توپولوژی جبری مقدماتی

اثر: زس کاسنیوسکی

ترجمهٔ: مهدی نجفی‌خواه

زمستان ۱۳۸۲

دیباچه

هدف از این اثر تهیهٔ متنی است که برای تدریس توپولوژی جبری مقدماتی و با سلیقه‌های مختلف مفید باشد. کتاب بسیار مصور است و در تنظیم آن از چاشنی هندسه استفاده شده است؛ چرا که توپولوژی قبل از هر چیزی هندسه است. تا حد امکان از تجرید دوری شده و از روش بی روح معمول، تنها در معرفی مفاهیم جدید استفاده شده است. تا حد امکان پیشنیازهای کمتری را در نظر گرفته‌ایم، و عملاً هیچ گونه اطلاع قبلی در خصوص توپولوژی عمومی و یا نظریهٔ مجموعه‌ها را فرض نگرفته‌ایم. از این کتاب هم برای دانشجویان کارشناسی و هم دانشجویان کارشناسی ارشد سالهای پائین می‌توان استفاده نمود.

در خلال کتاب تعداد زیادی تمرین با درجهٔ دشواری مختلف به جهت آشنایی و نیز پر بار نمودن اطلاعات خواننده آمده است؛ که البته بجا است تا حد امکان تعداد بیشتری از این تمرینها را حل کنید. اما، تا حد امکان سعی شده است فرض کنیم که خواننده هیچ یک از آنها را حل نکرده است، و در صورتی که پاسخ مسألهای لازم باشد، حل آن در کتاب گنجانده شده است.

ملاک انتخاب مباحث این کتاب از میان مباحث فراوان موجود در زمینهٔ توپولوژی و توپولوژی جبری، قابل تدریس بودن آنها بوده است؛ در واقع جالب توجه ترین قسمتهای این دو موضوع را در این اثر جمع نموده‌ایم. در فصل آخر پیشنهادات مفیدی برای مطالعات بیشتر آورده شده است.

بطور تقریبی یک چهارم کتاب در مورد تو پولوژی عمومی است و سه چهارم آن در مورد توپولوژی جبری می‌باشد. قسمت توپولوژی عمومی کتاب بر اساس سبک مرسوم تنظیم نشده است. سعی شده است تا مطالب لازم برای خوانند را فقط مطرح کنیم و به سرعت بخش جالب توپولوژی را در دسترس خواننده بگذاریم. در قسمت توپولوژی جبری، تأکید اصلی بر گروه بنیادی یک فضای توپولوژیک می‌باشد. دانشجویان مستعد یادگیری مفهوم گروه بنیادی بشکل کامل و سریع هستند و این امر خود باعث می‌شود تا ایشان پاسخ موقت و کافی برای این پرسش که توپولوژی جبری با چه کار می‌کند بدست بیاورند.

نظریهٔ فضاهای پوششی و قضیهٔ شیفرت—ون کامپن با توضیحات کامل مطرح می‌شوند و از هر دوی آنها در محاسبهٔ گروههای بنیادی بهره برده می‌شود. دیگر مباحث عبارتند از منیفلد و سطح، قضیهٔ خم ژردان (که به عنوان بخش ۲.۶ مطرح شده است)، نظریهٔ گره‌ها و فصلی مقدماتی در خصوص همولوژی تکین.

چون این کتاب در مورد توپولوژی است، نه تارخ توپولوژی، از ذکر اسامی و تارخها کاملاً صرف نظر شده است.

لزومی ندارد فصول این کتاب را به ترتیبی که هست مطالعه کنید. نمودار مشروح در ذیل، بستگیهای تقریبی میان فصول مختلف را نشان می‌دهد. مثلاً، دانستن و درک فصل ۱۸ موکول به فهم فصول ۰ تا ۹، ۱۲ تا ۱٦ و نیز ۱۷ است.

زس کاسنیوسکی،
اپن تاین، نیو کاسل،
سپتامبر ۱۹۷۹.

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیشنیازها

در این فصل آن احکام و تعاریف مقدماتی در نظریهٔ مجموعه‌ها، نظریه گروهها و فضاهای متری را که در این کتاب استفاده خواهند شد، مطرح می‌کنیم. بهتر است هر وقت لازم شد به مطالعهٔ این فصل اقدام کنید.

۱.۱ مجموعه

برای مجموعه‌های X و Y از نماد $X \subseteq Y$ به معنی «X زیر مجموعهٔ Y است» استفاده می‌کنیم و از نماد $X \subset Y$ به معنی «X زیر مجموعهٔ Y است و $X \neq Y$» استفاده می‌کنیم. هر گاه $Y \subseteq X$، از نماد $X - Y$ برای نمایش «مجموعهٔ عناصری از X که به Y تعلق ندارند» استفاده می‌کنیم. مجموعهٔ تهی را با نماد $\emptyset$ استفاده می‌کنیم.

حاصلضرب دکارتی یا **حاصلضرب مستقیم** دو مجموعهٔ X و Y را مجموعهٔ زوجهای مرتب (x,y) ای تعریف می‌کنیم که $x \in X$ و $y \in Y$. به بیان دیگر

$$X \times Y = \{(x,y) \,|\, x \in X \,,\, y \in Y\}.$$

حاصلضرب دکارتیِ گردایه‌ای متناهی $\{X_i \,|\, i = ۱, ۲, \cdots, n\}$ از مجموعه‌ها را نیز به صورت مشابه می‌شود تعریف نمود:

$$X_۱ \times X_۲ \times \cdots \times X_n := \{(x_۱, \cdots, x_n) \,|\, x_i \in X_i \,,\, ۱ \leq i \leq n\}.$$

تابع یا **نگاشت** $f : X \to Y$ بین دو مجموعه، عبارت است از تناظری که هر عضو x از X را به عنصری یکتا $f(x) = y$ از Y نظیر می‌کند. **تابع همانی بر مجموعهٔ** A، عبارت از تابع $1_A : X \to Y$ با ضابطهٔ $1_A(x) = x$ به ازای $x \in X$ می‌باشد. **نگارهٔ تابع** $f : X \to Y$ به صورت

$$\text{Image}(f) := f(X) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ به ازای یک } x \in X \text{ ای}\}$$

تعریف می‌کنیم. توجه شود که اگر W و W' دو زیر مجموعه از X باشند، آنگاه

$$f(W \cup W') = f(W) \cup f(W'), \qquad f(W \cap W') \subseteq f(W) \cap f(W').$$

در حالت کلی، اگر گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های از X، مثلاً $\{W_j \mid i \in J\}$، در اختیار باشد که J یک **مجموعهٔ اندیسگذار** مفروض است، آنگاه

$$f(\bigcup_{j\in J} W_j) = \bigcup_{j\in J} f(W_j), \qquad f(\bigcap_{j\in J} W_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} f(W_j).$$

در صورتی که بیم ابهام نرود، بجای $f : X \to Y$ بطور خلاصه می‌نویسیم f. هر تابع $f : X \to Y$، تابعی از X به $f(X)$ تعریف می‌کند که آن را هم با نماد f نمایش می‌دهیم. اگر A زیر مجموعه‌ای از X باشد، آنگاه **تحدید f به A**، عبارت است از تابعی $f|_A : A \to X$ با ضابطهٔ $(f|_A)(a) = f(a)$ به ازای هر $a \in A$. توجه شود که $f|_A = f \circ 1_A$.

اگر Z زیر مجموعه‌ای از Y و $f : X \to Y$ تابع باشد، در این صورت **نگارهٔ وارون Z تحت f**، عبارت است از

$$f^{-1}(Z) := \{x \in X \mid f(x) \in Z\}.$$

توجه شود که به ازای هر گردایه $\{Z_j \mid j \in J\}$ از زیر مجموعه‌های Z_j از Y، داریم

$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Z_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Z_j), \qquad f^{-1}(\bigcap_{j\in J} Z_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Z_j),$$
$$f^{-1}(Y - Z_j) = X - f^{-1}(Z_j).$$

تابع $f : X \to Y$ در صورتی **یکبیک** است که هر گاه $x_1, x_2 \in X$ با $x_1 \neq x_2$، آنگاه $f(x_1) \neq f(x_2)$. تابع $f : X \to Y$ در صورتی **پوشا** یا **برو** است که $f(X) = Y$. تابع $f : X \to Y$ در صورتی **دوسویی** است که یکبیک و پوشا باشد. در این حالت یک **تابع وارون** $f^{-1} : X \to Y$ با ضابطهٔ زیر وجود خواهد داشت:

$$x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

اگر $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ تابع باشند، آنگاه **تابع مرکب** $g \circ f$ از X به Z به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \qquad x \in X.$$

چنانچه $f : X \to Y$ تابعی دوسویی باشد، آنگاه توابع $f \circ f^{-1} : Y \to Y$ و $f^{-1} \circ f : X \to X$ هر دو همانی خواهند بود. بالعکس، اگر توابع $f \circ g : Y \to Y$ و $g \circ f : X \to X$ هر دو همانی باشند، آنگاه f و g هر دو دوسویی بوده و هر یک وارون دیگری خواهد بود. شرط همانی بودن $g \circ f : X \to X$ ایجاب می‌کند که f یکبیک و نیز g پوشا است.

منظور از یک **رابطه** بر مجموعهٔ X، زیر مجموعه‌ای $\sim$ از $X \times X$ می باشد. معمولاً، بجای $(x, y) \in \sim$ می‌نویسیم $x \sim y$. رابطهٔ $\sim$ را در صورتی **هم ارزی** گوئیم که در شرایط بشرح زیر صدق کند:

۱) **شرط بازتابی:** به ازای هر $x \in X$ ای $x \sim x$؛

۲) **شرط تقارنی:** اگر $x \sim y$، آنگاه $y \sim x$؛

۳) **شرط تعدی:** اگر $x \sim y$ و $y \sim z$، آنگاه $x \sim z$.

دستهٔ هم‌ارزی شامل x عبارت از مجموعهٔ $[x] := \{y \in X \,|\, x \sim y\}$ می‌باشد. اگر $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر X باشد، آنگاه هر عضو از X در دقیقاً یک دستهٔ هم‌ارزی واقع است.

عمل دو تایی بر مجموعهٔ X عبارت از تابعی به شکل $f : X \times X \to X$ است. مقدار $f(x, y)$ را به صورت xfy، $x + y$ یا حتی برخی اوقات xy نشان می‌دهیم.

۲.۱ گروه

گروه مجموعه‌ای G است به همراه یک عمل دوتایی که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) عنصری $1 \in G$، بنام **عنصر همانی در** G، طوری وجود دارد که به ازای همهٔ $g \in G$ ها $g1 = 1g = g$.

۲) به ازای هر $g \in G$، عنصری $g^{-1} \in G$ بنام **وارون** g، طوری وجود دارد که $g^{-1}g = gg^{-1} = 1$.

۳) به ازای هر $g_1, g_2, g_3 \in G$، خاصیت شرکتپذیری برقرار است. یعنی $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$.

در نمایش جمعی گروه، که به ندرت استفاده می‌شود، عنصر همانی را با نماد 0 و وارون g را با نماد $-g$ نمایش می‌دهیم. گروهی که تنها عنصرش، عنصر همانی است، یعنی $\{1\}$ یا $\{0\}$، **گروه بدیهی** نامیده می‌شود.

زیر مجموعهٔ H از گروه مفروض G را در صورتی **زیر گروه** گوئیم که H تحت عمل دوتایی القائی از G بر H، گروه باشد. اگر H زیر گروهی از G و $g \in H$، آنگاه **همدستهٔ چپ** H **توسط** g عبارت از مجموعهٔ $gH := \{gh \,|\, h \in H\}$ است. **همدستهٔ راست** به صورت مشابه تعریف می‌گردد. دو همدستهٔ چپ gH و $g'H$ از زیر گروه H یا مجزا هستند و یا در غیر این صورت برابرند. یعنی، همدسته‌های چپ H در G، کل G را افراز می‌کنند.

هomomorفیسم $f : G \to H$ از گروه G به گروه H، عبارت از تابعی است که به ازای همهٔ $g, g' \in G$ ها $f(gg') = f(g)f(g')$. در صورتی که هomomorفیسم $f : G \to H$ دوسویی باشد، می‌گوئیم G **و** H **ایزومورفند**، و f **ایزومورفیسم** است و می‌نویسیم $G \cong H$ یا $f : G \cong H$. **هستهٔ** هomomorفیسم $f : G \to H$ عبارت است از $\mathrm{Kernel} f := \{g \in G \,|\, f(g) = 1_H\}$. f وقتی و تنها وقتی یکبیک است که هسته‌اش بدیهی باشد، یعنی $\mathrm{Kernel} f = \{1\}$. بنابراین، هستهٔ هر ایزومورفیسم فقط یک عضو دارد، یعنی تنها عنصر همانی در G.

زیر گروه K از گروه G در صورتی **نرمال** است که به ازای هر $g \in G$ و هر $k \in K$ ای داشته باشیم $gkg^{-1} \in K$. هستهٔ هر هomomorفیسم $f : G \to H$، زیر گروهی نرمال از G است. چنانچه K زیر گروهی نرمال از G باشد، آنگاه به ازای هر $g \in G$ ای همدستهٔ چپ gK با همدستهٔ راست Kg یکی است و مجموعهٔ G/K همهٔ همدسته‌های

چپ K در G تحت عمل

$$(gK)(g'K) = (gg')K$$

تشکیل گروه می‌دهد. G/K را **گروه خارج قسمتی** G **بر** K می‌نامند.

اولین قضیهٔ ایزومورفیسم اذعان می‌دارد که اگر $f : G \to H$ هومومورفیسم پوشایی از G به H با هستهٔ K باشد، آنگاه H با گروه خارج قسمتی G/K ایزومرف است.

اگر $g \in G$، آنگاه **زیر گروه تولید شده توسط** g **در** G عبارت از زیر مجموعهٔ همهٔ توانهای g در G است. یعنی $\langle g \rangle := \{g^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$؛ که اگر $n \geq ۰$، داریم $g^n = \underbrace{gg\cdots g}_{n\ \text{تا}}$ و اگر $n \leq ۰$، داریم $g^n = \underbrace{g^{-۱}g^{-۱}\cdots g^{-۱}}_{n\ \text{تا}}$. در نمایش جمعی، داریم $\langle g \rangle := \{ng \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$؛ که اگر $n \geq ۰$، داریم $ng = \underbrace{g+g+\cdots+g}_{n\ \text{تا}}$ و اگر $n \leq ۰$، داریم $ng = \underbrace{(-g)+(-g)+\cdots+(-g)}_{n\ \text{تا}}$. چنانچه به ازای یک $g \in G$ ای $G = \langle g \rangle$، می‌گوئیم G **گروه دوری با مولد** g است. در حالت کلی، مجموعهٔ مولدهای یک گروه مفروض G، عبارت از زیر کجموعه‌ای S از G است به طوری که هر عضو از G را به صورت حاصلضربی از توانهای عناصر در S می‌توان نوشت. چنانچه S متناهی باشد، می‌گوئیم **گروه** G **متناهیاً تولید شده** است.

گروه G را در صورتی **آبلی** یا **تعویضپذیر** گوئیم که به ازای هر $g, g' \in G$ ای $gg' = g'g$. مثلاً، همجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ (با نمایش جمعی) گروهی آبلی است. بعلاوه، گروهی دوری با مولد 1 یا -1 است.

گروه آبلی آزاد از مرتبهٔ nام عبارت از گروه ایزومورف با $\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{n\ \text{تا}}$ می‌باشد.

قضیهٔ تجزیه برای گروههای آبلی متناهیاً تولید شده اذعان می‌دارد که : اگر G گروه آبلی متناهیاً تولید شده باشد، در این صورت G با گروه $H_۰ \oplus H_۱ \oplus \cdots \oplus H_m$ ایزومورف است که $H_۰$ یک گروه آبلی آزاد است و H_i های با $i = ۱, \cdots, m$، گروه‌های دوری از مرتبهٔ توان عددی اول هستند. رتبهٔ $H_۰$ و نیز مرتبهٔ هر یک از H_i ها به صورت یکتا قابل تعیین است.

منظور از **جابجاگر** در گروه G، عنصری است به شکل $ghg^{-۱}h^{-۱}$. **زیر گروه جابجاگرهای در** G، عبارت از مجموعهٔ همهٔ جابجاگرهای در G به همراه همهٔ حاصلضربهای متناهی از آنها می‌باشد (این خود یک گروه تشکیل می‌دهد). زیر گروه جابجاگر نرمال است و عملاً کوچکترین زیر گروهی K از G است که به ازای آن G/K آبلی می‌باشد.

از نمادهای $\mathbb{R}$، $\mathbb{C}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}$ بترتیب برای نمایش مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی، مختلط، صحیح، طبیعی و گویا استفاده می‌کنیم. صفر را عضو $\mathbb{N}$ نمی‌دانیم. اغلب $\mathbb{R}$ را به عنوان **خط حقیقی** و $\mathbb{C}$ را به عنوان **صفحهٔ مختلط** تصور می‌کنیم. مجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ عبارت است از حاصلضرب دکارتی n کپی از $\mathbb{R}$. از نامدگذاریهای زیر برای نمایش زیر مجموعه‌های بخصوص از $\mathbb{R}$ (بنام بازه‌ها) استفاده می‌کنیم:

$$(a;b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}, \qquad [a;b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}.$$

۳.۱ فضای متری

در توپولوژی مجموعه‌هایی را مطالعه می‌کنیم که «ساختار» بخصوصی را به همراه دارند؛ این ساختار به گونه‌ای است که می‌شود به پرسش «آیا $f : X \to Y$ پیوسته است؟» معنی روشنی بخشید، که در اینجا X و Y دو مجموعهٔ به همراه چنین ساختارهایی هستند. در این بخش ساختار مذکور را با نگریستن به فضاهای اقلیدسی و متری کف می‌کنیم.

یادآور می‌شویم که اگر $f : X \to Y$ تابعی مفروض باشد، در صورتی می‌گوئیم f **در** x **پیوسته** است که به ازای هر $\varepsilon_x > 0$، یک $\delta_x > 0$ ای چنان یافت گردد که از $|x - y| < \delta_x$ نتیجه شود $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_x$. با تعویض نماد قدر مطلق با فاصلهٔ اقلیدسی، می‌توان این تعریف را به سادگی به حالت تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ تعمیم داد. کلی‌تر اینکه، اگر مجموعه‌هایی با «تابع فاصله» داشته باشیم، در این صورت با استفاده از این توابع فاصله می‌توانیم پیوستگی توابع میان آن دو را تعریف کنیم. «تابع فاصله» — که اغلب «متر» نامیده می‌شود — می‌بایستی برخی خواص (بدیهی) را دارا باشد، و این امر باعث تعریف زیر می‌گردد.

۱.۳.۱ تعریف. گیریم A مجموعه‌ای مفروض است. تابع $d : A \times A \to \mathbb{R}$ صادق در شرایط

۱) $d(a, b) = 0$ اگر و تنها اگر $a = b$.

۲) به ازای هر $a, b, c \in A$ ای $d(a, b) + d(b, c) \leq d(a, c)$.

را **متر بر** A می‌گوئیم. مجموعهٔ A به همراه یگ متر بخصوص بر آن را **فضای متری** نامیده و با زوج مرتب (A, d) یا بطور ساده با نماد M نشان می‌دهیم. ویژگی دوم را **نامساوی مثلثی** می‌نامیم.

۲.۳.۱ تمرین. نشان دهید که اگر d متری برای A باشد، در این صورت به ازای هر $a, b \in A$ ای داریم $0 \leq d(a, b)$ و $d(a, b) = d(b, a)$.

۳.۳.۱ مثال. اگر فرض کنیم $A = \mathbb{R}$ و $d(a, b) = |b - a|$، آنگاه به سادگی می‌شود متر بودن d بر A را نشان داد.

در حالت کلی می‌شود فرض نمود که $A=\mathbb{R}^n$ و d نیز عبارت است از

$$d(x,y)=\|y-x\|:=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2},$$

که $x=(x_1,\cdots,x_n)$ و $y=(y_1,\cdots,y_n)$. باز هم نشان دادن متر بودن d کار دشواری نیست. این متر را **متر اقلیدسی** یا **متر معمولی بر** $\mathbb{R}^n$ می‌نامند.

۴.۳.۱ مثال. دو نمونه دیگر از مترهای بر $\mathbb{R}^n$ عبارتند از

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|,\qquad d(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|y_i-x_i|.$$

اثبات متر بودن اینها را به خواننده می‌سپاریم.

