسبت مثلثاتی تبدیل کنید.

الف) $\sin 5x \sin 7x$

ب) $\sin 105 \cos 75$

ج) $\sin\frac{a}{2} \sin\frac{2a}{3}$

د) $\cos\frac{a}{2} \cos\frac{3a}{2}$

ه) $\sin(a - \frac{\pi}{3}) \cos(a + \frac{\pi}{3})$

و) $\sin(a + b - c) \sin(a + b + c)$

۸۶ـ درستی تساویهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{7} \sin\frac{3\pi}{7} \sin\frac{5\pi}{7}$

ب) $2\sin(45 + \alpha) \sin(45 - \alpha) = \cos 2\alpha$

ج) $\cos\alpha\cos(\alpha + 2\beta) - \cos\beta\cos(2\alpha + \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$

د) $\sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \cot\frac{\pi}{4}$

ه) $\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{7\pi}{13} + \cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}$

و) $\dfrac{\sin 3\theta - \sin 3\alpha}{\cos 3\theta + \cos 3\alpha}$

۸۷ـ حاصل جمعهای زیر را حساب کنید.

$$A = 1 - \cos x + \cos 2x - \cos 3x + \dots + \cos 2nx$$

$$B = \tan x + \frac{1}{2} \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan\frac{x}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \tan\frac{x}{2^n}$$

۸۸ـ اگر $\cot(x + y) = \frac{1}{a}$ و $\cot(x - y) = \frac{1}{b}$ عبارات زیر را برحسب a و b حساب کنید.

الف) $\dfrac{\cos 2x + \cos 2y}{\cos 2x - \cos 2y}$

ب) $\dfrac{\sin 4x - \sin 4y}{\sin 4x + \sin 4y}$

MATH75.IR

۸۹ـ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۴}\ \dots\ \cos\frac{x}{۲^n}$$

۹۰ـ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin ۲x - \sqrt{۳}\cos ۲x = ۲$

ب) $\sqrt{۳}\sin(x - \frac{\pi}{۴}) - \cos(x - \frac{\pi}{۴}) = ۲$

ج) $\tan x - ۲\cot x = -۱$

د) $\tan ۲x + \cot ۲x = ۲\sqrt{۲}$

ه) $۳\sin^۲ x + ۷\cos^۲ x - \sin x\cos x = \frac{۹}{۲}$

و) $۴\sin^۲ x - ۳\cos^۲ x - ۴\sin x\cos x = -\frac{۳}{۲}$

ز) $\sqrt{۲}(\sin x + \cos x) - ۲\sin x\cos x = ۱$

ح) $\sin x + \cos x - \sin x\cos x = -۱$

ط) $\sin ۹x + \sin ۵x + ۲\sin^۲ x = ۱$

ی) $\cos ۵x\cos ۳x - \sin ۳x\sin x = \cos ۲x$

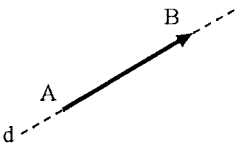
ک) $\cos ۵x + \cos ۳x + \sin ۵x + \sin ۳x = ۲\cos(\frac{\pi}{۴} - ۴x)$

MATH75.IR

فصل هشتم

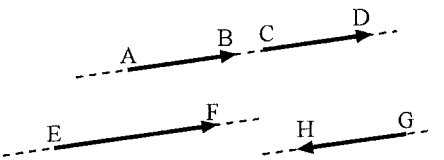
بردار

بردار $\overrightarrow{AB}$ در واقع پاره خطی است جهت‌دار که ابتدایش A و انتهایش B می‌باشد. خطی که بردار بر آن واقع است راستا یا محمل بردار نامیده می‌شود.



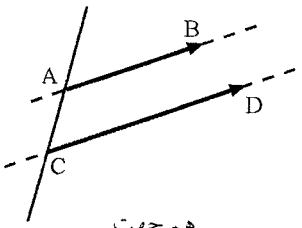
در شکل بالا خط d محمل بردار می‌باشد.

بردارهای هم راستا: چند بردار را هم راستا می‌گویند در صورتیکه محملهایشان موازی یا منطبق باشند. بردارهای زیر همراستا می‌باشند.

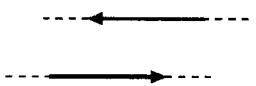


دو بردار هم جهت: دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را هم جهت گویند در صورتیکه همراستا بوده و در یک طرف خطی که از ابتدای دو بردار می‌گذرد قرار گیرند. دو بردار هم راستا را که هم جهت نباشند مختلف الجهت می‌نامیم.

MATH75.IR

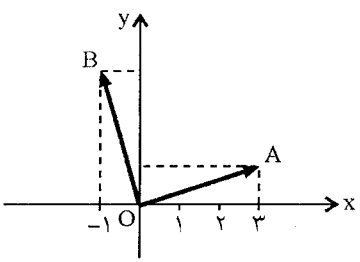


هم جهت



مختلف الجهت

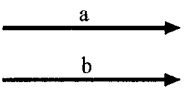
تعبیر ماتریسی بردار: هر بردار در صفحه را می‌توان با یک ماتریس ستونی ۱ × ۲ متناظر دانست، به این ترتیب که میزان انتقال در راستای محور افقی را طول بردار و میزان انتقال در راستای محور قائم را عرض بردار می‌نامیم. در شکل زیر بردار $\overrightarrow{OA}$ در واقع نقطهٔ O را سه واحد در جهت مثبت محور طول و یک واحد در جهت مثبت محور عرض انتقال داده که طول بردار ۳+ و عرض آن ۱+ است.



$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

دو بردار مساوی: دو بردار را مساوی گویند در صورتیکه هم جهت و هم اندازه باشند.



$$\vec{a} = \vec{b}$$

از نظر جبری دو بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ مساویند اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$.

مثال ۱ : اگر دو بردار $\vec{u} = \begin{bmatrix} ۲m - n \\ m + ۳n \end{bmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند مقادیر m و n را بدست آورید.

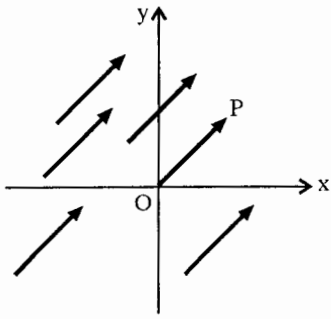
حل :

$$\begin{cases} ۲m - n = ۳ \\ m + ۳n = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶m - ۳n = ۹ \\ m + ۳n = -۲ \end{cases}$$

$$۷m = ۷ \Rightarrow m = ۱ \ , \ n = -۱$$

MATH75.IR

بردار مکان: در شکل زیر یک دسته بردار مساوی در صفحهٔ مختصات رسم شده است که هر کدام از این بردارها را می‌توان به عنوان نمایندهٔ دسته انتخاب کرد. برای سهولت بردار OP را که از مبداء مختصات رسم شده را به عنوان نمایندهٔ بردارهای مساوی بر می‌گزینیم مختصات بردار $\overrightarrow{OP}$ با مختصات نقطهٔ انتهای آن یعنی P برابر است. بردار $\overrightarrow{OP}$ را بردار مکان نقطهٔ P می‌نامیم.

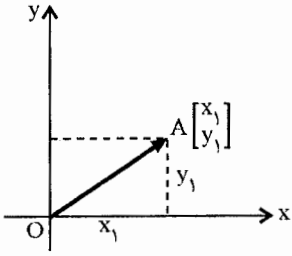


بطور کلی برای هر نقطه مانند M(a , b) از صفحهٔ مختصات بردار $\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ بردار مکان نقطهٔ M می‌باشد.

بدین ترتیب بین همهٔ نقاط صفحهٔ مختصات و مجموعهٔ بردارهای مکان یک تناظر یک به یک برقرار می‌شود.

طول بردار: اگر $A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ نقطه‌ای در صفحهٔ مختصات باشد آنگاه طول بردار $\overrightarrow{OA}$ از فرمول زیر بدست می‌آید.

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$



نکته: اگر $A\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ آنگاه:

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

مثال ۲: اگر $A\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ دو سر یک بردار باشند طول بردار AB را حساب کنید.

MATH75.IR

حل :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-۷ - ۱)^۲ + (۳ + ۳)^۲} = \sqrt{۶۴ + ۳۶} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

ضرب یک عدد در یک بردار: اگر $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ یک بردار و k عددی حقیقی باشد بردار $k\vec{v}$ برداری است که با بردار $\vec{v}$ هم راستاست.

$$k\vec{v} = \begin{bmatrix} kx_۱ \\ kx_۲ \end{bmatrix}$$

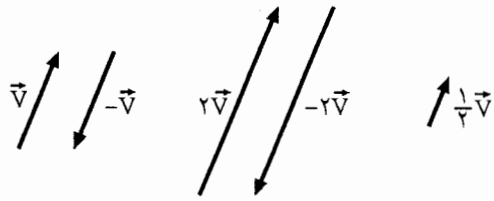
اگر k عددی مثبت باشد بردار $k\vec{v}$ و $\vec{v}$ هم جهت و اگر k عددی منفی باشد بردارهای $k\vec{v}$ و $\vec{v}$ مختلف‌الجهت می‌باشند.

$-۱ < k < ۱ \Rightarrow |k\vec{v}| < |\vec{v}|$

$k = \pm ۱ \Rightarrow |k\vec{v}| = |\vec{v}|$

$k < -۱$ یا $k > ۱ \Rightarrow |k\vec{v}| > |\vec{v}|$

$k = ۰ \Rightarrow k\vec{v} = \vec{o}\ ,\ |k\vec{v}| = ۰$



ویژگیهای ضرب عدد در بردار

الف) $۱\vec{v} = \vec{v}$

ب) $۰\vec{v} = \vec{o}$

ج) $k\vec{o} = \vec{o}$

د) $m(n\vec{v}) = (mn)\vec{v}$

و) $(m + n)\vec{v} = m\vec{v} + n\vec{v}$

نکته: اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همراستا باشند آنگاه بردارهای $(m\vec{b}, \vec{a})$ و $(\vec{b}, n\vec{a})$ و $(n\vec{b}, m\vec{a})$ نیز همراستا می‌باشند. بطور کلی هر مضربی از $\vec{a}$ با هر مضربی از $\vec{b}$ همراستا است.

نکته: اگر $r.\vec{v} = \vec{o}$ آنگاه $r = ۰$ یا $\vec{v} = \vec{o}$ و بالعکس.

نکته: دو بردار $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ و $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ موازیند در صورتیکه: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

مثال ۳ : مقدار m را چنان تعیین کنید که دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازی باشند.

$\vec{u} = \begin{bmatrix} ۲m \\ ۳ \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} m - ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$

MATH75.IR

حل :

$$\frac{۲m}{m-۱} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۴m = ۳m - ۳ \Rightarrow m = -۳$$

نکته: به طور کلی برای اثبات موازی بودن دو بردار $v_۱$ و $v_۲$ کافی است نشان دهیم عددی مانند k وجود دارد که $\vec{v}_۱ = k\vec{v}_۲$.

نکته: هر برداری که موازی محور طول باشد عرضش صفر است و هر برداری که موازی محور عرض باشد، طولش صفراست.

مثال ۴ : مقدار m چقدر باشد تا بردار $\vec{a} = \frac{۲}{۳}\begin{bmatrix} m-۱ \\ m+۲ \end{bmatrix}$ موازی محور طول باشد.

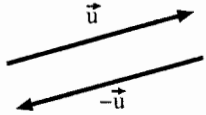
حل :

$$m + ۲ = ۰ \Rightarrow m = -۲$$

بردار صفر: برداری که ابتدا و انتهایش یک نقطه باشد بردار صفر نامیده می‌شود.

$$\vec{o} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

قرینهٔ یک بردار: قرینهٔ بردار $\vec{u}$ برداری است که با بردار $\vec{u}$ همراستا و مختلف‌الجهت و هم اندازه باشد.

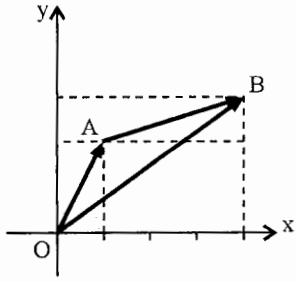


قرینهٔ بردار $\vec{u} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ بردار $-\vec{u} = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۱ \end{bmatrix}$ می‌باشد.

جمع بردارها

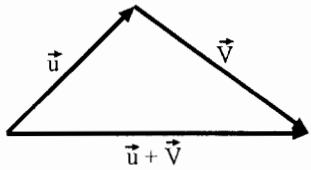
۱ـ روش مثلث: بردار $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را از مبداء مختصات و بردار $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را از انتهای $\overrightarrow{OA}$ رسم می‌کنیم. همانطور که در شکل زیر ملاحظه می‌کنیم مجموع (برآیند) بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB}$ بردار $\overrightarrow{OB}$ می‌باشد.

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۳ \end{bmatrix} = \overrightarrow{OB}$$

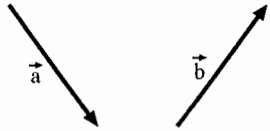


MATH75.IR

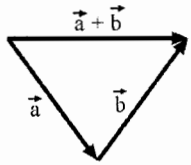
به طور کلی اگر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ چنان باشند که ابتدای $\vec{v}$ برانتهای $\vec{u}$ منطبق باشد مجموع دو بردار، برداری است که ابتدای $\vec{u}$ رابه انتهای $\vec{v}$ وصل می‌کنند.



مثال ۵ : مجموع دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را در شکل زیر رسم کنید.

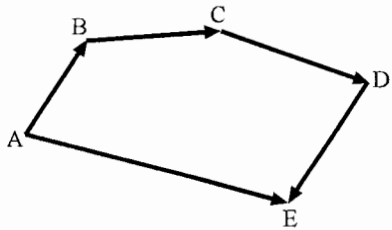


حل : هم سنگ بردار $\vec{b}$ را از انتهای $\vec{a}$ رسم کرده و دو بردار را به روش مثلث جمع می‌کنیم.

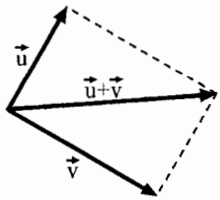


مثال ۶ : روش مثلث را برای چند بردار نیز می‌توان بکار برد.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$$



۲ـ روش متوازی الاضلاع: اگر ابتدای دو بردار بر هم منطبق باشند برای بدست آوردن مجموع دو بردار از انتهای هر کدام هم سنگ بردار دیگر را رسم می‌کنیم تا یک متوازی الاضلاع پدید آید. قطری از متوازی الاضلاع که از ابتدای مشترک دو بردار رسم می‌شود برآیند دو بردار است.



MATH75.IR

مثال ۷: اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ و $\vec{c} = ۲\vec{a} + \vec{b}$ حاصل $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ را حساب کنید.

حل:

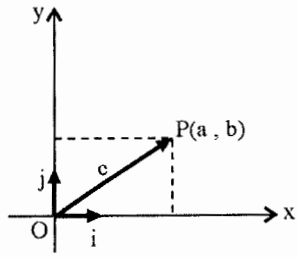
$$\vec{c} = ۲ \times \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مؤلفه‌های یک بردار

بردار $\vec{c} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ را در صفحهٔ مختصات در نظر بگیرید.

$$\vec{c} = \overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$



در اینجا بردارهای $\vec{i} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $\vec{j} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را به ترتیب بردارهای واحد محور طول و محور عرض می‌نامند. (بردار واحد را بردار یکانی نیز می‌نامند)

تساوی فوق را می‌توان به صورت $\vec{c} = a\vec{i} + b\vec{j}$ نوشت که $a\vec{i}$ و $b\vec{j}$ به ترتیب مؤلفه‌های بردار $\vec{c}$ روی محورهای طول و عرض نامیده می‌شوند.

مثال ۸: بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید و مؤلفه‌های دو بردار $۲\vec{a}$ و $-۵\vec{a}$ را مشخص کنید.

حل:

$$۲\vec{a} = ۲ \times \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۶ \end{bmatrix} = -۴\vec{i} + ۶\vec{j}$$

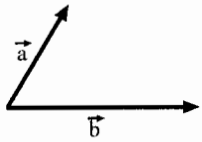
$$-۵\vec{a} = -۵ \times \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ -۱۵ \end{bmatrix} = ۱۰\vec{i} - ۱۵\vec{j}$$

تفاضل دو بردار: تفاضل $\vec{b}$ از $\vec{a}$ که آنرا به صورت $\vec{a} - \vec{b}$ نشان می‌دهیم برداری است مانند $\vec{c}$ که $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

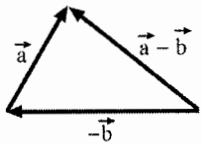
به عبارت دیگر: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

MATH75.IR

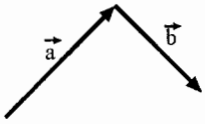
مثال ۹: بردار $\vec{a} - \vec{b}$ را در شکل زیر مشخص کنید.



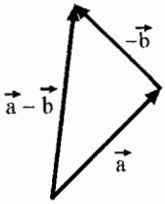
حل: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{b} + \vec{a}$



مثال ۱۰: بردار $\vec{a} - \vec{b}$ را در شکل زیر مشخص کنید.



حل: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



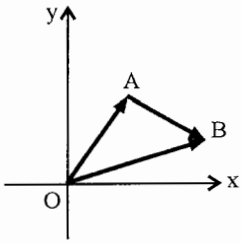
مثال ۱۱: اگر A و B دو نقطه دلخواه از صفحهٔ مختصات باشند ثابت کنید.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

حل:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$



MATH75.IR

مثال ۱۲ : می‌دانیم هر بردار به منزلهٔ یک انتقال است. نقطهٔ $A\begin{bmatrix}-۵\\ ۷\end{bmatrix}$ را ده بار متوالی با بردار $\vec{u} = \begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix}$ انتقال می‌دهیم. مختصات نقطهٔ حاصل چیست؟

حل :

$$۱۰\vec{u} = ۱۰ \times \begin{bmatrix}۲\\ -۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۲۰\\ -۱۰\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-۵\\ ۷\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}۲۰\\ -۱۰\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}۱۵\\ -۳\end{bmatrix}$$

خواص جمع بردارها

۱ـ بردار $\vec{o}$ عضو خنثای عمل جمع بردارها است.

$$\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$$

۲ـ هر برداری دارای یک بردار قرینه است.

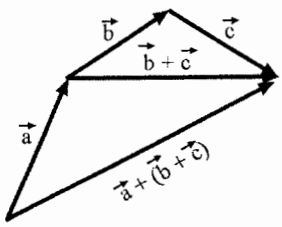
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{o}$$

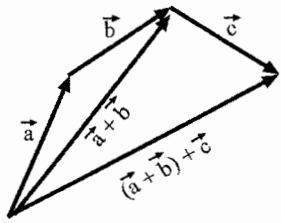
۳ـ عمل جمع بردارها دارای خاصیت جابجایی است.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

۴ـ جمع بردارها دارای خاصیت شرکت‌پذیری است.

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$





۵ـ اگر m یک عدد حقیقی باشد آنگاه:

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

۶ـ اگر m و n اعداد حقیقی باشند آنگاه:

$$(m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

۷ـ

$$۱ \times \vec{a} = \vec{a}$$

مثال ۱۳ : مجموع بردارهای $\overrightarrow{AB}$ ، $-\overrightarrow{CB}$ ، $\overrightarrow{DA}$ و $۲\overrightarrow{CD}$ چیست؟

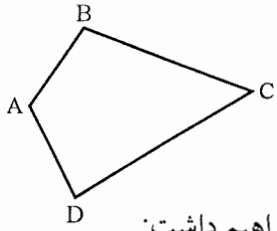
MATH75.IR

حل:

$$\overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{DA} + ۲\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{CD}$$
$$= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{CD} = \vec{o} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD}$$

مثال ۱۴: در شکل زیر ثابت کنید:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

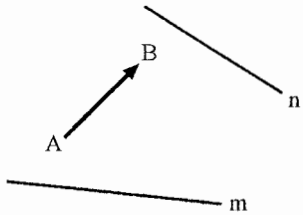


حل: اگر قطر AC را رسم کنیم خواهیم داشت:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

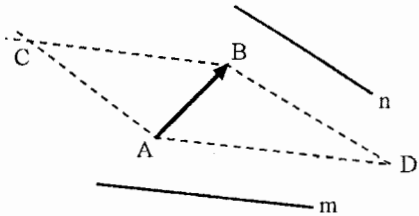
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

مثال ۱۵: در شکل زیر بردار $\overrightarrow{AB}$ را به دو بردار در راستای خطوط m و n تجزیه کنید.



حل: کافی است از A و B خطوطی به موازات m و n رسم کنیم تا متوازی الاضلاعی پدید آید که AB قطر این متوازی الاضلاع است.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$



مثال ۱۶: اگر $\overrightarrow{AB} + ۲\overrightarrow{AC} = (\lambda - ۲)\overrightarrow{CB}$ باشد مقدار λ را چنان تعیین کنید که A و C روی هم قرار گیرند.

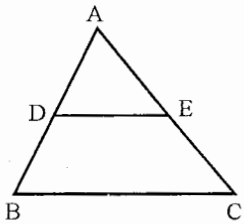
MATH75.IR

حل: اگر A و C روی هم قرار گیرند $\overrightarrow{AC} = \vec{o}$ می‌شود.

$$\overrightarrow{AB} + \vec{o} = (\lambda - ۲)\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\lambda - ۲)\overrightarrow{AB} \Rightarrow \lambda - ۲ = ۱ \Rightarrow \lambda = ۳$$

مثال ۱۷: به روش برداری ثابت کنید پاره خطی که اوساط دو ضلع یک مثلث را به هم وصل می‌کند با ضلع سوم مثلث موازی و برابر نصف آن است.

حل: فرض می‌کنیم D و E وسطهای AB و AC باشند.



$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow ۲\overrightarrow{DA} + ۲\overrightarrow{AE} = ۲\overrightarrow{DE}$$

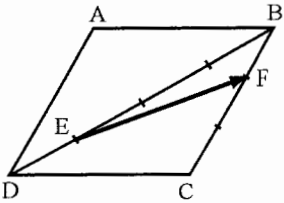
$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = ۲\overrightarrow{DE} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = ۲\overrightarrow{DE}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{BC}$$

بنابراین DE موازی BC و مساوی نصف آن است.

مثال ۱۸: ABCD متوازی الاضلاع است. قطر BD به چهار قسمت مساوی و ضلع BC به سه قسمت مساوی تقسیم شده. مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$$



حل: در متوازی الاضلاع فوق $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{۳}{۴}\overrightarrow{DB} + \frac{۱}{۳}\overrightarrow{BC} = \frac{۳}{۴}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \frac{۱}{۳}\overrightarrow{AD} = \frac{۳}{۴}\overrightarrow{DA} + \frac{۳}{۴}\overrightarrow{AB}$$

$$+ \frac{۱}{۳}\overrightarrow{AD} = \frac{۳}{۴}\overrightarrow{AB} - \frac{۳}{۴}\overrightarrow{AD} + \frac{۱}{۳}\overrightarrow{AD} = \frac{۳}{۴}\overrightarrow{AB} - \frac{۵}{۱۲}\overrightarrow{AD}$$

بنابراین: $x = \frac{۳}{۴}$, $y = \frac{-۵}{۱۲}$.

مثال ۱۹: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار و m و n دو عدد حقیقی باشند $m.\vec{a} + n.\vec{b}$ را یک ترکیب خطی بین بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ می‌نامند. بردار $\vec{u} = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی از دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$ بنویسید.

MATH75.IR

حل:

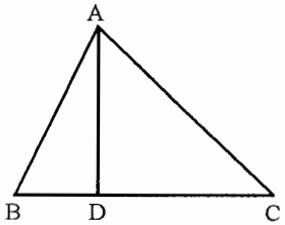
$$\vec{u} = m.\vec{a} + n.\vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m + n \\ ۲m - ۴n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -m + n = -۱ \\ ۲m - ۴n = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -m + n = -۱ \\ m - ۲n = -۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow -n = -۲ \Rightarrow n = ۲ , m = ۳$$

$$\Rightarrow \vec{u} = ۳\vec{a} + ۲\vec{b}$$

قضیه: نقطهٔ D بر ضلع BC از مثلث ABC چنان قرار گرفته که $\overrightarrow{BD} = \frac{m}{n}\overrightarrow{DC}$ می‌باشد. در این صورت $n . \overrightarrow{AB} + m . \overrightarrow{AC} = (m + n)\overrightarrow{AD}$



اثبات:

$$\overrightarrow{BD} = \frac{m}{n}\overrightarrow{DC} \Rightarrow n . \overrightarrow{BD} = m\overrightarrow{DC} \Rightarrow n . \overrightarrow{BD} + m\overrightarrow{CD} = \vec{o} \qquad (۱)$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow n . \overrightarrow{AB} + n . \overrightarrow{BD} = n . \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow m . \overrightarrow{AC} + m . \overrightarrow{CD} = m . \overrightarrow{AD}$$

طرفین دو تساوی اخیر را با هم جمع می‌کنیم.

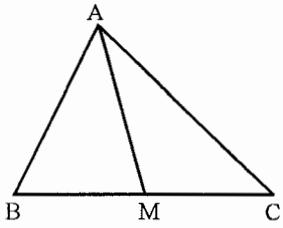
$$n . \overrightarrow{AB} + m . \overrightarrow{AC} + (n . \overrightarrow{BD} + m . \overrightarrow{CD}) = n . \overrightarrow{AD} + m . \overrightarrow{AD}$$

با توجه به رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$n . \overrightarrow{AB} + m . \overrightarrow{AC} = (m + n)\overrightarrow{AD}$$

مثال ۲۰: اگر AM میانه نظیر ضلع BC از مثلث ABC باشد نشان دهید.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$



حل:

با توجه به قضیهٔ قبل داریم:

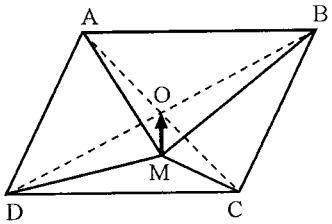
MATH75.IR

$BM = MC \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (۱ + ۱)\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = ۲\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

مثال ۲۱: نقطهٔ O محل برخورد قطرهای متوازی الاضلاع ABCD است. اگر M نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ متوازی الاضلاع باشد ثابت کنید.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = ۴\overrightarrow{MO}$



حل:

در مثلث MAC، پاره خط MO میانهٔ ضلع AC است. لذا:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = ۲\overrightarrow{MO} \qquad (۱)$

در مثلث MBD، پاره خط MO میانهٔ ضلع $\overrightarrow{BD}$ است. لذا:

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = ۲\overrightarrow{MO} \qquad (۲)$

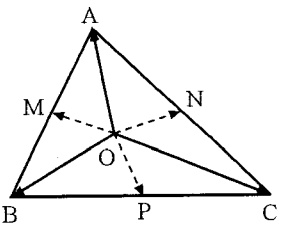
طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم. خواهیم داشت:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = ۴\overrightarrow{MO}$

مثال ۲۲: اگر M و N و P وسطهای اضلاع مثلث ABC و O نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ مثلث باشد ثابت کنید:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

حل:



$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = ۲\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = ۲\overrightarrow{ON}$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = ۲\overrightarrow{OP}$ جمع می کنیم

$۲\overrightarrow{OA} + ۲\overrightarrow{OB} + ۲\overrightarrow{OC} = ۲\overrightarrow{OM} + ۲\overrightarrow{ON} + ۲\overrightarrow{OP}$

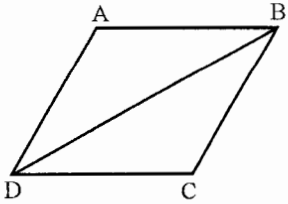
$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$

مثال ۲۳: به روش برداری ثابت کنید اضلاع مقابل متوازی الاضلاع با هم برابرند.

MATH75.IR

حل: با توجه به اینکه $AB \parallel DC$ و $AD \parallel CB$ فرض می‌کنیم $\overrightarrow{AB} = m \cdot \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DA} = n \cdot \overrightarrow{CB}$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} \\ \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$



$$\Rightarrow n \cdot \overrightarrow{CB} + m \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow n \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DC} - m \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$\Rightarrow (n - ۱)\overrightarrow{CB} = (۱ - m)\overrightarrow{DC}$$

با توجه به اینکه $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{DC}$ همراستا نیستند باید داشته باشیم:

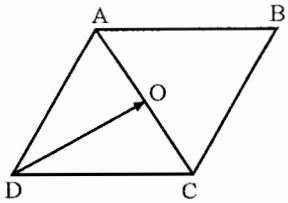
$$n - ۱ = ۰ \Rightarrow n = ۱ \Rightarrow \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$$

$$۱ - m = ۰ \Rightarrow m = ۱ \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

مثال ۲۴: ثابت کنید قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

حل: فرض می‌کنیم O وسط AC باشد. در این صورت خواهیم داشت:

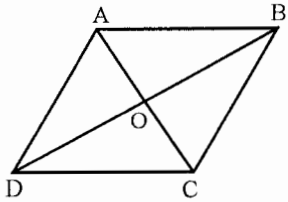
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = ۲\overrightarrow{DO} \\ \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}\end{array}\right\} \Rightarrow ۲\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DB}$$



$$\Rightarrow ۲\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$$

بنابراین D و O و B بر یک خط راست قرار دارند و O وسط DB نیز می‌باشد. لذا قطرهای متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

روش دوم: می‌دانیم



$$\overrightarrow{CO} = n \cdot \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{DO} = m \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}$$

$$m \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = n \cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\Rightarrow m \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} = n \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}$$

$$\Rightarrow (m - ۱)\overrightarrow{OB} = (n - ۱)\overrightarrow{OA}$$

چون دو برابر $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ مجزا و متقاطع هستند تساوی فوق وقتی برقرار است که:

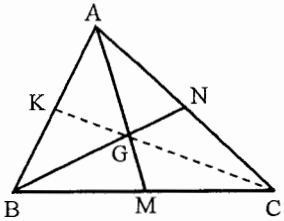
$$m - ۱ = ۰ \quad , \quad n - ۱ = ۰ \Rightarrow m = ۱ , n = ۱$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB} \quad , \quad \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$$

MATH75.IR

مثال ۲۵: به روش برداری ثابت کنید سه میانهٔ هر مثلث در یک نقطه متقاربند و فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی تا رأس $\frac{۲}{۳}$ طول میانه است.

حل: فرض می‌کنیم G محل برخورد میانه‌های AM و BN باشد.



$$\overrightarrow{CN} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \qquad (۱)$$

تساوی (۱) را نسبت به مبداء G می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB}) \Rightarrow \overrightarrow{GN} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GM} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA} \qquad (۲)$$

در تساوی (۲) اگر طرف دوم مخالف صفر باشد، برداری در راستای $\overrightarrow{AM}$ و طرف اول برداری در راستای $\overrightarrow{BN}$ است و با توجه به اینکه دو بردار متقاطعند نمی‌توانند برابر باشند بنابراین لازم است داشته باشیم

$$\overrightarrow{GM} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA} = \vec{O} \quad , \quad \overrightarrow{GN} + \frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB} = \vec{O}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GM} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GA} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AG}$$

$$\overrightarrow{GN} = -\frac{۱}{۲}\overrightarrow{GB} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{BG}$$

تساویهای اخیر نشان می‌دهند که میانهٔ AM میانه BN را به نسبت ۲ به ۱ و میانهٔ BM نیز میانهٔ AM را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم کرده است. به همین روش می‌توان ثابت کرد که میانهٔ CK نیز میانهٔ AM را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند که در این صورت CK باید از G بگذرد.

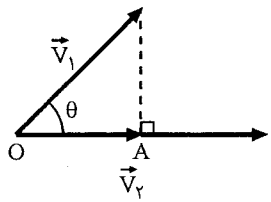
مثال ۲۶: بردار $\overrightarrow{AB}$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم از امتداد $\overrightarrow{AB}$ یک محور پدید می‌آید نشان دهید $\frac{۱}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \overrightarrow{AB}$ بردار واحد این محور است.

حل: اگر x بردار واحد این محور باشد بدیهی است که $\vec{x}$ با $\overrightarrow{AB}$ هم جهت و طول آن برابر واحد است. با انتخاب $\vec{x} = \frac{۱}{|\overrightarrow{AB}|} \cdot \overrightarrow{AB}$ شرط اول یعنی همراستا و هم جهت بودن محقق می‌گردد. همچنین خواهیم داشت:

MATH75.IR

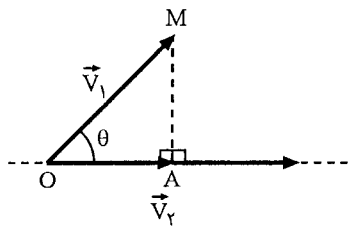
$$|\vec{x}| = \left|\frac{۱}{|\overrightarrow{AB}|} . \overrightarrow{AB}\right| = \frac{۱}{|\overrightarrow{AB}|} . |\overrightarrow{AB}| = ۱$$

مثال ۲۷: دو بردار $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ مطابق شکل زیر با هم زاویهٔ حادهٔ θ می‌سازند و $\overrightarrow{OA}$ تصویر $\vec{V}_۱$ بر $\vec{V}_۲$ است. $\overrightarrow{OA}$ را برحسب $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ بیان می‌کنید.



حل: در مثلث قائم الزاویه OMA داریم:

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\vec{V}_۱|} \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\vec{V}_۱| . \cos\theta$$



می‌دانیم اگر $\vec{i}$ بردار واحد محوری که از امتداد $\vec{V}_۲$ پدید می‌آید باشد $\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| . \vec{i}$ بنابر مثال قبل:

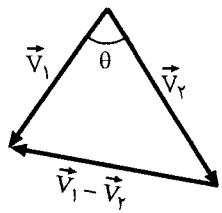
$$\vec{i} = \frac{\vec{V}_۲}{|\vec{V}_۲|}$$

پس می‌توان نوشت:

$$\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}| . \vec{i} = |\vec{V}_۱| . \cos\theta . \frac{\vec{V}_۲}{|\vec{V}_۲|} = \frac{|\vec{V}_۱|}{|\vec{V}_۲|} . \cos\theta . \vec{V}_۲$$

مثال ۲۸: در شکل زیر $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ دو بردار می‌باشند که زاویه بین آنها θ است. به روش برداری ثابت کنید:

$$|\vec{V}_۱ - \vec{V}_۲|^۲ = |\vec{V}_۱|^۲ + |\vec{V}_۲|^۲ - ۲|\vec{V}_۱| . |\vec{V}_۲| . \cos\theta$$

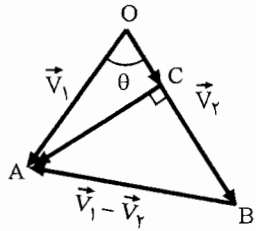


MATH75.IR

حل: از A (انتهای $\vec{V}_1$) عمود AC را بر $\overrightarrow{OB}$ فرود می‌آوریم.

می‌دانیم

$$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{V}_1| \cdot \cos\theta$$
$$|\overrightarrow{CB}| = ||\vec{V}_2| - |\overrightarrow{OC}||$$



در $\overset{\Delta}{ABC}$ می‌توان رابطهٔ فیثاغورس را نوشت:

$$|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 = (|\vec{V}_1|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2) + (|\vec{V}_2| - |\overrightarrow{OC}|)^2$$

$$= |\vec{V}_1|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 + |\vec{V}_2|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 - 2|\vec{V}_2||\overrightarrow{OC}| =$$

$$= |\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 - 2|\vec{V}_2| \cdot |\vec{V}_1| \cdot \cos\theta$$

مثال ۲۹: اگر $|\vec{V}_1| = 2$ و $|\vec{V}_2| = 5$ زاویه بین آنها $\theta = 60°$ باشد اندازهٔ $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ چیست؟

حل:

$$|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|^2 = |\vec{V}_1|^2 + |\vec{V}_2|^2 - 2|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| \cdot \cos\theta$$
$$= 4 + 25 - 2 \times 2 \times 5 \times \frac{1}{2} = 29 - 10 = 19$$

ضرب داخلی (اسکالر) دو بردار

اگر $\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ باشند ضرب داخلی آنها را با نماد $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2$$

مثال ۳۰: اگر داشته باشیم $\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}$ مطلوبست $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$، $\vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$، $(2\vec{V}_1) \cdot (3\vec{V}_2)$.

حل:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 2 \times (-5) + (-3) \times 7 = -10 - 21 = -31$$

MATH75.IR

$$\vec{V}_۲ \cdot \vec{V}_۱ = (-۵) \times ۲ + ۷ \times (-۳) = -۱۰ - ۲۱ = -۳۱$$

$$(۲\vec{V}_۱) \cdot (۳\vec{V}_۲) = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۶ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -۱۵ \\ ۲۱ \end{bmatrix} = ۴ \times (-۱۵) + (-۶) \times ۲۱ = -۶۰ - ۱۲۶$$
$$= -۱۸۶$$

مثال ۳۱: اگر $\vec{V}_۱ = \begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_۲ = \begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ باشد حاصل $(k\vec{V}_۱) \cdot (r\vec{V}_۲)$ چیست؟

حل:

$$k\vec{V}_۱ = \begin{bmatrix} kx_۱ \\ ky_۱ \end{bmatrix} \qquad r\vec{V}_۲ = \begin{bmatrix} rx_۲ \\ ry_۲ \end{bmatrix}$$

$$(k\vec{V}_۱) \cdot (r\vec{V}_۲) = kx_۱ \times rx_۲ + ky_۱ \times ry_۲ = krx_۱x_۲ + kry_۱y_۲$$

$$= kr(x_۱x_۲ + y_۱y_۲) = (kr)\, \vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲$$

نکته: از مثال‌های بالا چنین بر می‌آید که ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد. همچنین حاصلضرب داخلی دو بردار عددی حقیقی است.

مثال ۳۲: اگر $\vec{V} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ باشد نشان دهید:

$$|\vec{V}|^۲ = \vec{V} \cdot \vec{V}$$

حل:

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = a \cdot a + b \cdot b = a^۲ + b^۲$$
$$|\vec{V}| = \sqrt{a^۲ + b^۲}$$

با مقایسه دو رابطهٔ فوق بدست می‌آید که: $\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^۲$.

مثال ۳۳: اگر $\vec{V}_۱ = \begin{bmatrix} x_۱ \\ y_۱ \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_۲ = \begin{bmatrix} x_۲ \\ y_۲ \end{bmatrix}$ و θ زاویه حاده بین $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ باشد. ثابت کنید:

$$\vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲ = |\vec{V}_۱| \cdot |\vec{V}_۲| \cdot \cos\theta$$

حل: بنابر مثال ۲۸ می‌دانیم:

$$|\vec{V}_۱ - \vec{V}_۲|^۲ = |\vec{V}_۱|^۲ + |\vec{V}_۲|^۲ - ۲\vec{V}_۱\vec{V}_۲ \cdot \cos\theta$$

و از آنجا:

$$|\vec{V}_۱| \times |\vec{V}_۲| \cos\theta = \frac{|\vec{V}_۱|^۲ + |\vec{V}_۲|^۲ - |\vec{V}_۱ - \vec{V}_۲|^۲}{۲} =$$

$$= \frac{x_۱^۲ + y_۱^۲ + x_۲^۲ + y_۲^۲ - (x_۱ - x_۲)^۲ - (y_۱ - y_۲)^۲}{۲} =$$

$$= \frac{۲x_۱x_۲ + ۲y_۱y_۲}{۲} = x_۱x_۲ + y_۱y_۲ = \vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲$$

MATH75.IR

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲ = |\vec{V}_۱| \times |\vec{V}_۲| \cdot \cos\theta}$$

مثال ۳۴: دو بردار $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ چنان‌اند که $|\vec{V}_۱| = ۵$ و $|\vec{V}_۲| = ۷$ و زاویه حادهٔ بین آنها $\theta = \frac{\pi}{۶}$ رادیان است. مطلوبست $\vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲$.

حل: با توجه به فرمول بالا:

$$\vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲ = |\vec{V}_۱| \cdot |\vec{V}_۲| \cdot \cos\theta = ۵ \times ۷ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۳۵\sqrt{۳}}{۲}$$

نکته: از فرمول بدست آمده در بالا می‌توان کسینوس زاویه بین دو بردار را نیز بدست آورید. برای این منظور کافیست بنویسیم:

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲}{|\vec{V}_۱| \cdot |\vec{V}_۲|}$$

مثال ۳۵: اگر داشته باشیم $\vec{V}_۱ = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۳ \end{bmatrix}$ و $\vec{V}_۲ = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۸ \end{bmatrix}$ مطلوبست کسینوس زاویه بین $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$.

حل:

$$\vec{V}_۱ \cdot \vec{V}_۲ = ۴ \times (-۶) + (-۳) \times ۸ = -۲۴ - ۲۴ = -۴۸$$

$$|\vec{V}_۱| \cdot |\vec{V}_۲| = \sqrt{۱۶ + ۹} \times \sqrt{۳۶ + ۶۴} = ۵ \times ۱۰ = ۵۰$$

$$\cos\theta = \frac{-۴۸}{۵۰} = \frac{-۲۴}{۲۵}$$

مثال ۳۶: اگر $\vec{V}$، $\vec{W}$ و $\vec{U}$ سه بردار باشند نشان دهید:

$$\vec{V} \cdot (\vec{W} + \vec{U}) = \vec{V} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{U}$$

حل: با اختیار $\vec{V} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{W} = \begin{bmatrix} z \\ t \end{bmatrix}$، $\vec{U} = \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ داریم:

$$\vec{V} \cdot (\vec{W} + \vec{U}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z + r \\ t + s \end{bmatrix} = x(z + r) + y(t + s) =$$

$$= xz + xr + yt + ys = (xz + yt) + (xr + ys)$$

$$= \vec{V} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{U}$$

نکته: اگر $\vec{V}$ یک بردار دلخواه باشد منظور از $\vec{V}^۲$، $\vec{V} \cdot \vec{V}$ خواهد بود که برابر است با $|\vec{V}|^۲$. بنابراین:

$$\vec{V}^۲ = |\vec{V}|^۲$$

MATH75.IR

مثال ۳۷: اگر $\vec{V}$ و $\vec{W}$ دو بردار و θ زاویه بین آنها باشد ثابت کنید:

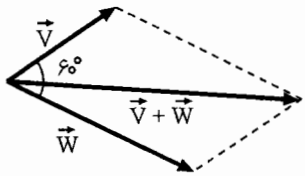
$$(\vec{V}+\vec{W})^{۲} = |\vec{V}|^{۲} + |\vec{W}|^{۲} + ۲|\vec{V}||\vec{W}|\cos\theta$$

حل:

$$(\vec{V}+\vec{W})^{۲} = (\vec{V}+\vec{W}).(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{V}.\vec{V} + \vec{V}.\vec{W} + \vec{W}.\vec{V} + \vec{W}.\vec{W}$$

$$= |\vec{V}|^{۲} + |\vec{W}|^{۲} + ۲\vec{V}.\vec{W} = |\vec{V}|^{۲} + |\vec{W}|^{۲} + ۲|\vec{V}||\vec{W}|.\cos\theta$$

مثال ۳۸: در شکل مقابل با فرض $|\vec{V}| = ۳$ و $|\vec{W}| = ۵$ و $\theta = ۶۰^\circ$ ، اندازهٔ $|\vec{V}+\vec{W}|$ چیست؟



حل:

$$|\vec{V}+\vec{W}|^{۲} = |\vec{V}|^{۲} + |\vec{W}|^{۲} + ۲|\vec{V}|.|\vec{W}|.\cos۶۰^\circ$$

$$= ۹ + ۲۵ + ۲ \times ۳ \times ۵ \times \frac{۱}{۲} = ۴۹ \Rightarrow |\vec{V}+\vec{W}| = ۷$$

مثال ۳۹: ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه دو بردار غیر صفر برهم عمود باشند آنستکه حاصلضرب داخلی آنها صفر شود.

حل: فرض کنیم $\vec{V}$ و $\vec{W}$ چنان باشند که $\vec{V} \perp \vec{W}$.

$$\vec{V}.\vec{W} = |\vec{V}|.|\vec{W}|.\cos۹۰^\circ = ۰$$

یعنی اگر دو بردار برهم عمود باشند حاصلضرب داخلی آنها صفر است. اینک فرض کنیم $\vec{V}.\vec{W} = ۰$ باشد.

$$|\vec{V}|.|\vec{W}|.\cos\theta = ۰$$

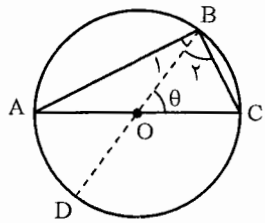
و لذا چون $|\vec{V}| \neq ۰$ و $|\vec{W}| \neq ۰$ ، پس $\cos\theta = ۰$ ، یعنی $\theta = ۹۰^\circ$ است و دو بردار برهم عمودند.

نکته: اگر حاصلضرب داخلی دو بردار، صفر باشد یا دو بردار برهم عمودند یا لااقل یکی از آنها بردار صفر است.

مثال ۴۰: به طریق برداری ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ محاطی مقابل به قطر در هر دایره ۹۰° است.

حل: در شکل زیر اگر ثابت کنیم $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = ۰$ حکم ثابت است. فرض کنیم شعاع دایره r باشد.

MATH75.IR



$$\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}) = |\overrightarrow{BO}|^{۲} + \overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC}$$

$$= r^{۲} + \overrightarrow{OD}\,.\,\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OC} = r^{۲} + r^{۲}\cos(\pi - \theta) + r^{۲}\cos\theta + r^{۲}\cos\pi$$

$$= r^{۲} - r^{۲}\cos\theta + r^{۲}\cos\theta - r^{۲} = ۰$$

مثال ۴۱: مقدار x را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} x - ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ + x \end{bmatrix}$ برهم عمود باشند.

حل:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = ۰$$

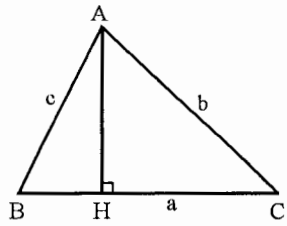
$$-۴(x - ۱) + ۳(۲ + x) = ۰ \Rightarrow -۴x + ۴ + ۶ + ۳x = ۰ \Rightarrow -x = -۱۰$$

$$\Rightarrow \boxed{x = ۱۰}$$

مثال ۴۲: به روش برداری ثابت کنید در مثلث ABC رابطهٔ زیر برقرار است.

$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\,.\,\cos A$$

حل:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}^{۲} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^{۲} = \overrightarrow{AC}^{۲} + \overrightarrow{AB}^{۲} - ۲\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}$$

با توجه به اینکه $\overrightarrow{AB}^{۲} = AB^{۲} = c^{۲}$ و $\overrightarrow{AC}^{۲} = AC^{۲} = b^{۲}$ و $\overrightarrow{BC}^{۲} = BC^{۲} = a^{۲}$ از طرف دیگر

$$\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\,.\,|\overrightarrow{AC}|\cos A$$

$$= bc\,.\,\cos A$$

$$\Rightarrow a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc\cos A$$

MATH75.IR

نتیجه: اگر در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه باشد آنگاه $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AB} = ۰$ لذا:

$$\overrightarrow{BC}^۲ = \overrightarrow{AB}^۲ + \overrightarrow{AC}^۲ \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲$$

مثال ۴۳: نشان دهید دو بردار $\vec{V} = -\vec{i} + \frac{۳}{۴}\vec{j}$ و $\vec{U} = ۳\vec{i} + ۴\vec{j}$ برهم عمودند.

حل:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} -۱ \\ \frac{۳}{۴} \end{bmatrix} \quad \vec{U} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

$$\vec{V} . \vec{U} = -۱ \times ۳ + \frac{۳}{۴} \times ۴ = -۳ + ۳ = ۰$$

حاصلضرب داخلی دو بردار غیر صفر، برابر صفر است، لذا دو بردار برهم عمودند.

مثال ۴۴: اگر $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۱$ و $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{۱۳}$، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را تعیین کنید.

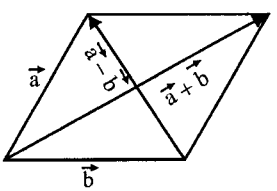
حل:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^۲ = |\vec{a}|^۲ + |\vec{b}|^۲ + ۲|\vec{a}| . |\vec{b}| \cos\theta$$

$$۱۳ = ۹ + ۱ + ۲ \times ۳ \times ۱ \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۳}$$

مثال ۴۵: اگر $|\vec{a}| - |\vec{b}| = ۰$، زاویهٔ بین دوبردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ چیست؟

حل: با توجه به اینکه $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ می‌توان گفت چهارضلعی لوزی است پس قطرها برهم عمودند و زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ قائمه می‌باشد.



مثال ۴۶: اگر $\vec{a} + ۳\vec{b} = \vec{O}$ و $|\vec{a}| = ۶$ حاصل $\vec{a} . \vec{b}$ را بدست آورید.

حل:

$$\vec{a} + ۳\vec{b} = \vec{O} \Rightarrow \vec{a} = -۳\vec{b}$$

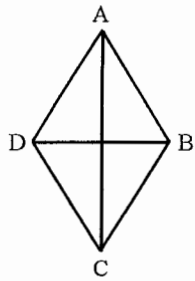
بنابراین زاویهٔ بین دوبردار π رادیان است.

$$\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| \cos\pi \Rightarrow \vec{a} . \vec{b} = ۶ \times ۲ \times (-۱) = -۱۲$$

مثال ۴۷: به روش برداری ثابت کنید قطرهای لوزی بر هم عمودند.

MATH75.IR

حل: طول هر ضلع لوزی را k در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم حاصل ضرب داخلی دو بردار صفر است.



$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

$$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DC}$$

$$= k^{۲} + \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) - k^{۲}$$

$$= \overrightarrow{CD} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{CD} \cdot \vec{O} = \vec{O}$$

MATH75.IR

تمرینهای فصل هشتم

۱ـ اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ بردارهای زیر را رسم کنید.

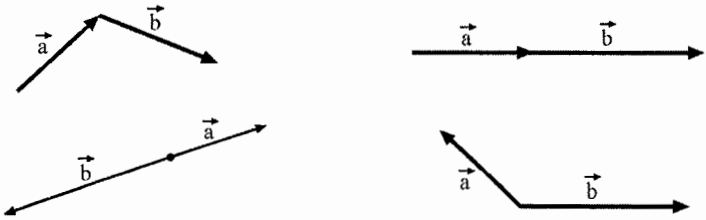
الف) بردار $۲\vec{a}$ از مبداء مختصات.

ب) بردار $-۲\vec{a}$ از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$.

ج) بردار $-\frac{۱}{۲}\vec{a}$ از نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$.

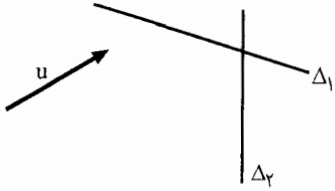
۲ـ بردارهای $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ را رسم کنید.

۳ـ در هر یک از شکلهای زیر $\vec{a} + \vec{b}$ را مشخص کنید.



۴ـ در هر یک از شکلهای زیر $\vec{a} - \vec{b}$ را مشخص کنید.