۵.۳.۱ مثال. چنانچه A مجموعه‌ای دلخواه باشد، با تعریف

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y \text{ اگر}\\ 1 & x\neq y \text{ اگر}\end{cases}$$

یک متر بر A می‌شود تعریف نمود. متر حاصل را **متر گسسته بر** A می‌نامند.

۶.۳.۱ تمرین.

۱) نشان دهید که در هر مورد از سه مثال بالا، d یک متر بر $\mathbb{R}^n$ است.

۲) نشان دهید که $d(x,y)=(y-x)^2$ بر $\mathbb{R}$ متر تعریف نمی‌کند.

۳) نشان دهید که $d(x,y)=\min_{1\leq i\leq n}|y_i-x_i|$ بر $\mathbb{R}^n$ متر تعریف نمی‌کند.

۴) گیریم d متر و r عددی حقیقی و مثبت است. نشان دهید که d_r با ضابطهٔ $d_r(x,y):=r\,d(x,y)$ نیز متر است.

۵) گیریم d متر است. نشان دهید که d' با تعریف $d'(x,y)=d(x,y)/(1+d(x,y))$ نیز متر است. توجه شود که همواره $0\leq d'(x,y)\leq 1$.

٦) اگر در $\mathbb{R}^n$ به ازای $x\,y\in\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم $d(x,y)=$کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا برابر با فاصلهٔ بین x و y، آنگاه آیا d متری بر $\mathbb{R}^n$ خواهد بود؟

۷.۳.۱ قضیه. چنانچه (A, d) فضایی متری بوده و B زیر مجموعه‌ای از A باشد. با تحدید d به $B \times B$، متری d' بر B می‌توان تعریف نمود. پر این حالت (B, d') را زیر فضای متری (A, d) می‌نامند.

همان طوری که قبلاً گفتیم، با دراختیار داشتن مفهوم متر، به راحتی می‌توان پیوستگی بین فضاهای متری مختلف را تعریف نمود.

۸.۳.۱ تعریف. گیریم (A, d_A) و (B, d_B) فضاهای متری باشند. تابع $f : A \to B$ را پر صورتی **پیوسته در** $a \in A$ گوئیم که به ازای هر $\varepsilon_x > 0$، یک $\delta_x > 0$ ای چنان یافت گردد که از $d_A(x, y)\delta_x$ نتیجه شود $d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon_x$. تابع f را در صورتی **پیوسته** گوئیم که در همهٔ نقاط پیوسته باشد.

۹.۳.۱ تمرین.

۱) گیریم A فضایی متری با متر d است. گیریم $y \in A$. نشان دهید که تابع $f : A \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = d(x, y)$ پیوسته است؛ که $\mathbb{R}$ به همراه متر معمولی‌اش می‌باشد.

۲) گیریم M فضای متری $(\mathbb{R}, d)$ با متر اقلیدسی معمولی d است. گیریم $M_\circ$ فضای متری $(\mathbb{R}, d_\circ)$ با متر گسسته $d_\circ$ بر $\mathbb{R}$ است. نشان دهید که همهٔ توابع $f : M_\circ \to M$ پیوسته‌اند. نشان دهید که هیچ تابع پیوستهٔ یکبیکی از M به $M_\circ$ وجود ندارد.

چنین به نظر می‌رسد که با تعویض متر بر A و یا متر بر B، مجموعهٔ توابع پیوسته از A به B تغییر می‌کند. مثلاً، به موارد زیر توجه شود.

۱۰.۳.۱ تمرین.

۱) گیریم A و B دو فضای متری با متر بترتیب d_A و d_B باشند. گیریم d_{Ar} متر بر A، ساخته شده مانند در تمرین ۶.۳.۱—(۴) است. گیریم f تابعی از A به B باشد. ثابت کنید f نسبت به متر d_A بر A وقتی و تنها وقتی پیوسته است که f نسبت به متر d_{Ar} بر A پیوسته باشد.

۲) همان حکم (ا) را منتهی با متر d' از تمرین ۶.۳.۱—(۵) بجای d_{Ar} حل کنید.

بنابراین، فاصله محک مناسبی برای بررسی پیوستگی و یا عدم پیوستگی توابع نیست! ثابت می شود که مفهوم «مجموعهٔ باز» برای این کار مناسبتر است.

۱۱.۳.۱ تعریف. زیر مجموعهٔ U از فضای متری (A,d) را در صورتی **باز** گوئیم که به ازای هر $x \in U$ ای یک $\varepsilon_x > \circ$ چنان یافت گردد که اگر $y \in A$ و $d(x,y) < \varepsilon_x$، آنگاه $y \in U$. به بیان دیگر، اگر به ازای هر $x \in U$ ای یک $\varepsilon_x > \circ$ طوری یافت گردد که $B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq U$ باشد؛ که $B_r(x) := \{y \in A \,|\, d(x,y) < r\}$ **گوی باز به مرکز** x **و شعاع** r می‌باشد.

۱۲.۳.۱ مثال. $(\circ;\text{۱}) = \{x \in \mathbb{R} | \circ < x < \text{۱}\}$ در $\mathbb{R}$ با متر معمولی‌اش باز است. مجموعه‌های زیر در $\mathbb{R}^\text{۲}$ بازند:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^\text{۲} \,|\, x^\text{۲} + y^\text{۲} < \text{۱}\},\ \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^\text{۲} \,|\, x^\text{۲} + y^\text{۲} > \text{۱}\},$$
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^\text{۲} \,|\, \circ < x < \text{۱}\,,\, \circ < y < \text{۱}\}.$$

۱۳.۳.۱ تمرین.

۱) نشان دهید که اگر (A,d) فضایی متری بوده، $x \in A$ و r عددی حقیقی و مثبت باشد، در این صورت $B_r(x)$ در A باز است.

۲) کدام مجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}^\text{۲}$ (نسبت به توپولوژی معمولی در $\mathbb{R}^\text{۲}$) بازند؟

$$\begin{array}{ll} \{(x,y) \,|\, x^\text{۲} + y^\text{۲} < \text{۱}\} \cup \{(\text{۱},\circ)\}, & \{(x,y) \,|\, x + y > \circ\}, \\ \{(x,y) \,|\, x + y < \circ\}, & \{(x,y) \,|\, |x| < \text{۱}\}, \\ \{(x,y) \,|\, x^\text{۲} + y^\text{۲} < \text{۱}\}, & \{(x,y) \,|\, x + y = \circ\}. \end{array}$$

۳) نشان دهید که اگر $\mathcal{F}$ گردایهٔ همهٔ مجموعه‌های باز نسبت به یک متر مفروض از فضایی متری A باشد، آنگاه
۱) مجموعهٔ تهی $\emptyset$ و خود A در $\mathcal{F}$ قرار دارند.
۲) مقطع هر دو عضو از $\mathcal{F}$، عضوی از $\mathcal{F}$ است.
۳) اجتماع هر تعداد عضو از $\mathcal{F}$، عضوی از $\mathcal{F}$ است.

۴) مثالی از یک گردایهٔ نامتناهی از مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ (نسبت به متر معمولی در $\mathbb{R}$) بیابید که مقطع همهٔ آنها باز نیست.

با بکارگیری مفهوم مجموعهٔ باز، حکم جالب زیر را داریم.

۱۴.۳.۱ قضیه. تابع $f : M_1 \to M_2$ میان فضاهای متری وقتی و تنها وقتی پیوسته است که به ازای هر مجموعهٔ باز U در M_2، مجموعهٔ $f^{-1}(U)$ در M_1 باز باشد.

اثبات: گیریم d_1 و d_2 متر بر بترتیب M_1 و M_2 هستند. فرض کنیم f پیوسته باشد و U زیر مجموعه‌ای باز از M_2. گیریم $x \in f^{-1}(U)$. پس، $f(x) \in U$. اکنون، $\varepsilon > 0$ ای چنان وجود دارد که $B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$؛ زیرا، U باز است. پیوستگی f ایجاب می‌کند که حکم کنیم $\delta > 0$ ای چنان یافت می‌شود که

$$d_1(x,y) < \delta \;\;\Rightarrow\;\; d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

به بیان دیگر، $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$، که این خود به معنی $B_\delta \subseteq f^{-1}(U)$ می‌باشد. چون این مطلب به ازای همهٔ $x \in f^{-1}(U)$ ها صحیح است، نتیجه می‌گیریم که $f^{-1}(U)$ زیر مجموعه‌ای باز دز M_1 می‌باشد.

بالعکس، فرض کنیم $x \in M_1$؛ در این صورت به ازای هر $\varepsilon > 0$ ای محموعهٔ $B_\varepsilon(f(x))$ در M_2 باز است، و بنابراین $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ در M_1 باز می‌باشد. اما، این بدان معنی است که هر گاه $x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$، آنگاه $\delta > 0$ ای چنان وجود دارد که $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$. به عبارت دیگر، $\delta > 0$ ای چنان وجود دارد که اگر $d_1(x,y) < \delta$، آنگاه $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. یعنی f پیوسته است. □

۱۵.۳.۱ یادداشت. بر اساس این حکم، f وقتی و تنها وقتی پیوسته است که نگارهٔ وارون هر مجموعهٔ باز، مجموعه‌ای باز باشد. اینکه گفته شود، نگارهٔ همهٔ مجموعه‌های باز، باز است، چیز دیگری است.

یک بیان دیگر از این قضیه چنین است: چنانچه دو متر بر مجموعه‌ای مفروض، مجموعه‌های باز یکسانی را مشخص کنند، در این صورت مجموعهٔ توابع پیوستهٔ مشخص شده توسط ان دو نیز یکی خواهد بود. بنابراین، تمرین ۱۰.۳.۱ را به این صورت می شود مجدداً بیان نمود: نشان دهید که مترهای d_A، d_Ar و d' خانوادهٔ مجموعه‌های باز یکسانی را مشخص می‌کنند.

۱۶.۳.۱ تمرین. میان مترهای $\sum |y_i - x_i|$ و $\max |y_i - x_i|$ بر $\mathbb{R}^n$ کدامیک مجموعه‌های باز یکسانی با محموعه‌های باز صادره از متر معمولی تولید می‌کنند؟

از بحث بالا چنین استنباط می‌شود که در مطالعهٔ پیوستگی توابع بین فضاهای متری، خانواده‌های مرکب از مجموعه‌های باز مشخص شده توسط آن مترها مهم هستند، نه

خود آن مترها! این مطلب انگیزه‌ای است برای اظهار این موضوع که: به ازای مجموعه‌ای مفروض X، خانواده‌ای $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های از X را بعنوان «مجموعه‌های باز در X» معرفی می‌کنیم. این عمل یک شیء $(X,\mathcal{F})$ متشکل از یک مجموعه X به همراه خانواده‌ای $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های X بدست می‌دهد. به این ترتیب، اگر $f: X \to Y$ که $(X,\mathcal{F})$ و $(Y,\mathcal{F}')$ دو شیء این چنینی هستند، در صورتی می‌گوئیم f پیوسته است که به ازای هر $U \in \mathcal{F}'$ ای داشته باشیم $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$. طبیعی است که اگر انتخاب هر گونه خانواده‌ای را مجاز بدانیم، ریاضیات جالبی بدست نمی‌آید! بنابراین «خانوادهٔ $\mathcal{F}$ مجموعه‌های باز» بایستی دارای خواص سادهٔ به شرح زیر باشد؛ قوانینی که در تمرین ۱۳.۳.۱−(۳) در مورد خانوادهٔ مجموعه‌های باز حاصل از یک فضای متری معرفی شدند. اینها عبارتند از:

۱) مجموعهٔ تهی $\emptyset$ و خود A در $\mathcal{F}$ قرار دارند.

۲) مقطع هر دو عضو از $\mathcal{F}$، عضوی از $\mathcal{F}$ است.

۳) اجتماع هر تعداد عضو از $\mathcal{F}$، عضوی از $\mathcal{F}$ است.

بنابراین، ساختار وابسته به مجموعهٔ X که در ابتداری این بخش از آن سخن به میان آمد، عبارت از خانواده‌ای $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های از X است که دارای سه خاصیت مشروح در بالا است. این نقطهٔ آغازی برای توپولوژی است.

فصل ۲

توپولوژی و پیوستگی

۱.۲ فضای توپولوژی

فضای توپولوژی دقیقاً عبارت است از یک مجموعه به همراه زیر مجموعه‌هایی بخصوص (که به آنها مجموعه‌های باز گفته می‌شود) که سه خاصیت مشخص دارند.

۱.۱.۲ تعریف. گیریم X مجموعه و $\mathcal{U}$ گردایه ای از زیر مجموعه‌های X باشد، که دارای خواص به شرح زیر است:

۱) $\emptyset \in \mathcal{U}$ و $X \in \mathcal{U}$.

۲) مقطع هر دو عضو از $\mathcal{U}$، عضوی از $\mathcal{U}$ است.

۳) اجتماع هر تعداد عضو از $\mathcal{U}$، عضوی از $\mathcal{U}$ است.

چنین گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های از X، **توپولوژی‌ای بر** X نامیده می‌شود. مجموعهٔ X به همراه $\mathcal{U}$ را **فضای توپولوژی** نامیده و با نماد $(X,\mathcal{U})$ نشان می‌دهیم، که اغلب آن را به صورت T یا خود X خلاصه می‌نویسیم. عناصر $U \in \mathcal{U}$ را **مجموعه‌های بازِ** T می‌گوئیم. اعضای X را **نقاطِ** T می‌نامیم.

۲.۱.۲ یادداشت. توجه کنید که شرط (۲) ایجاب می‌کند که مقطع هر تعداد متناهی از اعضاء $\mathcal{U}$، عضوی از $\mathcal{U}$ است. اگر $\mathcal{P}(X)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های X باشد، آنگاه توپولوژی برای X، دقیقاً عبارت است از انتخاب $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$ که در

شرایط (۱)، (۲) و (۳) مشروح در بالا صدق می‌کند. گزینه‌های مختلف، توپولوژیهای مختلفی را موجب می‌گردد.

لازم است تا مثالهای متنوعی از فضاهای توپولوژی را مطرح کنیم. مطابق بحث انجام شده در بخش پایانی از فصل قبل، اولین مثال چنین است:

۳.۱.۲ مثال. هر فضای متری، یک ساختار فضای توپولوژی موجب می‌گردد. در واقع، اگر (X,d) فضایی متری باشد و $\mathcal{U}$ مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های باز در X نسبت به متر d باشد، در این صورت $\mathcal{U}$ یک توپولوژی بر X است. در این حالت می‌گوئیم «فضای حاصل دارای **توپولوژی معمولی** یا **توپولوژی متری** است».

۴.۱.۲ یادداشت. عکس موضوع بالا در حالت کلی درست نیست. یعنی، فضاهای توپولوژی‌ای وجود دارند که از هیچ متری حاصل نمی‌شوند. به تمرین ۶.۱.۲—(۳) توجه کنید. فضاهای توپولوژی حاصله را **فضای متری‌پذیر** می‌نامند. توجه کنید که ممکن است دو فضای متری متفاوت، به یک فضای توپولوژی می‌انجامند.

در تهیهٔ دو حالت حدی از انتخاب خانواده‌های ممکن از زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ مفروض X، که در شرایط فضای توپولوژی صدق می‌کنند، به کثال بعد می‌رسیم:

۵.۱.۲ مثال. چنانچه X مجموعه‌ای غیر تهی باشد، $\mathcal{U}=\{\emptyset,X\}$ یک توپو لوژی بر X است. این توپولوژی را **توپولوژی نا گسسته** یا **توپولوژی ملموس** بر X می‌نامیم. این کوچکترین توپولوژی ممکن بر X است.

چنانچه $\mathcal{U}$ را همهٔ $\mathcal{P}(X)$ زیر مجموعه‌های ممکن در X بگیریم، به وضوح به یک توپولوژی بر X می‌رسیم. این توپولوژی را **توپولوژی گسسته** بر X می‌نامیم.

۶.۱.۲ تمرینات.

۱) نشان دهی که اگر X، دارای توپولوژی گسسته باشد، متری‌پذیر است. (راهنمایی: متر گسسته را در نظر بگیرید.)

۲) گیریم X یک فضای توپولوژی متری‌پذیر باشد. ثابت کنید که به ازای هر زوج $a,b\in X$، دو مجموعهٔ باز U_a و U_b یکی شامل a و دیگری شامل b طوری وجود دارند که $U_a\cap U_b=\emptyset$.

۳) با استفاده از قسمت (ب) نشان دهید که اگر X حد اقل دو نقطه داشته باشد و نیز X دارای توپولوژی ملموس باشد، آنگاه X نمی‌تواند متر بپذیرد.

۷.۱.۲ مثال. توپولوژی‌ای موسوم به **توپولوژی متمم متناهی** بر هر مجموعهٔ دلخواه X قابل تعریف است. در اینجا $\mathcal{U}$ عبارت است از $\emptyset$، X و آن زیر مجموعه‌هایی از X که متممشان متناهی است. البته، اگر خود X متناهی باشد، این توپولوژی همان توپولوژی گسسته بر X خواهد بود. اما، لازم است برقراری سه شرط توپولوژی بودن $\mathcal{U}$، در حالتی که X نامتناهی است تحقیق گردد. شرط اول بدیهی است. برای تحقیق شرط دوم، فرض کنیم $U_۱, U_۲ \in \mathcal{U}$ چنان باشند که $X - U_۱$ و $X - U_۲$ بنا به فرض متناهی هستند. بنابراین، $(X - U_۱) \cup (X - U_۲)$ متناهی است، ولی لین مجموعه برابر $X - (U_۱ \cap U_۲)$ است و در نتیجه $U_۱ \cap U_۲ \in \mathcal{U}$. برای ملاحظهٔ صحت شرط سوم، کافی است توجه شود که $X - (\bigcap_{j\in J} U_i) = \bigcap_{j\in J}(X - U_i)$.

۸.۱.۲ مثال. اگر X از دو نقطه تشکیل شده باشد، آنگاه تنها چهار توپولوژی بر مجموعهٔ X می‌شود در نظر گرفت. یعنی:

$$\begin{array}{ll} \mathcal{U}_۱ = \{\emptyset, X\}, & \mathcal{U}_۲ = \{\emptyset, \{a\}, X\}, \\ \mathcal{U}_۳ = \{\emptyset, \{b\}, X\}, & \mathcal{U}_۴ = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}. \end{array}$$

توپولوژی بودن $\mathcal{U}_۱$ و $\mathcal{U}_۴$ بیپهی است. پس، تحقیق توپولوژی بودن $\mathcal{U}_۲$ و $\mathcal{U}_۳$ می‌ماند، که آن را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. توجه شود که $(X,\mathcal{U}_۲)$ و $(X,\mathcal{U}_۳)$ متری پذیر نیستند.

در تمرینات زیر، مثالهایی دیگر از فضاهای توپولوژی را مشاهده می‌کنید.

۹.۱.۲ تمرین. در تمرینات (ا) تاو (ج) نشان دهید که $\mathcal{U}$ توپولوژی بر X است.

۱) $X = \mathbb{R}$ و $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty; x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

۲) $X = \mathbb{N}$ و $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\mathcal{O}_n \,|\, n \geq ۱\}$، که $\mathcal{O}_n = \{n, n+۱, \cdots\}$.

۳) $X = \mathbb{R}$ و $U \in \mathcal{U}$ اگر و تنها اگر U زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد و به ازای هر $s \in \mathbb{R}$، یک $t > s$ ای چنان وجود دارد که $[s;t) \subseteq U$، که در اینجا داریم $[s:t) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, s \leq x < t\}$.

۴) کلیهٔ توپولوژیهای ممکن بر مجموعه‌ای سه عضوی را مشخص کنید.

۵) نشان دهید که هیچ یک از خانواده‌های زیر از زیر مجموعه‌های از $\mathbb{R}$، تشکیل توپولوژی بر $\mathbb{R}$ نمی‌دهند:

$\mathcal{U}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty; x] \,|\, x \in \mathbb{R}\}$،

$\mathcal{U}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a; b) \,|\, a, b \in \mathbb{R} \,\&\, a < b\}$.

۱۰.۱.۲ تعریف. چنانچه Y زیر مجموعه‌ای از یک فضای توپولوژی مفروض X باشد، بزرگترین مجموعهٔ باز مشمول در Y را می‌توانیم در نظر بگیریم. این مجموعه را با نماد $\mathring{Y}$ یا $\mathrm{Int}(Y)$ نشان داده و به آن **درون** Y می‌گوئیم.