۵ـ بردار $\vec{u}$ را به دو بردار در راستاهای $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ تجزیه کنید.



۶ـ بردار $\vec{i}$ را به صورت ترکیب خطی از دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}$ بنویسید.

MATH75.IR

۷ـ اگر $\vec{a} = \vec{i} - ۲\vec{j}$ و $\vec{b} = ۲\vec{i} + \vec{j}$ باشند. مختصات بردارهای زیر را تعیین کنید.

$\vec{x} = ۵\vec{a} + ۳\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{y} = ۴\vec{a} - ۲\vec{b}$ $\qquad$ $\vec{z} = ۲\vec{x} - ۳\vec{y}$

۸ـ معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$۲\begin{bmatrix} x - ۲y \\ ۱ - x \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} y - ۱ \\ ۲x - ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

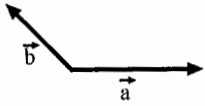
۹ـ بردار $\vec{a} = ۵\begin{bmatrix} ۲m - ۶ \\ m + ۱ \end{bmatrix}$ موازی محور عرض است. مقدار m چقدر است؟

۱۰ـ بردار $\vec{b} = \begin{bmatrix} m - ۲ \\ m + ۱ \end{bmatrix}$ موازی بردار $\vec{c} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ است. مقدار m چقدر است؟

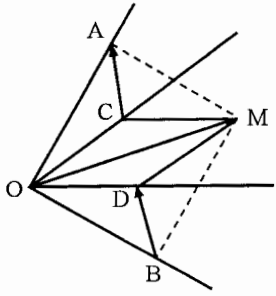
۱۱ـ نقاط $A\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix} -۵ \\ -۶ \end{bmatrix}$ مفروضند. نقطهٔ D را چنان تعیین کنید که چهار ضلعی BDCA متوازی الاضلاع باشد.

۱۲ـ اگر $A\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{AC} = ۲\overrightarrow{BC}$ باشند مختصات نقطهٔ C را تعیین کنید.

۱۳ـ در شکل زیر $۲\vec{a} - ۳\vec{b}$ را رسم کنید.



۱۴ـ در شکل زیر چهارضلعی‌های OCMD و OAMB متوازی الاضلاعند. ثابت کنید $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$

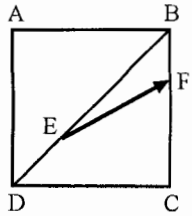


۱۵ـ پاره خط AB توسط نقاط M و N به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر $A\begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ باشد مختصات نقطه N را بدست آورید.

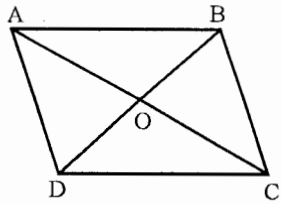
MATH75.IR

۱۶ـ در مربع ABCD نقطهٔ E را روی قطر BD و نقطه F را روی ضلع BC طوری اختیار می‌کنیم که $BE = ۲ED$ و $CF = ۲FB$. ثابت کنید:

$$\overrightarrow{EF} = \frac{۲}{۳}\overrightarrow{AB} - \frac{۱}{۳}\overrightarrow{AD}$$



۱۷ـ در شکل زیر اگر $\overrightarrow{BC} = m\,.\,\overrightarrow{AB} + n\,.\,\overrightarrow{OB}$ مقادیر m و n را بدست آورید.



۱۸ـ اگر $A\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-۴\\۵\end{bmatrix}$ دو نقطهٔ دلخواه باشند نقطهٔ C را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$۲\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \vec{O}$$

۱۹ـ اگر $\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix}۶\\۵\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix}۲\\۲\end{bmatrix}$ باشند بردار مکان نقطهٔ B را تعیین کنید.

۲۰ـ اگر E و F و G و H اوساط اضلاع چهارضلعی ABCD باشند ثابت کنید:

(O مبداء مختصات)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH}$$

۲۱ـ اگر $\vec{V}_۱ = ۲\vec{i} - ۲\vec{j}$ و $\vec{V}_۲ = ۳\vec{i} + ۵\vec{j}$ و $\vec{V}_۳ = \vec{i} + \vec{j}$ باشند ضرایب x و y را از تساوی زیر بدست آورید.

$$x\vec{V}_۲ + y\vec{V}_۳ = ۴\vec{V}_۱$$

۲۲ـ اگر $\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix}-۲\\۳\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{OC} = \begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}$ بردار $\overrightarrow{OX}$ را از برابری زیر بدست آورید.

$$\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{XB} = ۵\overrightarrow{AC}$$

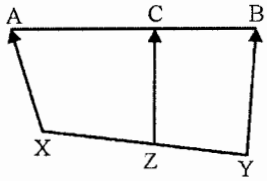
MATH75.IR

۲۳ـ بردار $\begin{bmatrix} ۲۶ \\ -۱۸ \end{bmatrix} = \vec{a}$ را به صورت ترکیب خطی از دو بردار $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} = \vec{b}$ و $\begin{bmatrix} -۴ \\ ۳ \end{bmatrix} = \vec{c}$ بنویسید.

۲۴ـ اگر $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ A و $\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix}$ B و $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix}$ C و $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ D رئوس چهارضلعی ABCD باشند به روش برداری ثابت کنید چهار ضلعی لوزی است.

۲۵ـ نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$ A را ابتدا ۱۰ بار متوالی با بردار $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \vec{U}$ سپس نقطهٔ حاصل را پنج بار متوالی با بردار $\begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} = \vec{V}$ انتقال می‌دهیم به چه نقطه‌ای می‌رسیم؟

۲۶ـ در شکل زیر C وسط AB و z وسط xy است ثابت کنید $\overrightarrow{ZC} = \dfrac{\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{YB}}{۲}$.



۲۷ـ اگر $\overrightarrow{AY} + ۳\overrightarrow{PY} = ۲\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PX} + ۳\overrightarrow{AZ}$ ثابت کنید X و Y و Z بر یک خط راست قرار دارند.

۲۸ـ اگر $\overrightarrow{BY} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AY} + \overrightarrow{XY}$ نشان دهید X و Y برهم منطبق‌اند.

۲۹ـ ثابت کنید برای هر پنج نقطهٔ A و B و C و D و E داریم:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} + ۳\overrightarrow{AE}$$

۳۰ـ اگر M وسط ضلع BC از مثلث ABC باشد ثابت کنید:

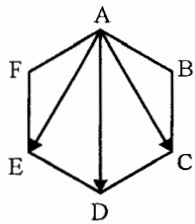
$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = \vec{O}$$

۳۱ـ مجموع بردارهای زیر چه مضربی از $\overrightarrow{OZ}$ است.

$$۳\overrightarrow{OA} \ , \ ۶\overrightarrow{BZ} \ , \ ۲\overrightarrow{AO} \ , \ \overrightarrow{AB} \ , \ ۵\overrightarrow{OB}$$

۳۲ـ در شش ضلعی منتظم زیر ثابت کنید.

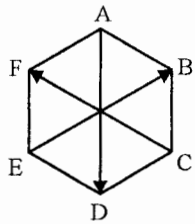
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = ۲\overrightarrow{AD}$$



MATH75.IR

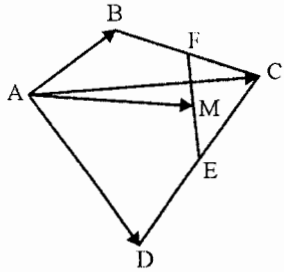
۳۳ـ در شش ضلعی منتظم زیر ثابت کنید.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CF} = \vec{O}$



۳۴ـ در چهارضلعی زیر E وسط DC ، F وسط BC و M وسط EF است. ثابت کنید.

$۴\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + ۲\overrightarrow{AC}$



۳۵ـ در تساوی زیر λ را چنان تعیین کنید که A و D برهم منطبق شوند.

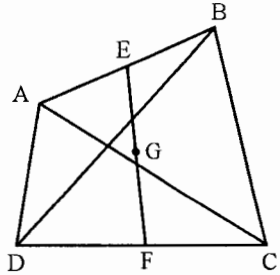
$\overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{DA} = (\lambda - ۱)\overrightarrow{AQ}$

۳۶ـ در چهارضلعی ABCD ، E وسط AB ، F وسط CD و G وسط EF است. ثابت کنید:

الف) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = ۲\overrightarrow{EF}$

ب) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = ۴\overrightarrow{AG}$

ج) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{O}$



۳۷ـ ثابت کنید اگر اوساط اضلاع یک چهارضلعی محدب را به هم وصل کنیم یک متوازی الاضلاع پدید می‌آید.

۳۸ـ اگر M نقطه‌ای دلخواه و G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد ثابت کنید:

الف) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = ۰$

ب) $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{۳}$

۳۹ـ اگر $G_۱$ و $G_۲$ به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های ABC و XYZ باشند ثابت کنید:

MATH75.IR

$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = ۳\overrightarrow{G_۱G_۲}$

۴۰ـ در چهارضلعی ABCD، نقاط E، F، G، H، P و Q به‌ترتیب اوساط DA، AB، BC، CD، AC و BD هستند. اولاً ثابت کنید FH، EG و PQ همدیگر را نصف می‌کنند. ثانیاً اگر O نقطهٔ تلاقی باشد ثابت کنید.

الف) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{O}$

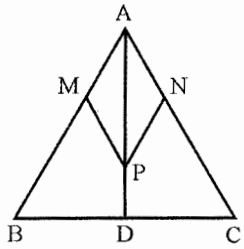
ب) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = ۴\overrightarrow{PQ}$

۴۱ـ ۱۳۸۱ بردار مختلف غیرصفر در صفحه داریم که همهٔ آنها موازی نیستند. این بردارها چنان‌اند که هر یک از آنها را می‌توان به صورت مضربی از حاصل جمع بردارهای دیگر نوشت (مثلاً برای بردار $\vec{V}_۱$ عددی مانند $k_۱$ وجود دارد که $\vec{V}_۱ = k_۱(\vec{V}_۲ + \vec{V}_۳ + \vec{V}_۴ + ... + \vec{V}_n)$) تحت این شرایط ثابت کنید حاصل جمع تمام این بردارها، بردار صفر است.

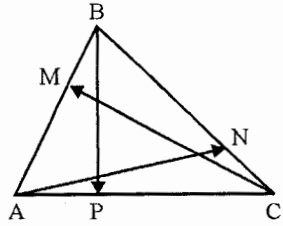
(راهنمایی: نشان دهید هر یک از بردارهای $V_۱$ و $V_۲$ و ... و V_n مضربی از $(V_۱ + V_۲ + ... + V_n)$ است).

۴۲ـ در شکل زیر AD نیمساز زاویهٔ A است، بردار $\overrightarrow{AD}$ را برحسب بردارهای $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ و طولهای آنها بنویسید.

(راهنمایی: لوزی AMPN به ضلع «۱» را در نظر بگیرید.)



۴۳ـ نقاط M و N و P روی اضلاع AB، BC و AC از مثلث ABC طوری انتخاب شده‌اند که $\overrightarrow{AM} = x \cdot \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BN} = y \cdot \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CP} = z \cdot \overrightarrow{CA}$. مطلوبست شرط لازم و کافی برای این که بردارهای $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{BP}$ تشکیل مثلث دهند. (یعنی $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BD} = \vec{O}$).



MATH75.IR

۴۴ـ به روش برداری ثابت کنید پاره خطی که اوساط دوساق یک ذوزنقه را به هم وصل می‌کند موازی دو قاعده و مساوی نصف مجموع آنهاست.

۴۵ـ نقاط M و N به ترتیب وسطهای اضلاع BC و CD از متوازی الاضلاع ABCD هستند. ثابت کنید:

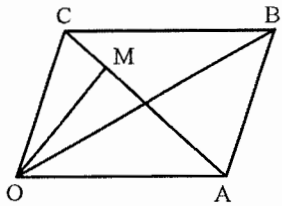
$$\overrightarrow{AC} = \frac{۲}{۳}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

۴۶ـ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ چه شرایطی باید داشته باشند تا:

الف) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

ب) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$

۴۷ـ متوازی الاضلاع OABC مفروض است. روی قطر AC نقطهٔ M طوری واقع است که $\overrightarrow{AM} = ۲\overrightarrow{MC}$. ثابت کنید $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{۳}$.



۴۸ـ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ با شرط $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = ۰$ مفروضند. اگر $|\vec{a}| = ۱۳$ و $|\vec{b}| = ۱۴$ و $|\vec{c}| = ۱۵$ حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$$

۴۹ـ بردارهای $\overrightarrow{AB} = ۵\vec{i} - ۲\vec{j}$ و $\overrightarrow{AC} = -۳\vec{i} + ۸\vec{j}$ دو ضلع مثلث ABC می‌باشند. طول میانهٔ AM چقدر است؟

۵۰ـ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم زاویهٔ ۳۰° می‌سازند. اگر $|\vec{a}| = \sqrt{۳}$ و $|\vec{b}| = ۱$ باشند زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{a} - \vec{b}$ چقدر است؟

۵۱ـ اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} - ۴\vec{j}$ و $\vec{b} = ۲\vec{j}$ و $\vec{x} = \vec{a} + ۲\vec{j}$ و $y = (\vec{i} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} + ۴\vec{j}$ باشند کسینوس زاویهٔ بین دو بردار x و y را تعیین کنید.

۵۲ـ بردارهای $\vec{V} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ و $\vec{W} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ مفروضند. حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$(۲\vec{V} - ۳\vec{W}) \cdot (۳\vec{V} + ۲\vec{W})$$

۵۳ـ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ و $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۴$ می‌باشد. حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

MATH75.IR

الف) $(3\vec{a} + 2\vec{b})^2$ ب) $(\vec{a} + \vec{b})^2$

ج) $(\vec{a} - \vec{b})^2$ د) $\vec{a}^2$

۵۴ـ اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه باشند ثابت کنید:

$$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$$

۵۵ـ ثابت کنید در هر مثلث ABC رابطهٔ زیر برقرار است.

$$a = b \,.\, \cos C + c \,.\, \cos B$$

۵۶ـ ثابت کنید سه ارتفاع مثلث در یک نقطه متقاربند.

۵۷ـ اگر نقطه O در صفحهٔ مثلث ABC باشد ثابت کنید.

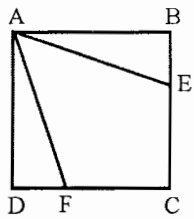
$$\overrightarrow{OA} \,.\, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} \,.\, \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{OC} \,.\, \overrightarrow{AB} = 0$$

۵۸ـ ثابت کنید در متوازی الاضلاع ABCD داریم

$$\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DA}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2$$

۵۹ـ ثابت کنید عمود منصفهای اضلاع هر مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

۶۰ـ در مربع ABCD دو نقطهٔ E و F به ترتیب روی اضلاع BC و CD در نظر گرفته شده‌اند به طوریکه $BE = \frac{1}{2} BC$ و $DF = \frac{1}{3} DC$. اندازهٔ زاویهٔ $E\hat{A}F$ را بدست آورید.



۶۱ـ اگر $\vec{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$ سه بردار باشند، نشان دهید:

$$\vec{x} \,.\, (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \,.\, \vec{y} + \vec{x} \,.\, \vec{z}$$

۶۲ـ حاصل عبارت $\frac{7\vec{i} \,.\, 6\vec{j}}{2\vec{i} \,.\, 3\vec{j}}$ را بدست آورید.

۶۳ـ اگر $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $D\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ رئوس چهارضلعی ABCD باشند نشان دهید قطرهای این چهار ضلعی بر هم عمودند.

۶۴ـ اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ و $D(x_4, y_4)$ چهار نقطه باشند شرط توازی و تعامد

MATH75.IR

دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ را معین کنید.

۶۵ـ اگر دو بردار $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -m \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۲m - ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ برهم عمود باشند مقدار m چقدر است؟

۶۶ـ حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید.

$$A = \frac{(۳\vec{i} - ۴\vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j})}{(۲\vec{i} + ۳\vec{j}) \cdot (-\vec{i} - ۲\vec{j})}$$

۶۷ـ به کمک ضرب داخلی زاویهٔ بین بردارهای $\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{i} - \vec{j}$ را بدست آورید.

۶۸ـ دو بردار $\vec{V}_۱ = m\vec{i} + \vec{j}$ و $\vec{V}_۲ = ۳\vec{i} - ۲\vec{j}$ مفروضند. حدود m را چنان تعیین کنید که زاویهٔ بین $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ حاده باشد.

۶۹ـ دو بردار $\vec{V}_۱ = ۲\vec{i} + ۳\vec{j}$ و $\vec{V}_۲ = k\vec{i} + \vec{j}$ مفروضند. k را چنان تعیین کنید که:

الف) $\vec{V}_۱$ بر $\vec{V}_۲$ عمود باشد.

ب) $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ در یک راستا باشند.

ج) زاویهٔ بین $\vec{V}_۱$ و $\vec{V}_۲$ مساوی ۱۲۰° باشد.

۷۰ـ نشان دهید دو بردار $\vec{V}_۱ = ۳\vec{i} - \vec{j}$ و $\vec{V}_۲ = \vec{i} + ۳\vec{j}$ برهم عمودند.

۷۱ـ زاویهٔ بین بردارهای $\vec{V}_۱ = ۲\vec{i}$ و $\vec{V}_۲ = \vec{i} + \vec{j}$ را تعیین کنید.

۷۲ـ اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۳ \\ \sqrt{۳} \end{bmatrix}$ باشد اولاً اندازهٔ بردار $\vec{V}$ را حساب کنید. ثانیاً زاویهٔ بین بردار $\vec{a}$ و بردارهای i و j را تعیین کنید.

۷۳ـ اگر $|\vec{a}| = ۴$ و $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{۱۳}$ و زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر ۱۲۰° باشد، اندازهٔ $\vec{b}$ را تعیین کنید.

۷۴ـ اگر بردارهای a و b با هم زاویهٔ ۳۰° بسازند بردار $۴\vec{b} - \vec{a}$ را رسم کنید.

۷۵ـ اگر $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲$ و $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = ۱۵۰^\circ$، اندازهٔ بردار $۳\vec{a} - ۴\vec{b}$ را بدست آورید.

۷۶ـ اگر $A(۳, ۱)$ و $B(۰, ۴)$ و $C(۷, ۵)$ رأسهای یک مثلث باشند با روش برداری ثابت کنید مثلث قائم‌الزاویه است.

۷۷ـ اگر a و b دو بردار ناصفر باشند، آنگاه زاویهٔ بین بردار $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ و $(|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b})$ چند درجه است؟

MATH75.IR

۷۸ـ به روش برداری ثابت کنید ارتفاعهای هر مثلث در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند.

۷۹ـ ثابت کنید نقطه‌های وسط دو قاعده یک ذوزنقه و نقطهٔ برخورد ساقها بر یک خط راست قرار می‌گیرند.

۸۰ـ $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ مختصات قرینهٔ بردار $\vec{a}$ را نسبت به مبداء مختصات، محور طول، محور عرض، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم و نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم بدست آورید.

MATH75.IR

فصل نهم

بخش اول: آنالیز ترکیبی

موضوع این قسمت از علم ریاضی بررسی ابزارهایی برای شمارش است. در این قسمت به ابزارهایی در شمارش دست می‌یابیم که برای یک فرایند که حالات مختلفی برای آن متصور است عددی بزرگ را بدست می‌آوریم، بدون آنکه واقعاً تمام حالت‌بندی‌ها را شمرده باشیم.

فاکتوریل

اگر n عددی طبیعی باشد حاصلضرب اعداد طبیعی از ۱ تا (با) n را با نماد $\underline{n!}$ نشان می‌دهند.

$$۱! = ۱$$

$$۲! = ۱ \times ۲ = ۲$$

$$۳! = ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶$$

$$۴! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴$$

$$\vdots$$

قرارداد: قرار می‌گذاریم $۰! = ۱$. این قرارداد به خاطر آنستکه در آینده به فرمول‌هایی دست خواهیم یافت که به ازاء اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n برقرار است و برای برقراری آنها به ازاء صفر ناچاریم که $۰!$ را برابر یک بگیریم. با دقت در فرمول فاکتوریل ملاحظه می‌گردد که این تعریف یک تعریف بازگشتی است. به عبارتی برای یافتن فاکتوریل یک عدد طبیعی داشتن مقدار فاکتوریل عدد قبل از آن لازم است.

$$\boxed{n \in N \quad \Rightarrow \quad (n + ۱)! = (n + ۱) \times n!}$$

MATH75.IR

همچنین گاهی اوقات به جای محاسبهٔ حاصلضرب اعداد از ۱ تا (یا) n، شاید لازم باشد حاصلضرب اعداد از n تا (یا) ۱ را در نظر بگیریم.

مثال ۱: مقدار هر یک از عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $۲! + ۳!$

ب) $۵!$

ج) $۵! - ۳!$

د) $((۲!)!)!$

هـ) $۲! \times ۳!$

و) $\frac{۸!}{۷!}$

ز) $\frac{۱۰!}{۳! \times ۷!}$

ح) $\frac{(n + ۲)!}{n!}$

ط) $\frac{n \times n! - (n - ۱)!}{(n + ۱)!}$

ی) $۲!^{۳!}$

حل:

الف) $۲! + ۳! = ۲ + ۶ = ۸$

ب) $۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$

ج) $۵! - ۳! = ۱۲۰ - ۶ = ۱۱۴$

د) $((۲!)!)! = ۲$

هـ) $۲! \times ۳! = ۲ \times ۶ = ۱۲$

و) $\frac{۸!}{۷!} = \frac{۸ \times ۷!}{۷!} = ۸$

ز) $\frac{۱۰!}{۳! \times ۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۶ \times ۷!} = ۱۲۰$

ح) $\frac{(n + ۲)!}{n!} = \frac{(n + ۲)(n + ۱)n!}{n!} = (n + ۲)(n + ۱) = n^۲ + ۳n + ۲$

ط) $\frac{n \times n! - (n - ۱)!}{(n + ۱)!} = \frac{n^۲ \times (n - ۱)! - (n - ۱)!}{(n + ۱)!} = \frac{(n - ۱)!(n^۲ - ۱)}{(n + ۱) \times n \times (n - ۱)!}$

$= \frac{n - ۱}{n}$

ی) $۲!^{۳!} = ۲^۶ = ۶۴$

در مثال بالا ملاحظه شد که هیچیک از نتایج زیر کلی نیستند.

$(m + n)! = m! + n!$ $\qquad$ $(m - n)! = m! - n!$

$(mn)! = m! \times n!$ $\qquad$ $(\frac{m}{n})! = \frac{m!}{n!}$

MATH75.IR

مثال ۲: مقدار x را از تساوی مقابل بدست آورید.

$$(x^{۲} + x)! = ۱$$

حل: با توجه به تعریف فاکتوریل دو حالت باید در نظر گرفت.

حالت اول: $x^{۲} + x = ۰ \Rightarrow x(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = -۱$

حالت دوم:

$$x^{۲} + x = ۱ \Rightarrow x^{۲} + x - ۱ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱ + \sqrt{۵}}{۲} \text{ یا } x = \frac{-۱ - \sqrt{۵}}{۲}$$

بنابراین معادلهٔ فوق در **Z** دارای دو ریشه و در **R** دارای چهار ریشه است.

مثال ۳: عدد طبیعی n را چنان بیابید که داشته باشیم:

$$(n + ۱)! + n! = ۵۷۶۰$$

حل: اگر عدد ۵۷۶۰ را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کنیم خواهیم داشت:

$$۵۷۶۰ = ۲^{۷} \times ۳^{۲} \times ۵$$

$$۵۷۶۰ = ۲ \times ۳ \times ۲^{۲} \times ۵ \times (۲ \times ۳) \times ۲^{۳} = (۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶) \times ۸ = ۶! \times ۸$$

بنابراین:

$$(n + ۱)! + n! = ۶! \times ۸ \Rightarrow (n + ۱) \times n! + n! = ۶! \times ۸ \Rightarrow$$

$$n! \times (n + ۲) = ۶! \times ۸$$

که با مقایسه دو طرف در می‌یابیم $n = ۶$.

مثال ۴: عدد !۱۰ را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کنید.

حل:

$$۱۰! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ \times ۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ \times ۱۰$$

$$= ۲ \times ۳ \times ۲^{۲} \times ۵ \times ۲ \times ۳ \times ۷ \times ۲^{۳} \times ۳^{۲} \times ۲ \times ۵ = ۲^{۸} \times ۳^{۴} \times ۵^{۲} \times ۷$$

قضیهٔ چبیشف

این قضیه بیان می‌کند که اگر n یک عدد طبیعی و p یک عدداول باشد.بزرگترین توانی از p که در تجزیهٔ !n به حاصلضرب عوامل اول بدست می‌آید عبارتست از:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^{۲}}\right] + \left[\frac{n}{p^{۳}}\right] + \dots$$

که در آن منظور از [ ] جزء صحیح می‌باشد.

MATH75.IR

مثال ۵: بزرگترین توان ۷ در تجزیهٔ !۱۰۰ به حاصلضرب عوامل اول چیست؟

حل: بنابر قضیهٔ فوق با انتخاب $n = ۱۰۰$ و $p = ۷$ داریم:

$$\left[\frac{۱۰۰}{۷}\right] + \left[\frac{۱۰۰}{۴۹}\right] + \left[\frac{۱۰۰}{۳۴۳}\right] + \dots = ۱۴ + ۲ + ۰ + \dots = ۱۶$$

ملاحظه می‌کنید که از مرحله‌ای به بعد مقدار جزء صحیح‌ها صفر می‌باشد.

مثال ۶: نشان دهید که عدد !۵۵ بر $۳۶^{۱۲}$ بخشپذیر است.

حل: می‌دانیم $۳۶^{۱۲} = ۶^{۲۴}$. کافیست بدانیم در نوشتن !۵۵، عدد ۶ با چه توانی ظاهر می‌شود؟ لذا کافیست ملاحظه کنیم که در تجزیهٔ !۵۵ اعداد ۲ و ۳ با چه توانی ظاهر می‌شوند؟

$$\text{توان ۲ در تجزیهٔ } ۵۵! = \left[\frac{۵۵}{۲}\right] + \left[\frac{۵۵}{۴}\right] + \left[\frac{۵۵}{۸}\right] + \left[\frac{۵۵}{۱۶}\right] + \dots =$$

$$۲۷ + ۱۳ + ۶ + ۳ + ۱ + ۰ + \dots = ۵۰$$

$$\text{توان ۳ در تجزیه } ۵۵! = \left[\frac{۵۵}{۳}\right] + \left[\frac{۵۵}{۹}\right] + \left[\frac{۵۵}{۲۷}\right] + \left[\frac{۵۵}{۸۱}\right] + \dots =$$

$$= ۱۸ + ۶ + ۲ + ۰ + \dots = ۲۶$$

بنابراین در این تجزیه تعداد ۲ها بیشتر از تعداد ۳ها می‌باشد و این بدیهی است (چرا؟) پس می‌توان گفت بزرگترین توان ۶ در نوشتن !۵۵ به صورت حاصلضرب برابر است با $۶^{۲۶}$. (چرا؟) یعنی $۵۵! = ۶^{۲۶} \times x$ $(x \in N)$. این تساوی نشان می‌دهد که !۵۵ بر $۶^{۲۴}$ بخشپذیر است.

مثال ۷: باقیماندهٔ تقسیم حاصلجمع $۱! + ۲! + ۳! + \dots + ۱۳۸۱!$ بر ۱۲ چیست؟

حل: می‌دانیم که اعداد !۴، !۵ و ... همگی بر ۱۲ بخشپذیرند. (چرا؟) پس باقیماندهٔ این حاصلجمع بر ۱۲ باقیماندهٔ تقسیم حاصل جمع $۱! + ۲! + ۳! = ۹$ بر ۱۲ یکسان است. و چون باقیماندهٔ ۹ بر ۱۲ همان ۹ است پس باقیماندهٔ حاصلجمع بالا بر ۱۲ برابر ۹ است.

مثال ۸: ثابت کنید:

$$(n \in N)\ \frac{۲ \times ۴ \times ۶ \times \dots \times (۲n)}{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۲n - ۱)} = \frac{۲^{۲n} \times (n!)^۲}{(۲n)!}$$

حل: صورت و مخرج کسر سمت چپ را در عبارت صورت ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{۲ \times ۴ \times ۶ \times \dots \times (۲n)}{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots \times (۲n - ۱)} = \frac{[۲ \times ۴ \times ۶ \times \dots \times (۲n)]^۲}{۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times \dots \times (۲n - ۱) \times ۲n} =$$

$$= \frac{[(۲ \times ۱) \times (۲ \times ۲) \times (۲ \times ۳) \times \dots \times (۲ \times n)]^۲}{(۲n)!} = \frac{(۲^n \times n!)^۲}{(۲n)!} = \frac{۲^{۲n} \times (n!)^۲}{(۲n)!}$$

MATH75.IR

مثال ۹: ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲!} + \frac{۲}{۳!} + \frac{۳}{۴!} + \dots + \frac{n}{(n+۱)!} = ۱ - \frac{۱}{(n+۱)!}$$

حل:

$$\frac{۱}{۲!} + \frac{۲}{۳!} + \frac{۳}{۴!} + \dots + \frac{n}{(n+۱)!} = \frac{۲-۱}{۲!} + \frac{۳-۱}{۳!} + \frac{۴-۱}{۴!} + \dots + \frac{(n+۱)-۱}{(n+۱)!}$$

$$= \frac{۲}{۲!} - \frac{۱}{۲!} + \frac{۳}{۳!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۴}{۴!} - \frac{۱}{۴!} + \dots + \frac{(n+۱)}{(n+۱)!} - \frac{۱}{(n+۱)!} =$$

$$= ۱ - \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۳!} - \frac{۱}{۴!} + \dots + \frac{۱}{n!} - \frac{۱}{(n+۱)!} =$$

$$= ۱ - \frac{۱}{(n+۱)!}$$

اصل ضرب (اصل شمارش)

این اصل بیان می‌کند که اگر رُخ دادن عملی به m طریق و رخ دادن عمل دیگری به n طریق قابل انجام باشد این دو عمل تواماً به mn طریق قابل انجامند.

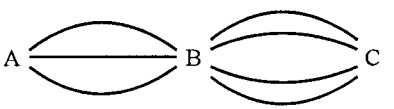
البته تعمیم این اصل نیز برقرار است به این صورت که اگر عمل اول به $m_۱$ طریق، عمل دوم به $m_۲$ طریق و ... و عمل kام به m_k طریق امکانپذیر باشند این اعمال با هم به

$$m_۱ \times m_۲ \times \dots \times m_k$$

طریق امکانپذیرند.

مثال ۱۰: از شهر A به شهر B سه نوع وسیله نقلیه و از شهر B به شهر C چهار نوع وسیلهٔ نقلیه در رفت و آمد می‌باشند. یک مسافر به چند طریق از شهر A و از طریق شهر B می‌تواند به شهر C مسافرت کند؟

حل:



طبق اصل ضرب چون عمل اول (رفتن از A به B) به ۳ طریق و عمل دوم (رفتن از B به C) به ۴ طریق امکانپذیر است، این دو عمل با هم به ۱۲ = ۴ × ۳ طریق امکانپذیرند.

مثال ۱۱: ثابت کنید هر مجموعهٔ n عضوی ۲^n زیر مجموعه دارد.

حل: فرض کنیم $A = \{a_۱, a_۲, \dots, a_n\}$ یک مجموعهٔ n عضوی و $X \subset A$ یک زیر مجموعهٔ دلخواه از A باشد. $a_۱$ به X یا تعلق دارد یا ندارد (۲ حالت). $a_۲$ یا به X تعلق دارد یا ندارد. (۲

MATH75.IR

حالت) و ... و a_n به X تعلق دارد یا ندارد (۲ حالت). پس طبق اصل ضرب می‌توان گفت تعداد کل X هایی که زیر مجموعهٔ A می‌باشند عبارتست از: $\underbrace{۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{n \text{ بار}} = ۲^n$.

جایگشت

اگر $a_۱$، $a_۲$، ... ، a_n، n شیئی دو بدو متمایز باشند هر حالت از قرار گرفتن این اشیاء کنار هم در یک ردیف را یک جایگشت از این n شیئی گویند. بنابر اصل ضرب تعداد کل جایگشت‌های این n شیئی برابر است با !n.

مثال ۱۲: به چند طریق ۵ نفر در یک ردیف کنار هم می‌توانند بنشینند؟

حل: پنج مکان خالی برای نشستن موجود است.

مکان پنجم	مکان چهارم	مکان سوم	مکان دوم	مکان اول

برای پر کردن مکان اول پنج حالت، برای پر کردن مکان دوم چهار حالت (چون یکی در مکان اول قرار گرفته و تعداد افراد یکی کم شده) و ... و برای پر کردن مکان پنجم یک حالت امکانپذیر است.

این اعمال باهم طبق اصل ضرب به $۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵$ طریق امکان‌پذیراست. این عدد همان جایگشت پنج شیئی دوبدو متمایز در یک ردیف کنار هم می‌باشند.

مثال ۱۳: یک جعبه مداد رنگی ۶ رنگه موجود است. به چند طریق می‌توان مدادها را در جعبه کنار هم چید اگر قرار باشد:

الف ـ مداد رنگ سفید و مداد رنگ سرخ کنار هم باشند.

ب ـ مداد رنگ سفید و مداد رنگ سرخ کنار هم نباشند.

ج ـ مداد رنگ سفید کنار مداد رنگ سرخ و سمت چپ آن واقع باشد.

حل: الف ـ فرض کنیم این دو مداد مخصوص را با چسب به هم چسبانده‌ایم. پس حالا یک مداد به حساب می‌آیند. می‌توان چنین تصور کرد که حالا $۵ = ۱ + (۲ - ۶)$ مداد داریم. این پنج مداد به $۱۲۰ = !۵$ طریق می‌توانند کنار هم واقع شوند. اما این کار عمل اول به حساب می‌آید. عمل دیگری نیز وجود دارد که در آن این دو مداد در کنار هم جابجا شوند (سفید ـ سرخ) یا (سرخ ـ سفید) پس عمل دوم به $۲ = !۲$ طریق امکانپذیر است. لذا این دو عمل با هم به $۲۴۰ = ۲ \times ۱۲۰ = !۲ \times !۵$ طریق امکانپذیرند.

ب ـ می‌دانیم کل حالات قرار گرفتن این ۶ مداد در جعبه کنار هم به $۷۲۰ = !۶$ طریق امکانپذیر

MATH75.IR

است. طبق قسمت (الف) در ۲۴۰ حالت آن دو مداد سرخ و سفید کنار هم می‌باشند. پس در بقیه موارد یعنی ۴۸۰ = ۲۴۰ − ۷۲۰ حالت این دو مداد کنار هم نیستند.

ج ـ فرق این قسمت با قسمت (الف) در این است که از دو حالتی که در آنجا در عمل دوم موجود بود یکی از آنها یعنی حالت (سفید ـ سرخ) مورد نظر است. یعنی عمل دوم به یک طریق امکانپذیر است و تعداد حالات در این قسمت همان ۱۲۰ = !۵ است.

تبدیل r شیئی از n شیئی $(1 \le r \le n)$

فرض کنیم a_1، a_2، ...، a_n، n شیئی دوبدو متمایز باشند و بخواهیم r تا از آنها را $(1 \le r \le n)$ در یک ردیف کنار هم قرار دهیم. قبلاً دیدیم که اگر $r = n$ باشد (یعنی بخواهیم همهٔ آنها را در یک ردیف کنار هم قرار دهیم) این کار به !n طریق امکانپذیر است.

اینک r مکان خالی بصورت زیر موجود است.

مکان اول	مکان دوم	مکان سوم	...	مکان rام

برای پر کردن مکان اول n حالت، برای پرکردن مکان دوم $n - 1$ حالت، برای پر کردن مکان سوم $n - 2$ حالت و ... و برای پر کردن مکان rام $n - (r - 1)$ حالت امکانپذیر است. طبق اصل ضرب این اعمال توأماً به:

$$n(n-1)(n-2)\dots[n-(r-1)] = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

طریق امکانپذیر است. برای اینکه عدد بدست آمده رابتوانیم بصورت فاکتوریل نمایش دهیم کافیست حاصلضرب اخیر را در $(n - r)!$ ضرب و بر همین عبارت تقسیم کنیم. در اینصورت تعداد حالات در این قسمت برابر خواهد بود با:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

این عدد را معمولاً با یکی از نمادهای $p(n, r)$ یا $(n)_r$ نشان داده به آن تبدیل r شیئی از n شیئی می‌گویند. پس:

$$\boxed{p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

در حالت خاصی که $r = n$ است، داریم:

$$p(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

این یکی از دلایلی است که قرار داد کردیم ۱ = !۰ باشد.

MATH75.IR

مثال ۱۴ : با حروف کلمهٔ "MAGNET" چند کلمهٔ با معنی یا بی‌معنی چهار حرفی می‌توان نوشت؟

حل : می‌خواهیم تعداد کل جایگشت‌های چهار شیئی از شش شیئی داده شده را بیابیم. طبق فرمول بدست آمده با اختیار $n = ۶$ و $r = ۴$ داریم:

$$p(۶ , ۴) = \frac{۶!}{(۶ - ۴)!} = \frac{۶!}{۲!} = \frac{۷۲۰}{۲} = ۳۶۰$$

مثال ۱۵ : می‌خواهیم از بین هفت نفر کاندید سه نفر آنها را برای پست‌های مدیریت، معاونت و حسابداری یک شرکت برگزینیم. این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

حل : تعداد جایگشت‌های سه تایی از هفت شیئی عبارتست از:

$$p(۷ , ۳) = \frac{۷!}{(۷ - ۳)!} = \frac{۷!}{۴!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!}{۴!} = ۲۱۰$$

با کمی دقت ملاحظه می‌کنید که هر یک از این ۲۱۰ حالت یکی از طریقه‌های انتخاب مدیر، معاون و حسابدار نیز می‌باشد.

نکته: در هر یک از جایگشت‌های r شیئی $(۱ \leq r \leq n)$ ترتیب قرار گرفتن این r شیئی کنار هم مهم است. (زیرا قبلاً با حفظ ترتیب اینها را بدست آورده‌ایم). لذا هر جا صحبت از یافتن جایگشت‌هایی است که ترتیب قرار گرفتن اشیاء کنار هم مهم است به نوعی از فرمول تبدیل r شیئی از n شیئی بهره می‌جوییم.

مثال ۱۶ : سه مسافر وارد شهری می‌شوند که دارای پنج مسافرخانه است. اگر قرار باشد هر مسافرخانه پذیرای حداکثر یک مسافر باشد به چند طریق مسافران می‌توانند در این مسافرخانه‌ها توزیع شوند.

حل : در اینجا نیز با تبدیل سه شیئی از پنج شیئی مواجه‌ایم. تعداد حالات عبارتست از:

$$p(۵ , ۳) = \frac{۵!}{(۵ - ۳)!} = \frac{۵!}{۲!} = \frac{۱۲۰}{۲} = ۶۰$$

مثال ۱۷ : سه کتاب علمی مختلف و دو کتاب داستان مختلف موجودند.به چند طریق می‌توان این کتاب‌ها را در یک قفسه کنارهم چید هرگاه:

الف ـ محدودیتی نباشد. ب ـ کتاب‌های علمی کنار هم و کتاب‌های داستان کنار هم باشند.

ج ـ کتاب‌های داستان کنار هم نباشند. د ـ کتاب‌های علمی و داستان بصورت یک در میان کنار هم باشند.

MATH75.IR

حل: الف ـ ۱۲۰ = !۵

ب ـ سه کتاب علمی را به عنوان یک کتاب و دو کتاب داستان را نیز به عنوان یک کتاب در نظر می‌گیریم. پس دو شیئی داریم که به ۲ = !۲ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند. (عمل اول) اما کتاب‌های علمی در کنار یکدیگر به ۶ = !۳ طریق و کتاب‌های داستان ۲ = !۲ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند (عمل دوم) پس این دوعمل تواماً به ۲۴ = ۲ × ۶ × ۲ طریق امکانپذیرند.

ج ـ ابتدا کتاب‌های علمی را به ۶ = !۳ طریق با یک فاصلهٔ مناسب می‌چینیم.

این سه کتاب چهار فضای خالی ایجاد می‌کنند. اینک به ۱۲ = $\frac{۴!}{۲!}$ = (۴ , ۲)P طریق می‌توانیم کتاب‌های داستان را در این چهار فضای خالی ایجاد شده قرار دهیم. پس این دو عمل به ۷۲ = ۱۲ × ۶ طریق امکانپذیرند.

د ـ ۳! × ۲! = ۶ × ۲ = ۱۲

مثال ۱۸: یک اتوبوس با ۲۰ مسافر از مبدا حرکت کرده و تا رسیدن به مقصد در ۱۰ ایستگاه توقف می‌کند. کلیهٔ حالاتی که مسافران در ایستگاه‌ها پیاده خواهند شد چند تاست؟

حل: مسافر اول برای پیاده شدن ۱۰ انتخاب دارد. مسافر دوم نیز برای پیاده شدن ۱۰ انتخاب و ... و مسافر بیست‌اُم نیز برای پیاده شدن ۱۰ انتخاب در پیش رو دارد. طبق اصل ضرب این کار به $۱۰^{۲۰}$ = $\underbrace{۱۰ \times ... \times ۱۰ \times ۱۰}_{\text{۲۰ بار}}$ طریق امکانپذیر است.

مثال ۱۹: در یک آزمون تستی ۱۰ سؤال مطرح شده یک دانش‌آموز به هر سؤال یا پاسخ درست می‌دهد یا پاسخ غلط و یا اصلاً پاسخ نمی‌دهد. تحت این شرایط برگهٔ پاسخنامه به چند طریق می‌تواند پر شود؟

حل: برای پاسخ به سؤال یک، ۳ حالت، برای پاسخ به سؤال دو، ۳ حالت و ... و برای پاسخ به سؤال ده نیز ۳ حالت موجود است. طبق اصل ضرب تعداد کل حالات عبارتست از:

MATH75.IR

$$\underbrace{۳ \times ۳ \times \ldots \times ۳}_{\text{۱۰ بار}} = ۳^{۱۰} = ۵۹۰۴۹$$

مثال ۲۰: علی ۱۰ کتاب مختلف و حسین ۸ کتاب مختلف دارند، قرار است این دو، یک کتاب خود را با هم تعویض کنند. (علی یک کتاب به حسین و حسین یکی از کتاب‌های خودش را به علی بدهد). این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

حل: علی ۱۰ انتخاب و حسین ۸ انتخاب پیش‌رو دارند. طبق اصل ضرب این کار به ۸۰ = ۸ × ۱۰ طریق امکانپذیر است.

مثال ۲۱: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ چند عدد سه رقمی بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت بطوریکه:

الف ـ محدودیتی نباشد.
ب ـ زوج باشند.
ج ـ فرد باشند.
د ـ مضرب ۵ باشند.
هـ ـ یک در میان زوج و فرد باشند.
و ـ با فرد شروع و به زوج ختم شوند.
ز ـ یکان آنها عدد اول باشد.
ح ـ از ۴۰۰ بزگتر باشند.
ط ـ بر ۹ بخشپذیر باشند.

حل: برای تمام حالات سه مکان خالی خواهیم داشت که با توجه به شرایط داده شده اقدام به پر کردن آنها خواهیم کرد.

مکان سوم	مکان دوم	مکان اول

الف ـ مکان اول به ۷ طریق، مکان دوم به ۶ طریق (چون تکرار مجاز نیست) و مکان سوم به ۵ طریق امکانپذیرند. طبق اصل ضرب این سه عمل با هم به ۲۱۰ = ۵ × ۶ × ۷ طریق مسیّر است.

ب ـ برای پر کردن مکان سوم ۳ حالت، برای پر کردن مکان اول ۶ حالت (یکی از هفت تا را در خانه سوم نوشته‌ایم) و برای پر کردن مکان دوم به ۵ = ۲ − ۷ حالت موجود است. طبق اصل ضرب کلیه حالات عبارتست از:

۶ × ۵ × ۳ = ۹۰

ج ـ تفاضل حالت (الف) و (ب) جواب این قسمت است (چرا؟)

۲۱۰ − ۹۰ = ۱۲۰

د ـ برای پر کردن خانه سوم یک حالت، برای پر کردن خانه اول ۶ حالت و برای پر کردن خانه دوم ۵ حالت امکانپذیر است. پس این سه عمل با هم به ۳۰ = ۱ × ۵ × ۶ طریق امکانپذیر است.

MATH75.IR

هـ ـ فرم عدد به یکی از صورت‌های

ز	ف	ز

(۱)

یا

ف	ز	ف

(۲)

می‌باشد. تعداد اعداد به فرم (۱) عبارتست از: ۲۴ = ۲ × ۴ × ۳ و تعداد اعداد به فرم (۲) عبارتست از ۳۶ = ۳ × ۳ × ۴. لذا کل اعداد به فرم خواسته شده ۶۰ = ۳۶ + ۲۴ می‌باشد.

و ـ

ز		ف

مانند قسمت قبل تعداد حالت عبارتست از: ۶۰ = ۳ × ۵ × ۴

ز ـ به جای یکان یکی از اعداد ۲ ، ۳، ۵ یا ۷ را می‌توان نوشت. برای مکان اول ۶ = ۱ − ۷ حالت و برای مکان دوم ۵ = ۲ − ۷ طریق میسر است. پس طبق اصل ضرب تعداد این اعداد عبارتست از:

$$۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$$

ح ـ مکان اول (صدگان) یکی از ارقام ۴ ، ۵ ، ۶ یا ۷ باید باشد. یعنی برای پر کردن مکان اول ۴ طریق امکانپذیر است. مکان دوم به ۶ = ۱ − ۷ طریق و مکان اول به ۵ = ۲ − ۷ طریق. طبق اصل ضرب تعداد این حالات نیز عبارتست از: ۱۲۰ = ۵ × ۶ × ۴

ط ـ ابتدا باید آن سه رقمی را انتخاب کنیم که مجموعشان ۹ یا مضربی از ۹ باشد. با کمی دقت ملاحظه می‌شود که سه تایی‌های زیر این خاصیت را دارند.

۴ و ۳ و ۲ ۵ و ۳ و ۱ ۶ و ۲ و ۱

اینک هر دسته از اعداد انتخاب شده ۶ = !۳ جایگشت را ایجاد می‌کنند. پس تعداد کل این حالت نیز عبارتست از ۱۸ = ۶ × ۳.

مثال ۲۲: با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی زوج بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت؟

حل: در اینجا نیز سه مکان بصورت

مکان سوم	مکان دوم	مکان اول

موجود است که باید تحت شرایط آنها را پر کنیم. راه مستقیم برای یافتن تعداد اعداد زوج در این حالت طولانی است (به علت وجود صفر) ولی بهتر است ابتدا تعداد کل سه رقمی‌ها را یافته و سپس تعداد سه رقمی‌های فرد را از آن کم کرد.

تعداد کل اعداد سه رقمی که با ارقام فوق می‌توان نوشت عبارتست از:

MATH75.IR

مکان سوم	مکان دوم	مکان اول

$$۵ \times ۵ \times ۴ = ۱۰۰$$

تعداد اعداد فرد سه رقمی که با ارقام فوق می‌توان نوشت عبارتست از:

مکان سوم	مکان دوم	مکان اول

$$۴ \times ۴ \times ۳ = ۴۸$$

پس تعداد سه رقمی‌های زوج عبارتست از: ۵۲ = ۴۸ − ۱۰۰

جایگشت‌های با تکرار

فرض کنید می‌خواهیم فقط با ارقام ۱ و ۲ و ۲ و ۳ اعداد چهار رقمی بسازیم. یعنی در این اعداد عدد (۱) یک بار، عدد (۲) دو بار و عدد (۳) یک بار آمده باشد. بدیهی است که اگر این چهار رقم متمایز (و به غیر از صفر) بودند تعداد این اعداد چهار رقمی ۲۴ = !۴ تابود. اما اصل ضرب ندانسته! «دوها» را مختلف در نظر گرفته و جابجا شدن ۲ها را به عنوان حالت جدید تصور کرده. پس آنچه می‌بینیم ۲ = !۲ برابر تعداد واقعی است.بنابراین تعداد واقعی عبارتست از $\frac{۲۴}{۲} = ۱۲$ و اعداد عبارتند از:

۱۲۲۳ , ۳۲۲۱ , ۲۱۲۳ , ۲۳۲۱ , ۲۱۳۲ , ۲۳۱۲ , ۱۳۲۲ , ۳۱۲۲ , ۱۲۳۲ , ۳۲۱۲ , ۲۲۱۳ ,
۲۱۳۱

این مثال را می‌توان تعمیم داد. به اینصورت که اگر n شیئی داشته باشیم که $m_۱$ تا از نوع اول، $m_۲$ تا از نوع دوم و ... و m_k تا از نوع kاُم باشند $(m_۱ + m_۲ + ... + m_k = n)$ این n شیئی به $\frac{n!}{m_۱!\, m_۲! \dots m_k!}$ طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار گیرند.

مثال ۲۳: ۸ پرچم موجودند که ۳ تا به رنگ آبی، ۲ تا به رنگ قرمز و ۳ تا به رنگ سفید یکسان هستند. اگر قرار باشد این پرچم‌ها در یک ردیف و در کنار هم آویزان شوند چند علامت هشت پرچمی مختلف می‌توان ساخت؟

حل: در اینجا $n = ۸$ ، $m_۱ = ۳$ ، $m_۲ = ۲$ و $m_۳ = ۲$ $(۳ + ۲ + ۳ = ۸)$ است. پس کل حالات عبارتست از:

$$\frac{۸!}{۳!\ ۲!\ ۳!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳!}{۶ \times ۲ \times ۳!} = ۵۶۰$$

مثال ۲۴: با ارقام ۰ و ۰ و ۰ و ۱ و ۱ چند علامت رمز پنج رقمی می‌توان ارسال کرد؟

MATH75.IR

حل:

$$\frac{۵!}{۲!\,۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳!}{۲ \times ۳!} = ۱۰$$

ترکیب r شیئی از n شیئی دو بدو متمایز

گاهی اوقات در انتخابمان ترتیب قرارگرفتن یا گزینش اشیاء کنار هم مهم نیست و همین که چند عضو انتخاب شوند کافیست. فرض کنید بخواهیم زیر مجموعه‌ای دو عضوی از مجموعهٔ $A = \{a , b , c , d\}$ را تشکیل دهیم. می‌دانیم این زیر مجموعه‌ها عبارتند از:

$\{a , b\}$ $\{a , c\}$ $\{a , d\}$ $\{b, c\}$ $\{b , d\}$ $\{c, d\}$

از نظر ما $\{a , b\} = \{b , a\}$ ، $\{a , c\} = \{c , a\}$ و ... می‌باشند. اگر ترتیب قرارگرفتن مهم بود با استفاده از فرمول ترتیب عدد:

$$P(۴ , ۲) = \frac{۴!}{(۴ - ۲)!} = \frac{۲۴}{۲} = ۱۲$$

حاصل می‌شد. در حالی که در اینجا $۱۲ \div ۲! = ۱۲ \div ۲ = ۶$ حالت بیشتر اتفاق نمی‌افتد. این نشان می‌دهد که برای یافتن تعداد دقیق در این حالت عدد حاصل از فرمول ترتیب را باید بر تعداد جایگشت‌های آن اشیاء تقسیم کنیم. پس می‌توان گفت:

اگر n شیئی دوبدو متمایز داشته باشیم و بخواهیم r تا از آنها را بدون رعایت ترتیب انتخاب کنیم این کار به $\frac{P(n , r)}{r!}$ طریق امکان‌پذیر است. این عدد را با نماد $C(n , r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهند و به فرمول ترکیب r شیئی از n شیئی معروف است. بنابراین:

$$C(n , r) = \frac{P(n , r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n - r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n - r)!r!}$$

یعنی:

$$\boxed{C(n , r) = \frac{n!}{r!(n - r)!}}$$

مثال ۲۵: یک مجموعهٔ ۷ عضوی چند زیر مجموعهٔ ۲ عضوی دارد؟ چند زیر مجموعه ۵ عضوی دارد؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل:

$$C(۷ , ۲) = \frac{۷!}{۲!۵!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵!}{۲ \times ۵!} = ۲۱$$

$$C(۷ , ۵) = \frac{۷!}{۵!۲!} = ۲۱$$

MATH75.IR

این مثال نشان می‌دهد که تعداد زیر مجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه ۷ عضوی با تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی از یک مجموعهٔ ۷ عضوی یکسان است. این یک امر بدیهی است زیرا با انتخاب شدن یک زیر مجموعه ۲ عضوی به طور اتوماتیک یک زیر مجموعه ۵ عضوی تولید می‌شود.