به عبارت دیگر،

۱۱.۱.۲ قضیه. $\mathring{Y} = \bigcup_{j\in J} U_i$، که $\{U_j \,|\, j \in J\}$ خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های باز مشمول در Y است. به وضوح، $x \in \mathring{Y}$ اگر و تنها اگر ی مجموعهٔ باز $U \subseteq Y$ طوری یافت گردد که $x \in U$.

۱۲.۱.۲ مثال. فرض کنید I^n زیر مجموعهٔ به شرح زیر از $\mathbb{R}^n$ باشد:

$$I^n := \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leq x_i \leq 1 \,,\, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

اگر $\mathbb{R}^n$ دارای توپولوژی معمولی باشد (یعنی، توپولوژی متری با متر معمولی $d(x,y) = (\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2)^{1/2}$)، آنگاه درون $\mathring{I}$ عبرات است از

$$\mathring{I}^n := \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 < x_i < 1 \,,\, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

برای ملاحظهٔ این امر فرض کنیم $x \in \mathring{I}$ و $\varepsilon = \min\{x_i, 1 - x_i \,|\, i = 1, 2, \cdots, n\}$. اکنون، گوی باز $B_\varepsilon(x)$ (یعنی، $B_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, d(x,y) < \varepsilon\}$) به شعاع ε و مرکز در x، تماماً در I^n قرار دارد؛ و بنابراین، در $\mathring{I}$ باز است. از سوی دیگر، اگر به ازای یک i ای $x_i \in \{0, 1\}$، آنگاه هر گوی $B_r(x)$ به شعاع دلخواه $r > 0$ و مرکز در x، شامل نقاطی غیر از نقاط در I^n می‌باشد. بنابراین، چنان نقاطی در درون I^n قرار ندارند.

متمم مجموعه‌های باز، اسم بخصوصی دارند.

۱۳.۱.۲ تعریف. زیر مجموعهٔ C از فضای توپولوژی X در صورتی بسته است که $X-C$ باز باشد.

حکم جالب بعدی با استفاده از خواص نظریه مجموعه‌ها در خصوص مقطع، اجتماع و متمم نتیجه می گردد.

۱۴.۱.۲ قضیه. ۱) $\emptyset$ و X بسته‌اند.

۲) اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته، بسته است.

۳) اشتراک هر تعداد دلخواه از مجموعه‌های بسته، بسته است.

با شروع از مفهوم مجموعهٔ بسته نیز می‌شود فضای توپولوژی را تعریف نمود.

۱۵.۱.۲ تمرین.

۱) گیریم X یک مجموعه و $\mathcal{V}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های از X باشد که در شرایط زیر صدق می کند:
۱) $\emptyset, X \in \mathcal{V}$.
۲) اجتماع هر دو عضو از $\mathcal{V}$، عضوی از $\mathcal{V}$ است.
۳) اشتراک هر تعداد دلخواه از اعضای $\mathcal{V}$، عضوی از $\mathcal{V}$ است.
نشان دهید که در این صورت $\mathcal{U} = \{X - V \,|\, V \in \mathcal{V}\}$ یک توپولوژی بر X تشکیل می‌دهد.

۲) ثابت کنید که در هر فضای گسسته، هر زیر مجموعه‌ای هم بسته است و هم باز.

۳) نشان دهید که اگر تعداد نقاط یک فضای توپولوژی متناهی باشد و هر زیر مجموعهٔ تک عضوی از آن بسته باشد، توپولوژی آن فضا گسسته است.

۴) نشان دهید که در فضای توپولوژی $(\mathbb{R},\mathcal{U})$، که $\mathcal{U}$ همانند در تمرین ۹.۱.۲−(۳) است، هر مجموعهٔ به شکل $[s;t)$ هم باز است و هم بسته.

۱۶.۱.۲ تعریف. چنانچه Y زیر مجموعه‌ای از یک فضای توپولوژی مفروض X باشد، کوچکترین مجموعهٔ بستهٔ شامل Y را می‌توانیم در نظر بگیریم. این مجموعه را با نماد $\bar{Y}$ یا $\mathrm{Cl}(Y)$ نشان داده و به آن **بستار** Y می‌گوئیم. نقاط واقع در $\bar{Y}$ و غیر

واقع در Y را **نقاط حدی** Y می‌نامند. حکم بعدی دو توصیف معادل دیگر برای $\bar{Y}$ را فراهم می‌سازد.

۱۷.۱.۲ لم. ۱) $\bar{Y} = \bigcap_{j\in J} F_i$، که $\{F_j \,|\, j \in J\}$ خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های بستهٔ شامل Y است.

۲) $x \in \bar{Y}$ اگر و تنها اگر به ازای هر مجموعهٔ باز U شامل x، داشته باشیم $U \cap Y \neq \emptyset$.

اثبات: حکم ۱ بدیهی است. برای اثبات حکم ۲، فرض کنیم $x \in \bar{Y}$ و مجموعه‌ای باز U شامل x طوری موجود باشد که $U \cap Y = \emptyset$. در نتیجه $X - U$ بسته است و $Y \subseteq X - U$. پس، $\bar{Y} \subseteq X - U$. اما $x \in \bar{Y}$ و $x \in U$. بنابراین، به یک تناقض رسیدیم.

بالعکس، فرض کنیم $x \in \bar{Y}$ و بنابراین $x \in X - \bar{Y}$. اما $X - \bar{Y}$ باز است و $(X - \bar{Y}) \cap \bar{Y} = \emptyset$، در نتیجه $(X - \bar{Y}) \cap Y = \emptyset$ که تناقض است. $\square$

۱۸.۱.۲ مثال. چنانچه $\mathbb{R}$ را با توپولوژی معمولی در نظر بگیریم، بستار مجموعه‌های $(a;b)$، $[a;b)$، $(a;b]$ و $[a;b]$ همگی برابر $[a;b]$ هستند.

۱۹.۱.۲ تمرین.

۱) گیریم X برابر $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی باشد. بستار هر یک از زیر مجموعه‌های زیر از X را بدست آورید:

$A = \{۱, ۲, ۳, \cdots\}$، $B = \{x \,|\,$ گویا است $x\}$، $C = \{x \,|\,$ اصم است $x\}$.

۲) گیریم X عبارت از $\mathbb{R}$ با توپولوژی مطرح شده در تمرین ۹.۱.۲—(۳) باشد. بستار هر یک از زیر مجموعه‌های $(a;b)$، $[a;b)$، $(a;b]$ و $[a;b]$ از X را بیابید.

سایر خواص بستار مجموعه‌ها را در تمرین بعد ملاحظه کنید:

۲۰.۱.۲ تمرین. هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

۱) اگر Y زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژی X با $Y \subseteq F \subseteq X$ بوده و F بسته باشد، آنگاه $\bar{Y} \subseteq F$.

۲) Y وقتی و تنها وقتی بسته است که $Y = \bar{Y}$.

۳) $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$.

۴) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ و $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

۵) $\overline{(X - Y)} = X - \mathring{Y}$.

٦) در صورتی که مرز مجموعهٔ مفروض Y از فضای توپولوژی X را $\partial Y := \bar{Y} \cap \overline{(X - Y)}$ تعریف کنیم، در این صورت $\bar{Y} = Y \cup \partial Y$.

۷) Y وقتی و تنها وقتی بسته است که $\partial Y \subseteq Y$.

۸) وقتی و تنها وقتی ∂Y تهی است که Y هم باز و هم بسته باشد.

۹) $\{a, b\} = \partial(\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}) = \partial(\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\})$.

۱۰) ثابت کنید که Y وقتی و تنها وقتی بستار یک مجموعه است که Y بستار درون خودش باشد.

مفهوم همسایگی از آن دسته مفاهیمی است که بعداً به دفعات مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۲۱.۱.۲ تعریف. گیریم X فضای توپولوژی است. زیر مجموعهٔ $N \subseteq X$ با $x \in N$ را در صورتی یک همسایگی x گوئیم که مجموعه‌ای باز U در X با $x \in U \subseteq N$ یافت شود.

۲۲.۱.۲ مثال. هر مجموعهٔ باز، همسایگی‌ای از هر یک از نقاطش می‌باشد. کلی‌تر اینکه، هر مجموعهٔ A با $\mathring{A} = \emptyset$ همسایگی‌ای از هر یک از نقاط درونی A است.

۲۳.۱.۲ تمرین. گیریم X فضای توپولوژی است. نشان دهید که

۱) به ازای هر نقطهٔ $x \in X$، لااقل یک همسایگی از x موجود است.

۲) اگر N همسایگی‌ای از x باشد و $N \subseteq M$، آنگاه M نیز همسایگی‌ای از x است.

۳) اگر M و N همسایگی‌هایی از x باشد، آنگاه $N \cap M$ نیز همسایگی‌ای از x است.

۴) به ازای هر $x \in X$ و هر همسایگی N از x، یک همسایگی U از x طوری وجود دارد که $U \subseteq N$ و U همسایگی‌ای از هر یک از نقاطش می‌باشد.

۲.۲ پیوستگی نگاشتها

۱.۲.۲ تعریف. تابع $f : X \to Y$ میان فضاهای توپولوژی X و Y را در صورتی **پیوسته** گوئیم که به ازای هر مجموعهٔ باز U از Y، نگارهٔ وارون $f^{-1}(U)$ در X باز باشد.

۲.۲.۲ مثال. تابع همانی $_X : X \to X$ و توابع ثابت $X \to Y$ بین فضاهای توپولوژی، ساده ترین مثالها از توابع پیوسته هستند.

۳.۲.۲ مثال. اگر فضایی X با توپولوژی گسسته باشد، آنگاه هر تابع به فرم $f : X \to Y$ از X به فضای توپولوژی دیگر Y پیوسته است. دلیل این مطلب چنین است: وارون هر زیر مجموعهٔ باز در Y، مجموعه‌ای است در X و بنابراین باز است.

از سوی دیگر، اگر Y فضایی توپولوژی با توپولوژی ملموس باشد، آنگاه هر تابع $f : X \to Y$ از فضای توپولوژی دلخواه X بتوی Y، پیوسته است.

عکس این دو حکم را در تمرین بعد می‌توانید مشاهده کنید.

در مثال بعد، تابعی ناپیوسته معرفی می‌شود.

۴.۲.۲ مثال. گیریم $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ که $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty; x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ و $f : X \to X$ با ضابطهٔ $f(x) = x$ است. تابع f پیوسته نیست؛ زیرا $f^{-1}(-\infty; y^2) = (-y; y)$ که به $\mathcal{U}$ متعلق نیست. اثبات اینکه کدام توابع از X به X پیوسته‌اند را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم (به تمرین ۵.۲.۲—(۴) مراجعه شود).

۵.۲.۲ تمرین.

۱) گیریم X مجموعه‌ای دلخواه بوده و $\mathcal{U}$ و $\mathcal{U}'$ دو توپولوژی بر X باشند. ثابت کنید تابع همانی $(X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{U}')$ وقتی و تنها وقتی پیوسته است که $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$.

۲) فرض کنید X فضایی توپولوژی با این خاصیت است که «به ازای هر فضای توپولوژی Y و هر تابع $f : X \to Y$، f پیوسته است». ثابت کنید X دارای توپولوژی گسسته است. (راهنمایی: فرض کنید Y فضایی با توپولوژی گسسته است.)

۳) فرض کنید X فضایی توپولوژی با این خاصیت است که «به ازای هر فضای توپولوژی X و هر تابع $f : X \to Y$، f پیوسته است». ثابت کنید X دارای

توپولوژی ملموس است. (راهنمایی: فرض کنید X فضای Y ولی با توپولوژی ملموس است.)

۴) گیریم X مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty; x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ است. ثابت کنید تابع $f : X \to Y$ وقتی و تنها وقتی پیوسته است که غیر نزولی بوده (یعنی، اگر $x > x'$، آنگاه $f(x) > f(x')$) و پیوستهٔ راست باشد (یعنی، به ازای هر $x \in X$ و هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ ای چنان یافت شود که اگر $x' \leq x < x' + \delta$، آنگاه $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$).

پیوستگی توابع را به کمک مجموعه‌های بسته نیز می‌شود بیان نمود.

۶.۲.۲ قضیه. تابع $f : X \to Y$ بین فضاهای توپولوژی X و Y وقتی و تنها وقتی پیوسته است که به ازای هر زیر مجموعهٔ بستهٔ C در Y، مجموعهٔ $f^{-1}(C)$ در X بسته باشد.

اثبات: فرض کنید f پیوسته است. اگر C بسته باشد، آنگاه $Y - C$ باز است و در نتیجه مجموعهٔ $f^{-1}(Y - C)$ باز می‌باشد. اما $f^{-1}(Y - C) = X - f^{-1}(C)$ و بنابراین $f^{-1}(C)$ بسته است. بالعکس، فرض کنید U در Y باز باشد. در این صورت، $Y - C$ بسته است و در نتیجه مجموعهٔ $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$ نیز بسته است، که این به معنی باز بودن $f^{-1}(U)$، و لذا پیوستگی Fاست. □

۷.۲.۲ تعریف. تابعی که مجموعه‌های باز را به مجموعه‌های باز می‌نگارد، **نگاشت باز** نامیده می‌شود. به صورت مشابه، تابعی که مجموعه‌های بسته را به مجموعه‌های بسته می‌نگارد، **تابع بسته** نامیده می‌شود.

۸.۲.۲ مثال. ۱) تابع بازی که پیوسته نیست: فرض کنید Y شامل تنها نقاط $\{a, b\}$ باشد و نیز توپولوژی گسسته را بر Y انتخاب کنید. همچنین، فرض کنید X فضای توپولوژی اعداد حقیقی به همراه توپولوژی معمولی است. تابع $f : X \to Y$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{اگر } x \geq 0 \\ b & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

باز است ولی پیوسته نیست. زیرا، $f^{-1}(\{a\})$ در X باز نیست. هر تابع از فضایی توپولوژی به یک فضای توپولوژی گسسته،الزاماً باز است.

۲) تابع بسته‌ای که پیوسته نیست. تابع $f : X \to Y$ آمده در بالا، بسته نیز هست، ولی پیوسته نمی‌باشد.

۳) تابع پیوسته‌ای که نه باز است و نه بسته: فرض کنیم $X = Y = \{a, b\}$، X به همراه توپولوژی گسسته و Y به همراه توپولوژی ملموس است. در این صورت نگاشت همانی $f : X \to Y$ چنین است.

۴) تابع پیوسته‌ای که باز است ولی بسته نیست: فرض کنیم $X = Y = \{a, b\}$، X به همراه توپولوژی گسسته و Y به همراه توپولوژی $\{\emptyset, \{a\}, Y\}$ است. در این صورت نگاشت ثابت $f : X \to Y$ با ضابطهٔ $x \mapsto a$ چنین است.

۵) تابع پیوسته‌ای که بسته است ولی باز نیست: فرض کنیم $X = \{a, b\}$ به همراه توپولوژی گسسته و $Y = \mathbb{R}$ به همراه توپولوژی معمولی است. در این صورت نگاشت $f : X \to Y$ با ضابطهٔ $f(a) = ۰$ و $f(b) = ۱$ چنین است.

تمرین زیر نشان می‌دهد که اگر محدودیتی بر f القاء کنیم، ممکن است همهٔ حالات منتفی شوند.

۹.۲.۲ تمرین. گیریم $f : X \to Y$ تابعی پیوسته بین فضاهای توپولوژی X و Y است. اگر f (ا) یکبیک، (ب) پوشا، و (ج) دوسویی باشد، کدام یک از این احکام درست هستند: (۱) F نه باز است و نه بسته، (۲) F باز است ولی بسته خیر، (۳) F بسته است ولی باز خیر، (۴) F هم باز است و هم بسته؟

بر اساس حکم بعدی، ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است. اثباتش فوق العاده ساده است.

۱۰.۲.۲ قضیه. گیریم X، Y و Z فضاهای توپولوژی بوده و $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ توابعی پیوسته باشند. در این صورت ترکیب آنها $h = g \circ f : X \to Z$ نیز پیوسته است.

اثبات: گیزیم U در Z باز است. در این صورت $g^{-۱}(U)$ در Y باز است و لذا $f^{-۱}(g^{-۱}(U))$ در X باز است. اما $(g \circ f)^{-۱}(U) = f^{-۱}(g^{-۱}(U))$. □

تعریف بعدی به ما می‌گوید که در چه صورتی دو فضای توپولوژی همارز (یکسان، برابر و ...) گرفته می‌شوند؛ در این حالت از لفظ **همئومورفیسم** استفاده می‌کنیم.

۱۱.۲.۲ تعریف. گیریم X و Y فضاهای توپولوژی باشند. در صورتی می‌گوئیم X و Y **همئومورفند** که توابع پیوستهٔ $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ یافت شوند که هر یک

وارون دیگری است (یعنی، $f \circ g = 1_X$ و $g \circ f = 1_Y$ و f و g پیوسته‌اند). در این حالت می‌نویسیم $X \cong Y$ و می‌گوئیم f و g **همئومورفیسمهایی بین** X **و** Y هستند.

۱۲.۲.۲ یادداشت. تعریف معادل برای همئومورفیسم، چنین است: تابعی $f : X \to Y$ پیوسسه، دوسویی و با وارون پیوسته. بنابراین، هومئومورفیسمها علاوه بر اینکه نقاط را به صورت یکبیک به هم متناظر می‌کنند، مجموعه‌های باز را نیز به صورت یکبیک با هم متناظر می‌سازند.

۱۳.۲.۲ قضیه. رابطهٔ هومئومرفیسم بودن در بین گردایهٔ همهٔ فضاهای توپولوژی، رابطه ای هم ارزی است. به این ترتیب، کلاس همهٔ فضاهای توپولوژی به دسته‌های هومئومورف تقسیم می‌گردد.

اثبات: کافی است توجه شود که نگاشت همانی از یک فضای توپولوژی به خودش هومئومورفیسم است، وارون هر هومئومورفیسم، هومئومورفیسم است و ترکیب دو هومئومورفیسم، هومئومورفیسم است. □

در بخش ۱.۱ مثالهایی از فضاهای هومئومورف آوردیم. علاوه بر آن، داریم

۱۴.۲.۲ مثال. ۱) اگر X فضای توپولوژی حاصله از فضای متری M با متر d بوده و Y فضای توپولوژی حاصله از فضای متری M با متر $d'(x,y) = d(x,y)/(1 + d(x,y))$ باشد، آنگاه X و Y هومئومورف هستند.

۲) فرض کنید X فضای $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی متری معمولی و Y فضای توپولوژی حاصل از متر $d(x,y) = \max |y_i - x_i|$ است. در این صورت، X و Y هومئومورف هستند. از سوی دیگر، اگر $X = \mathbb{R}^n$ با توپولوژی معمولی و $Y = \mathbb{R}^n$ با توپولوژی گسسته باشد، آنگاه X و Y غیر هومئومورف هستند.

۱۵.۲.۲ تمرین.

۱) مثالی از دو فضای X و Y و تابعی پیوسته $f : X \to Y$ بیاورید که در آن f^{-1} پیوسته نباشد.

۲) فرض کنید X و Y فضای توپولوژی هستند. ثابت کنید X و Y وقتی و تنها وقتی هومئومورف هستند که تابعی $f : X \to Y$ چنان یافت شود که اولاً دوسویی بوده و در ثانی «ریر مجموعهٔ U از X وقتی و تنها وقتی باز باشد که $f(U)$ باز باشد».

۳) مترهای d و d' بر مجموعهٔ $\mathbb{R}^{۲}$ چنان هستند که بازأ اعداد مثبت m و M و بازأ همهٔ $y, y' \in Y$ ها داریا

$$m\, d_{۱}(x,y) \leq d_{۲}(x,y) \leq M\, d_{۱}(x,y)$$

نشان دهید که در این صورت دو فضای توپولوژی حاصل از بکارگیری این مترها همئومورفند. (راهنمایی: نگاشت همانی Y را در نظر بگیرید.)

۴) گیریم X فضایی توپولوژی و $G(X)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ هومئومورفیسمهای $f : X \to X$ است. ثابت کنید $G(X)$ همراه با عمل ترکیب توابع، گروه است. فرض کنید به ازای هر $x \in X$ ای $G_x(X) := \{f \in G(X) \mid f(x) = x\}$. ثابت کنید $G_x(X)$ زیر گروهی از $G(X)$ است.

۱۶.۲.۲ یاداشت. توپولوژی را می‌توان علم مطالعهٔ فضاهای توپولوژی دانست. در این علم، فضاهای هومئومورف، یکی گرفته می‌شوند.