بطور کلی می‌توان گفت که اگر $a + b = n$ (a و b دو عدد صحیح غیر منفی‌اند) آنگاه:

$$\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$$

مثال ۲۶: نشان دهید:

$$(۰ \le r \le n) \qquad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

حل: با توجه به نکته فوق چون $r + (n - r) = n$ پس تساوی برقرار است.

مثال ۲۷: اگر n یک عدد طبیعی باشد حاصل جمع $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \dots + \binom{n}{n}$ چیست؟

حل: $\binom{n}{۰}$ تعداد زیر مجموعه‌های صفر عضوی (یعنی همان $\varnothing$)، $\binom{n}{۱}$ تعداد زیر مجموعه‌های یک عضوی، ... $\binom{n}{n}$ تعداد زیر مجموعه‌های n عضوی (یعنی خود مجموعه) از یک مجموعهٔ n عضوی می‌باشند. می‌دانیم تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی ۲^n است. پس می‌توان گفت:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \dots + \binom{n}{n} = ۲^n$$

مثال ۲۸: با ۱۰ نقطه واقع بر محیط یک دایره:

الف ـ چند پاره خط می‌توان رسم کرد؟

ب ـ چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

حل: الف ـ هر پاره خط را می‌توان به عنوان یک زیر مجموعهٔ دو عضوی از یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی در نظر گرفت که تعداد آنها عبارتست از:

$$\binom{۱۰}{۲} = \frac{۱۰!}{۲!۸!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۲ \times ۸!} = ۴۵$$

ب ـ هر مثلث دارای سه رأس است و این سه رأس را می‌توان به عنوان یک زیر مجموعهٔ سه عضوی از یک مجموعهٔ ۱۰ عضوی انگاشت. پس تعداد مثلث‌ها عبارتند از:

MATH75.IR

$$\binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳!۷!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۶ \times ۷!} = ۱۲۰$$

مثال ۲۹: در یک مهمانی ۲۰ نفر شرکت کرده‌اند. اگر هر دو نفر از آنها با هم دست داده باشند. تعداد دفعاتی که دست داده شده چند تاست؟

حل: هر دست دادن را می‌توان به عنوان یک پاره خط در نظر گرفت که با ۲۰ نقطه بر محیط یک دایره می‌توان رسم کرد. پس تعداد کل دست دادن‌ها عبارتست از:

$$\binom{۲۰}{۲} = \frac{۲۰!}{۲! \times ۱۸!} = \frac{۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸!}{۲ \times ۱۸!} = ۱۹۰$$

از مثال‌های فوق چنین بر می‌آید که هرگاه ترتیب انتخاب یا قرار گرفتن اشیاء در کنار هم مهم نباشد از فرمول ترکیب استفاده می‌کنیم.

مثال ۳۰: دانش آموزی در یک آزمون شامل ۱۲ سؤال شرکت کرده که باید به ۸ تا از سؤال‌ها پاسخ دهد.

الف ـ این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

ب ـ اگر قرار باشد از ۵ سؤال اول حتماً به دو سؤال پاسخ دهد این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

ج ـ اگر قرار باشد از ۵ سؤال اول فقط به دو سؤال پاسخ دهد این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

حل: الف ـ ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست. لذا مسأله ترکیب هشت شیئی از دوازده شیئی در کار است.

$$\binom{۱۲}{۸} = \frac{۱۲!}{۸!\,۴!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹ \times ۸!}{۸! \times ۲۴} = ۴۹۵$$

ب ـ ابتدا دو سؤال از ۵ سؤال اول را به $\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!\,۳!} = ۱۰$ طریق انتخاب می‌کند. پس از بین $۱۲ - ۲ = ۱۰$ سؤال باقیمانده باید $۸ - ۲ = ۶$ تا را انتخاب کند که چون باز هم ترتیب انتخاب مهم نیست این کار به $\binom{۱۰}{۶} = \frac{۱۰!}{۶!۴!} = ۲۱۰$ طریق امکانپذیر است. پس طبق اصل ضرب این کارها به $۱۰ \times ۲۱۰ = ۲۱۰۰$ طریق امکانپذیر است.

ج ـ در اینجا از پنج سؤال اول، دو تای آنها را به $\binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!\,۳!} = ۱۰$ طریق انتخاب کرده و دیگر اجازه ندارد انتخاب‌های خود را از سه سؤال دیگر از پنج سؤال اول انجام دهد. پس $۸ - ۲ = ۶$

MATH75.IR

انتخاب باید از ۷ = ۵ − ۱۲ سؤال صورت بگیرد که $\binom{۷}{۶} = \frac{۷!}{۶!\,۱!} = ۷$ طریق ایجاد می‌شود. پس این دو عمل توأماً به ۷۰ = ۷ × ۱۰ طریق امکانپذیر است.

مثال ۳۱: می‌خواهیم سه نفر از افراد یک کلاس ۲۴ نفره را به اردو بفرستیم. این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

حل: این بار یافتن تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از یک مجموعهٔ ۲۴ عضوی مطرح است که عبارتست از:

$$\binom{۲۴}{۳} = \frac{۲۴!}{۳!\,۲۱!} = \frac{۲۴ \times ۲۳ \times ۲۲ \times ۲۱!}{۳! \times ۲۱!} = ۲۰۲۴$$

مثال ۳۲: ده توپ متمایز و ده جعبه متمایز موجودند. به چند طریق می‌توان توپ‌ها را داخل جعبه‌ها چید بطوریکه فقط یکی از جعبه‌ها خالی بماند.

حل: ابتدا یکی از جعبه‌ها را باید انتخاب کرده و کنار گذاشت (جعبه‌ای که باید خالی بماند.) این کار به ۱۰ = $\binom{۱۰}{۱} = \frac{۱۰!}{۱!\,۹!}$ طریق امکانپذیر است. (عمل اول) سپس با توجه به شرایط مسأله باید یک جعبه انتخاب شود که در آن دو توپ قرار داده شود. این کار به ۹ = $\binom{۹}{۱} = \frac{۹!}{۱! \times ۸!}$ طریق امکانپذیر است. (عمل دوم) کار سوم این است که دو توپ از بین ده توپ را انتخاب کنیم تا در جعبه‌ای که در مرحلهٔ دوم انتخاب کرده‌ایم قرار دهیم. این کار به ۴۵ = $\binom{۱۰}{۲} = \frac{۱۰!}{۲!\,۸!}$ طریق امکانپذیر است. (عمل سوم) حالا هشت توپ داریم و هشت جعبه که به !۸ طریق می‌توان توپ‌های باقیمانده را بین این جعبه‌ها توزیع کرد. (عمل چهارم) پس طبق اصل ضرب تعداد کل این حالات عبارتست از:

$$۱۰ \times ۹ \times ۴۵ \times ۸! = ۴۰۵۰ \times ۸!$$

مثال ۳۳: هفت توپ سفید یکسان و سه توپ سیاه یکسان موجودند. به چند طریق می‌توان این توپ‌ها را در یک ردیف کنار هم چید بطوریکه هیچ دو توپ سیاهی کنار هم نباشند؟

حل: ابتدا هفت توپ سفید یکسان را کنار هم با فاصله‌ای به اندازهٔ یک توپ می‌چینیم. این کار به یک طریق امکانپذیر است. (زیرا توپ‌های سفید یکسان هستند و جابجایی آنها تأثیری ندارد) این هفت توپ ۸ = ۱ + ۷ فضای خالی ایجاد می‌کنند.

↓ ○ ↓ ○ ↓ ○ ↓ ○ ↓ ○ ↓ ○ ↓ ○ ↓

باید سه تا از فضاهای خالی را انتخاب کنیم. (ترتیب انتخاب‌ها مهم نیست) که این کار به

$$\binom{۸}{۳} = \frac{۸!}{۳!\,۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۳!\,۵!} = ۵۶$$

MATH75.IR

طریق امکانپذیر است و در هر یک از سه جای انتخاب شده یک توپ سیاه قرار دهیم.

مثال ۳۴: در یک کلاس ۳۰ نفره دانش‌آموزان در پنج ردیف شش نفره نشسته‌اند. معلم کلاس پنج نفر را به تصادف از روی لیست صدا می‌کند. چند حالت وجود دارد که:

الف ـ این پنج نفر از یک ردیف انتخاب شده باشند.

ب ـ این پنج نفر از پنج ردیف مختلف باشند.

ج ـ دو نفر از ردیف سوم و سه نفر از ردیف چهارم باشند.

حل:

الف ـ باید یکی از پنج ردیف را انتخاب کنیم. این کار به $\binom{۵}{۱} = ۵$ طریق امکانپذیر است. سپس باید پنج نفر از شش نفر ردیف انتخاب شده را برگزینیم که این کار به $\binom{۶}{۵} = \frac{۶!}{۵!\,۱!} = ۶$ طریق امکانپذیر است. پس این دو عمل به $۵ \times ۶ = ۳۰$ طریق امکانپذیر است.

ب ـ **روش اول:** نفر اول را به ۳۰ طریق می‌توان انتخاب کرد. پس از انتخاب نفر اول کل افرادی که با او در یک ردیف نشسته‌اند حذف می‌کنیم. نفر دوم را به $۳۰ - ۶ = ۲۴$ طریق می‌توان انتخاب کرد و ... پس این کار کلاً به $۳۰ \times ۲۴ \times ۱۸ \times ۱۲ \times ۶$ طریق امکانپذیر است.

روش دوم: انتخاب هر نفر از هر ردیف $\binom{۶}{۱} \times \binom{۶}{۱} \times \binom{۶}{۱} \times \binom{۶}{۱} \times \binom{۶}{۱} = ۶^۵$ طریق امکانپذیر است. به $۵!$ طریق نیز می‌توان این پنج نفر انتخاب شده را جایگشت داد (ترتیب صدا کردن افراد) پس این کار کلاً به $۶^۵ \times ۵! = (۶\times۵) \times (۶\times۴) \times (۶\times۳) \times (۶\times۲) \times (۶\times۱)$

$$= ۳۰ \times ۲۴ \times ۱۸ \times ۱۲ \times ۶$$

طریق امکانپذیر است.

ج ـ دو نفر از ردیف سوم به $\binom{۶}{۲} = \frac{۶!}{۲!\,۴!} = ۱۵$ طریق و سه نفر از ردیف چهارم به $\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = ۲۰$ طریق می‌توانند انتخاب شوند. پس این پنج نفر به $۱۵ \times ۲۰ = ۳۰۰$ طریق انتخاب می‌گردند.

مثال ۳۵: ۱۲ نفر را به چند طریق می‌توان به سه تیم چهار نفره تقسیم کرد؟

حل: تیم اول به $\binom{۱۲}{۴} = \frac{۱۲!}{۸! \times ۴!}$ طریق. تیم دوم به $\binom{۸}{۴} = \frac{۸!}{۴!۴!}$ طریق $(۱۲ - ۴ = ۸)$ و تیم سوم به $\binom{۴}{۴} = \frac{۴!}{۰!\,۴!}$ طریق. $(۸ - ۴ = ۴)$ می‌توانند انتخاب شوند. طبق اصل ضرب این سه کار با هم

MATH75.IR

به:

$$\binom{۱۲}{۴} \times \binom{۸}{۴} \times \binom{۴}{۴} = \frac{۱۲!}{۴! \times ۸!} \times \frac{۸!}{۴! \times ۴!} \times \frac{۴!}{۴!} = \frac{۱۲!}{۴!\ ۴!\ ۴!}$$

طریق امکانپذیرند. اما چون ترتیب انتخاب این چهار تیم مهم نیست و سه تیم به !۳ طریق می‌توانند جایگشت پیدا کنند. پس جواب مسأله عبارتست از:

$$\frac{۱۲!}{۴!\ ۴!\ ۴!} \div ۳! = \frac{۱۲!}{(۴!)^۳ \times ۳!}$$

این کار را افراز نامرتب ۱۲ نفر به سه تیم چهار نفره می‌نامند.

مثال ۳۶: ۱۲ نفر را می‌خواهیم به ۳ تیم چهار نفره تقسیم کرده و آنها را به سه باشگاه مختلف بفرستیم. این کار به چند طریق میسر است؟

حل: این مسأله دقیقاً مانند مسأله قبل حل می‌شود و تنها تفاوت آن با مسألهٔ قبل اهمیت ترتیب انتخاب تیم‌ها در آن است. یعنی کاری که در آخر مثال فوق انجام شد (تقسیم بر !۳) در اینجا لازم نیست.

پس تعداد حالات مختلف در اینجا: $\frac{۱۲!}{(۴!)^۳}$ است. این کار را افراز مرتب ۱۲ نفر به ۳ تیم چهار نفره می‌نامند.

مثال ۳۷: ۱۸ اسباب بازی مختلف را بین چهار کودک که به ترتیب ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱ سال سن دارند می‌خواهیم طوری تقسیم کنیم که به هر کدام به ترتیب ۴، ۵، ۶ و ۳ اسباب بازی برسد. این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

$$\binom{۱۸}{۴} \times \binom{۱۸-۴}{۵} \times \binom{۱۸-۹}{۶} \times \binom{۱۸-۱۵}{۳} = \binom{۱۸}{۴} \times \binom{۱۴}{۵} \times \binom{۹}{۶} \times \binom{۳}{۳}$$

$$= \frac{۱۸!}{۴! \times ۱۴!} \times \frac{۱۴!}{۵! \times ۹!} \times \frac{۹!}{۶! \times ۳!} \times \frac{۳!}{۳! \times ۰!} = \frac{۱۸!}{۴! \times ۵! \times ۶! \times ۳!}$$

نکته: اگر بخواهیم n شیئی دوبدو متمایز را بین m نفر چنان تقسیم کنیم به اولی $x_۱$ عدد، به دومی $x_۲$ عدد و ... و به mاُمی x_m عدد از این اشیاء برسد، $(x_۱ + x_۲ + ... + x_m = n)$ این کار به $\frac{n!}{x_۱! \times x_۲! \times ... \times x_m!}$ طریق امکانپذیر است.

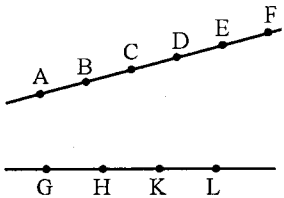
مثال ۳۸: به چند طریق می‌توان ۱۲ نفر را به سه تیم دو نفره و دو تیم ۳ نفره تقسیم کرد؟

MATH75.IR

حل: تیم‌های دو نفره به $\frac{\binom{۸}{۲} \times \binom{۱۰}{۲} \times \binom{۱۲}{۲}}{۳!}$ طریق می‌توانند انتخاب شوند. و تیم‌های سه نفره به $\frac{\binom{۳}{۳} \times \binom{۶}{۳}}{۲!}$ طریق تشکیل می‌گردند. پس طبق اصل ضرب پاسخ سؤال عبارتست از:

$$\frac{\binom{۱۲}{۲} \times \binom{۱۰}{۲} \times \binom{۸}{۲} \times \binom{۶}{۳} \times \binom{۳}{۳}}{۳! \times ۲!} = \frac{۱۲!}{(۲!)^۴ \times (۳!)^۳}$$

مثال ۳۹: در شکل مقابل چند مثلث می‌توان رسم کرد که رئوس آنها از بین نقاط مشخص شده انتخاب گردند؟



حل: روش اول: این مثلث‌ها دو گونه‌اند. یا یک رأس آنها از خط بالایی و دو رأس آنها از خط پایین انتخاب می‌شوند که این کار به $\binom{۴}{۲} \times \binom{۶}{۱}$ طریق امکانپذیر است. یا دو رأس آنها از خط بالایی و یک رأس از خط پایینی انتخاب می‌گردند که این کار به $\binom{۴}{۱} \times \binom{۶}{۲}$ طریق امکانپذیرند. پس تعداد مثلث‌های حاصل عبارتست از:

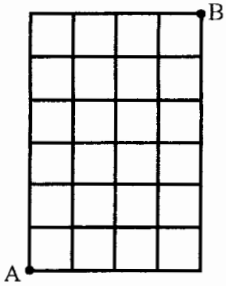
$$\binom{۶}{۱} \times \binom{۴}{۲} + \binom{۶}{۲} \times \binom{۴}{۱} = ۶ \times \frac{۴!}{۲!\,۲!} + \frac{۶!}{۲!\,۴!} \times ۴ = ۳۶ + ۶۰ = ۹۶$$

روش دوم: فرض کنیم این $۱۰ = ۴ + ۶$ نقطه روی محیط یک دایره باشند (یعنی با هر سه تای آنها بتوان یک مثلث رسم کرد) پس تعداد مثلث‌هایی که می‌توان رسم کرد $\binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳!۷!} = ۱۲۰$ تا می‌باشند. اما سه نقطه‌ای که از خط بالایی انتخاب می‌گردند که تعداد آنها $\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = ۲۰$ و سه نقطه‌ای که از خط پایینی انتخاب می‌شوند که تعداد آنها $\binom{۴}{۳} = \frac{۴!}{۳!۱!} = ۴$ تا است تشکیل مثلث نمی‌دهند. (چرا؟) لذا باید مجموع آنها را از ۱۲۰ کم کرد. پس تعداد مثلث‌های تشکیل شده عبارتست از:

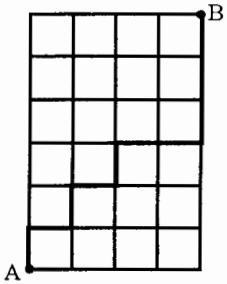
$$۱۲۰ - (۲۰ + ۴) = ۱۲۰ - ۲۴ = ۹۶$$

MATH75.IR

مثال ۴۰: شکل زیر نمایی از خیابان‌های یک شهر است. متحرکی از نقطهٔ A شروع به حرکت کرده و مقصد او نقطهٔ B است. اگر قرار باشد این متحرک همواره به سمت راست یا رو به بالا حرکت کند (به سمت چپ یا به سمت پایین بر نگردد) به چند طریق می‌تواند به مقصد برسد؟



حل: قرار می‌گذاریم هر حرکت او به سمت راست را با «۱» و هر حرکت او به سمت بالا را با «۰» نشان دهیم. او در مسیر خود (هر مسیر را که انتخاب کند) ناچار است چهار تا «۱» و شش تا «۰» طی کند. (چرا؟) مثلاً «۰۱۰۱۰۱۱۰۰۰» یک حرکت اوست که در زیر نمایش داده شده. پس می‌توان گفت جواب مسأله یافتن جایگشت‌های چهار تا «۱» و شش تا «۰» است، که این کار به $\frac{۱۰!}{۴!۶!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷ \times ۶!}{۲۴ \times ۶!} = ۲۱۰$ طریق میسر است.



مثال ۴۱: (مسأله خرید کیک) یک قنادی سه نوع کیک می‌فروشد. به چند طریق می‌توان ۴ کیک خریداری کرد؟

حل: این مسألهٔ قدیمی اساس تعیین روش دیگری برای شمارش می‌باشد. حتماً با ما هم عقیده هستید که نوشتن عدد $\binom{۳}{۴}$ برای این مسأله بی معنی است. (چرا؟) فرض کنید این سه نوع کیک عبارت باشند از A، B و C و متصدی فروش برگه‌ای بصورت زیر تهیه کرده باشد.

MATH75.IR

A	B	C

مثلاً اگر از نوع A دو تا و از انواع دیگر یکی فروخته باشد برگه را به صورت

A	B	C	
✓✓	✓	✓	(۱)

و اگر از کیک نوع A، سه تا و از کیک نوع C یکی فروخته باشد برگه را بصورت

A	B	C	
✓✓✓		✓	(۲)

و اگر هر چهار تا کیک فروخته شده از نوع B باشد برگه را بصورت

A	B	C	
	✓✓✓✓		(۳)

پر کند. برای اینکه راحت‌تر بتوان فرمول محاسبه را یافت عبارت نظیر (۱) را با «۱۱۰۱۰۱»، عبارت نظیر (۲) را با «۱۱۱۰۰۱» و عبارت نظیر (۳) را با «۰۱۱۱۱۰» نشان می‌دهیم. شاید تاکنون متوجه شده باشید که می‌خواهیم بگوییم جواب این مسأله یافتن تعداد جایگشت‌های مختلف چهار تا «۱» و دو تا «۰» است. (عدد چهار تعداد کیک‌های خریداری شده و عدد دویکی کمتر از تعداد انواع کیک است). پس تعداد کل حالات عبارتست از:

$$\frac{۶!}{۴!۲!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴! \times ۲!} = ۱۵$$

نکته: (تعمیم مثال ۴۱)

یک قنادی m نوع کیک می‌فروشد. n کیک را به چند طریق می‌توان خریداری کرد؟

حل:

n = تعداد کیک‌های خریداری شده

m − ۱ = یکی کمتر از تعداد انواع کیک

$$\frac{(n+m-۱)!}{n!(m-۱)!} = \binom{n+m-۱}{n} = \binom{n+m-۱}{m-۱}$$

مثال ۴۲: گل فروشی ۴ نوع گل می‌فروشد. به چند طریق یک دسته گل شامل ۷ گل می‌توان سفارش داد؟

حل: این مثال نیز مانند مسأله خرید کیک حل می‌شود.

MATH75.IR

$$\binom{۷+۴-۱}{۷} = \binom{۱۰}{۷} = \frac{۱۰!}{۷!۳!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!۳!} = ۱۲۰$$

مثال ۴۳: معادلهٔ $x + y + z + t = ۱۶$ در مجموعه اعداد صحیح غیر منفی چند جواب دارد؟

حل: به جای هر کدام از x، y، z و t می‌توان اعداد ۰، ۱، ۲ و ... و ۱۶ قرار داد. این مسأله نیز مانند مسألهٔ خرید کیک حل می‌شود. چهار نوع کیک موجود است و می‌خواهیم ۱۶ عدد کیک خریداری کنیم.

$$\binom{۱۶+۴-۱}{۱۶} = \binom{۱۹}{۱۶} = \frac{۱۹!}{۱۶!۳!} = \frac{۱۹ \times ۱۸ \times ۱۷ \times ۱۶!}{۱۶! \times ۳!} = ۹۶۹$$

مثال ۴۴: معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + ... + x_m = n$ که در آن m و n دو عدد طبیعی می‌باشند در مجموعهٔ اعداد صحیح غیر منفی چند جواب دارد؟

حل: $\binom{n+m-۱}{n}$

مثال ۴۵: در بسط عبارت $(x + y + z + t)^۵$ چند جمله وجود دارد؟

حل: هر جملهٔ بسط صرف نظر از ضریب بصورت $x^m y^n z^p t^q$ است که در آن $m + n + p + q = ۵$ بوده و m و n و p و q اعداد صحیح غیر منفی‌اند. پس تعداد جملات بسط با تعداد جواب‌های صحیح غیرمنفی معادلهٔ $m + n + p + q = ۵$ یکسان است که تعداد آن عبارتست از:

$$\binom{۵+۴-۱}{۵} = \binom{۸}{۵} = \frac{۸!}{۵!۳!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵! \times ۶} = ۵۶$$

مثال ۴۶: در بسط عبارت $(x_۱ + x_۲ + ... + x_k)^n$ چند جمله وجود دارد؟

حل: این مثال تعمیم مثال قبل است و تعداد جملات بسط با تعداد جواب‌های صحیح غیرمنفی معادلهٔ $m_۱ + m_۲ + ... + m_k = n$ برابر است که عبارتست از:

$$\binom{n+k-۱}{n}$$

مثال ۴۷: در کیسه‌ای سه مهره قرمز، ۵ مهره آبی و ۲ مهره سفید موجود است. حداقل چند مهره به تصادف از کیسه خارج کنیم تا از هر سه رنگ داشته باشیم؟

حل: اگر $۵ + ۳ + ۱ = ۹$ مهره استخراج شود حتماً از هر سه رنگ خواهیم داشت. زیرا بدترین حالت ممکن آن است که در ۸ بار استخراج هر ۵ مهرهٔ آبی و هر ۳ مهرهٔ قرمز بیاید. ولی با افزودن یک مهره به مهره‌های انتخابی $(۸ + ۱)$ قطعاً از مهرهٔ رنگ سفید نیز خواهیم داشت.