در فصل بعد، روشهایی برای تولید فضاهای جدید از روی فضاهای موجود ارائه خواهیم نمود.

فصل ۳

تولید فضاهای توپولوژی جدید

۱.۳ توپولوژی القایی

فرض کنیم S زیر مجوعه‌ای از فضای توپولوژی X باشد. از توپولوژی موجود بر X یک توپولوژی برS می توانیم تهیه کنیم.

۱.۱.۳ تعریف. **توپولوژی القایی بر** S از فضای توپولوژی X عبارت از خانواده مجموعه‌های بشکل $U \cap S$ که U مجموعه باز دلخواهی در X است.

۲.۱.۳ لم. اگر $\mathcal{U}$ خانواده مجموعه های باز در X باشد، آنگاه $\mathcal{U}_S := \{U \cap S \,|\, U \in \mathcal{U}\}$ خانواده مجموعه‌های باز در S خواهد بود.

اثبات: تحقیق سه شرط توپولوژی بودن برای اثبات اینکه $\mathcal{U}_S$ یک توپولوژی بر S ارائه می‌دهد،لازم است. چون $\emptyset = \emptyset \cap S$ و $S = X \cap S$، مستقیماً اولین حکم نتیجه می‌گردد. برای دومین شرط فرض کنیم $U_1 \cap S$ و $U_2 \cap S$ دو عضو از $\mathcal{U}_S$ باشند؛ در این صورت، چون $(U_1 \cap S) \cap (U_2 \cap S) = (U_1 \cap U_2) \cap S$، به $\mathcal{U}_S$ متعلق است. بالاخره، اگر $\{U_j \cap S \,|\, j \in J\}$ خانواده‌ای دلخواه از عناصر $\mathcal{U}_S$ باشد، آنگاه $\bigcup_{j\in J}(U_j \cap S) = (\bigcup_{j\in J}) \cap S$ نیز به $\mathcal{U}_S$ متعلق است. $\square$

۳.۱.۳ تعریف. برخی اوقات توپولوژی القایی را **توپولوژی نسبی** نیز می‌نامند. اگر زیر مجموعه‌ای S از X دارای توپولوژی القایی باشد، آنگاه می‌گوئیم S **زیر فضایی**

از X است.

۴.۱.۳ مثال. اگر زیر مجموعهٔ $[a;b]$ از $\mathbb{R}$ (با توپولوژی معمولی) به همراه توپولوژی القایی باشد، آنگاه مجموعه‌های

$$\begin{array}{ll} [a;c), & a < c < b, \\ (d;b], & a < d < b, \\ (d;c), & a \leq d < c \leq b. \end{array}$$

همگی زیر مجموعه‌های باز در $[a;b]$ خواهند بود. ملاحظه می‌شود که به این ترتیب، اگر U در $[a;b]$ باز باشد، آنگاه لزومی ندارد که U در $\mathbb{R}$ باز باشد.

۵.۱.۳ مثال. دایرهٔ واحد $\mathbb{S}^۱$ در $\mathbb{R}^۲$ با توپولوژی القایی از فضای توپولوژی $\mathbb{R}^۲$ با توپولوژی معمولی، را در نظر بگیرید. مجموعه‌های باز در $\mathbb{S}^۱$ عبارتند از «اجتماعهایی از قوسهای باز در $\mathbb{S}^۱$» (یعنی، قوسهای بدون نقاط انتهایی در $\mathbb{S}^۱$) می‌باشند.

در حالت کلی، n−کرهٔ استاندارد $\mathbb{S}^n$ را به صورت

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_۱^۲ + \cdots + x_{n+۱}^۲ = ۱\}$$

تعریف می‌کنیم و آن را با توپولوژی القایی از توپولوژی معمولی بر $\mathbb{R}^{n+۱}$ همراه می‌کنیم.

۶.۱.۳ مثال. زیر مجموعهٔ S از $\mathbb{R}^{n+۱}$ با ضابطهٔ $x_{n+۱} = ۰$ را در نظر بگیرید. اگر S را با توپولوژی القایی (با استفاده از توپولوژی معمولی بر $\mathbb{R}^{n+۱}$) همراه کنیم، آنگاه S با $\mathbb{R}^n$ همئومورف خواهد بود. اثبات این حکم را به عوان تمزین به خواننده می‌سپاریم.

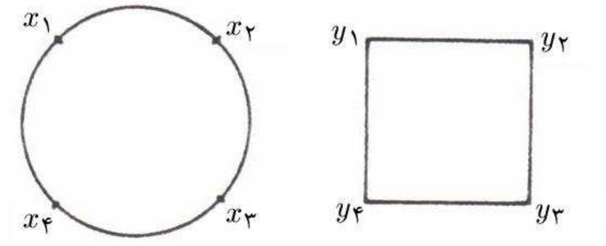
نگریستن به زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}^n$ و اثبات همئومورفیسم بودن آنها کاری بس مطلوب و در پاره‌ای موارد بسیار دشوار است! مثلاً، به موارد زیر توجه کنید.

۷.۱.۳ مثال. فرض کنیم $a, b, c, d \in \mathbb{R}$، $a < b$ و $c < d$. بازه‌های $[a;b]$ و $[c;d]$ در $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^۳$ همئومورفند. همئومرفیسمی که این ادعا را اثبات می‌کند، عبارت است از

$$f(x) = c + (d-c)(x-a)/(b-a)$$

نشان دادن اینکه f معکوسپذیر است، f پیوسته است و $f^{-۱}$ نیز پیوسته است، چندان دشوار نیست (و به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده است. به تمرین ۱۷.۱.۳−(۷) نیز توجه گردد). از نظر شهودی، کافی است بازه‌های را فشرده و یا منبسط کنیم، و لا غیر.

شکل ۱.۳: این دو شکل همئومورفند



۸.۱.۳ مثال. دایره و مبرعی مفروض را درنظر بگیرید (یعنی، مرز ناحیه‌ای به شکل مربع)؛ به شکل ۱.۳ توجه شود. نگاشتی که می‌تواند بازهٔ x_i تا $x_{i+۱}$ از دایره را به ضلع از y_i تا $y_{i+۱}$ از مربع بنگارد، همئومورفیسمی از دایره به مربع خواهد بود. اگر $\{(x,y)\,|\,x^۲+y^۲=۱\}$ دایره و $\{(x,y)\,|\,$«$x=\pm۱\,,\,-۱\leq y\leq ۱$» یا «$-۱\leq x\leq ۱\,,\,y=\pm۱$»$\}$ مربع باشد، آنگاه همئومرفیسمهای مورد نظر عبارتند از

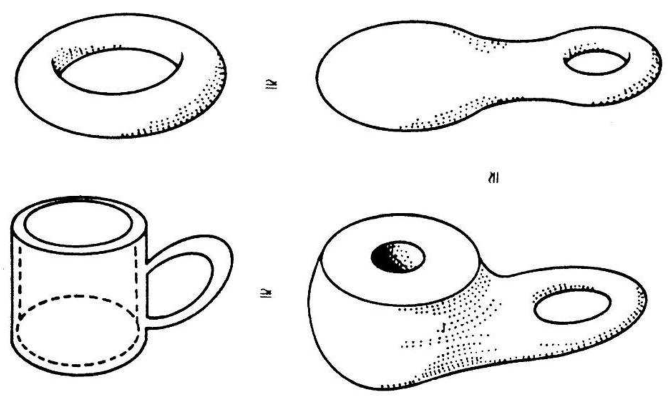
$$\begin{array}{ccc} \text{مربع} & \longrightarrow & \text{دایره} \\ (x,y) & \longmapsto & (\frac{x}{m},\frac{y}{m}) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \text{دایره} & \longrightarrow & \text{مربع} \\ (x,y) & \longmapsto & (\frac{x}{r},\frac{y}{r}) \end{array}$$

که در آنها $m=\max\{|x|,|y|\}$ و $r=\sqrt{x^۲+y^۲}$. از نظر شهودی، برای این منظور کافی است دایره را کج و خل کنیم، تا به مربع تبدیل گردد.

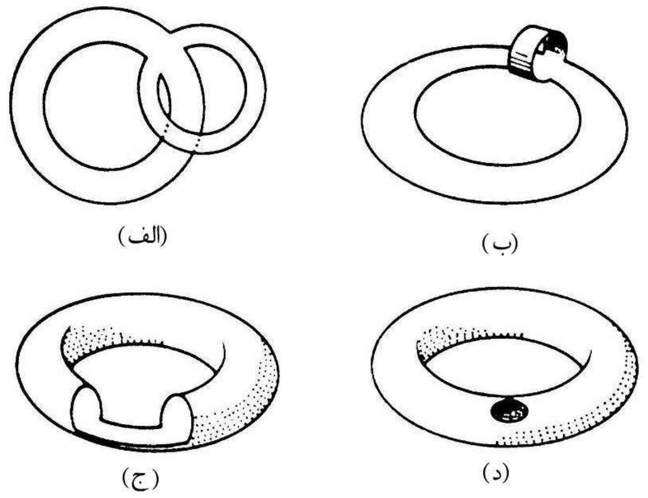
در حالت کلی، اگر دو زیر فضا از $\mathbb{R}^۳$ (یا $\mathbb{R}^۲$) داشته باشیم. در این صورت آن دو در حالی هئومورفند که بتوان با کشیدن، حمع کردن، کج کردن و بدون چسباندن نقاط و یا ایجاد برش، یکی را به دیگری تبدیل نمود. البته، ایت برداشت شهودی است، ولی با سعی کافی می‌شود همهٔ عملیات را به دقیق‌ترین شکل خود توضیح داد.

۹.۱.۳ مثال. سطح خارجی کیک دوناد (نوع سوراخ دار آن) با سطح خارجی لیوان چای (دسته دار) همئوموروف است؛ به شکل ۲.۳ توجه شود. در شکلهای ۳.۲−(الف) و ۳.۲−(د) نمونه‌هایی از فضاهای همئومورف آورده شده است. برای توضیح این گفته حالات میانی نشان داده شده در شکلهای ۳.۲−(ب) و ۳.۲−(ج) را باید در نظر بگیرید.

شکل ۲.۳: سطح تیوب و فنجان همئومورفند



شکل ۳.۳: شکلهای (الف) و (د) همئومورفند



یکی از احکامی که از آن برای بررسی این گونه مسایل می‌توان استفاده نمود، به شرح زیر است.

۱۰.۱.۳ قضیه. اگر $h : X \cong Y$ همئومورفیسم باشد، آنگاه به ازای هر $x \in X$ ای فضاهای $X - \{x\}$ و $Y - \{h(x)\}$ نیز همئومورفند.

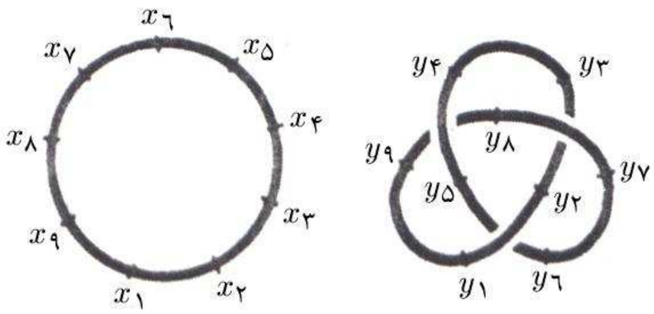
اثبات: کافی است از تحدید $h|_{X-\{x\}} = p \circ h \circ I$، که نگاشتی از $X - \{x\}$ به $Y - \{h(x)\}$ است، استفاده شود. در اینجا I نگاشت احتوای $X - \{x\}$ در X است و p نگاشت تصویر از Y به روی $Y - \{h(x)\}$. □

این قضیه را به حالت تعدادی متناهی از نقاط نیز می‌شود تعمیم داد.

۱۱.۱.۳ مثال. شاید اصلاً از نظر شهودی نتوان توجیه نمود که چگونه زیر فضاهای $[۰;۱]$ و $(۰;۱)$ از $\mathbb{R}$ همئومورف نیستند! در حالی که واقعیت دارد. زیرا اگر فرض کنیم این دو همئورفند $h:[۰;۱]\cong(۰;۱)$، در این صورت باید $[۰;۱]-\{۰\}=(۰;۱]$ و $(۰;۱)-h(۰)=(۰;h(۰))\cup(h(۰);۱)$ همئوموrف باشند. در حالی که اولی یکپارچه است و دومی دو پارچه! اما، به وضوح از نظر شهودی می‌توان قبول نمود که فضاهای یکپارچه و دو پارچه نمی‌توانند همئومورف باشند. چرا که برای همئومرف نمودن آنها نیاز به چسباندن است! در بخش ۳.۳ این ایده به شکل دقیق‌تری بیان می‌شود.

۱۲.۱.۳ تمرینات شهودی در خصوص همئومرف بودن. زیر فضاهای $\mathbb{R}^۳$ (و $\mathbb{R}^۲$) آمده در شکل ۴.۳ را به دسته‌های همئومورف تقسیم کنید:

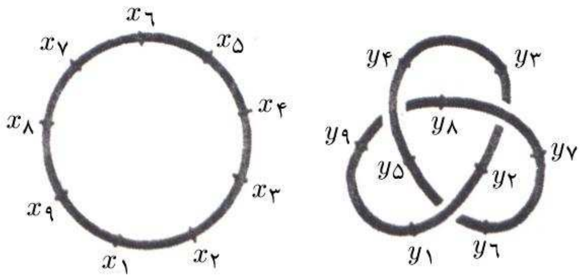
شکل ۴.۳



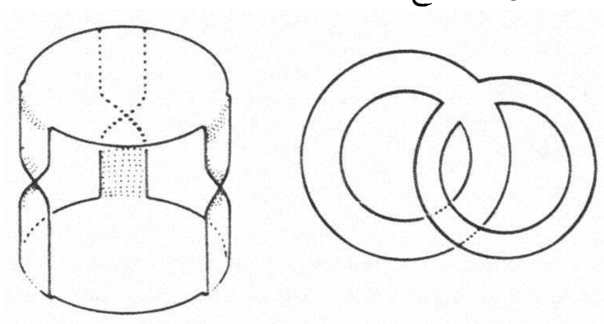
۱۳.۱.۳ مثال. اگر به یک دایره و نیز به یک دایرهٔ گره‌خورده در $\mathbb{R}^۳$ در شکل ۵.۳، نگاه کنیم، بسادگی می توانید یک همیومورفیسم میان آن دو زیر فضاارائه بدهیم. ایدهٔ کار چنین است: ابتدا هر یک را به قطعاتی، مثالا نه قسمت، تقسیم می کنیم و سبس بازهٔ x_i تا $x_{i+۱}$ از دایره را به بازهٔ y_i تا $y_{i+۱}$ از دایره گروه خورده می‌نگاریم. در صورتی که یک دایرهٔ گره خورده داشته باشیم که از نوار نازک ساخته نشده باشد، همانطوریکه بسادگی خواننده میتواند تحقیق کند، محال است با کشش، خمش و فشرده کردن و بدون برش دادن و یا متصل کردن قطعات از روی دایره گره خورده رسید. ولی، اگر یک برش موقت پر دایره گره خورده ایجاد بکنیم، سپس گره آنرا باز کنیم، و دست آخر دو سوی نخست را بهم متصل کنیم، به دایره خواهیم رسید. این بحث ما را مجاب می‌کند تا در مفهوم شهودی مان از همیومورف بودن زیر فضاهای در $\mathbb{R}^۳$، برش موقت

را نیز جایز بدانیم. ایده کلی چنین است که ابتدا یک برش موقت ایجاد می کنیم، سپس همیومورفیسم مناسب استفاده می‌کنیم (یعنی، می‌کشیم و یا فشرده می‌کنیم و یا ...) و آنگاه دو انتهای از برش اول را بهم متصل می‌کنیم، اکن.ن فضاهای اول و آخر خمیومورفند. این ایده را با استفاده از مفهوم فضای خارج قسمتی که در بخش ۲.۳ خواهد آمد می‌شود به دقیق‌ترین شکل توضیح داد، بخصوص به قضیهٔ ۵.۵ توجه کنید.

شکل ۵.۳: همئومورف بودن دایره و دایرهٔ گره خورده



شکل ۶.۳: آیا این دو سطح همئومورفند؟



۱۴.۱.۳ تمرین. نشان دهید که دو فضای داده شده در شکل ۶.۳ که زیر فضاهایی از $\mathbb{R}^3$ هستند، همیومورف می‌باشند. اولین زیر فضا با دوختن سه نوار تاب خوردهٔ کاغذی با دو تکهٔ دایره‌ای شکل کاغذ حاصل شده است. دومین زیر فضا از بهم دوختن دو نوار کاغذی بلند به یکدیگر حاصل شده است. (راهنمایی: اولی را در دو جا برش دهید، مثلا در دو تا از نوارهای تاب خورده، و سپس تابشان را باز کنید، و آنگاه جای خودشان بچسبانید.)

۱۵.۱.۳ یادداشت. قبلاً گفتیم که اگر S زیر فضایی از X باشد، آنگاه لزومی ندارد که زیر مجموعه‌های باز در S، در X نیز باز باشند. اما، اگر S در X باز باشد، هر زیر مجموعهٔ باز در S، در X نیز باز است.

۱۶.۱.۳ لم. ۱) اگر S در X باز باشد، هر زیر مجموعهٔ باز در S نسبت به توپولوژی القایی بر S، در X نیز باز است.
۲) اگر S در X باز باشد، هر زیر مجموعهٔ بسته در S نسبت به توپولوژی القایی بر S، در X نیز بسته است.

اثبات: چون اثبات (۱) و (۲) شبیه هستند، کمابیش یکی است، کافی است تنها (۱) را اثبات کنیم. فرض کنیم S در X باز باشد و U زیر مجموعه‌ای باز از S. بنابه تعریف $U = V \cap S$، که V در X باز است. در نتیجه $U = V \cap S$ اشتراک دو مجموعهٔ باز، و لذا در X باز است. □

۱۷.۱.۳ تمرین.

۱) نشان دهید که اگر Y زیر فضایی از X بوده و Z زیر فضایی از Y باشد، در این صورت Z زیر فضایی از X است.

۲) ثابت کنید هر زیر فصای از یک فضای متری، مترپذیر است.

۳) فرض کنید S زیر فضایی از X باشد. نشان دهید که نگاشت احتوی $1_S : S \to X$ پیوسته است. بعلاوه، نشان دهید که S ضعیفترین توپولوژی (یعنی، دارای حداقل مجموعه‌های باز) است، به طوری که نگاشت احتوی 1_S. پیوسته می‌باشد.

۴) فرض کنید S فضایی توپولوژی، S، زیر مجموعه‌ای از X و $1_S : S \to X$ نگاشت احتوای S در X باشد. فرض کنید توپولوژی‌ای بر S وجود دارد که به ازای هر فضای توپولوژی مفروض Y و هر نگاشت $f : Y \to S$ ای

$$1_S \circ f : Y \to X \text{ پیوسته است } \Leftrightarrow f : Y \to S \text{ پیوسته است}$$

ثابت کنید که توپولوژی بر S همان توپولوژی القایی بر S توسط توپولوژی بر X است.

۵) گیریم Y زیر فضایی از X و A زیر فضایی از Y باشد. بستار A در X را با نماد $\mathrm{Cl}_X(A)$ و بستار A در Y را با نماد $\mathrm{Cl}_Y(A)$ نشان می‌دهیم. ثابت کنید $\mathrm{Cl}_Y(A) \subseteq \mathrm{Cl}_X(A)$. نشان دهید که در حالت کلی $\mathrm{Cl}_Y(A) \neq \mathrm{Cl}_X(A)$.

۶) نشان دهید که $(a;b)$ با توپولوژی القایی‌اش از $\mathbb{R}$، با خود $\mathbb{R}$ همئومورف است (راهنمایی: از تابعی نظیر $x \mapsto \tan(\pi(cx+d))$، با انتخاب مناسب c و d استفاده کنید).

۷) فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژی و S زیرفضایی از X باشد. ثابت کنید که اگر $f : X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد، آنگاه نگاشت $f|_S : S \to f(S)$ نیز پیوسته است.

۸) نشان دهید زیر فضاهای $(۱;\infty)$ و $(۰;۱)$ از $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی، همئومورفند. (راهنمایی: از $x \mapsto ۱/x$ استفاده کنید.)

۹) ثابت کنید $\mathbb{S}^n - \{(۰,\cdots,۰,۱)\}$ به همراه توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^{n+۱}$، با $\mathbb{R}^n$ به همراه توپولوژی معمولی‌اش همئومورف است. (راهنمایی: نگاشت $\varphi : \mathbb{S}^n - \{(۰,\cdots,۰,۱)\} \to \mathbb{R}^n$ را با ضابطهٔ

$$\varphi(x_۱,\cdots,x_{n+۱}) = \frac{۱}{۱ - x_{n+۱}}(x_۱,\cdots,x_n)$$

تعریف نموده و $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n - \{(۰,\cdots,۰,۱)\}$ را با ضابطهٔ

$$\psi(x_۱,\cdots,x_n) = \frac{۱}{۱ + \|x\|^۲}(۲x_۱,\cdots,۲x_n,\|x\|^۲ - ۱)$$

در نظر بگیرید.)

۱۰) فرض کنید $\mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\}$ و $\mathbb{S}^n$ دارای توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^{n+۱}$ با توپولوژی معمولی هستند. ثابت کنید که $f : \mathbb{R}^{n+۱} \to \mathbb{S}^n$ با ضابطهٔ $f(x) = x/\|x\|$ تابعی پیوسته است.

۲.۳ توپولوژی خارج قسمتی

در بخش قبل، در شروع یک مجموعه S، یک فضای توپولوژی X و یک نگاشت یکبیک از S به X را در نظر گرفتیم. این کار بما امکان داد تا بتوانیم بر S توپولوژی قرار دهیم: توپولوژی القایی. در این بخش فضایی توپولوژی X، مجموعه‌ای دلخواه Y و نگاشتی پوشا از X به Y را در نظر می‌گیریم. این امر امکان تعریف توپولوژی بر Y را می‌دهد. این را توپولوژی **القایی** می‌نامیم.

۱.۲.۳ تعریف. فرض کنید $f : X \to Y$ نگاشتی پوشا از فضای توپولوژی X بروی مجموعهٔ Y است. توپولوژی **خارج قسمتی بر** Y **نسبت به** f عبارت است از خانوادهٔ مجموعه‌های $\mathcal{U}_f := \{U \,|\,$ باز است X در $f^{-۱}(U)\}$.

۲.۲.۳ لم. $\mathcal{U}_f$ تشکیل یک توپولوژی بر Y می‌دهد. بعلاوه، پس از انتخاب توپولوژی خارج قسمتی بر Y، نگاشت مفروض f پیوسته است.

اثبات: به وضوح $\emptyset, Y \in \mathcal{U}_f$. دو شرط دیگر نیز برقرارند؛ زیرا

$$f^{-۱}(U_۱ \cap U_۲) = f^{-۱}(U_۱) \cap f^{-۱}(U_۲), \qquad f^{-۱}\Big(\bigcup_{j\in J} U_j\Big) = \bigcup_{j\in J} f^{-۱}(U_j).$$

پیوستگی f بدیهی است. $\square$

۳.۲.۳ مثال: n–فضای تصویری حقیقی. فرض کنید $\mathbb{RP}^n := \{\{-x, x\} \,|\, x \in \mathbb{S}^n\}$ مجموعهٔ همهٔ زوجهای نامرتب از نقاط در $\mathbb{S}^n$ باشد. به وضوح نگاشت $\pi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ با ضابطهٔ $x \mapsto \{-x, x\}$ وجود دارد. مجموعهٔ $\mathbb{RP}^n$ را می‌توان توسط π با توپولوژی خارج قسمتی تجهیز نمود. فضای حاصل را **n–فضای تصویری حقیقی** می‌نامند.

۴.۲.۳ مثال: نوار موبیوس. زیر مجموعهٔ زیر از فضا

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^۳ \,|\, x^۲ + y^۲ = ۱\,,\ |z| \leq ۱\}$$

با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^۳$ را در نظر بگیرید (C استوانه‌ای مستدیر در فضا است). فرض کنید M مجموعهٔ زوجهای نامرتب بشکل $\{-p, p\}$ از C باشد، یعنی، $M = \{\{-p, p\} \,|\, p \in C\}$. چون، نگاشت پوشایی از C به M بطور طبیعی وجود دارد، می‌توانیم

M را با توپولوژی خارج قسمتی نسبت به آن نگاشت همراه کنیم. نتیجه، **نوار موبیوس** نام دارد. تابع $f : M \to \mathbb{R}^۳$ با ضابطهٔ

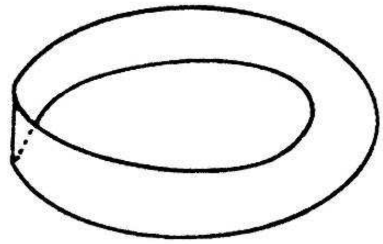
$$\{-p,p\} \mapsto \Big((x^۲ - y^۲)(۲ + xz), ۲xy(۲ + xz), yz\Big)$$

را در نظر بگیرید، که $p = (x,y,z) \in C \subseteq \mathbb{R}^۳$. تحقیق یکبیک بودن f واضح است. نگارهٔ $f(M)$ فضای M تحت f در شکل ۷.۳ نشان داده شده است. در واقع M با $f(M) \subseteq \mathbb{R}^۳$ همئومورف است، که در اینجا به $f(M)$ توپولوژی الثایی بخشیده‌ایم. زیرا، اگر $F : \mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۳$ را به صورت

$$F(x,y,z) = \Big((x^۲ - y^۲)(۲ + xz), ۲xy(۲ + xz), yz\Big)$$

تعریف کنیم، F پیوسته خواهد بود و با بهره گیری از خاصیت عامِ نگاشتهای خارج قسمتی (قضیه ۷.۲.۳ مشروح در زیر) می‌توان پیوستگی f را استنتاج نمود. اینکه $f^{-۱}$ پیوسته است، به عنوان تمرین بر عهدهٔ خواننده گذاشته می‌شود؛ این حکم را عملاً خیلی ساده‌تر، با روش مطرح در بخش بعدی می‌توان نتیجه گرفت.

شکل ۷.۳



۵.۲.۳ تعریف. فرض کنید X فضایی توپولوژی و A زیر مجموعه‌ای از آن باشد گیریم $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی با تعریف «$x \sim x'$ اگر و تنها اگر $x = x'$ یا $\{x, x'\} \in A$» بر X است (از نظر شهودی، Y همان X است که در آن A را به تنها یک نقطه چروک نموده‌ایم). $X/\sim$ را با نماد X/A نشان داده و **فضای حاصل از چروک نمودن** A **در** X می‌نامیم. به وضح می‌توان توسط نگاشت تصویر طبیعی $\pi : X \to X/A$، که پوشا است، توپولوژی خارج قسمتی بر X/A قرار داد.

۶.۲.۳ مثال. ۱) فرض کنید $X = [۰;۱]$ با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}$ است و $A = \{۰, ۱\}$. در این صورت X/A با $\mathbb{S}^۱$ همئومورف است. کلی تر

۲) گیریم $\mathbb{D}^n$ دیسک n–بعدی در فضای $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی القایی است. گیریم $A = \mathbb{S}^{n-1}$ لبهٔ دیسک X است، در این صورت $X/A = \mathbb{D}^n/S^{n-1}$ با $\mathbb{S}^n$ همئومورف است.

اکنون وقت آن است که **خاصیت عام نگاشتهای خارج قسمتی** را مطرح کنیم.

۷.۲.۳ قضیه. گیریم $f : X \to Y$ نگاشتی پوشا و Y دارای توپولوژی خارج قسمتی نسبت به f از X است. در این صورت، نگاشت $g : Y \to Z$ از Y به فضای توپولوژی Z وقتی و تنها وقتی پیوسته است که $g \circ f$ پیوسته باشد.

اثبات: تابع $f : X \to Y$ پیوسته است و بنابراین، اگر g نیز پیوسته باشد، ترکیب $g \circ f$ هم پیوسته خواهد بود. بالعکس، فرض کنید $g \circ f$ پیوسته باشد. در این صورت، اگر V در Z باز باشد، آنگاه $(g \circ f)^{-1}(V)$ در X باز است. به بیان معادل، $f^{-1}(g^{-1}(V))$ در X باز است. بنابه تعریف توپولوژی خارج قسمتی بر Y، از این نتیجه می‌گردد که $g^{-1}(V)$ در Y باز است و بنابراین g پیوسته می‌باشد. □

۸.۲.۳ تمرین.

۱) فرض کنید Y همراه با توپولوژی خارج قسمتی نسبت به تابع $f : X \to Y$ است. ثابت کنید Y قوی‌ترین توپولوژی ممکنی را دارد که به واسطهٔ آن f پیوسته است.

۲) فرض کنید Y همراه با توپولوژی خارج قسمتی نسبت به تابع $f : X \to Y$ است. نشان دهید زیر مجموعهٔ A از Y وقتی و تنها وقتی بسته است که $f^{-1}(A)$ بسته باشد.

۳) فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ تعریف شود. ثابت کنید توپولوژی خارج قسمتی $\mathcal{U}_f$ بر $\mathbb{S}^1$ نسبت به f دقیقاً عبارت از همان توپولوژی القایی $\mathcal{U}$ از $\mathbb{R}^2$ بر $\mathbb{S}^1$ است (یعنی، نشان دهید که $(\mathcal{U}_f, \mathbb{S}^1) \cong (\mathbb{S}^1, \mathcal{U})$).

۴) گیریم X، Y و Z فضای توپولوژی بوده و $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ پوشا باشند. ثابت کنید که اگر بر Y توپولوژی خارج قسمتی نسبت به f و بر Z نیز توپولوژی خارج قسمتی نسبت به g قرار داشته باشد، آنگاه توپولوژی بر Z با توپولوژی خارج قسمتی نسبت به $g \circ f : X \to Z$ یکی است.

۵) ثابت کنید $\mathbb{RP}^1$ و $\mathbb{S}^1$ همئومورفند.

٦) نشان دهید که تابع $f:\mathbb{RP}^2\to\mathbb{R}^4$ با ضابطهٔ زیر پیوسته و یکبیک است:
$$\{-x,x\}\mapsto(x_1^2-x_2^2,x_1x_2,x_1x_3,x_2x_3)$$

۷) گیریم X فضای توپولوژی بوده و $f:X\to Y$ نگاشتی پوشا باشد. گیریم $\mathcal{U}_f$ نمایشگر توپولوژی خارج قسمتی بر Y نسبت به f است. فرض کنید $\mathcal{U}$ یک توپولوژی دلخواه بر Y باشد، به گونه‌ای که $f:X\to Y$ پیوسته است (Y توپولوژی $\mathcal{U}$ دارد). نشان دهید که اگر نگاشت f باز یا بسته باشد، آنگاه $(Y,\mathcal{U}_f)$ و $(Y,\mathcal{U})$ همئومورفند. بعلاوه، مثالی ارائه کنید که نشان دهد اگر f باز یا بسته نباشد، در این صورت ممکن است $(Y,\mathcal{U}_f)\ncong(Y,\mathcal{U})$.

۸) فرض کنید $f:X\to Y$ نگاشتی پوشا از فضای توپولوژی X بروی مجموعهٔ دلخواه Y باشد. گیریم Y دارای توپولوژی خارج قسمتی نسبت به f باشد و A زیر فضایی از X. گیریم $\mathcal{U}_1$ نمایشگر توپولوژی القایی از Y بر $B=f(A)\subseteq Y$ باشد و $\mathcal{U}_2$ نمایشگر توپولوژی خارج قسمتی نسبت به $f|_A:A\to B$ بر B باشد. نشان دهید که در این صورت $\mathcal{U}_1\subseteq\mathcal{U}_2$. با ذکر مثالی نشان دهید که در حالت کلی $\mathcal{U}_1\neq\mathcal{U}_2$. (راهنمایی: تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $f(t)=\exp(2\pi ti)$ را در نظر بگیرید.) همچنین نشان دهید که اگر A زیر مجموعه‌ای بسته از X و نیز f نگاشتی بسته و یا A زیر مجموعه‌ای باز از X و نیز f نگاشتی باز باشد، آنگاه $\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_2$.

۹.۲.۳ مثال: توپولوژی یکی‌گیری. فرض کنیم X فضایی توپولوژی و $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر آن باشد. فرض کنیم **دستهٔ هم‌ارزی شامل** $x\in X$ را با نماد $[x]$ نشان داده و مجموعهٔ همهٔ دسته‌های هم‌ارزی $\sim$ را با نماد $X/\sim$ نشان دهیم؛ و $\pi:X\to X/\sim$ تابع پوشای طبیعی $x\mapsto[x]$ است. با استفاده از π می‌شود یک توپولوژی خارج قسمتی بر $X/\sin$ از X تهیه نمود. اغلب این توپولوژی را **توپولوژی یکی‌گیری** می‌نامند.

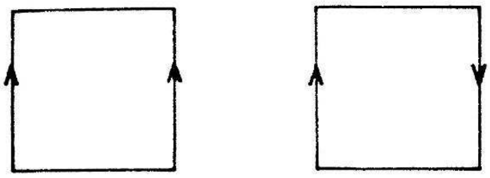
۱۰.۲.۳ مثال. اگر $\sim$ را بر $\mathbb{S}^n$ به صورت «$x\pm y$ اگر و تنها اگر $c\sim y$» تعریف کنیم، در این صورت $\mathbb{S}^n/\sim$ به وضوح همان $\mathbb{RP}^n$ است. به همین ترتیب، اگر هم‌ارزی مذکور را بر C در نظر بگیریم، به نوار موبیوس $C/\sim$ می‌رسیم.

۱۱.۲.۳ مثال: استوانه. فرض کنید $X = \{(x,y) \mid 0 \leq x,y \leq 1\}$ در $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^3$ است و رابطهٔ $\sim$ را بر X به صورت

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \Leftrightarrow \quad « (x,y) = (x',y') \text{ یا } \{x,x'\} = \{0,1\} \text{ و } y = y' »$$

تعریف کنیم. در این صورت $X/\sim$ به همراه توپولوژی خارج قسمتی به شرح بالا، عملاً با استوانه همئومورف است. به شکل ۸.۳–(الف) توجه شود. علامت پیکان در دو طرف شکل مذکور، روش شهودی بر هم نهی آنها را نشان می‌دهد.

شکل ۸.۳



(الف) (ب)

۱۲.۲.۳ مثال: نوار موبیوس. به صورت مشابه مثال قبل، فرض کنید $X = \{(x,y) \mid 0 \leq x,y \leq 1\}$ در $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^3$ است و رابطهٔ $\sim$ را بر X به صورت

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \Leftrightarrow \quad « (x,y) = (x',y') \text{ یا } \{x,x'\} = \{0,1\} \text{ و } y = 1 - y' »$$

تعریف کنیم. در این صورت $X/\sim$ به همراه توپولوژی خارج قسمتی به شرح بالا، عملاً با نوار موبیوس همئومورف است. به شکل ۸.۳–(ب) توجه شود. البته اثبات این امر فعلاً کار دشواری است؛ ولی به صورت شهودی بدیهی است.

۱۳.۲.۳ مثال: تیوب. به صورت مشابه مثال قبل، فرض کنید $X = \{(x,y) \mid 0 \leq x,y \leq 1\}$ در $\mathbb{R}^2$ با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^3$ است و رابطهٔ $\sim$ را بر X به صورت

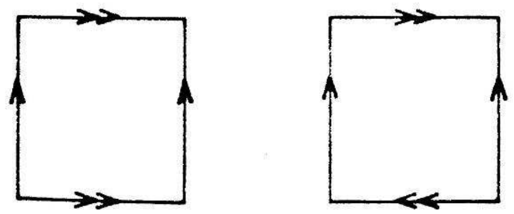
$$(x,y) \sim (x',y') \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \{x,x'\} = \{0,1\},\ y = y' \\ \{y,y'\} = \{0,1\},\ x = x' \\ 0 < x = x' < 1,\ 0 < y = y' < 1 \end{array} \right.$$

تعریف کنیم. در این صورت $X/\sim$ به همراه توپولوژی خارج قسمتی به شرح بالا، عملاً با تیوب یا سطح خارجی کیک دوناد سوراخ دار، همئومورف است. به شکل ۹.۳–(الف) توجه شود. با اطلاعات فصول بعدی می‌شود نشان داد که این فضا با زیر فضای $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2 = 1\}$ از $\mathbb{R}^3$ همئومرف است. همئومورفیسمی که این کار را انجام می‌دهد، عبارت است از

$$(x,y) \mapsto \Big((2+\cos(2\pi x))\cos(2\pi y), (2+\cos(2\pi x))\sin(2\pi y), \sin(2\pi x)\Big)$$

این مشخص می‌کند که چرا تیوب با سطح خرجی دوناد یکی گرفته می‌شود! به شکل ۱۰.۳ توجه شود. این کار را از نظر شهودی با یک سطح قابل ارتجاع نیز می‌شود انجام داد. به شکل ۱۱.۳ توجه گردد. در اینجا مراحل کار به صورت شهودی نشان داده شده است.

شکل ۹.۳



(الف) (ب)

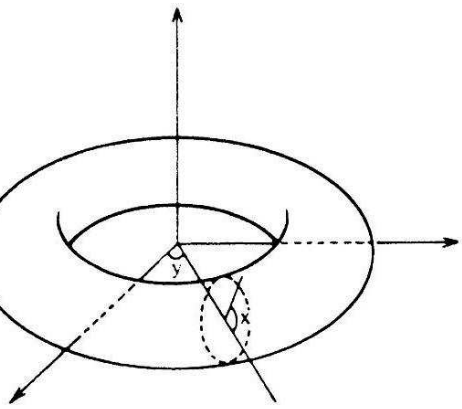
۱۴.۲.۳ مثال: بطری کلاین. به صورت مشابه مثال قبل، فرض کنید $X = \{(x,y) \mid ۰ \leq x,y \leq ۱\}$ در $\mathbb{R}^۲$ با توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^۳$ است و رابطهٔ $\sim$ را بر X به صورت

$$(x,y) \sim (x',y') \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \{x,x'\} = \{۰,۱\}\,,\, y = y' \\ \{y,y'\} = \{۰,۱\}\,,\, x = ۱ - x' \\ ۰ < x = x' < ۱, ۰ < y = y' < ۱ \end{array} \right.$$

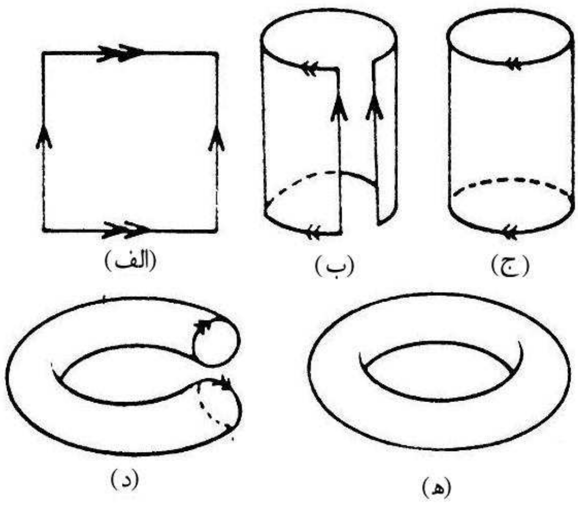
تعریف کنیم. در این صورت $X/\sim$ به همراه توپولوژی خارج قسمتی به شرح بالا **بطری کلاین** نامیده می‌شود. به شکل ۹.۵–(ب) توجه شود. در شکل ۱۲.۳ مراحل شهودی ساخت بطری کلاین از روی مربع نشان داده شده است. اولین یکی‌گیری در $\mathbb{R}^۳$ انجام می‌گیرد (به شکل ۱۲.۳–(ب) توجه شود). اما، دومین یکی‌گیری عملاً در فضای $\mathbb{R}^۴$ صورت می‌پذیرد، چرا که به یک بعد بیشتر لازم است تا شکا خودش را قطع نکند! به شکل ۱۲.۳–(د) توجه شود؛ دایرهٔ برخورد در شکل مذکور واقعی نیست، علت ظهور آن این است که می‌خواهیم شکل مورپ نظر را در دنیای خودمان رویت کنیم!

با برش دادن شکل۳ .۱۲–(د) به توسط یک صفحهٔ قاطع (به شکل ۱۳.۳–(الف) و (ب) توجه شود)، مشاهده می‌گردد که بطری کلاین درست از دو نوار موبیوس که در امتداد مرز مشترکشان بهم دوخته شده‌اند ساخته شده است. این را به صورت آمده در شکل ۱۳.۳–(ج) و (د) نیز می‌شود تجسم نمود.