مثال ۴۸: پنج نفر به نام‌های A، B، C، D و E می‌خواهند بطور متوالی در یک سمینار سخنرانی کنند. اگر قرار باشد:

MATH75.IR

الف ـ A یا B بلافاصله بعد از دیگری صحبت کند این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

ب ـ A حتماً قبل از B سخنرانی کند این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

ج ـ A یا B بلافاصله پس از یکدیگر صحبت نکنند این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

د ـ A سخنران اول و B سخنران آخر باشد این کار به چند طریق امکانپذیر است؟

حل:

الف ـ این کار مانند قرار گرفتن پنج مداد رنگی در جعبه است بطوریکه دو مداد مخصوص کنار هم باشند. تعداد حالات $۴! \times ۲! = ۴۸$ است.

ب ـ در اینجا می‌خواهیم B بعد از A (نه لزوماً بلافاصله) سخنرانی کند. بدیهی است که کل حالات $۵! = ۱۲۰$ است که در نصف آنها A قبل از B و در نصف دیگر B قبل از A سخنرانی کرده. پس پاسخ مسأله $۱۲۰ \div ۲ = ۶۰$ حالت است.

ج ـ کافیست از کل حالات، تعداد حالاتی را که A یا B بلافاصله پس از یکدیگر سخنرانی می‌کنند را کم کنیم. یعنی تعداد حالات در این قسمت $۵! - ۴۸ = ۱۲۰ - ۴۸ = ۷۲$ است.

د ـ پس نوبت‌های اول و پنجم سخنرانی در این حالت معلوم اند و سه نفر باقیمانده به $۳! = ۶$ طریق می‌توانند در لیست سخنرانان قرار گیرند.

مثال ۴۹: اگر n عددی طبیعی باشد نشان دهید:

$$\binom{۲n}{n} + \binom{۲n}{n-۱} = \frac{۱}{۲}\binom{۲n+۲}{n+۱}$$

حل:

$$\binom{۲n}{n} + \binom{۲n}{n-۱} = \frac{(۲n)!}{n!n!} + \frac{(۲n)!}{(n-۱)!\,(n+۱)!} = \frac{(n+۱)\times(۲n)! + n\times(۲n)!}{n!\,(n+۱)!}$$

$$= \frac{(n+۱+n)(۲n)!}{n!(n+۱)!} = \frac{(۲n+۱)\times(۲n)!}{n!\,(n+۱)!} = \frac{(۲n+۱)!}{n!\,(n+۱)!} = \frac{(n+۱)(۲n+۱)!}{(n+۱)!(n+۱)!}$$

$$= \frac{۱}{۲}\times\frac{(۲n+۲)(۲n+۱)!}{(n+۱)!(n+۱)!} = \frac{۱}{۲}\times\frac{(۲n+۲)!}{(n+۱)!(n+۱)!} = \frac{۱}{۲}\binom{۲n+۲}{n+۱}$$

مثال ۵۰: به ازاء هر عدد طبیعی مانند n نشان دهید:

$$C(n\,,\,۱) + ۲C(n\,,\,۲) + ۳C(n\,,\,۳) + \dots + nC(n\,,\,n) = n\times ۲^{n-۱}$$

حل: می‌دانیم به ازاء $۱ \le k \le n$ و $k \in N$ داریم:

MATH75.IR

$$k \times C(n , k) = k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-۱)!(n-k)!} = \frac{n(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!}$$

$$= n \times \frac{(n-۱)!}{(k-۱)! \times [(n-۱)-(k-۱)]!} = n \times \binom{n-۱}{k-۱}$$

بنابراین:

$$C(n , ۱) + ۲C(n , ۲) + ۳C(n , ۳) + ... + nC(n , n) =$$

$$n \times \binom{n-۱}{۰} + n \times \binom{n-۱}{۱} + n \times \binom{n-۱}{۲} + ... + n \times \binom{n-۱}{n-۱}$$

$$= n\left[\binom{n-۱}{۰} + \binom{n-۱}{۱} + ... + \binom{n-۱}{n-۱}\right] = n \times ۲^{n-۱}$$

دقت کنید که حاصل جمع کروشه برابر است با تعداد کل زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $n-۱$ عضوی که برابر $۲^{n-۱}$ است.

مثال ۵۱: با یک استدلال نشان دهید که اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه:

$$\binom{n}{۰}^۲ + \binom{n}{۱}^۲ + \binom{n}{۲}^۲ + ... + \binom{n}{n}^۲ = \binom{۲n}{n}$$

حل: برای فرمول‌هایی که بصورت فوق بیان می‌شوند معمولاً در عالم واقع نیز پدیده‌ای می‌توان یافت که برای شمارش آن نیاز به این فرمول باشد. در این مورد خاص اگر به طرف دوم تساوی دقت کنید هدف یافتن تعداد زیر مجموعه‌های n عضوی از یک مجموعهٔ ۲n عضوی است. برای توجیه طرف اول فرض کنیم ۲n نفر داریم که می‌خواهیم از بین آنها n نفر را انتخاب کنیم. می‌توان از ابتدا این ۲n نفر را به دو دستهٔ n نفری تقسیم کرد. گروه اول را A و گروه دوم را B می‌نامیم. برای انتخاب n نفر ممکن است یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد.

(۱) هر n نفر از گروه A انتخاب شوند. $\binom{n}{n} \times \binom{n}{۰} = \binom{n}{۰} \times \binom{n}{۰} = \binom{n}{۰}^۲$

(۲) $n-۱$ نفر از گروه A و یک نفر از گروه B انتخاب شوند.

$$\binom{n}{n-۱} \times \binom{n}{۱} = \binom{n}{۱} \times \binom{n}{۱} = \binom{n}{۱}^۲$$

(۳) $n-۲$ نفر از گروه A و دو نفر از گروه B انتخاب شوند.

$$\binom{n}{n-۲} \times \binom{n}{۲} = \binom{n}{۲} \times \binom{n}{۲} = \binom{n}{۲}^۲$$

$n+۱$) هر n نفر از گروه B انتخاب شوند.

MATH75.IR

$$\binom{n}{0} \times \binom{n}{n} = \binom{n}{n} \times \binom{n}{n} = \binom{n}{n}^2$$

پس کل حالات انتخاب این n نفر از بین ۲n نفر عبارتست از:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2$$

و لذا تساوی برقرار است. دقت کنید که در هر یک از مراحل بالا از فرمولی که قبلاً اثبات کرده‌ایم استفاده شده.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

مثال ۵۲: در بسط $(a+b)^n$ ضریب a^k $(1 \le k \le n)$ چیست؟

حل:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ بار}}$$

بدیهی است که برای ایجاد a^k باید k تا از این پرانتزها را انتخاب کرده و از آنها a را برگزینیم و از بقیه پرانتزها (یعنی $n-k$ پرانتز دیگر) b را انتخاب کنیم. جملهٔ شامل a^k بطور اتوماتیک شامل b^{n-k} نیز می‌باشد. اما این k پرانتز را از بین n پرانتز به چند طریق می‌توان انتخاب کرد؟ چون ترتیب انتخاب پرانتزها مهم نیست، لذا تعداد طرق این انتخاب $\binom{n}{k}$ است. چون در کنار a ضریب عددی یک است، لذا ضریب عددی جملهٔ شامل a^k عبارتست از:

$$\binom{n}{k} \times 1 = \binom{n}{k}$$

مثال ۵۳: اگر n عددی طبیعی باشد ثابت کنید:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

حل: بنابر مثال قبل چون در بسط $(a+b)^n$ جملاتی شامل a^n، a^{n-1} و ... و ۱ موجودند می‌توان از فرمول بدست آمده در مورد ضرائب استفاده کرد. در اینصورت طرف دوم تساوی بالا قابل توجیه خواهد بود.

مثال ۵۴: نشان دهید مجموع ضرایب بسط $(a+b)^n$ برابر 2^n است.

حل: در بسط $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n$ قرار می‌دهیم $a = b = 1$. خواهیم داشت:

MATH75.IR

$$۲^n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \dots + \binom{n}{n}$$

مثال ۵۵: ثابت کنید:

$$\binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} - \dots + (-۱)^n\binom{n}{n} = ۰$$

حل: با اختیار $a = ۱$ و $b = -۱$ در بسط $(a + b)^n$ داریم:

$$(۱ - ۱)^n = \binom{n}{۰} ۱^n + \binom{n}{۱} ۱^{n-۱} (-۱) + \dots + \binom{n}{n}(-۱)^n \Rightarrow$$

$$۰ = \binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \dots + (-۱)^n\binom{n}{n}$$

مثال ۵۶: ثابت کنید:

$$\binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \dots = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \binom{n}{۴} + \dots$$

حل: با استفاده از مثال قبل کافیست جملات منفی را به یک طرف تساوی و بقیه جملات را در طرف دیگر قرار دهیم.

مثال ۵۷: ثابت کنید:

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \dots = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \dots = ۲^{n-۱}$$

حل: بنابر مثال‌های (۵۴) و (۵۶)

$$\begin{cases} \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \dots + \binom{n}{n} = ۲^n \\ \binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \dots = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} + \dots \end{cases}$$

$$۲ \times \left(\binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \dots\right) = ۲^n \Rightarrow \binom{n}{۰} + \binom{n}{۲} + \dots = ۲^{n-۱}$$

مثال ۵۸: یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n را در نظر بگیرید که درایه‌های آن ۰ یا ۱ باشند.

اولاً: چند ماتریس به این صورت وجود دارد؟

ثانیاً: چند ماتریس متقارن به این صورت وجود دارد؟

ثالثاً: چند ماتریس قطری به این صورت وجود دارد؟

حل:

اولاً: برای پر کردن هر یک از $n \times n = n^۲$ خانهٔ ماتریس ۲ حالت وجود دارد. (آن درایه یا صفر است یا یک). پس تعداد ماتریس‌های تشکیل شده $\underbrace{۲ \times ۲ \times \dots \times ۲}_{n^۲ \text{ بار}} = ۲^{n^۲}$ است.

ثانیاً: درایه‌های روی قطر اصلی (که تعداد آنها nتا می‌باشد) هر کدام می‌توانند به دو طریق پر

MATH75.IR

شوند. (یک یا صفر) درایه‌های بالای (یا پایین) قطراصلی نیز هر یک به دو طریق می‌توانند پر شوند. (یک یا صفر) تعداد درایه‌های روی قطر و بالای قطر در یک ماتریس مربعی مرتبهٔ n برابر است با:

$$۱ + ۲ + ... + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

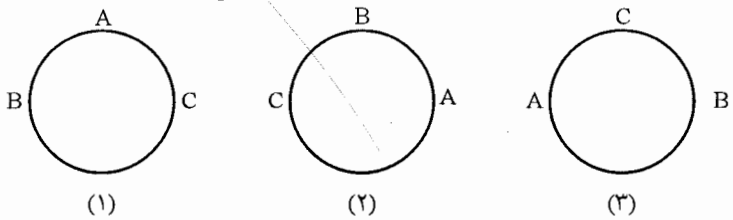
چون می‌خواهیم ماتریس متقارن باشد درایه‌های پایین (یا بالای) قطر اصلی همگی به یک طریق می‌توانند پر شوند. پس تعداد کل حالات یا تعداد کل ماتریس‌های متقارن به این فرم عبارتست از:

$$\underbrace{۲ \times ۲ \times ... \times ۲}_{\text{بار } \frac{n(n+۱)}{۲}} = ۲^{\frac{n(n+۱)}{۲}}$$

ثالثاً: برای یافتن تعداد ماتریس‌های قطری در این حالت می‌دانیم که درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی همگی صفر می‌باشند و فقط برای پر کردن هر یک از درایه‌های واقع بر قطر اصلی دو امکان موجود است. (صفر یا یک) پس کل ماتریس‌های قطری از این نوع $\underbrace{۲ \times ۲ \times ... \times ۲}_{\text{بار } n} = ۲^n$ تا می‌باشد.

جایگشت‌های دوری

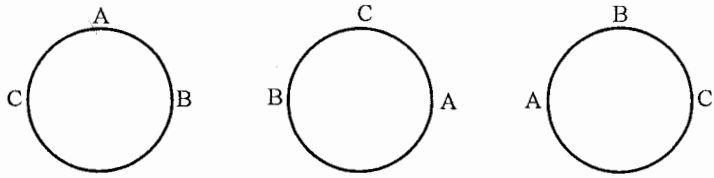
فرض کنید سه نفر می‌خواهند دور یک میز گرد بنشینند. این کار به چند طریق میّسر است؟ اگر این سه نفر می‌خواستند در یک ردیف کنار هم بنشینند این کار به ۶ = !۳ طریق امکانپذیر بود. اما در نشستن دور یک میز گرد مسأله فرق می‌کند. در اینجا هر سه حالت



یک حالت محسوب می‌شوند. چون در تمام آنها A ، B را سمت راست خود و C را سمت چپ خود می‌بیند، B ، A را سمت چپ خود و C را سمت راست خود و C ، A را سمت راست خود و B را سمت چپ خود می‌بیند. دقت کنید که (۲) از روی (۱) با یک چرخش °۹۰ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پدید آمده. همچنین (۳) نیز از روی (۲) با یک چرخش °۹۰ در جهت

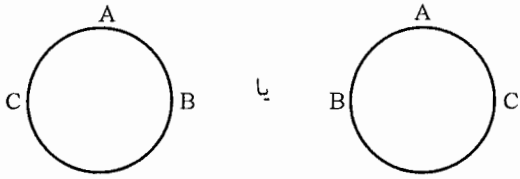
MATH75.IR

حرکت عقربه‌های ساعت حاصل شده. با استدلال فوق سه حالت:



(۱)' (۲)' (۳)'

نیز یک حالت محسوب می‌شوند. پس تعداد حالات قرار گرفتن این سه نفر دور یک میز گرد ۲ طریق است.

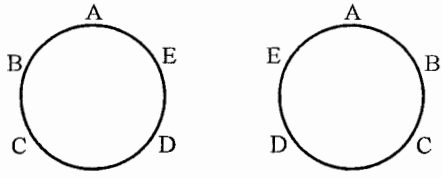


به عبارتی می‌توان A را یک جا قرار داد و B و C را در اطراف او نشاند. این کار به !۲ = !(۱ − ۳) طریق امکانپذیر است.

در حالت کلی اگر بخواهیم جایگشت‌های دوری n شیئی دو بدو متمایز را محاسبه کنیم، ابتدا یکی از آنها را (فرق نمی‌کند کدام را) ملاک کار قرار داده و بقیه را به !(n − ۱) طریق دور او می‌چینیم. ***پس تعداد جایگشت‌های دوری n شیئی دوبدو متمایز عبارتست از*** !(n − ۱).

مثال ۵۹: با پنج مهرهٔ مختلف چند گردنبند می‌توان ساخت؟

حل: فرض کنیم مهره‌ها A، B، C، D و E باشند. باز هم با یک جایگشت دوری این پنج شیئی سروکار داریم که به ۲۴ = !۴ = !(۵ − ۱) طریق امکانپذیر است. ولی دقت کنید که گردنبندهای زیر یکسان‌اند.



(۲) (۱)

یعنی اگر گردنبند نوع (۱) را بسازیم به طور اتوماتیک می‌توانیم آن را به صورت (۲) آویزان کنیم. پس عدد بدست آمده را باید نصف کنیم. یعنی تعداد کل گردنبندهای مختلفی که با این پنج مهره ساخته می‌شوند عبارتست از: $\frac{۲۴}{۲} = ۱۲$. لذا با n مهرهٔ دوبدو متمایز $(n \geq ۳)$ به تعداد $\frac{(n-۱)!}{۲}$ گردنبند متفاوت می‌توان ساخت.

MATH75.IR

تمرین‌های بخش اول (آنالیز ترکیبی)

۱ـ اگر $n! = ۱۲۰ \times ۴۲$ باشد مقدار n چیست؟

۲ـ در تساوی $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = ۷۲$ مقدار n چیست؟

۳ـ در معادلهٔ $(x^۲ - ۳x)! = ۲۴$ مقدار x چیست؟

۴ـ عبارات زیر را ساده کنید:

الف) $\frac{۱۲!}{۳!۴!}$

ب) $\frac{۱۱! - ۱۰!}{۱۰! - ۹!}$

ج) $\frac{(n+۱)! - n!}{n! - (n-۱)!}$

د) $\frac{n \cdot n! - (n-۱) \cdot (n-۱)!}{(n+۱)!}$

هـ) $\frac{(n+۱)(n-۱)! - n!}{(n+۲)n! - (n+۱)!}$

و) $\frac{(n!)^۲}{(n-۱)!}$

ز) $-(-(-(۱ - ۲!) + ۳!) + ۴!) + ۵!$

۵ـ بزرگترین توانی از ۱۹ که در تجزیهٔ !۱۳۸۲ شرکت دارد چیست؟

۶ـ در سمت راست عدد !۱۰۰ چند صفر وجود دارد؟

۷ـ بزرگترین عدد طبیعی x که به ازاء آن عدد !۹۵ بر ۱۲^x بخشپذیر باشد چیست؟

۸ـ ثابت کنید:

$$۱ \times ۱! + ۲ \times ۲! + ۳ \times ۳! + \dots + n \times n! = (n+۱)! - ۱$$

۹ـ از شهر A به شهر B، ۵ راه و از شهر B به شهر C، ۷ راه موجود است. یک مسافر به چند طریق می‌تواند از شهر A و از طریق شهر B به شهر C:

الف ـ مسافرت کند. ب ـ مسافرت رفت و برگشت انجام دهد.

ج ـ مسافرت رفت و برگشت انجام دهد بطوریکه حداقل یکی از راه‌هایی که در رفت از آنها استفاده کرده در برگشت از آنها استفاده نکند.

د ـ مسافرت رفت و برگشت انجام دهد بطوریکه هیچیک از مسیرهای رفت را در برگشت انتخاب نکند.

MATH75.IR

۱۰ـ چند زیر مجموعه از $A = \{a , b , c , d , e , f\}$ می‌توان نوشت که:

الف ـ a را دارند ولی f را ندارند. ب ـ a و f را ندارند.

ج ـ a و b را دارند ولی e و f را ندارند.

۱۱ـ در کیسه‌ای پنج مهرهٔ قرمز، شش مهرهٔ آبی و سه مهرهٔ سیاه موجود است. حداقل چند مهره استخراج کنیم که از رنگ قرمز حتماً داشته باشیم؟

۱۲ـ با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می‌توان نوشت اگر:

الف ـ تکرار مجاز باشد. ب ـ تکرار مجاز نباشد.

۱۳ـ با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

۱۴ـ با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۷ چند عدد سه رقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱۵ـ یک قفل رمزی دارای یک رمز چهار رقمی فرد با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ... و ۹ است. اگر رمز این قفل را ندانیم و مدت زمان لازم جهت آزمایش کردن هر رمز ۳۰ ثانیه باشد، حداکثر چند ساعت طول می‌کشد تا قفل باز شود؟

۱۶ـ با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و... و ۹ چند عدد چهار رقمی (با ارقام غیر تکراری) می‌توان نوشت اگر:

الف ـ مضرب ۵ یا زوج باشند.

ب ـ از ۵۰۰۰ کوچکتر باشند.

ج ـ ارقام بزرگتر از ۷ در آنها بکار نرفته باشد.

۱۷ـ هرگاه تکرار مجاز نباشد چند عدد پنج رقمی مضرب پنج می‌توان نوشت که دو رقم سمت چپ آنها مضرب ۳۱ باشد.

۱۸ـ با پنج حرف صدادار زبان انگلیسی و چهار حرف b ، c ، d و f چند کلمهٔ ۹ حرفی می‌توان نوشت بطوریکه حروف تکراری نداشته باشند و هیچ دو حرف صداداری کنار هم نباشند؟

۱۹ـ چند عدد چهار رقمی با ارقام ۰ و ۱ و ۲ و۳ و ۴ و ۵ بدون ارقام تکراری می‌توان نوشت بطوریکه:

الف ـ ۱ و ۲ کنار هم نباشند.

ب ـ ۱ و ۲ کنار هم نباشند ولی ۴ و ۵ کنار هم باشند.

۲۰ـ نشان دهید هر n ضلعی محدب $(n \geq ۴)$ دارای $\frac{n(n-۳)}{۲}$ قطر است.

۲۱ـ در یک n ضلعی منتظم:

الف ـ اگر $n \geq ۵$ باشد چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن رأس‌های n ضلعی بوده و

MATH75.IR

فقط یک ضلع آنها ضلعی از n ضلعی باشد.

ب ـ اگر $n \geq ۴$ باشد چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن رأس‌های n ضلعی بوده و دو ضلع آنها اضلاعی از n ضلعی باشند.

ج ـ اگر $(n \geq ۵)$ باشد چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن رأس‌های n ضلعی بوده و هیچیک از اضلاع آنها ضلعی از n ضلعی نباشند.

۲۲ـ از تساوی‌های زیر مقدار n را بیابید.

الف) $۲p(n , ۲) + ۵۰ = p(۲n , ۲)$

ب) $\binom{n}{n-۱} + \binom{n+۱}{n} = ۱۹$

ج) $n^۲ - n\binom{۶}{۴} + \binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴} = ۰$

د) $C(n , n - ۳) = ۱۰$

هـ) $C(n , ۲) + P(n - ۱ , ۲) = ۲۵$

و) $C(۴ , ۳) = P(۴ , n)$

ز) $\frac{۱}{C(۹ , n)} - \frac{۱}{C(۱۰ , n)} = \frac{۱۱}{۶C(۱۱ , n)}$

ح) $C(x + ۱ , ۷) - C(x + ۱ , ۵) = ۰$

ط) $C(x + ۳ , ۴) = x^۲ + ۲x$

۲۳ـ ثابت کنید: $\binom{n+۱}{r} = \binom{n}{r-۱} + \binom{n}{r}$

۲۴ـ مقادیر n و k را چنان بیابید که داشته باشیم:

$C(n , k) = ۱۰ \quad , P(n,k) = ۶۰$

۲۵ـ ثابت کنید:

$$n\binom{m+n}{m} = (m + ۱)\binom{m+n}{m+۱}$$

۲۶ـ به چند طریق می‌توان یک گروه ۶ نفری از بین ۷ معلم و ۸ دانش‌آموز انتخاب کرد هرگاه

الف ـ گروه شامل ۴ دانش‌آموز و ۲ معلم باشد.

ب ـ یک معلم و دو دانش‌آموز خاص عضو این گروه باشند.

۲۷ـ حروف T ، P ، S و M چند تبدیل سه حرفی دارند؟

۲۸ـ با حروف کلمهٔ «شاهنامه» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟ (از هر حرف بیشتر از تعدادی که در کلمه آمده استفاده نشود).

۲۹ـ به چند طریق می‌توان A ، B و C و اعداد ۱ و ۵ و ۷ را در یک ردیف قرارداد بطوریکه:

الف) اعداد کنار هم و حروف کنار هم باشند.

MATH75.IR

ب) A و B کنار هم نباشند.

۳۰ـ از بین ۱۲ دانش‌آموز ۳ نفر انتخاب می‌شوند. مطلوبست تعداد حالت‌های مختلف در هر یک از موارد زیر:

الف ـ ۳ نفر به عنوان هیئت نمایندگی انتخاب شوند.

ب ـ ۳ نفر جهت رتبه اول تا سوم انتخاب شوند.

۳۱ـ n نقطه بر محیط دایره‌ای مفروض‌اند. الف ـ چند مثلث می‌توان در دایره محاط کرد که در یک رأس مشترک باشند. ب ـ چند مثلث می‌توان محاط کرد که در یک ضلع مشترک باشند.

۳۲ـ به چند طریق می‌توان از میان ۴ کتاب فارسی، ۵ کتاب عربی و ۷ کتاب انگلیسی دو کتاب انتخاب کرد که به یک زبان نباشند؟

۳۳ـ با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ چند عدد می‌توان نوشت هرگاه: (بدون تکرار)

الف ـ اعداد ۶ رقمی بوده و رقم‌های ۱ و ۴ پهلوی هم باشند.

ب ـ اعداد ۶ رقمی بوده و رقم سمت راست آنها ۵ باشد.

ج ـ اعداد ۶ رقمی بوده و کوچکتر از پانصد هزار باشند.

د ـ اعداد ۳ رقمی بوده و تمام رقم‌های آن فرد باشد.

۳۴ـ با حروف کلمهٔ minimum اولاً چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان نوشت؟ ثانیاً چند کلمهٔ سه حرفی می‌توان نوشت که در آنها حرف تکراری نباشد؟

۳۵ـ اولاً: به چند طریق می‌توان دو عدد از بین اعداد ۱ تا ۲۰ را انتخاب کرد به شرطی که مجموع آنها فرد باشد. ثانیاً: به چند طریق می‌توان از بین این اعداد سه عدد انتخاب کرد بطوریکه مجموع آنها فرد باشد.

۳۶ـ ۵ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه داریم. به چند طریق این مهره‌ها را می‌توانیم در یک ردیف از چپ به راست کنار هم قرار دهیم بطوریکه بلافاصله بعد از هر مهره سفید حداقل یک مهره سیاه قرار داشته باشد.

۳۷ـ با ارقام ۰ و ۰ و ۳ و ۴ و ۵ الف) چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟ ب) چند عدد پنج رقمی زوج می‌توان نوشت؟ ج) چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت بطوریکه ۳ و ۵ کنار هم نباشند.

۳۸ـ تعداد جایگشت‌هایی از n عدد ۱ تا n را بدست آورید که در آنها ۲ و ۳ بین ۱ و ۴ قرار داشته باشند.

MATH75.IR

۳۹ـ برای X چند جواب وجود دارد اگر $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset X \subset \{1, 2, \ldots, 10\}$ باشد.