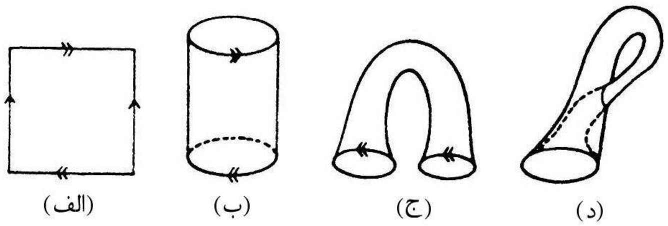
شکل ۱۰.۳



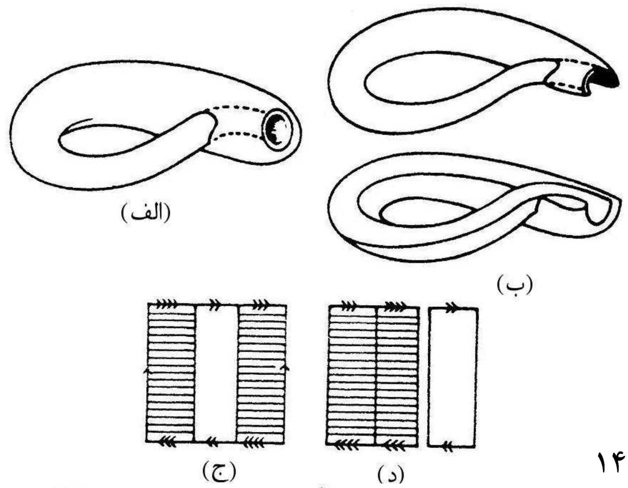
شکل ۱۱.۳



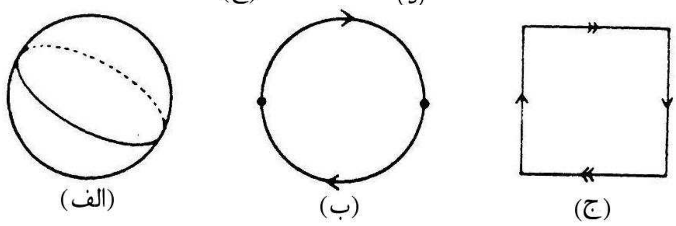
شکل ۱۲.۳



شکل ۱۳.۳



شکل ۱۴.۳



۱۵.۲.۳ مثال: صفحهٔ تصویری. به جهت ایجاد شهود بیشتر، تأکید می‌کنیم که صفحهٔ تصویری حقیقی $\mathbb{RP}^۲$ را به صورت $\mathbb{S}^۲/\sim$ می‌شود معرفی نمود، که در آن «$x \sim x' \iff x = \pm x'$». در این حالت، نیمکرهٔ شمالی با نیمکرهٔ جنوبی یکی گرفته می‌شود، و لذا می‌توانیم توجهمان را تنها به نیم کرهٔ شمالی معطوف کنیم، که این نیز با دیسک $\mathbb{D}^۲ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \,|\, x^۲+y^۲ \leq ۱\}$ توسط نگاشت $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ همئومورف است؛ که در اینجا $(x,y,z) \in \mathbb{S}^۲$ و $z > ۰$. بنابراین، $\mathbb{RP}^۲$ را به صورت $\mathbb{D}^۲/\sim$ می‌توان بیان نمود که در آن

$$x \sim x' \Leftrightarrow \text{« } x = x' \text{ یا } x, x' \in \mathbb{S}^۱ \subseteq \mathbb{D}^۲ \text{ و } x = -x' \text{ »}$$

این مطلب به صورت ظاهری در شکل ۱۴.۳ $-$(ب)، یا بطور معادل در شکل ۱۴.۳ $-$(ج) نشان داده شده است. ولی قبول داریم که اثبات مرجهی ارائه نشد!

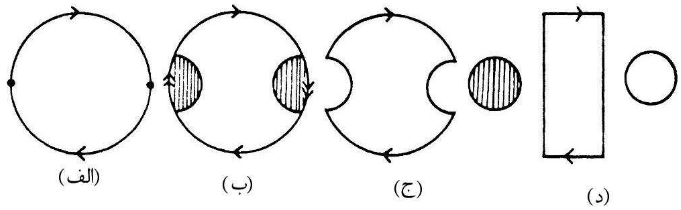
اگر ناحیهٔ گوچکی از $\mathbb{RP}^۲$ را (مثلاً، ناحیه‌ای همئومورف با $\mathring{D}^۲$) حذف کنیم، به یک نوار موبیوس می‌رسیم؛ به شکل ۱۵.۳ توجه شود. بنابراین، صفحهٔ تصویری حقیقی را به عنوان سطح حاصل از بهم دوختن یک نوار موبیوس و نیز یک دیسک می‌توان تصور نمود.

۱۶.۲.۳ مثال: کره. کره را مانند در شکل ۱۶.۳ $-$(الف) و (ب) به صورت یک فضای خارج قسمتی می‌توان تصور نمود. از نظر شهودی فرض کنیم که خطوط همشکل در هر یک از شکلها دارای زیپ هستند، و ما پس از بستن این زیپها، به شکل کره می‌رسیم.

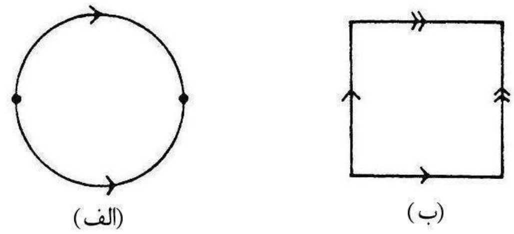
۱۷.۲.۳ یادداشت. در مثالهای بالا استدلالی مبتنی بر شهود آورده شده است. اثباتهای دقیق قابل ارائه هستند، ولی بهتر است که آنها را هنگامی که نظریه باندازهٔ کافی گسترش نیافته است، مطرح نکنیم. خواننده پس از مطالعهٔ بخش بعدی می‌تواند به این بخش برگشته و اثباتهای شهودی مطرح شده را به صورت دقیق بیان کند.

مشابه دیسک و کره در بعد پائین‌تر، بازه و دایره است: اگر دو انتهای بازهٔ واحد را یکی بگیریم به دایره می‌رسیم؛ این حکم از نظر شهودی بدیهی است. بجا است که خواننده اثباتی در خور برای آن اقامه کند!

شکل ۱۵.۳



شکل ۱۶.۳



۱۸.۲.۳ تمرین.

۱) نشان دهید که اگر $I=[0;1]\subseteq\mathbb{R}$ و $\sim$ رابطهٔ همارزی

$$x\sim x' \Leftrightarrow \text{«}x=x' \text{ یا } \{x,x'\}=\{0,1\}\text{»}$$

باشد، در این صورت $I/\sim$ با دایره $\mathbb{S}^1$ همئومورف است.

۲) نوار موبیوس در مقایسه با استوانه خواص جالبی دارد. مدلی از یک استوانه و نیز مدلی از نوار موبیوس با استفاده از کاغذ تهیه کنید. مثلاً، به ابعاد $40 \times$ ۴ سانتی متر. با استفاده از مداد خطی در وسط استوانه و نوار موبیوس و به صورت سرتاسری ایجاد کنید. حال، در راستای این خطوط، اجسام حاصل را برش دهید. در هر حالت، نتیجه چیست؟ اگر این خط را در فاصلهٔ یکسومی از اضلاع میکشیدید، نتیجه چه می شد؟

حکم بعدی شرایط کافی برای حصول اطمینان از همئومورف بودن فضاهای خارج قسمتی آورده شده است.

۱۹.۲.۳ قضیه. گیریم $f:X\to Y$ نگاشتی میان دو فضای توپولوژی X و Y باشد. فرض کنیم X و Y دارای روابط همارزی بترتیب $\sim_X$ و $\sim_Y$ باشند، به گونهای که «$x \sim_X x'$ اگر و تنها اگر $f(x) \sim_Y f(x')$». اگر f همئومورفیسم باشد، آنگاه $X/\sim_X$ و $Y/\sim_Y$ نیز همئومورفند.

اثبات: نگاشتی $F : X/\sim_X \to Y/\sim_Y$ با ضابطهٔ $F[x] = [f(x)]$ تعریف می‌کنیم، که براکتها نمایشگر دسته‌های هم‌ارزی هستند. F خوشتعریف است؛ زیرا اگر $[x] = [x']$، آنگاه $x \sim_X x'$ و در نتیجه $f(x) \sim_Y f(x')$، یا $[f(x)] = [f(x')]$. بنابراین $F[x] = F[x']$. برای نشان دادن یکبیکی F فرض کنیم $F[x] = F[x']$، در نتیجه $[f(x)] = [f(x')]$. یعنی $f(x) \sim_Y f(x')$. اما، در این صورت $x \sim_X x'$ یا $[x] = [x']$. نشان دادن پوشایی F ساده است. برای اثبات پیوستگی F، تصاویر طبیعی $\pi_X : X \to X/\sim_X$ و $\pi_Y : Y \to Y/\sim_Y$ را درنظر می‌گیریم، که هر دو پیوسته‌اند. واضح است که $F \circ \pi_X = \pi_Y \circ f$ و چون f پیوسته است، نتیجه می‌گیریم که $\pi_X \circ F$ باید پیوسته باشد و در نتیجه بر اساس خاصیت عام نگاشتهای خارج قسمتی F پیوسته است. اینکه F^{-1} پیوسته است از رابطهٔ $F^{-1} \circ \pi_Y = \pi_X \circ f^{-1}$ با استدلالی مشابه قابل استنتاج می‌باشد. □

۲۰.۲.۳ مثال. $\mathbb{R}^+ := (0;\infty) \subseteq \mathbb{R}$ را با رابطهٔ هم‌ارزی «$x \sim x'$ اگر و تنها اگر عدد صحیح n ای به گونه‌ای یافت شود که $x' = 3^n x$» را در نظر بگیرید. همچنین، $\mathbb{R}$ را بار رابطهٔ هم‌ارزی «$x \sim x'$ اگر و تنها اگر عدد صحیح n ای به کونه‌ای یافت شود که $x' = x + n$» را در نظر بگیرید. تابع $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(x) = \log_3 x$ همئومورفیسم است و نیز $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) \sim f(x')$. در نتیجه فضاهای $\mathbb{R}^+/\sim$ و $\mathbb{R}/\sim$ همئومورفندگ در واقع هر دو با دایره همئومورفند (چرا؟).

۲۱.۲.۳ یادداشت: یک روش کلی. قضیهٔ ۱۹.۲.۳ ایدهٔ شهودی همئومورف بودن را به گونه‌ای که شرح آن در بخش ۱.۳ رفت را توضیح می‌دهد: با یک فضا W شروع می‌کنیم. با برش دادن آن به یک فضای X و یک رابطه‌هٔم‌ارزی $\sim_X$ بر آن می‌رسیم که چگونگی باز چسبانی X و حصول به W را می‌گوید. حال یک همئومورفیسم f بر X عمل می‌کنیم تا به فضای Y و رابطهٔ هم‌ارزی $\sim_Y$ بر آن برسیم. اکنون، طبیعی است که در این حالت $x \sim_X x' \Leftrightarrow f(x) \sim_Y f(x')$. حال، Y را توسط $\sim_Y$ چسبانیده و فضای $Z = Y/\sim_Y$ را بدست می‌آوریم. بنابه قضیهٔ ۵.۵ فضای Z با فضای X همئومورف است.

۳.۳ عمل گروه بر فضا

مفهوم دیگری که در آینده بسیار بکار می‌آید، عمل «گروه» بر «مجموعه» است. این مفهوم بسیار جالب بوده و منجر به ساخت مثالهای متنوع تری از فضاهای خارج قسمتی می‌گردد.

۱.۳.۳ تعریف. گیریم X مجموعه و G گروه است. در صورتی می‌گوئیم G بر X **عمل می‌کند** و یا اینکه X **یک G-مجموعه است**، که نگاشتی $G \times X \to X$ با نماد $(g,x) \mapsto g \bullet x$ طوری یافت گردد که

۱) به ازای همهٔ $x \in X$ ها $1 \bullet x = x$، که 1 عنصر همانی گروه G است.

۲) به ازای همهٔ $x \in X$ ها و $g,h \in G$ ها $g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x$.

۲.۳.۳ مثال. ۱) فرض کنید G گروه همهٔ همئومورفیسمهای فضای توپولوژی X باشد (به تمرین ۱۵.۲.۲—(۴) توجه شود) و به ازای $g \in G$ و $x \in X$ تعریف کنیم $g \bullet x = g(x)$. این عملی از G بر X تعریف می‌کند، زیرا به وضوح $1_X \bullet x = 1_X(x) = x$ و $g \bullet (h \bullet x) = g \bullet h(x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x) = (g \circ h) \bullet x$.

۲) فرض کنیم $G = \mathbb{Z}_۲ = \{-۱, ۱\}$ با عمل ضرب، گروه دوری مرتبهٔ دوم است و $X = \mathbb{S}^n$. عمل $\mathbb{Z}_۲$ بر $\mathbb{S}^n$ را به صورت $\pm ۱ \bullet x = \pm x$ تعریف می‌کنیم (تحقیق عمل بودن به عهدهٔ خواننده).

۳) فرض کنیم $G = \mathbb{Z}$ گروه اعداد صحیح با عمل جمع باشد و $X = \mathbb{R}$. در این صورت به ازای $n \in \mathbb{Z}$ و $x \in \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم $n \bullet x = x + n$. این یک عمل $\mathbb{Z}$ بر $\mathbb{R}$ است.

۴) مثال قبل را به حالت $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تعمیم می‌دهیم. به ازای $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ تعریف می‌کنیم $(n,m) \bullet (x,y) = (x+n, y+m)$.

۵) فرض کنیم $\mathbb{Z}$ گروه جمعی اعداد صحیح و X نوار افقی بینهایت در $\mathbb{R}^۲$ باشد، یعنی $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ \mid -۱/۲ \leq y \leq ۱/۲\}$. در این صورت به ازای $n \in \mathbb{Z}$ و $(x,y) \in \mathbb{R}^۲$ تعریف می‌کنیم $m \bullet (x,y) = (x+m, (-۱)^m y)$.

۳.۳.۳ تعریف. به بیان دقیق کلمه، آنچه که در بالا تعریف شد، عملاً «عمل چپ» یا «G-مجموعهٔ چپ» است. مفهوم «عمل راست» یا «G-مجموعهٔ راست»

به صورت مشابه قابل تعریف است. در این حالتد بایستی $x \bullet 1 = x$ و $(x \bullet h) \bullet g = x \bullet (gh)$.

۴.۳.۳ قرارداد. از این پس منظور از «G–مجموعه» و «عمل»، بترتیب «G–مجموعهٔ چپ» و «عمل چپ» است.

۵.۳.۳ تمرین.

۱) فرض کنید X یک G–مجموعهٔ راست است. به ازای $x \in X$ و $g \in G$ تعریف می‌کنیم $g * x := x \bullet (g^{-۱})$. نشان دهید $*$ یک عمل چپ از G بر X را تعریف می‌کند. چرا تعریف $g * x = x \bullet g$ قبول نیست؟

۲) گیریم H زیر گروهی از G باشد. به ازای $h \in H$ و $g \in G$ عمل $h \bullet g$ را به صورت hg تعریف می‌کنیم. نشان دهید که این عملی از H بر G را تعریف می‌کند.

۳) گیریم G گروهی دلخواه و $\mathcal{P}(G)$ نمایشگر مجموعهٔ همهٔ زیر مجموعه‌های G باشد. به ازای $g \in G$ و $U \in \mathcal{P}(G)$ تعریف می‌کنیم $g \bullet U := gU = \{gh \,|\, h \in U\}$. نشان دهید این یک عمل از G بر $\mathcal{P}(G)$ را تعریف می‌کند.

۴) گیریم G بر X عمل کند و **پایدار ساز در** $x \in X$ را به صورت $G_x := \{g \in G \,|\, g \bullet x = x\}$ تعریف کنیم. ثابت کنید G_x زیر گروهی از G است.

۵) گیریم G بر X عمل کند و **مدار در** $x \in X$ را $G \bullet x := \{g \bullet x \,|\, g \in G\}$ تعریف کنیم. ثابت کنید مدارهای $G \bullet x$ و $G \bullet y$ یا برابرند و یا کاملاً مجزا. نتیجه بگیرید که هر G–مجموعه X به اجتماعی از زیر مجموعه‌های مجزا تجزیه می‌شود.

یکی از نتایج تعریف G–مجموعه این است که عملاً G به صورت دوسویی بر X عمل می‌کند. به بیان دیگر

۶.۳.۳ قضیه. گیریم X یک G–مجموعه باشد. به ازای هر $g \in G$ ای نگاشت $\theta_g : X \to X$ را به صورت $x \mapsto g \bullet x$ تعریف می‌کنیم. در این صورت θ_g دو سویی است.

اثبات: از تعریف G–مجموعه چنین مشاهده می‌شود که $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$ و $\theta_1 = 1_X$. بنابراین $\theta_g \circ \theta_{g^{-۱}} = 1_X = \theta_{g^{-۱}} \circ \theta_g$ و لذا θ_g دو سوسویی است. $\square$

۷.۳.۳ تعریف. اگر G بر X عمل کند، رابطه‌ای هم ارزی $\sim$ بر X به شرح زیر می‌توان تعریف نمود:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \text{« } g \in G \text{ ای چنان یافت شود که } g \bullet x = y \text{ »}$$

به لیان دیگر، $x \sim y$ و قتی و تنها وقتی که $y \in G \bullet x$؛ تمرین ۵.۳.۳$-$(۵) را ملاحظه کنید. حال مجموعهٔ همهٔ کلاسهای هم‌ارزی حاصل را را با نماد X/G نشان می‌دهیم. این را **مجموعهٔ خارج قسمتی** X **بر** G می‌نامیم. به وضوح نگاشت طبیعی $\pi : X \to X/G$ پوشا است. اکنون، اگر X فضایی توپولوژی باشد، توسط π می‌توان توپولوژی خارج قسمتی از X به X/G منتقل نمود. در این حالت X/G را **فضای خارج قسمتی** X **بر** G می‌نامیم.

۸.۳.۳ مثال. ۱) اگر $\mathbb{Z}_۲$ به صورت $\pm 1 \bullet x = \pm x$ بر $\mathbb{S}^n$ عمل کند، در این صورت فضای توپولوژی $\mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_۲$ دقیقاً همان $n-$فضای تصویری حقیقی $\mathbb{RP}^n$ است.

۲) اگر $\mathbb{Z}$ بر $\mathbb{R}$ به صورت $n \bullet x = x+n$ عمل کند، در این صورت فضای توپولوژی $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ دقیقاً همان دایره $\mathbb{S}^۱$ است.

۹.۳.۳ تمرین.

۱) گیریم X نوار بینهایت $\{(x,y) \in RR^۲ \mid -۱/۲ \leq y \leq ۱/۲\}$ در $\mathbb{R}^۲$ بوده و $\mathbb{Z}$ به صورت $m \bullet (x,y) = (x+m, (-۱)^m y)$ بر $\mathbb{R}^۲$ عمل کند. نشان دهید فضای خارج قسمتی $X/\mathbb{Z}$ با نوار موبیوس همئومورف است.

۳) گیریم X و Y دو $G-$باشند. در صورتی می‌گوئیم نگاشت $f : X \to Y$ **یک** $G-$**هم‌ارزی** است که به ازای هر $x \in X$ و هر $g \in G$ ای $f(g \bullet x) = g \bullet f(x)$.
ثابت کنید که اگر X و Y دو فضای توپولوژی باشند و f همئومورفیسمی $G-$هم‌ارزی باشد (یعنی، یک همئومورفیسم از X به Y باشد که همزمان $-$هم‌ارزی نیز هست)، در این صورت X/G و Y/G همئومورفند.

۳) مثالهایی ارائه کنید که نشان دهند اگر X و Y دو فضای توپولوژی باشند و G بر هر دو عمل کند و نیز اگر $X/G \cong Y/G$، لزومی ندارد که در این صورت حتماً X و Y با هم مئومورف باشند.

۴) گیریم X یک $G-$مجموعه است. به ازای هر $x \in X$ ای پایدارساز G_x بر G عمل می‌کند و خارج قسمت را با G/G_x نشان می‌دهیم. ثابت کنید که در

این صورت G/G_x دقیقاً همان مجموعهٔ همهٔ همدسته‌های چپ G_x در G است.
نشان دهید که تناظری G−هم‌ارزی و دوسویی بین $G\bullet x$ و G/G_x وجود دارد.

همهٔ مثالهایی که از عمل گروه بر فضاهای توپولوژی آوردیم، عملهایی پیوسته بودند: اینها را بنام خاصی می‌شناسیم.