۴۰ـ تعداد راه‌هایی را پیدا کنید که یک کلاس با ده دانش‌آموز را بتوان به چهار گروه A_1، A_2، B_1 و B_2 تقسیم کرد بطوریکه A_1 و A_2 هر کدام شامل ۲ دانش‌آموز و B_1 و B_2 هر کدام شامل ۳ دانش‌آموز باشند.

۴۱ـ با ۱۵ نفر به چند طریق می‌توان گروه‌هایی با حداقل یک نفر تشکیل داد.

۴۲ـ چند عدد مختلف پنج رقمی بزرگتر از ۲۰۰۰۰ می‌توان با ارقام ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ نوشت؟

۴۳ـ یک قطار با n مسافر در m ایستگاه توقف می‌کند. به چند طریق مسافرین می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

۴۴ـ به چند طریق می‌توان m علامت «+» و n علامت «−» $(n < m)$ را بر یک خط نوشت بطوریکه هیچگاه دو علامت «−» کنار هم نباشند.

۴۵ـ در یک ساختمان ۸ طبقه ۵ نفر در طبقه همکف سوار آسانسور می‌شوند. به چند طریق این افراد می‌توانند در طبقات پیاده شوند هرگاه:

الف ـ محدودیتی نباشد. ب ـ در هر طبقه حداکثر یک نفر پیاده شود.

۴۶ـ در عمارتی چهار طبقه، ۸ نفر در طبقه هم کف وارد آسانسور می‌شوند، در هر یک از طبقات اول، دوم و سوم حداقل یک نفر پیاده می‌شوند. به چند طریق ممکن است در طبقه چهارم آسانسور خالی شود.

۴۷ـ بین اعداد ۱ تا 10^6 چند عدد وجود دارد که مجموع رقم‌های آنها مساوی ۹ باشد. مسأله را برای مجموع ۱۰ نیز حل کنید.

۴۸ـ در یک قطار مسافربری دو ردیف چهارتایی صندلی مقابل هم قرار دارند. هشت نفر به چند طریق می‌توانند بر صندلی‌ها بنشینند اگر قرار باشد دو نفر خاص مقابل هم باشند.

۴۹ـ به چند طریق می‌توان ۶ نفر را دور یک میز گرد قرار داد بطوریکه دو نفر خاص A و B کنار هم باشند.

۵۰ـ می‌خواهیم از بین پنج بازرگان، شش دبیر و چهار قاضی یک گروه دو نفره تشکیل دهیم بطوریکه گروه دارای مشاغل مختلف باشند. این کار به چند طریق امکانپذیر است.

۵۱ـ هفت مهرهٔ مختلف موجود است. تعداد حالاتی را حساب کنید که:

الف ـ بتوان این هفت مهره را در یک ردیف کنار هم قرارداد.

ب ـ بتوان این هفت مهره را در یک میلهٔ دایره‌ای کنار هم قرارداد.

MATH75.IR

ج ـ بتوان با عبور دادن نخی از میان آنها یک دستبند ساخت.

۵۲ـ به چند طریق می‌توان ۷ نفر را در یک اتاق ۳ نفره و ۲ اتاق دو نفره توزیع کرد.

۵۳ـ تیمی از هشت مسابقه خود، چهار تا برد، سه تا باخت و یک مساوی دارد. به چند طریق این نتایج حاصل شده است؟

۵۴ـ علی یک سکهٔ ۱۰ ریالی، یک سکهٔ ۲۰ ریالی، یک سکهٔ ۱۰۰ ریالی و یک سکهٔ ۲۵۰ ریالی دارد و می‌خواهد این سکه‌ها را بین شش نفر از دوستانش توزیع کند. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد اگر: (الف) هیچکدام از آنها بیش از یک سکه دریافت نکنند. (ب) برخی از آنها ممکن است بیش از یک سکه دریافت کنند.

۵۵ـ از بین ۶ مرد و ۴ زن به چند طریق می‌توان یک کمیته ۵ نفری انتخاب کرد اگر:

الف ـ حتماً ۳ مرد و ۲ زن انتخاب شوند.

ب ـ حداقل یک زن انتخاب شود.

ج ـ حداقل سه زن انتخاب شوند.

۵۶ـ شش زوج روی ۱۲ صندلی در یک ردیف سینما می‌خواهند قرار بگیرند. به چند طریق این کار میسر است اگر:

الف ـ محدودیتی نباشد.

ب ـ هر زوج کنار هم قرار گیرند.

ج ـ مردها در سمت راست و زن‌ها در سمت چپ قرار گیرند.

۵۷ـ هفت توپ سفید یکسان و پنج توپ سیاه یکسان موجودند. به چند طریق می‌توان این توپ‌ها را در یک ردیف کنار هم چید اگر:

الف ـ محدودیتی نباشد.

ب ـ فقط دو توپ سیاه کنار هم باشند.

ج ـ فقط چهار توپ سفید کنار هم باشند.

د ـ همهٔ توپ‌های سفید کنار هم باشند.

هـ ـ همهٔ توپ‌های سیاه کنار هم باشند.

و ـ هیچ دوتوپ سیاهی کنار هم نباشند.

۵۸ـ اگر m و n دو عدد طبیعی بوده و $(k \le m , n)$ با یک استدلال نشان دهید:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \dots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}$$

MATH75.IR

۵۹ـ در صفحهٔ xy چند مسیر مختلف از (۰ , ۰) به (۷ , ۷) وجود دارد بطوریکه روی صفحهٔ شطرنجی که از رسم خطوط $x = a$ و $y = b$ $(a , b \in \mathbf{Z})$ بدست می‌آید، فقط بتوانیم: سمت بالا یا راست حرکت کنیم.

۶۰ـ از میان n نفر، m نفر را انتخاب نموده $(m \leq n)$ می‌خواهیم دور یک میزگرد جایگشت دهیم این کار به چند طریق ممکن است؟

۶۱ـ می‌خواهیم kn نفر را دور k میز متمایز دایره‌ای بنشانیم بطوریکه دور هر میز دقیقاً n نفر قرار بگیرند. ثابت کنید تعداد حالات این عمل $\frac{(kn)!}{n^k}$ می‌باشد.

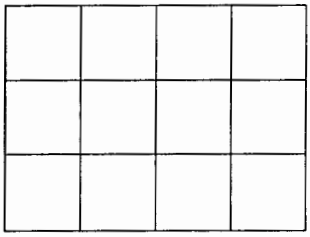
۶۲ـ تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x + y + z + t = ۱۶$ چند تاست؟

تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + ... + x_m = n$ چند تاست؟ $(m \leq n)$

۶۳ـ در بسط دو جمله‌ای $(x + y)^n$ چند جمله وجود دارد؟ ضریب جملهٔ $x^i y^j$ چیست؟

۶۴ـ کارخانه‌ای سه نوع خودرو تولید می‌کند. مدیر عامل یک شرکت بازرگانی می‌خواهد ۵ خودرو خریداری کند.او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

۶۵ـ در شکل زیر چند مستطیل وجود دارد؟ (هر مربع خود نوعی مستطیل است).



MATH75.IR

بخش دوم: (احتمال)

تجربهٔ تصادفی: به هر آزمایشی که نتیجهٔ قطعی آن از قبل مشخص نباشد یک تجربهٔ تصادفی گویند. پرتاب یک مکعب که روی هر یک از وجوه آن اعداد ۱ ، ۲ ، ... و ۶ نوشته شده فراخواندن یکی از دانش‌آموزان کلاس از روی لیست حضور و غیاب، انتخاب یک عدد سه رقمی زوج و ... همگی نمونه‌هایی از یک تجربه تصادفی‌اند.

فضای نمونه: مجموعهٔ متشکل از تمام نتایج حاصل از یک تجربهٔ تصادفی فضای نمونه آن تجربهٔ تصادفی نام دارد و معمولاً با S نشان داده می‌شود.

مثال ۶۰: در پرتاب یک مکعب فضای نمونه‌ای چیست؟ (هر جا در این بخش صحبت از مکعب می‌کنیم منظورمان مکعبی است که روی هر یک از وجوه آن اعداد ۱ ، ۲ ، ... و ۶ نوشته شده و این مکعب در پرتاب و نتیجهٔ حاصل به سمت عدد خاصی تمایل ندارد)

حل:

$$S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$$

مثال ۶۱: در پرتاب دو مکعب فضای نمونه‌ای چیست؟

حل:

$$S = \{(x , y) | \ x , y \in \mathbf{N} , ۱ \leq x , y \leq ۶\}$$

$$S = \{(۱ , ۱) , (۱ , ۲) , ... , (۱ , ۶) , (۲ , ۱) , (۲ , ۲) , ... , (۲ , ۶) , ... , (۶ , ۶)\}$$

مثال ۶۲: در تجربهٔ انتخاب یک عدد طبیعی سه رقمی فضای نمونه چیست؟

حل:

$$S = \{۱۰۰ , ۱۰۱ , ۱۰۲ , ... , ۹۹۹\}$$

در این بخش معمولاً با تجربه‌های تصادفی ای سروکار خواهیم داشت که فضای نمونه آنها متناهی باشد. ملاحظه می‌کنید که پدیده‌هایی مانند انتخاب یک نقطه دلخواه واقع بر محور طول‌ها در بازهٔ [۰ , ۱] ، انتخاب نقطه‌ای از صفحهٔ یک دایره و ... پدیده‌هایی هستند که فضای نمونهٔ آنها شامل بیشمار نقطه (نامتناهی) می‌باشد.

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از یک فضای نمونه را یک پیشامد تصادفی یا مختصراً یک پیشامد از آن فضای نمونه‌ای می‌نامند. مثلاً در پرتاب یک مکعب هر کدام از $A = \{۱ , ۳ , ۵\}$ و $B = \{۲ , ۴ , ۶\}$ ، $C = \{۲ , ۳ , ۵\}$ ، $D = \{۱ , ۲\}$ و ... یک پیشامد از فضای نمونه‌اند. مثلاً A

MATH75.IR

پیشامد رخ دادن (وقوع) عدد فرد است. B ، پیشامد رخ دادن عدد زوج، C پیشامد آنکه عدد ظاهر شده اول باشد و D پیشامد آنکه عدد نمایان شده کمتر از ۳ باشد و ...

احتمال: اینک که با تعاریف اولیه آشنا شدیم زمان آن فرارسیده که به مفهوم احتمال بپردازیم. اگر S فضای نمونه یک تجربه تصادفی و $A \subset S$ یک پیشامد دلخواه باشد (S متناهی) نسبت تعداد اعضاء A به تعداد اعضاء S را احتمال وقوع پیشامد A گفته با نماد P(A) نشان می‌دهند.

$$P(A) = \frac{\text{تعداد اعضاء } A}{\text{تعداد اعضاء } S} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال ۶۳: در پرتاب یک مکعب احتمال آن را بدست آورید که:

الف ـ عدد ظاهر شده زوج باشد. ب ـ عدد ظاهر شده فرد باشد.

ج ـ عدد ظاهر شده اول باشد. د ـ عدد ظاهر شده بیشتر از ۲ باشد.

هـ ـ عدد ظاهر شده بیشتر از ۶ باشد. و ـ عدد ظاهر شده کمتر از ۱ باشد.

ز ـ عدد ظاهر شده کمتر از ۷ باشد.

حل: برای تمام موارد این مثال $n(S) = ۶$ و $S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\}$.

الف ـ $A = \{۲ , ۴ , ۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ب ـ $B = \{۱ , ۳ , ۵\} \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ج ـ $C = \{۲ , ۳ , ۵\} \Rightarrow P(C) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

د ـ $D = \{۳ , ۴ , ۵ , ۶\} \Rightarrow P(D) = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

هـ ـ $E = \varnothing \Rightarrow P(E) = \frac{۰}{۶} = ۰$

و ـ $F = \varnothing \Rightarrow P(F) = \frac{۰}{۶} = ۰$

ز ـ $S = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\} \Rightarrow P(S) = \frac{۶}{۶} = ۱$

در این مثال E و F یعنی $\varnothing$ را ***پیشامد نشدنی*** (ممتنع) و S را پیشامد ***حتمی*** گویند.

نکته: اگر A یک پیشامد از فضای نمونهٔ متناهی S باشد داریم:

$$A \subset S \Rightarrow \quad ۰ \le n(A) \le n(S) \Rightarrow$$
$$۰ \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow$$

MATH75.IR

$$\boxed{۰ \leq P(A) \leq ۱}$$

به عبارتی احتمال وقوع یک پیشامد در یک تجربهٔ تصادفی عددی حقیقی و بین ۰ و ۱ می‌باشد.

$P(A) \in [۰ , ۱]$

مثال ۶۴: در پرتاب دو مکعب احتمال‌های زیر را بیابید.

الف ـ هر دو عدد زوج باشند. ب ـ یکی از مکعب‌ها زوج و دیگری فرد باشد.

ج ـ اعداد ظاهر شده مساوی باشند. د ـ اعداد ظاهر شده مضرب ۳ باشند.

هـ ـ مجموع اعداد ظاهر شده ۱۰ باشد.

حل: فضای نمونهٔ این تجربهٔ تصادفی همانطور که قبلاً اشاره شد عبارتست از:

$S = \{(۱ , ۱) , (۱ , ۲) , (۲ , ۶) , (۲ , ۲) , (۲ , ۳) , ... , (۲ , ۶) , ... , (۶ , ۶)\}$

که شامل ۳۶ عضو است. $(۶ \times ۶ = ۳۶)$

الف ـ اگر A چنین پیشامدی باشد و (x , y) عضو دلخواهی از A، بدیهی است که برای انتخاب x، ۳ حالت و برای انتخاب y نیز ۳ حالت وجود دارد. یعنی A دارای $۳ \times ۳ = ۹$ عضو است.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

ب ـ فرض کنیم B چنین پیشامدی بوده و (a , b) عضو دلخواهی از B فرض کنیم a زوج و b فرد باشد. تعداد چنین زوج مرتب‌هایی $۳ \times ۳ = ۹$ است. به همین ترتیب تعداد زوج مرتب‌هایی از B که در آنها a فرد و b زوج باشد نیز $۳ \times ۳ = ۹$ است. پس تعداد اینگونه زوج مرتب‌ها کلاً $n(B) = ۹ + ۹ = ۱۸$ است.

$$P(B) = \frac{۱۸}{۳۶} = \frac{۱}{۲}$$

ج ـ

$C = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۳ , ۳) , (۴ , ۴) , (۵ , ۵), (۶ , ۶)\}$

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

د ـ

$D = \{(۳ , ۳) , (۳ , ۶) , (۶ , ۳) , (۶ , ۶)\}$

$$P(D) = \frac{۴}{۳۶} = \frac{۱}{۹}$$

هـ ـ

$E = \{(۴ , ۶) , (۵ , ۵) , (۶ , ۴)\}$

MATH75.IR

$P(E) = \frac{۳}{۳۶} = \frac{۱}{۱۲}$

مثال ۶۵: در پرتاب یک سکهٔ ۵۰ ریالی احتمال آمدن «رو» چقدر است؟

حل: یک طرف سکه را «رو» و طرف دیگر آن را «پشت» می‌نامند. S = {پ , ر} و A = {ر}.

$P(A) = \frac{۱}{۲}$

مثال ۶۶: یک سکه را سه بار متوالی پرتاب می‌کنیم و نتایج حاصل را ثبت می‌کنیم. فضای نمونهٔ این تجربهٔ تصادفی چیست؟

حل: فضای نمونه این تجربهٔ تصادفی متشکل از سه تایی‌هایی مرتب است که در هر مکان «ر» یا «پ» نوشته شده.

S = {(ر , ر , ر) , (پ , ر , ر) , (ر , پ , ر) , (پ , پ , ر) , (ر , ر , پ) , (پ , ر , پ) , (ر , پ , پ) , (پ , پ , پ)}

S دارای ۸ = $۲^۳$ = ۲ × ۲ × ۲ عضو است.

مثال ۶۷: یک سکه را سه بار متوالی پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه دو یا سه بار «رو» بیایید چیست؟

حل: با توجه به مثال قبل

A = {(ر , ر , ر) , (پ , ر , ر) , (ر , پ , ر) , (ر , ر , پ)}

$P(A) = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$

مثال ۶۸: یک سکه را n بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونهٔ این تجربهٔ تصادفی چند عضو دارد؟

حل: فضای نمونه این تجربه تصادفی شامل n تایی‌های مرتب است که در هر مکان «ر» یا «پ» نوشته شده تعداد این nتایی‌ها ۲^n = ۲ × ۲ × ... × ۲ است.

مثال ۶۹: احتمال این را بیابید که در پرتاب ۱۰ بار متوالی یک سکه دقیقاً سه بار «رو» بیایید.

حل: ابتدا باید تعداد ۱۰تایی‌های مرتبی را بیابیم که در آنها سه بار «رو» و طبعاً هفت بار «پشت» آمده باشد. تعداد این ۱۰ تایی‌های مرتب ۱۲۰ = $\frac{۱۰!}{۳!۷!}$ = C(۱۰ , ۳) می‌باشد. تعداد اعضای فضای نمونه نیز ۱۰۲۴ = $۲^{۱۰}$ است. پس احتمال مطلوب عبارتست از:

$\frac{۱۲۰}{۱۰۲۴} = \frac{۱۵}{۱۲۸}$

مثال ۷۰: اعداد ۰ ، ۱ ، ۲ و ... و ۹ را روی ۱۰ کارت نوشته‌ایم. (روی هر کارت یک عدد) و پس از به هم زدن کارت‌ها یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم. احتمال این را بدست آورید که عدد روی کارت استخراج شده:

MATH75.IR

الف ـ زوج باشد. ب ـ فرد باشد. ج ـ اول باشد.

د ـ از ۴ بزرگتر باشد. هـ ـ از ۸ کوچکتر باشد. و ـ مضرب ۳ باشد.

حل: در اینجا $n(S) = ۱۰$ می‌باشد.

الف ـ $A = \{۰ , ۲ , ۴ , ۶ , ۸\} \Rightarrow P(A) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$

ب ـ $B = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹\} \Rightarrow P(B) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$

ج ـ $C = \{۲ , ۳ , ۵ , ۷\} \Rightarrow P(C) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$

د ـ $D = \{۵ , ۶ , ۷ , ۸ , ۹\} \Rightarrow P(D) = \frac{۵}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$

هـ ـ $E = \{۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷\} \Rightarrow P(E) = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$

و ـ $F = \{۰ , ۳ , ۶ , ۹\} \Rightarrow P(F) = \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲}{۵}$

نکته: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه متناهی S باشند $A \cup B$ را پیشامد وقوع A یا B یا هر دو آنها و $A \cap B$ را پیشامد وقوع توأم A و B می‌نامند. با توجه به آنچه در نظریهٔ مجموعه‌ها دیده‌ایم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

اگر طرفین این تساوی را بر $n(S)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

مثال ۷۱: در پرتاب یک مکعب مطلوبست احتمال آنکه عدد ظاهر شده یا زوج باشد یا اول.

حل:

$$A = \{۲ , ۴ , ۶\} \Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$B = \{۲ , ۳ , ۵\} \Rightarrow P(B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

$$A \cap B = \{۲\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۶}$$

$$P(A \cup B) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} = ۱ - \frac{۱}{۶} = \frac{۵}{۶}$$

MATH75.IR

مثال ۷۲: در پرتاب دو مکعب احتمال اینکه حداقل یکی از مکعب‌ها ۵ باشد چیست؟

حل: اگر A پیشامد آن باشد که مکعب اول ۵ و B پیشامد آن باشد که مکعب دوم ۵ باشد در اینصورت:

$$A = \{(۵ , ۱) , (۵ , ۲) , (۵ , ۳) , (۵ , ۴) , (۵ , ۵) , (۵ , ۶)\}$$

$$B = \{(۱ , ۵) , (۲ , ۵) , (۳ , ۵) , (۴ , ۵) , (۵ , ۵) , (۶ , ۵)\}$$

$$A \cap B = \{(۵ , ۵)\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{۶}{۳۶} + \frac{۶}{۳۶} - \frac{۱}{۳۶} = \frac{۱۱}{۳۶}$$

مثال ۷۳: در یک کیسه ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی موجود است. یک مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال این را بدست آورید که:

الف ـ مهرهٔ استخراج شده قرمز باشد.

ب ـ مهرهٔ استخراج شده آبی باشد.

حل: الف ـ $\frac{۵}{۸}$ ب ـ $\frac{۳}{۸}$

مثال ۷۴: از کیسه مثال قبل دو مهره استخراج می‌کنیم. احتمال این را بدست آورید که:

الف ـ هر دو مهره قرمز باشند.

ب ـ هر دو مهره آبی باشند.

ج ـ دو مهره غیر همرنگ باشند.

حل: الف ـ اگر A این پیشامد باشد داریم:

$$P(A) = \frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}} = \frac{\frac{۵!}{۲!۳!}}{\frac{۸!}{۲!۶!}} = \frac{۱۰}{۲۸} = \frac{۵}{۱۴}$$

ب ـ اگر B این پیشامد باشد داریم:

$$P(B) = \frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}} = \frac{\frac{۳!}{۲!۱!}}{\frac{۸!}{۲!۶!}} = \frac{۳}{۲۸}$$

ج ـ اگر C این پیشامد باشد.

$$P(C) = \frac{\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۸}{۲}} = \frac{۳ \times ۵}{۲۸} = \frac{۱۵}{۲۸}$$

MATH75.IR

پیشامدهای ناسازگار

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند بطوریکه $A \cap B = \varnothing$ گوییم A و B ناسازگارند. بدیهی است که در مورد در پیشامد ناسازگار $P(A \cap B) = ۰$ می‌باشد. یعنی احتمال وقوع توأم دو پیشامد ناسازگار صفر است.

مثال ۷۵: در پرتاب یک سکه احتمال اینکه هم «رو» بیاید و هم «پشت» چیست؟

حل:

$A = \{ر\} \qquad B = \{پ\} \qquad A \cap B = \varnothing$

$P(A \cap B) = ۰$

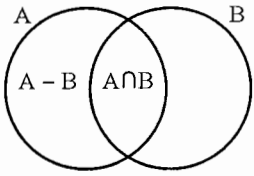
مثال ۷۶: اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند احتمال وقوع حداقل یکی از A یا B چیست؟

حل:

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مثال ۷۷: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه متناهی S باشند $P(A - B)$ چیست؟

حل: می‌دانیم $A - B$ و $A \cap B$ دو پیشامد ناسازگارند.



بطوریکه:

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$

بنابر مثال قبل:

$P[(A - B) \cup (A \cap B)] = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow$

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\boxed{P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

مثال ۷۸: در پرتاب یک مکعب احتمال اینکه عددی اول ظاهر شود ولی زوج نباشد چیست؟

حل: اگر A پیشامد اول بودن عدد ظاهر شده و B پیشامد زوج بودن آن باشد مطلوب مسأله یافتن $P(A - B)$ است.

$A = \{۲ , ۳ , ۵\} \quad , \quad B = \{۲ , ۴ , ۶\} , \quad A \cap B = \{۲\}$

MATH75.IR

$$\Rightarrow P(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \ , \ P(A \cap B) = \frac{۱}{۶}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

مثال ۷۹: یکی از اعداد ۱ و ۲ و ... و ۹ را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخاب شده فرد باشد ولی اول نباشد چیست؟

حل: اگر A پیشامد فرد بودن عدد انتخابی و B پیشامد اول بودن عدد انتخابی باشد:

$$A = \{۱ , ۳ , ۵ , ۷ , ۹\} \ , \ B = \{۲ , ۳ , ۵ , ۷\}$$

مطلوب مسأله یافتن $P(A - B)$ است. برای این منظور:

$$A \cap B = \{۳ , ۵ , ۷\}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۵}{۹} - \frac{۳}{۹} = \frac{۲}{۹}$$

مثال ۸۰: یکی از اعداد سه رقمی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه عدد انتخابی بر ۳ بخشپذیر باشد ولی بر ۱۱ بخشپذیر نباشد چیست؟

حل: فرض کنیم A پیشامد بخشپذیر بودن عدد انتخابی بر ۳ و B پیشامد بخشپذیر بودن عدد انتخابی بر ۱۱ باشد. در اینصورت فضای نمونه دارای ۹۰۰ عضو است و:

$$A = \{۱۰۲ , ۱۰۵ , ۱۰۸ , ... , ۹۹۹\} \ , \ n(A) = ۳۰۰$$

$$B = \{۱۱۰ , ۱۲۱ , ... , ۹۹۰\} \ , \ n(B) = ۸۱$$

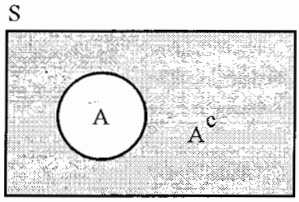
$$A \cap B = \{۱۳۲ , ۱۶۵ , ..., ۹۹۰\} \ , \ n(A \cap B) = ۲۷$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۳۰۰}{۹۰۰} - \frac{۲۷}{۹۰۰} = \frac{۲۷۳}{۹۰۰} = \frac{۹۱}{۳۰۰}$$

متمم یک پیشامد: اگر S فضای نمونه یک تجربهٔ تصادفی و A پیشامدی از این فضای نمونه باشد متمم پیشامد A را با نماد A^c یا A' نشان می‌دهند و آن عبارتست از پیشامدی که عضوهای آن به S تعلق دارند ولی به A تعلق ندارند.