۱۰.۳.۳ تعریف. فرض کنید XC فضایی توپولوژی و G گروه باشد. در صورتی می‌گوئیم X یک G−**فضا** است که G بر X عمل نمود و به ازای هر $g\in G$ ای نگاشت $\theta_g : X\to X$ با ضابطهٔ $x\mapsto g\bullet x$ پیوسته باشد.

۱۱.۳.۳ تمرین. فرض کنید X یک G−فضا باشد. ثابت کنید که به ازای هر $g\in G$ ای نگاشت θ_g همئومورفیسمی از X به خودش است. نتیجه بگیرید که ه این ترتیب همئومورفیسمی از G به گروه همهٔ همئومورفیسمهای X تعریف می‌گردد.

به دلیل حکم مطرح در تمرین بالا، برخی اوقات که X یک G−فضا است، می‌گوئیم G گروهی از همئومورفیسمهای X است. با استفاده از این مطلب، حکم بعدی قابل استنتاج است.

۱۲.۳.۳ قضیه. فرض کنیم X یک G−فضا است. در این صورت تصویر طبیعی $\pi : X\to X/G$ نگاشتی باز است.

اثبات: گیریم U مجموعه‌ای باز در X باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x\in X \mid \pi(x)\in\pi(U)\}\\
&= \{x\in X \mid G\bullet x = G\bullet y \text{ به ازای } y\in U \text{ ای}\}\\
&= \{x\in X \mid x = g\bullet y \text{ به ازای } g\in G \text{ و } y\in U \text{ ای}\}\\
&= \{x\in X \mid x\in g\bullet U \text{ به ازای } g\in G \text{ ای}\}\\
&= \bigcup_{g\in G} g\bullet U
\end{aligned}$$

اما، تابع عمل g بر G با ضابطهٔ $h\mapsto gh$ همئومورفیسم است و لذا اگر U باز باشد، آنگاه هر یک از $g\bullet U$ ها بازند و بنابراین $\pi^{-1}(\pi(U))$ باز می‌باشد. پس $\pi(U)$ در X/G باز است. $\square$

در تمرین بعدی ابتدا خاصیت عام فضاهای خارج قسمتی، و سپی قضیهٔ ۱۲.۳.۳ را از جهتی بخصوص تعمیم می‌دهیم.

۱۳.۳.۳ تمرین.

۱) گیریم X یک $G-$ فضا و $\pi : X \to X/G$ تصویر طبیعی باشد. فرض کنیم g تابعی از X/G به فضای توپولوژی Z باشد. ثابت کنید نگاشت g وقتی و تنها وقتی باز است که نگاشت $g \circ \pi$ باز باشد.

۳) گیریم G گروهی متناهی و X یک G–فضا باشد. ثابت کنید تصویر طبیعی $\pi : X \to X/G$ نگاشتی بسته است.

۳) فرض کنیم X یک G–فضا و H زیر گروهی نرمال از G باشد. نشان دهید X/H یک (G/H)–فضا است و بعلاوه $(X/H)/(G/H) \cong X/G$.

 18/9/05

۴.۳ فضای حاصلضرب

آخرین روش کلی که برای ساخت فضاهای توپولوژی جدید از روی فضاهای توپولوژی موجود ارائه می‌کنیم، حاصلضرب مستقیم آنها است. یادآور می‌شویم که حاصلضرب مستقیم $X \times Y$ دو مجموعهٔ X و Y عبارت است از مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب به شکل (x, y)، که $x \in X$ و $y \in Y$. اگر X و Y فضای توپولوژی باشند، با استفاده از توپولوژیهای موجود بر X و Y، توپولوژی‌ای بر $X \times Y$ می‌توانیم تعریف کنیم. اولین حدس این است که مجموعه‌های باز در $X \times Y$ عبارتند از حاصلضربهای از مجموعه‌ای باز در X ضرب در مجموعه‌ای باز در Y است. اما این امر کافی نیست (کدام شرط برای توپولوژی بودن برقرار نیست).

۱.۴.۳ تعریف. گیریم X و Y دو فضای توپولوژی باشند. **حاصلضرب (توپولوژیک)** $X \times Y$ عبارت است از مجموعهٔ $X \times Y$ همراه با توپولوژی $\mathcal{U}_{X\times Y}$ متشکل از خانواده مجموعه‌های بشکل اجتماعهای دلخواه از حاصلضربهای به شکل $U \times V$، که U در X و V در Y باز می‌باشد. به بیان دیگر، هر عضو از $\mathcal{U}_{X\times Y}$ به شکل $\bigcup_{j\in J} U_j \times V_j$ است که J مجموعهٔ اندیس‌گذار دلخواهی است و به ازای هر $j \in J$ ای U_j و V_j بترتیب در X و Y بازند.

۲.۴.۳ لم. مجموعهٔ $\mathcal{U}_{X\times Y}$ در بالا تشکیل توپولوژی بر $X \times Y$ می‌دهد.

اثبات: چون $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$، پس $\emptyset \in \mathcal{U}_{X\times Y}$؛ چون X در X و Y در Y باز است، بنابراین $X \times Y \in \mathcal{U}_{X\times Y}$. چنانچه $W, W' \in \mathcal{U}_{X\times Y}$، آنگاه $W = \bigcup_{j\in J} U_j \times V_j$ و $W' = \bigcup_{k\in K} U'_k \times V'_k$ که J و K مجموعه‌های اندیس گذارند و U_j و U'_j در X بازند و V_j و V'_j در Y بازند. چون

$$
\begin{aligned}
W \cap W' &= \Big(\bigcup_{j\in J} U_j \times V_j\Big) \cap \Big(\bigcup_{k\in K} U'_k \times V'_k\Big) \\
&= \bigcup_{j\in J, k\in K} \big(U_j \cap U'_k\big) \times \big(V_j \cap V'_j\big)
\end{aligned}
$$

ملاحظه می‌کنیم که شرط (۲) برای توپولوژی بودن نیز برقرار است. شرط (۳) نیز به صورت مشابه قابل اثبات است. □

۳.۴.۳ یادداشت. مفهوم حاصلضرب توپولوژیک X و Y را به حاصلضرب توپولوژیک تعدادی متناهی از فضاهای توپولوژی می‌توان تعمیم داد و حکم مشابه لم بالا را در مورد آنها اثبات نمود.

۴.۴.۳ تمرین.

۱) نشان دهید که اگر $X_1 \cong X_2$ و $Y_1 \cong Y_2$، آنگاه $X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2$.

۳) گیریم X و Y دو فضای متری‌پذیر مفروض با متر بترتیب d_X و d_Y باشند. نشان دهید $d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \max\{d_X(x_1,y_1), d_Y(x_2,y_2)\}$ متری بر $X \times Y$ را تعریف می‌کند؛ نشان دهید توپولوژی متری حاصل با توپولوژی حاصلضربی بر $X \times Y$ همئومورف است. نتیجه بگیرید که توپولوژی حاصلضربی بر $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (که $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$ دارای توپولوژی معمولی هستند) همان توپولوژی معمولی بر $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ است.

۳) نمودار تابع $f : X \to Y$ عبارت است از مجموعهٔ Γ_f همهٔ نقاط بشکل $(x, f(x))$ که $x \in X$، از مجموعهٔ $X \times Y$. نشاند دهید که اگر f تابعی پیوسته میان فضاهای توپولوژی باشد، آنگاه Γ_f نمودار f با X همئومورف است.

۴) ثابت کنید $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ و $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ همئومورفند. (راهنمایی: $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ را به صورت $\mathbb{C} - \{0\}$ در نظر بگیرید.)

توپولوژی بر $X \times Y$ دارای مشخصهٔ دیگری نیز هست.

۵.۴.۳ قضیه. گیریم $X \times Y$ حاصلضرب دو فضای توپولوژی باشد. مجموعه $W \subseteq X\times Y$ وقتی و تنها وقتی باز است که به ازای هر $w \in W$ ای مجموعه‌های U_w و V_w طوری یافت شوند که U_w در X و V_w در Y بازند، $U_w\times V_w \subseteq W$ و $w \in U_w\times V_w$.

اثبات: فرض کنید W باز باشد. در این صورت $W = \bigcup_{j\in J} U_j \times V_j$ که J مجموعهٔ اندیس‌گذار دلخواهی است و به ازای هر $j \in J$ ای U_j و V_j بترتیب در X و Y بازند. اکنون $w \in W$ ، در نتیجه $i \in J$ ای هست که $w \in U_i \times V_i$. بالعکس، مجموعه $\bigcup_{w\in W} U_w \times V_w$ به وضوح در $X \times Y$ باز است و برابر W می‌باشد. □

۶.۴.۳ تعریف. نگاشتهای تصویری بدیهی $\pi_X : X \times Y \to X$ و $\pi_Y : X \times Y \to Y$ با ضابطهٔ بترتیب $(x,y) \mapsto x$ و $(x,y) \mapsto y$ تعریف می‌شوند. این نگاشتها را

تصاویر ضربی می‌نامیم. چون $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ و $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$، واضح است که π_X و π_Y پیوسته‌اند.

۷.۴.۳ قضیه. به ازای هر $y \in Y$ زیر فضای $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ با X همئومورف است.

اثبات: نگاشت $f : X \times \{y\} \to X$ با ضابطهٔ $(x,y) \mapsto x$ را در نظر بگیرید. واضح است که این تابع پیوسته می‌باشد، چرا که آن را به صورت ترکیب نگاشت احتوای $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$ و تصویر طبیعی π_X می‌توان نوشت، و هر دو تابه مذکور به وضوح پیوسته‌اند. حال فرض کنیم W زیر مجموعه‌ای باز از $W \times \{y\}$ باشد، پس $W = (\bigcup_{j\in J} U_j \times V_j) \cap X \times \{y\}$ که U_j در X و V_j در Y باز است. W را به صورت $\bigcup_{j\in J'} U_j \times \{y\}$ می‌شود نوشت که $J' = \{j \in J \,|\, y \in V_j\}$؛ بنابراین $f(W) = \bigcup_{j\in J'} U_j$ که در X باز است. این اثبات می‌کند که f باز نیز هست. پر نتیجه همئومورف می‌باشد. $\square$

اگر $f : A \to X$ و $g : A \to Y$ نگاشتهایی میان فضای توپولوژی باشند، آنگاه نگاشتی $h : A \to X \times Y$ با ضابطهٔ $h(a) = (f(a), g(a))$ می‌توانیم تعریف کنیم. واضع است که h تنها نگاشتی می‌باشد که $\pi_X \circ h = f$ و $\pi_Y \circ h = g$. رابطهٔ میان پیوستگی h، g و f را **خاصیت عام نگاشتهای حاصلضربی** می‌نامند.

۸.۴.۳ قضیه. گیریم A، X و Y فضای توپولوژی هستند. در این صورت، به ازای هر جفت از نگاشتهای $f : A \to X$ و $g : A \to Y$، نگاشت $h : A \to X \times Y$ با ضابطهٔ کلی $h(a) = (f(a), g(a))$ وقتی و تنها وقتی پیوسته است که f و g پیوسته باشتند.

اثبات: اگر h پیوسته باشد، آنگاه $f = \pi_X \circ h$ و $g = \pi_Y \circ h$ نیز پیوسته‌اند. بالعکس، فرض کنیم f و g پیوسته‌اند. گیریم U در X و V در Y باز باشند، آنگاه

$$h^{-1}(U \times V) = \{a \in A \,|\, f(a) \in U \,,\, g(a) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V).$$

اما، چون $f^{-1}(U)$ و $g^{-1}(V)$ هر دو بازند، $h^{-1}(U\times V)$ نیز باز می‌باشد. اکنون مجموعه‌ای باز W در $X \times Y$ در نظر می‌گیریم. اگر $w \in W$، آنگاه $x \in U \times V \subseteq W$ که U در X و V در Y بازند. بنابراین $h^{-1}(x) \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ و در نتیجه $h^{-1}(W)$ باز است. $\square$

۹.۴.۳ تمرین.

۱) نشان دهید که توپولوژی حاصلضربی بر $X\times Y$ ضعیفترین توپولوژی بر $X\times Y$ است که به واسطهٔ آن π_X و π_Y پیوسته‌اند.

۳) گیریم X و Y بترتیب G–فضا و H–فضا هستند. ثابت کنید فضای $(X\times Y)/(G\times H)$ با $(X/G)\times(Y/H)$ همئومورف است.

۳) عمل عنصر $(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ بر زوج مرتب $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ را به صورت $(n,m)\bullet(x,y)=(x+n,y+m)$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید که این از $\mathbb{R}^2$ یک $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$–فضا می‌سازد. ثابت کنید که در این صورت $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})$ و $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ همئومورفند.

۴) ثابت کنید تیوب (به شکل ۹.۳–(الف) و ۱۰.۳ توجه شود) با فضای $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ همئومورف است.

۵) به ازای $n\in\mathbb{Z}$ و $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ عضو $n\bullet z$ را به صورت $n\bullet z=2^n z$ تعریف می‌کنیم. نشان دهید این کار $\mathbb{C}\{0\}$ را به یک $\mathbb{Z}$–فضا تبدیل می‌کند. ثابت که در این صورت، $(\mathbb{C}-\{0\})/\mathbb{Z}$ با $\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ همئومورف است. (راهنمایی: از تمرینات ۴.۴.۳–(۴) و ۹.۴.۳–(۲) و اینکه $\mathbb{Z}=\mathbb{Z}\times\{1\}$ استفاده کنید.)

٦) مثل قسمت (۵) عمل کنید، با این تفاوت که $n\bullet z$ را $n\bullet z=(2w)^n z$ تعریف کنید که $w=\exp(2\pi i/3)$. در این صورت $(\mathbb{C}-\{0\})/\mathbb{Z}$ چیست؟

۷) ثابت کنید دو فضای $\mathbb{R}^n-\{0\}$ و $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$ همئومورفند. (راهنمایی: تابع $f:\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n-\{0\}$ با ضابطهٔ $f(x,t)=2^t x$ را در نظر بگیرید.)

۸) ثابت کنید زیر فضای

$$S_{p,q}:=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_{p+q}^2=1\}$$

از $\mathbb{R}^n$ که $p+q\le n$، و فضای توپولوژی $\mathbb{S}^{p-1}\times\mathbb{R}^{n-q}$ همئومورفند. (راهنمایی: تابع $f:S_{p,q}\to\mathbb{S}^{p-1}\times\mathbb{R}^{n-q}$ با ضابطهٔ

$$f(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_{n-p})=(x_1z,\cdots,x_pz,y_1,\cdots,y_{n-p})$$

را در نظر بگیرید که در آن $z=\{y_1^2+\cdots,y_q^2+1\}^{1/2}$.)

۹) گیریم $T:\mathbb{R}^n-\{0\}\to\mathbb{R}^n-\{0\}$ با ضابطهٔ $T(x)=2x$ بوده و G گروه همئومورفیسمهای $\{T^i\,|\,i\in\mathbb{Z}\}$ باشد. نشان دهید که در این صورت $(\mathbb{R}^n-\{0\})/G$ با $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$ همئومورف است.

۱۰) ثابت کنید که دو مجموعهٔ زیر همراه با توپولوژی زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ همئومورفند:

$$I^n=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,0\le x_i\le 1,\ i=1,\cdots,n\},\ \mathbb{D}^n=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\|x\|\le 1\}.$$

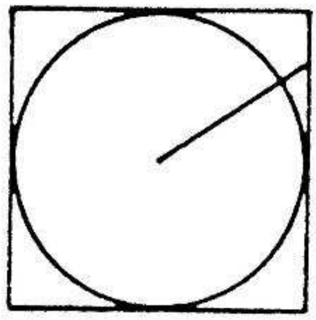
(راهنمایی: نشان دهید که $I^n \cong X := [0;1]^n$ و سپس نگاشتهای $\varphi : X \to \mathbb{D}^n$ و $\psi : \mathbb{D}^n \to X$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}}{\|x\|}\,x & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\|x\|}{\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}}\,x & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

از نظر شهودی نگاشت φ هر پاره خط راست از 0 تا ∂X را به پاره خطی بطول یک و موازی با خودش تبدیل می‌کند.)

شکل ۱۷.۳



۱۱) ثابت کنید $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n) \cong \mathbb{R}^n$. (راهنمایی: $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n) \cong \mathrm{Int}(I^n) \cong (\mathrm{Int}I)^n$.)

۱۲) فضای غیر X ای را بیابید که $X \cong X \times X$. (راهنمایی: دنبال مجموعه‌ای غیر تهی و متناهی با توپولوژی گسسته بگردید. پس از آن سعی کنید دنبال مثال دیگری بگردید که در آن این فضا با توپولوژی گسسته نباشد.)

فصل ۴

انواع فضاهای توپولوژی

این فصل به مطالعهٔ آن دسته از خواص فضاهای توپولوژی می‌پردازد که تحت تأثیر همئومورفیسمها تغییر نمی‌کنند. نتیجه‌ای مهم از این امر آن است که اگر فضایی یکی از این خواص را داشته باشد، و فضای دیگری آن خاصیت را نداشته باشد، در این صورت آن دو فضا غیر همئومورفند.

۱.۴ فضای فشرده

فشردگی اولین خاصیت از این مجموعه است. این مفهوم اساساً بر این واقعیت استوار است که اگر $\mathcal{U} = \{U_j \mid j \in J\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های باز در بازهٔ یکهٔ $[۰;۱] \subseteq \mathbb{R}$ باشند (که $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی‌اش همراه است و $[۰;۱]$ نیز دارای توپولوژی زیر فضایی می‌باشد)، به گونه‌ای که $\bigcup_{j\in J} U_j = [۰;۱]$، در این صورت زیر گردایه‌ای متناهی از این خانواده $\mathcal{U}$ به گونه‌ای یافت می‌شود که اجتماع آنها همچنان $[۰;۱]$ را می‌پوشاند؛ به قضیهٔ ۱۱.۱.۴ رجوع شود.

۱.۱.۴ تعریف. منظور از **پوشش** برای زیر مجموعهٔ S از مجموعهٔ مفروض X، گردایه‌ای $\{U_j \mid j \in J\}$ از زیر مجموعه‌های در X است، به گونه‌ای که $S \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$. بعلاوه، اگر مجموعهٔ اندیسگذار J متناهی باشد، می‌گوئیم $\{U_j \mid j \in J\}$ **پوشش متناهی**

است. بویژه، اگر $S = X$ کل فضا باشد، در صورت $\{U_j \,|\, j \in J\}$ پوششی برای X است که $X = \bigcup_{j\in J} U_j$.

۲.۱.۴ مثال. گردایهٔ $\{[۱/n; ۱ - ۱/n] \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ پوششی برای زیر مجموعهٔ $(۰; ۱)$ از $\mathbb{R}$ است و $\{U_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ که $U_n = (n; n + ۳) \subseteq \mathbb{R}$، پوششی برای خود $\mathbb{R}$.

۳.۱.۴ تعریف. فرض کنیم $\mathcal{U} = \{U_j \,|\, j \in J\}$ و $\mathcal{V} = \{V_k \,|\, k \in K\}$ پوششهایی برای زیر مجموعهٔ S از X باشند. اگر به ازای هر $j \in J$، یک $k \in K$ ای چنان یافت شود که $U_j = V_k$، در این صورت می‌گوئیم $\mathcal{U}$ **زیر پوشش** $\mathcal{V}$ است.

۴.۱.۴ مثال. فرض کنیم $\mathcal{U} = \{U_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ و $\mathcal{V} = \{V_r \,|\, r \in \mathbb{R}\}$، که در آنها $U_n = (n; n + ۳)$ و $V_r = (r; r + ۳)$. در این صورت $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ پوششهایی برای $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی‌اش هستند و $\mathcal{U}$ زیر پوششی از $\mathcal{V}$ می‌باشد.

۵.۱.۴ تعریف. فرض کنیم X فضایی توپولوژی و S زیر مجموعه‌ای از آن باشد. در صورتی می گوییم $\{U_j \,|\, j \in J\}$ **پوشش باز** برای S است که اولاً پوششی برای آن بوده و در ثانی به ازای هر $j \in J$ ای U_j مجموعه‌ای باز در X باشد.

۶.۱.۴ تعریف. زیر مجموعهٔ S از فضای توپولوژی X را در صورتی **فشرده** گوییم که هر پوشش باز آن دارای زیر پوسششی متناهی باشد. بویژه، خود فضای توپولوژی X وقتی و تنها وقتی **فشرده** است که هر پوشش باز برای X، دارای زیر پوششی متناهی باشد.