MATH75.IR

$A^c = S - A$



می‌دانیم $S = A \cup A^c$ و $A \cap A^c = \varnothing$. بنابراین:

$$P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) \Rightarrow$$

$$۱ = P(A) + P(A^c) - ۰ \Rightarrow \boxed{P(A) + P(A^c) = ۱}$$

به عبارتی: $P(A^c) = ۱ - P(A)$

مثال ۸۱: در پرتاب یک مکعب احتمال آنکه عدد کمتر از ۵ نیاید چیست؟

حل: اگر فرض کنیم A پیشامد وقوع عدد کمتر از ۵ باشد داریم:

$$A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$$

و مطلوب مسأله یافتن $P(A^c)$ است.

$$P(A^c) = ۱ - P(A) = ۱ - \frac{۴}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

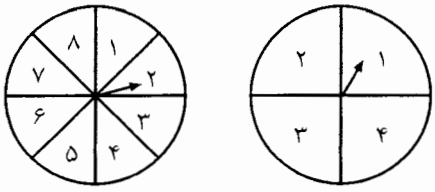
پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند بطوریکه وقوع پیشامد A بر وقوع پیشامد B تأثیری نداشته باشد و بالعکس، گوییم A و B دو پیشامد مستقل‌اند. برای دو پیشامد مستقل از هم A و B داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$$

یعنی احتمال وقوع توأام A و B برابر است با حاصلضرب احتمال‌های وقوع تک تک A و B.

مثال ۸۲: در شکل زیر هر دو عقربه همزمان چرخیده می‌شوند و پس از مدتی بر روی یکی از اعداد متوقف می‌شوند. احتمال اینکه عقربهٔ (الف) بر روی یک عدد زوج و عقربهٔ (ب) بر روی یک عدد فرد متوقف شود چیست؟



(الف) (ب)

MATH75.IR

حل: فرض کنیم A پیشامد وقوع این باشد که عقربه (الف) بر روی عددی زوج متوقف شود. می‌دانیم تعداد اعضای فضای نمونه این تجربهٔ تصادفی ۳۲ = ۴ × ۸ است و تعداد عضوهای A، ۱۶ = ۴ × ۴ است. بنابراین:

$$P(A) = \frac{۱۶}{۳۲} = \frac{۱}{۲}$$

همچنین اگر B پیشامد وقوع این باشد که عقربه (ب) روی عدد فرد متوقف شود، تعداد عضوهای B، ۱۶ = ۸ × ۲ است و $P(B) = \frac{۱۶}{۳۲} = \frac{۱}{۲}$.

چون A و B دو پیشامد مستقل‌اند:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

مثال ۸۳: اگر A و B دو پیشامد مستقل از فضای نمونه S باشند نشان دهید A و B^c نیز مستقل‌اند.

حل: چون A و B مستقل‌اند، $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$. برای A و B^c داریم:

$$P(A \cap B^c) = P(A - B) = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) - P(A) \,.\, P(B) = P(A)[۱ - p(B)] = P(A) \,.\, P(B^c)$$

این تساوی نشان می‌دهد که A و B^c نیز مستقل‌اند.

مثال ۸۴: در یک مسابقه تیراندازی احتمال آنکه X هدف را بزند $\frac{۱}{۳}$ و احتمال آنکه Y به هدف بزند $\frac{۳}{۵}$ است. احتمال اینکه حداقل یکی از A و B به هدف بزنند چیست؟

حل: اگر A پیشامد آن باشد که X به هدف بزند و B پیشامد آن باشد که Y به هدف بزند، A و B مستقل‌اند و داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$= \frac{۱}{۳} + \frac{۳}{۵} - \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۱۴}{۱۵} - \frac{۱}{۵} = \frac{۱۱}{۱۵}$$

مثال ۸۵: یک سکه طوری ساخته شده که احتمال نشستن «رو» در آن سه برابر احتمال نشستن «پشت» می‌باشد. در دو بار پرتاب این سکه چقدر احتمال دارد که هر دو بار «رو» بیاید؟

حل: این مثال اولین مثال از نوعی است که احتمال وقوع هر یک از اعضاء فضای نمونه با هم برابر نیستند. باید توجه داشت که مجموع احتمال‌های همهٔ نقاط فضای نمونه باید یک باشد.

$$P(\{ر\}) + P(\{پ\}) = ۱ \quad \Rightarrow \quad ۳P(\{پ\}) + P(\{پ\}) = ۱ \quad \Rightarrow$$

$$P(\{پ\}) = \frac{۱}{۴} \;,\quad P(\{ر\}) = \frac{۳}{۴}$$

MATH75.IR

چون در هر دو بار پرتاب می‌خواهیم «رو» بیاید و این دو پیشامد مستقل از هم می‌باشند لذا اگر A پیشامد وقوع «رو» در پرتاب اول و B پیشامد وقوع «رو» در پرتاب دوم باشد داریم:

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۱۶}$$

مثال ۸۶: در کیسه‌ای ۴ مهره سیاه و ۶ مهره سفید موجود است. مهره‌ای به تصادف از کیسه خارج کرده و به جای آن دو مهره با رنگ‌های مخالف رنگ مهره اول به کیسه باز می‌گردانیم و مجدداً مهره‌ای استخراج می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

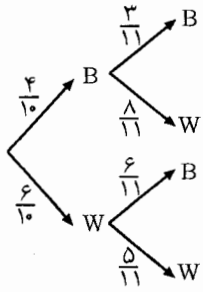
الف ـ مهره اول سیاه و دومی سفید باشد.

ب ـ هر دو مهره سیاه باشند.

ج ـ مهره اول سفید و دومی سیاه باشد.

د ـ هر دو مهره سفید باشند.

حل: بهتر است اینگونه مثال‌ها را با نمودار درختی حل کنیم. اگر B پیشامد استخراج مهره سیاه و W پیشامد استخراج مهرهٔ سفید باشد داریم:



با توجه در این نمودار و مستقل بودن پیشامدها جواب (الف) عبارتست از:

$$\frac{۴}{۱۰} \times \frac{۸}{۱۱} = \frac{۱۶}{۵۵}$$

و جواب (ب) عبارتست از:

$$\frac{۴}{۱۰} \times \frac{۳}{۱۱} = \frac{۶}{۵۵}$$

و جواب (ج) عبارتست از:

$$\frac{۶}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۱} = \frac{۱۸}{۵۵}$$

همچنین جواب (د) عبارتست از:

$$\frac{۶}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۱} = \frac{۳}{۱۱}$$

مثال ۸۷: هفت نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. احتمال اینکه همه در یک روز هفته

MATH75.IR

متولدشده باشند چقدر است؟

حل: تعداد عضوهای فضای نمونه این آزمایش $۷^۷ = ۷ \times ۷ \times ۷ \times ۷ \times ۷ \times ۷ \times ۷$ است. و اگر A پیشامد مطلوب باشد، تعداد عضوهای A هفت می‌باشد. (یعنی هفت تا هفت تایی مرتب وجود دارد که مؤلفه‌های آنها همگی شنبه یا همگی یکشنبه یا .... یا همگی جمعه باشند) بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{۷}{۷^۷} = \frac{۱}{۷^۶}$$

مثال ۸۸: یک مکعب را سه بار متوالی پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر بار عددی بزرگتر بیاید چیست؟

حل: اگر A چنین پیشامدی باشد بدیهی است که هر عضو A یکی از زیر مجموعه‌های سه عضوی مجموعهٔ {۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱} است که تعداد عضوهای آن $C(۶ ,۳) = \frac{۶!}{۳!۳!} = ۲۰$ می‌باشد. همچنین تعداد عضوهای فضای نمونه این تجربه تصادفی:

$$n(S) = ۶ \times ۶ \times ۶ = ۶^۳ = ۲۱۶$$

است. بنابراین:

$$P(A) = \frac{۲۰}{۲۱۶} = \frac{۵}{۵۴}$$

مثال ۸۹: در یک کمد ۱۰ جفت کفش وجود دارد. چهار لنگه کفش به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه از لنگه کفش‌های انتخابی هیچکدام لنگهٔ دیگری نباشد چقدر است؟

حل: ابتدا باید تعداد حالات انتخاب چهار لنگه کفش (که هیچکدام لنگهٔ دیگری نباشد) را مشخص‌کنیم.این‌کاربه $\frac{\binom{۲۰}{۱} \times \binom{۱۸}{۱} \times \binom{۱۶}{۱} \times \binom{۱۴}{۱}}{۴!} = \frac{۲۰ \times ۱۸ \times ۱۶ \times ۱۴}{۲۴} = ۳۳۶۰$ طریق میّسر است. همچنین تعداد حالات ممکن یعنی انتخاب چهار لنگه کفش از بین ۲۰ لنگه کفش عبارتست از:

$$\binom{۲۰}{۴} = \frac{۲۰!}{۴!۱۶!} = \frac{۲۰ \times ۱۹ \times ۱۸ \times ۱۷}{۲۴} = ۴۸۴۵$$

بنابراین احتمال مطلوب عبارتست از:

$$P(A) = \frac{۳۳۶۰}{۴۸۴۵} = \frac{۲۲۴}{۳۲۳}$$

مثال ۹۰: مکعب خاصی چنان طراحی شده که احتمال رو شدن هر طرف متناسب با عددی است که روی آن حک شده. در پرتاب این مکعب احتمال اینکه عدد اول ظاهر شود چقدر است؟

MATH75.IR

حل: اگر فرض کنیم $P(\{۱\}) = k$ در اینصورت خواهیم داشت:

$$P(\{۲\}) = ۲k \ , \ P(\{۳\}) = ۳k \ , \ P(\{۴\}) = ۴k \ , \ P(\{۵\}) = ۵k \ , \ P(\{۶\}) = ۶k$$

چون مجموع احتمال‌های این شش پیشامد باید یک باشد داریم:

$$k + ۲k + ۳k + ۴k + ۵k + ۶k = ۱ \Rightarrow k = \frac{۱}{۲۱}$$

با در نظر گرفتن $A = \{۲ , ۳ , ۵\}$:

$$P(A) = P(\{۲\}) + P(\{۳\}) + P(\{۵\}) = \frac{۲}{۲۱} + \frac{۳}{۲۱} + \frac{۵}{۲۱} = \frac{۱۰}{۲۱}$$

مثال ۹۱: وجوه چهار مکعب A، B، C و D بصورت زیر شماره‌گذاری شده‌اند:

A : ۰ , ۰ , ۴ , ۴ , ۴ , ۴

B : ۲ , ۲ , ۲ , ۲ , ۷ , ۷

C : ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳

D : ۱ , ۱ , ۱ , ۵ , ۵ , ۵

الف ـ احتمال اینکه در پرتاب A و B، A از B ببرد چیست؟

ب ـ احتمال اینکه در پرتاب B و C، B از C ببرد چیست؟

ج ـ احتمال اینکه در پرتاب C و D، C از D ببرد چیست؟

د ـ احتمال اینکه در پرتاب A و D، D از A ببرد چیست؟

هـ ـ کدام تاس برای بردن بهتر است؟

حل:

الف ـ در اینجا A باید ۴ و B باید ۲ بیاید. چون این دو مستقل از هم‌اند، پس احتمال مورد نظر حاصلضرب احتمال‌ها می‌باشد. $\frac{۴}{۶} \times \frac{۴}{۶} = \frac{۴}{۹}$

ب ـ B باید ۷ بیاید. $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

ج ـ D باید ۱ بیاید. $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

د ـ در اینجا D باید یک بیاید و A صفر یا D پنج بیاید و A هر چه بیاید.

$$\frac{۳}{۶} \times \frac{۲}{۶} + \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۶} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

هـ ـ در مقایسه A و B، B بهتر است. زیرا به احتمال $۱ - \frac{۴}{۹} = \frac{۵}{۹}$ از A می‌برد.

MATH75.IR

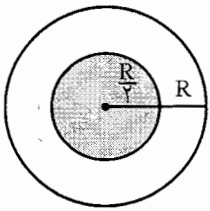
در مقایسهٔ B و C، C بهتر است. زیرا به احتمال $\frac{۲}{۳} = ۱ - \frac{۱}{۳}$ از B می‌برد. در مقایسه C و D، هر دو از نظر برد یکدیگر یکسان هستند ولی D، A را به احتمال $\frac{۲}{۳}$ و C، A را به احتمال $\frac{۱}{۳}$ می‌برد. لذا D از C بهتر است. همچنین D، B را به احتمال $\frac{۱}{۳}$ و C، B را به احتمال $\frac{۲}{۳}$ می‌برد. یعنی C از D بهتر است. نتیجهٔ کلی این است که C و D از نظر برد یکسان‌اند.

در قسمت احتمال می‌توان از فضاهای نمونه‌ای صحبت کرد که نامتناهی می‌باشند. مثلاً فضای نمونه‌ای یک سطح و پیشامد مورد نظر قسمتی از سطح کل باشد. در اینصورت برای یافتن احتمال وقوع این پیشامد کافی است مساحت سطح مورد نظر را بر مساحت سطح کل تقسیم کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۹۲: نقطه‌ای را از صفحه یک دایره به شعاع R انتخاب کرده‌ایم. احتمال اینکه نقطه به مرکز دایره نزدیکتر از منحنی آن باشد چیست؟

حل: چنانکه ملاحظه می‌شود، مطلوب مسأله یافتن احتمال وقوع این پیشامد است که نقطه از قسمت هاشور خورده انتخاب گردد. اگر S مساحت کل و $S_۱$ مساحت ناحیه مورد نظر و A پیشامد مطلوب باشدداریم:

$$P(A) = \frac{S_۱}{S} = \frac{\pi(\frac{R}{۲})^۲}{\pi R^۲} = \frac{۱}{۴}$$



این نشان می‌دهد که احتمال انتخاب نقطه‌ای از سطح دایره بطوریکه آن نقطه به منحنی نزدیکتر از مرکز باشد سه برابر احتمال این پیشامد است که نقطه به مرکز دایره نزدیکتر از منحنی باشد.

MATH75.IR

تمرین‌های بخش دوم (احتمال)

۱ـ دو مکعب پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه مجموع اعداد رو شده ۸ و تفاضل آنها ۴ باشد چقدر است؟

۲ـ سه تاس پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه یکی از آنها ۶ و دو تای دیگر مختلف و متفاوت با ۶ باشند چیست؟

۳ـ اگر A و B دو پیش آمد مستقل باشند ثابت کنید A' و B' نیز مستقل‌اند.

۴ـ کیسه‌ای حاوی ۴ مهره سفید، ۳ مهره قرمز و ۵ مهره سیاه می‌باشد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

الف ـ مهره‌ها همرنگ باشند.

ب ـ حداکثر دو مهره سیاه داشته باشیم.

۵ـ دو مکعب را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حاصلضرب اعداد رو شده کمتر از ۳۰ باشد چقدر است؟

۶ـ سه لامپ را از بین ۱۲ لامپ که ۵ لامپ آن سوخته به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

الف ـ هیچیک از لامپ‌های انتخابی سوخته نباشد.

ب ـ فقط یکی از لامپ‌های انتخابی سوخته باشد.

ج ـ لااقل یکی از سه لامپ سوخته باشد.

۷ـ دو مکعب را با هم پرتاب کرده‌ایم مطلوبست احتمال اینکه:

الف ـ مجموع اعداد ظاهر شده ۵ باشد.

ب ـ هر دو عدد یکسان باشند.

ج ـ مجموع اعداد ظاهر شده ۷ باشد.

د ـ هر دو با اعداد زوج ظاهر گردند.

۸ـ از کیسه‌ای شامل پنج مهره سفید، چهار مهره قرمز و سه مهره سبز سه مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

MATH75.IR

الف ـ دو مهره سفید و یک مهره سبز باشد.

ب ـ هر سه مهره همرنگ باشند.

ج ـ سه مهره از رنگ‌های مختلف باشند.

۹ـ از کیسه‌ای شامل a مهره سفید و b مهره سیاه دو مهره بصورت متوالی استخراج می‌کنیم. ثابت کنید احتمال اینکه دومی سفید باشد $\frac{a}{a+b}$ است.

۱۰ـ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S بوده و $A \subset B$ باشد ثابت کنید:

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

۱۱ـ یک تیرانداز در سه نوبت تیراندازی احتمال اینکه حداقل یک بار به هدف بزند ۰/۹۳۶ است. مطلوبست احتمال اینکه در یک تیراندازی هدف را بزند.

۱۲ـ h و k دو عدد طبیعی‌اند بطوریکه $1 < k < n$ از دنبالهٔ n و $n - 1$ و ... و ۳ و ۲ و ۱ دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه یکی از دو عدد کوچکتر از k و دیگری بزرگتر از k باشد چیست؟

۱۳ـ در یک کلاس ۳۲ نفره که دانش‌آموزان در چهار ردیف هشت تایی نشسته‌اند. دو نفر را به تصادف صدا می‌زنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

الف ـ هر دو از یک ردیف باشند.

ب ـ دو نفر از دو ردیف مختلف باشند.

ج ـ یکی از ردیف اول دیگری از ردیف سوم باشند.

۱۴ـ دانش‌آموزی یک جعبه مداد رنگی ۶ رنگه دارد. او به تصادف این مدادها را داخل جعبه کنار هم چیده. احتمال اینکه رنگ‌های آبی و قرمز کنار هم نباشند چیست؟

۱۵ـ دو کیسه A و B موجودند. A دارای ۳ مهره سیاه و دو مهره سفید است و B دارای ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. یکی از کیسه‌ها را به تصادف انتخاب کرده، مهره‌ای از آن استخراج می‌کنیم و داخل کیسه دیگر قرار می‌دهیم. اینک از کیسه دوم مهره‌ای استخراج می‌کنیم. احتمال اینکه مهره دوم سفید باشد چیست؟

۱۶ـ پنج نفر در یک مهمانی شرکت کرده‌اند. احتمال اینکه همگی آنها در یک روز سال متولد شده باشند چیست؟ (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید).

۱۷ـ A و B دو پیشامد متعلق به فضای نمونه S می‌باشند. با استفاده از جبر مجموعه‌ها و نمودار ون پیش آمدهای زیر را مشخص کنید.

MATH75.IR

الف ـ پیشامد A واقع شود ولی B واقع نشود.

ب ـ A یا B واقع شوند.

ج ـ دقیقاً یکی واقع شود.

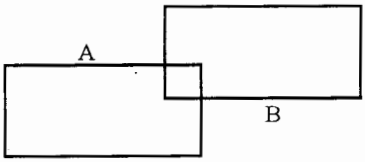
۱۸ـ A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه S می‌باشند. با استفاده از جبر مجموعه‌ها و نمودار ون پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف ـ A و B اما نه C

ب ـ فقط A

ج ـ A یا C ولی نه B

۱۹ـ رضا به طرف یک تخته هدف مانند شکل زیر تیراندازی می‌کند. احتمال آنکه A را بزند ۰/۲ و احتمال آنکه B را بزند ۰/۳ و احتمال آنکه هر دو ناحیه را بزند ۰/۱ است. مطلوبست تعیین احتمال آنکه رضا:



الف ـ A را بزند و B را نزند.

ب ـ B را بزند و A را نزند.

ج ـ A را نزند.

۲۰ـ در اطاقی ۱۰ جفت کفش وجود دارد. هرگاه از میان آنها دو لنگه کفش به تصادف انتخاب کنیم مطلوبست احتمال اینکه این دو لنگه یک جفت تشکیل دهند.

۲۱ـ در یک کلاس ۲۰ نفری، ۱۶ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۲ نفر عضو تیم والیبال‌اند و دو نفر عضو هیچ تیم ورزشی نمی‌باشند. از این کلاس سه نفر به تصادف انتخاب می‌شوند. مطلوبست احتمال اینکه:

الف ـ این سه نفر عضو مشترک تیم‌های والیبال و فوتبال باشند.

ب ـ یک نفر فقط عضو تیم فوتبال و یک نفر عضو تیم والیبال و یکی در هیچ تیمی نباشند.

۲۲ـ احتمال آنکه تا ۲۰ سال دیگر کارخانه سازندهٔ خودرو «دوو» ورشکست شود ۰/۹ و همین احتمال برای کارخانه سازندهٔ خودرو «پراید» ۰/۸ است. تعیین کنید احتمال آن را که

الف ـ تا ۲۰ سال دیگر هر دو کارخانه ورشکست شوند.

ب ـ حداقل یکی از این دو کارخانه باقی بماند.

ج ـ هیچیک باقی نمانند.

۲۳ـ نشان دهید اگر $P(A) = \frac{۳}{۴}$ و $P(B) = \frac{۳}{۸}$ آنگاه A و B نمی‌توانند ناسازگار باشند.

MATH75.IR

۲۴ـ علی و رضا در یک مهمانی شام کلاه‌های خود را در محلی که چهار کلاه دیگر نیز وجود دارد آویزان می‌کنند. در برگشت به علت رفتن برق هر یک به تصادف یک کلاه بر می‌دارند. تعیین کنید احتمال این را که :

الف ـ علی کلاه صحیح خود را بر دارد.

ب ـ هر دو کلاه صحیح خود را بردارند.

ج ـ اقلاً یکی کلاه صحیح خود را بردارد.

د ـ انتخاب هیچیک صحیح نباشد.

۲۵ـ در یک کیف ۴ گوی سفید، ۳ گوی زرد و ۴ گوی سیاه و در کیف دیگر ۲ گوی سفید، ۵ گوی زرد و ۳ گوی سیاه قرار دارد. کیفی را به تصادف و مهره‌ای را به تصادف از داخل آن انتخاب می‌کنیم. این عمل را یک بار دیگر نیز بدون باز گرداندن مهرهٔ قبلی تکرار می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

الف ـ هر دو گوی از یک کیف انتخاب شده باشند.

ب ـ هر دو گوی از یک کیف انتخاب شده باشند و هر دو سیاه باشند.

ج ـ هر دو گوی دارای رنگ یکسان باشند.

د ـ هر دو از یک کیف ولی با رنگ‌های متفاوت باشند.

۲۶ـ سه اسب A ، B و C در یک مسابقه شرکت دارند. پیشامد «A ، B را شکست می‌دهد» را با علامت AB نشان می‌دهیم. پیشامد «A ، از B که C را شکست داده است، می‌برد» را با ABC نشان می‌دهیم. فرض کنیم $P(BC) = \frac{۱}{۲}$ ، $P(AC) = \frac{۲}{۳}$ و $P(AB) = \frac{۲}{۳}$ و $P(CAB) = P(CBA)$ و $P(BAC) = P(BCA)$ و $P(ABC) = P(ACB)$. احتمال برنده شدن هر یک از A ، B و C را حساب کنید.

۲۷ـ دو مکعب با هم پرتاب می‌شوند. مقدار $P(|x - y| = ۲)$ چقدر است؟

۲۸ـ اگر A و B دو پیشامد مستقل بوده و $P(A) = ۰/۲$ و $P(A \cup B) = ۰/۴$. مقدار $P(B)$ چقدر است؟

۲۹ـ ۵ مهرهٔ سفید یکسان و ۴ مهرهٔ سیاه یکسان را در یک ردیف کنار هم چیده‌ایم. احتمال اینکه هیچ دو مهرهٔ سفیدی کنار هم نباشند چیست؟

۳۰ـ نقطه‌ای به تصادف از سطح مربع ABCD به رئوس $A(۱ , ۱)$ و $B(۲ , ۱)$ و $C(۲ , ۲)$ و $D(۱ , ۲)$ انتخاب می‌شود. احتمال اینکه نقطه انتخابی بین دو خط به معادلات

MATH75.IR

$y + x = \frac{۱}{۲}$ و $y + x = \frac{۷}{۲}$ محصور باشد چیست؟

۳۱ـ دو مکعب را با هم پرتاب می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه:

الف ـ عددهای ظاهر شده مختلف باشند.

ب ـ مجموع اعداد ظاهر شده کمتر از ۹ باشد.

۳۲ـ در کیسه‌ای ۱۰ مهره سفید و ۱۰ مهره سیاه و ۳۰ مهرهٔ قرمز موجود است. اگر یک مهره انتخاب شود احتمال اینکه سفید یا قرمز باشد چیست؟

۳۳ـ فرض کنید S مجموعهٔ عددهای دو رقمی ساخته شده با ارقام ۰ ، ۱ و ۲ باشد. از این مجموعه یک عدد به تصادف اختیار می‌کنیم. مطلوبست احتمال اینکه این عدد:

الف ـ به صفر ختم شود.

ب ـ زوج باشد.

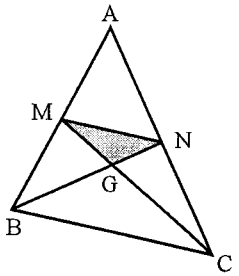
ج ـ بر ۳ بخشپذیر باشد.

د ـ از ۲۱ بیشتر باشد.

۳۴ـ یک مکعب را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر بار عددی بزرگتر بیاید چیست؟

۳۵ـ دو مکعب با هم پرتاب می‌شود اگر x عدد حاصل از پرتاب مکعب A و y عدد حاصل از پرتاب مکعب B باشد مطلوبست $P(۶ \leq x + y \leq ۱۱)$

۳۶ـ در شکل زیر G محل برخورد میانه‌های مثلث است. نقطه‌ای به تصادف از سطح مثلث انتخاب می‌شود. احتمال اینکه این نقطه از قسمت هاشور خورده انتخاب شود چیست؟



MATH75.IR

از مؤلفان این کتاب، آثار زیر نیز توسط انتشارات مبتکران منتشر شده است.

ISBN: 978-964-486-513-8
9789644865138

انتشارات مبتکران www.mobtakeran.com
تهران، خیابان انقلاب، خیابان فخررازی، خیابان وحیدنظری، پلاک ۵۹
کدپستی: ۱۳۱۴۷۶۴۹۶۱ تلفکس: ۹۲ - ۶۶۹۵۴۳۹۰
e-mail: info @ mobtakeran.com
مرکز پخش: تهران، صندوق پستی: ۱۵۹۶ - ۱۳۱۴۵
تلفکس: ۹۵ - ۶۶۹۵۴۳۹۳