۷.۱.۴ مثال. ۱) فضای توپولوژی $\mathbb{R}$ به همراه توپولوژی معمولی‌اش، فشرده نیست. زیرا مثلاً، $\{(n; n + ۲) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ پوششی باز برای $\mathbb{R}$ است که هیچ زیر پوشش متناهی ندارد.

۲) فضای X با توپولوژی گسسته وقتی و تنها وقتی فشرده است که متناهی باشد. زیرا، در این حالت هر نقطه از X تشکیل مجموعه‌ای باز در X می‌دهد و لذا اگر X نامتناهی باشد، آنگاه پوشش باز مرکب از همهٔ زیر مجموعه‌های تک عضوی، هیچ زیر پوشش متناهی ندارد. از سوی دیگر، اگر X متناهی باشد، آنگاه زیر مجموعه‌های باز در X متناهی هستند و بنابراین هر پوششی الزاماً متناهی است.

۳) زیر فضای $[۰; ۱]$ از $\mathbb{R}$ فشرده است (به ۱۱.۱.۴ توجه شود).

۸.۱.۴ تمرین.

۱) فرض کنیم X دارای توپولوژی کتمم متناهی است. نشان دهید که X فشرده است. نشان دهید که هر زیر مجموعه از X نیز فشرده است.

۲) ثابت کنید یک فضای توپولوژی مفروض وقتی و تنها وقتی فشرده است که «به ازای هر گردایه $\{C_j \,|\, j \in J\}$ از زیر مجموعه‌های بستهٔ با $\bigcap_{j\in J} C_j = \emptyset$، زیر گردایه‌ای متناهی $\{C_k \,|\, k \in K\}$ چنان یافت شود که باز هم داشته باشیم $\bigcap_{k\in K} C_k = \emptyset$.»

۳) گیریم $\mathcal{F}$ توپولوژی‌ای بر $\mathbb{R}$ به شرح ذیل باشد: وقتی و تنها وقتی $U \in \mathcal{F}$ که به ازای هر $s \in U$ ای یک $t > 0$ ایی چنان یافت گردد که $[s;t) \subseteq U$. ثابت کنید زیر مجموعهٔ $[0;1]$ از $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ فشرده نیست.

زیر مجموعه‌ای S از یک فضای توپولوژی مفروض X را در نظر بگیرید که توپولوژی زیر فضایی را بر آن قرار داده‌ایم. سوالی که در اینجا مطرح است چنین می‌باشد: فشردگی S به عنوان فضای توپولوژی و فشردگی آن به عنوان زیر مجموعه‌ای از X چه ارتباطی با هم دارند؟ پاسخ این است که «هر دو مفهوم یکی هستند!»

۹.۱.۴ قضیه. زیر مجموعهٔ S از فضای توپولوژی X وقتی و تنها وقتی فشرده است که به عنوان فضای توپولوژی همراه با توپولوژی القایی‌اش فشرده باشد.

اثبات: این واضح است، زیرا زیر مجموعه‌های باز در S عبارتند از زیر مجموعه‌های به شکل $U \cap S$، که U در X باز است. ادامهٔ کار را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. □

۱۰.۱.۴ یاداشت. پس می‌توانستیم از همان اول چنین تعریف کنیم که «$S \subseteq X$ وقتی فشرده است که به عنوان فضای توپولوژی همراه با توپولوژی القایی‌اش از X فشرده باشد.»

حکم بعدی مثال مهمی از فضاهای فشرده را فراهم می‌سازد.

۱۱.۱.۴ قضیه. بازهٔ یکهٔ بسته $[0;1] \subseteq \mathbb{R}$ فشرده است.

اثبات: گیریم $\mathcal{U} = \{U_j \,|\, j \in J\}$ پوششی باز برای $[0;1]$ و فاقد هر گونه زیر پوشش متناهی باشد. این بدین معنی است که حداقل یکی از بازه‌های $[0;1/2]$ و $[1/2;1]$

را با هیچ زیر پوشش متناهی از $\mathcal{U}$ نمی‌شود آن را پوشاند. این بازه، یعنی بازه‌ای که با هیچ زیر پوشش متناهی از $\mathcal{U}$ نمی شود آن را پوشاند، را با نماد $[a_1;b_1]$ نشان می‌دهیم. باز هم لااقل یکی از بازه‌های $[a_1;\frac{1}{2}(a_1+b_1)]$ و $[\frac{1}{2}(a_1+b_1);b_1]$ را با هیچ زیر پوشش متناهی از $\mathcal{U}$ نمی‌شود پوشاند. این را با نماد $[a_2;b_2]$ نشان می‌دهیم. با ادامهٔ این کار به دنباله‌ای از بازه‌ها می‌رسیم که هیچ یک را با زیر پوششی متناهی از $\mathcal{U}$ نمی‌توان پوشاند: $[a_1;b_1]$، $[a_2;b_2]$، . . . $[a_n;b_n]$، . . . بعلاوه $b_n-a_n=2^{-n}$ و به ازای هر n ای $a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n$. شرط آخر موجب می‌شود که به ازای هر جفت عدد صحیح m و n داشته باشیم $a_m\leq b_n$ و بنابراین b_n کران بالایی برای مجموعهٔ $\{a_1,a_2,\cdots\}$ است. اکنون فرض کنیم a کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ $\{a_1,a_2,\cdots\}$ باشد. چون به ازای هر n ای $a\leq b_n$، پس a کران پائینی برای مجموعهٔ $\{b_1,b_2,\cdots\}$ است. فرض کنیم b بزرگترین کران پائینی برای $\{b_1,b_2,\cdots\}$ باشد. در این صورت به ازای هر n ای $b-a\leq 2^{-n}$ و در نتیجه $b-a$.

چون $\mathcal{U}$ بازهٔ $[0;1]$ را می‌پوشاند و $a=b\in[0;1]$، به ازای یک $j\in J$ ای $a\in U_j$. چون U_j باز است، بازه‌ای باز $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)\subseteq U_j$ وجود دارد، که $\varepsilon>0$. عدد صحیح مثبت N ای چنان انتخاب می‌کنیم که $2^{-N}<\varepsilon$ و در نتیجه $b_N-a_N<\varepsilon$. اما $a\in[a_N;b_N]$ و $a-a_N<2^{-N}<\varepsilon$ و $b-b_N<2^{-N}<\varepsilon$؛ در نتیجه $[a_N;b_N]\subseteq(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ که تناقض است، زیرا می‌دانیم $[a_N;b_N]$ را با هیچ زیر پوشش متناهی از $\mathcal{U}$ نمی‌توان پوشانید. □

استدلال بالا را می‌توان تعمیم داده و برقراری حکم زیر را نشان داد. بعداً اثبات دیگری از این مطلب ارائه خواهد شد.

۱۲.۱.۴ نتیجه. n−مکعب واحد $I^n:=I\times\cdots I\subseteq\mathbb{R}^n$، که $I=[0;1]\subseteq\mathbb{R}$، فشرده است.

۱۳.۱.۴ قضیه. گیریم $f:X\to Y$ نگاشتی پیوسته و $S\subseteq X$ زیر فضایی فشرده است، در این صورت $f(S)$ نیز زیر فضایی فشرده است.

اثبات: فرض کنیم $\mathcal{U}=\{U_j\,|\,j\in J\}$ پوششی باز برای $f(S)$ است. در این صورت $\mathcal{U}'=\{f^{-1}(U_j)\,|\,j\in J\}$ پوششی باز برای S است. چون S فشرده است، زیر پوشش متناهی $\{f^{-1}(U_k)\,|\,k\in K\}$ از $\mathcal{U}'$ وجود دارد. بنابراین، K متناهی است. اما $f(f^{-1}(U_k))\subseteq U_k$ پوششی برای $f(S)$ است، که زیر پوششی متناهی از $\mathcal{U}$ می‌باشد. □

۱۴.۱.۴ نتیجه. ۱) هر بازهٔ بسته $[0;1]\subseteq\mathbb{R}$ فشرده است.

۲) فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژی همئومورفند. شرط لازم و کافی برای اینکه X فشرده باشد، این است که Y فشرده باشد.

۳) اگر X فشرده بوده و Y دارای توپولوژی خارج قسمتی نسبت به نگاشت $f : X \to Y$ باشد، در این صورت Y فشرده است.

اثبات این حکم بدیهی است.

۱۵.۱.۴ یادداشت. توجه شود که بر اساس حکم (۲) از نتیجهٔ بالا، هیچ فضای غیر فشرده ای نمی‌تواند با یک فضای فشرده همئومورف باشد.

۱۶.۱.۴ مثال. لزومی ندارد که هر زیر مجموعه از یک فضای فشرده، فشرده باشد. زیرا مثلاً، $(۰;۱)$ زیر مجموعه‌ای از فضای فشردهٔ $[۰;۱]$ است که فشرده نیست. این مطلب را به راحتی توسط پوشش $\{(۱/n; ۱-۱/n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ می‌شود تحقیق نمود.

۱۷.۱.۴ قضیه. هر زیر مجموعهٔ بسته از یک فضای فشرده، فشرده است.

اثبات: گیریم $\mathcal{U} = \{U_j \,|\, j \in J\}$ پوششی باز برای $S \subseteq X$ است، که در آن هر یک از U_j ها زیر مجموعه‌ای باز از X می‌باشد. چون $S \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$، ملاحظه می‌کنیم که $\mathcal{U} \cup \{X - S\}$ پوششی باز برای X است و چون X فشرده است، زیر پوششی متناهی دارد. این زیر پوشش متناهی برای X یا به شکل $\{U_k \,|\, k \in K\}$ است و یا به شکل $\{U_k \,|\, k \in K\} \cup \{X - S\}$، که K متناهی است. بنابراین، در هر دو حالت $\{U_k \,|\, k \in K\}$ زیر پوششی متناهی از $\mathcal{U}$ است که S را می‌پوشاند. □

تا اینجا تأثیر القاء نمودن توپولوژی و یا خارج قسمت‌گیری بر فشردگی را بررسی نمودیم. اکنون، نوبت توپولوژی حاصلضربی است.

۱۸.۱.۴ قضیه. گیریم X و Y فضای توپولوژی باشند. شرط لازم و کافی برای اینکه هر دو فضای X و Y فشرده باشند این است که $X \times Y$ فشرده باشد.

اثبات: فرض کنید X و Y فشرده باشند. گیریم $\{W_j \,|\, j \in J\}$ پوششی باز برای $X \times Y$ است. بنابه تعریف هر W_j بشکل $\bigcup_{k\in K}(U_{j,k} \times V_{j,k})$ است، که $U_{k,j}$ ها در X و $V_{j,k}$ ها در Y بازند. بنابراین، $\{U_{j,k} \times V_{j,k} \,|\, j \in J \,,\, k \in K\}$ پشش بازی برای $X \times Y$ تشکیل می‌دهد. به ازای هر $x \in X$ ای زیر فضای $\{x\} \times Y$ فشرده است (زیرا، با Y همئومورف است) و چون $\{U_{j,k} \times V_{j,k} \,|\, j \in J \,,\, k \in K\}$ پوشش بازای برای $\{x\} \times Y$ است، دارای زیر پوششی متناهی $\{U_i(x) \times V_i(x) \,|\, i = ۱, \cdots, n(x)\}$ است،

که می‌تواند $\{x\} \times Y$ را بپوشاند. گیریم $U'(x) := \bigcap_{i=1}^{n(x)} U_i(x)$. به این ترتیب، گردایهٔ $\{U'(x) \,|\, x \in X\}$ پوششی باز برای X تشکیل می‌دهد و بنابراین دارای زیر پوششی متناهی $\{U'(x_i) \,|\, i = 1, \cdots, m\}$ است. روشن است که $\{U'(x_i) \times V_{k_i}(x_i) \,|\, i = 1, \cdots, m \,,\, k_i = 1, \cdots, n(x_i)\}$ پوشش باز و متناهی برای کل $X \times Y$ می‌باشد. اما، به ازای هر i و هر k_i، یک $j \in J$ و یک $k \in K$ ای چنان وجود دارند که $U'(x_i) \times V_{k_i}(x_i) \subseteq U_{j,k} \times V_{j,k} \subseteq W_j$. در نتیجه، زیر پوششی متناهی از $\{W_j \,|\, j \in J\}$ وجود دارد که $X \times Y$ را می‌پوشاند.

بالعکس، اگر $X \times Y$ فشرده باشد، آنگاه چون π_X و π_Y پیوسته هستند، فضاهای X و Y نیز فشرده می‌باند. □

۱۹.۱.۴ نتیجه. اگر X_1، X_2، . . . و X_n فضاهای توپولوژی باشند، آنگاه شرط لازم و کافی برای فشردگی $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ این است که به ازای هر i ای X_i فشرده باشد.

۲۰.۱.۴ مثال. چون $I := [0; 1]$ فشرده است، n−مکب واحد $I^n := [0; 1]^n$ فشرده است.

۲۱.۱.۴ تعریف. زیر مجموعهٔ S از $\mathbb{R}^n$ را در صورتی **کراندار** گوئیم که عددی حقیقی $K > 0$ چنان یافت شود که به ازای هر نقطهٔ $x = (x_1, \cdots, x_n) \in S$ و هر $i = 1, \cdots, n$ ای داشته باشیم $|x_i| < K$. به بیان دیگر، S در درون n−مکعبی به ضلع $2K$ قرار داشته باشد.

۲۲.۱.۴ قضیهٔ هاین—بورل. هر زیر مجموعهٔ بسته و کراندار از $\mathbb{R}^n$ فشرده است.

اثبات: گیریم S بسته و کراندار باشد. پس عدد $K > 0$ ای وجود دارد که S در یک n−مکعب به ضلع $2K$ قرار می‌گیرد. اما، این n−مکعب با n−مکعب واحد همئومورف است و بنابراین فشرده می‌باشد. پس، S زیر مجموعه‌ای بسته از فضایی فشرده است و بنابراین فشرده می‌باشد. □

۲۳.۱.۴ یادداشت. عکس این قضیه نیز درست است (تمرین ۷.۲.۴−(۱۴)).

۲۴.۱.۴ مثال. هر یک از فضاهای مشروح در زیر فشرده‌اند:

۱) $\mathbb{S}^n$ (زیر مجموعهٔ بسته و کرانداری از $\mathbb{R}^{n+1}$)؛

۲) $\mathbb{S}^n \times \cdots \mathbb{S}^n$؛

۳) $\mathbb{RP}^n$ (نکارهٔ پوشای $\mathbb{S}^n$)؛

۴) نوار موبیوس (زیر مجموعه‌ای بسته و کراندار از $\mathbb{R}^3$).

۲۵.۱.۴ تمرین.

۱) کدامیک از فضاهای مشروح ذر زیر فشرده‌اند؟

$۱)\ \mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}, \qquad ۲)\ \mathrm{Int}(\mathbb{D}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\},$

$۳)\ \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq 1\ ,\ 0 \leq t \leq 4\},$

$۴)\ \{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3 \mid s^2 + t^2 \leq 1\} \cap \{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3 \mid t^2 + u^2 \leq 1\}$

۲) نشان دهید که هر زیر مجموعهٔ فشرده از $\mathbb{R}^n$ الزاماً کراندار است.

۳) ثابت کنید که نمودار تابع $f : I \to \mathbb{R}$ وقتی و تنها وقتی فشرده است که f پیوسته باشد. مثالی از یک تابع ناپیوسته $g : I \to \mathbb{R}$ بیاورید که نمودارش بسته و غیر فشرده باشد.

۴) گیریم X و Y فضای توپولوژی باشند. گیریم $\mathcal{F}(X,Y)$ مجموعه همهٔ توابع پیوسته از X به Y باشد. اگر $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$، از نماد $F(A,B)$ برای نشان دادن زیر مجموعهٔ همهٔ عناصری از $\mathcal{F}(X,Y)$ که A را B می‌نکارند، استفاده می‌کنیم: $F(A,B) := \{f \in \mathcal{F}(X,Y) \mid f(A) \subseteq B\}$. گیریم

$\mathcal{L} = \{F(A,B) \mid$ باز $B \subseteq Y$ فشرده و $A \subseteq X\}$

و تعریف می‌کنیم:

$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{F}(X,Y) \mid f \in F_1 \cap \cdots \cap F_n \subseteq U$ می‌شود که

اگر $f \in U$، آنگاه عناصر $F_1, \cdots, F_n \in \mathcal{L}$ طوری یافت $\}$

ثابت کنید که در این صورت $\mathcal{U}$ یک توپولوژی برای $\mathcal{F}(X,Y)$ است (این را **توپولوژی فشرده—باز** می‌نامند).

۵) گیریم X یک فضای توپولوژی متری‌پذیر فشرده باشد. فرض کنیم Y فضای متری با متر d باشد. اکنون بر $\mathcal{F}(X,Y)$ تعریف می‌کنیم

$$d^*(f,g) := \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big).$$

نشان دهید که در این صورت d^* یک متر برای $\mathcal{F}(X,Y)$ است و توپولوژی حاصل از d^* بر $\mathcal{F}(X,Y)$ دقیقاً همان توپولوژی فشرده—باز است.

۶) فضای X را در صورتی **موضعاً فشرده** گوئیم که به ازای هر $x \in X$، هر همسایگی از x دارای همسایگی کوچکتری از x باشد که فشرده است. نشان دهید که اگر X موضعاً فشرده باشد، در این صورت نگاشت مقداریابی $\mathcal{F}(X,Y) \times X \to Y$ با ضابطهٔ $(f,x) \mapsto f(x)$ پیوسته است.

۷) گیریم X فضای توپولوژی فشرده باشد، که توپولوژی آن از متری d حاصل شده است. ثابت کنید اگر $\mathcal{U} = \{U_j \,|\, j \in J\}$ پوششی باز برای X باشد، آنگاه عددی حقیقی $\delta > 0$ (بنام **عدد لبگ پوشش** $\mathcal{U}$) چنان وجود دارد که هر زیر مجموعهٔ با قطر کمتر از δ از X در یکی از مجموعه‌های U_j (که $j \in J$) قرار می‌گیرد.

۸) گیریم X فضایی توپولوژی بوده و X^∞ نمایشگر $X \cup \{\infty\}$ باشد، که ∞ عنصری غیر واقع در X است. اگر $\mathcal{U}$ توپولوژی مفروض بر X باشد، آنگاه $\mathcal{U}^\infty$ را به صورت $\mathcal{U}$ به همراه همهٔ مجموعه‌های به شکل $V \cup \{\infty\}$ در نظر می‌گیریم که $V \subseteq X$ و مجموعهٔ $X - V$ فشرده و بسته است. ثابت کنید که $\mathcal{U}^\infty$ یک توپولوژی برای X^∞ است. همچنین، ثابت کنید که X زیر فضایی از X^∞ است و بعلاوه X^∞ فشرده است (X^∞ را **فشرده‌سازی تک نقطه‌ای برای** X می‌نامند).

۲.۴ فضای هاوسدورف

نقطهٔ شروع این بخش تمرین ۲.۱.۶—(۲) است که در آن خواسته شده بود تا اثبات گردد که اگر فضای توپولوژی مفروضی متری‌پذیر باشد، آنگاه به ازای هر زوج از نقاط x و y متمایز در X، دو مجموعهٔ باز U_x و U_y طوری یافت می‌شوند که $x \in U_x$، $y \in U_y$ و $U_x \cap U_y = \emptyset$. اثبات آن ساده است. در واقع، چون $x \neq y$، به ازای یک $\varepsilon > 0$ ای $d(x,y) = 2\varepsilon$ که d متر بر X و سازگار با توپولوژی موجود بر آن است. اکنون کافی است مجموعه‌های $B_\varepsilon(x)$ و $B_\varepsilon(y)$ را در نظر بگیریم.

۱.۲.۴ تعریف. فضای X در صورتی **هاوسدورف** است که به ازای هر جفت از نقاط متمایز $x, y \in X$، مجموعه‌های باز U_x و U_y در X چنان یافت شوند که $x \in U_x$، $y \in U_y$ و $U_x \cap U_y = \emptyset$.

۲.۲.۴ مثال. ۱) هر فضای متری‌پذیر، هاوسدورف است.

۲) $\mathbb{R}^n$ همراه با توپولوژی معمولی‌اش هاوسدورف است.

۳) هر فضاهای توپولوژی با توپولوژی گسسته، هاوسدورف است.

۴) هر فضای توپولوژی با بیش از یک نقطه و دارای توپولوژی ملموس، غیر هاوسدورف است.

۳.۲.۴ تمرین.

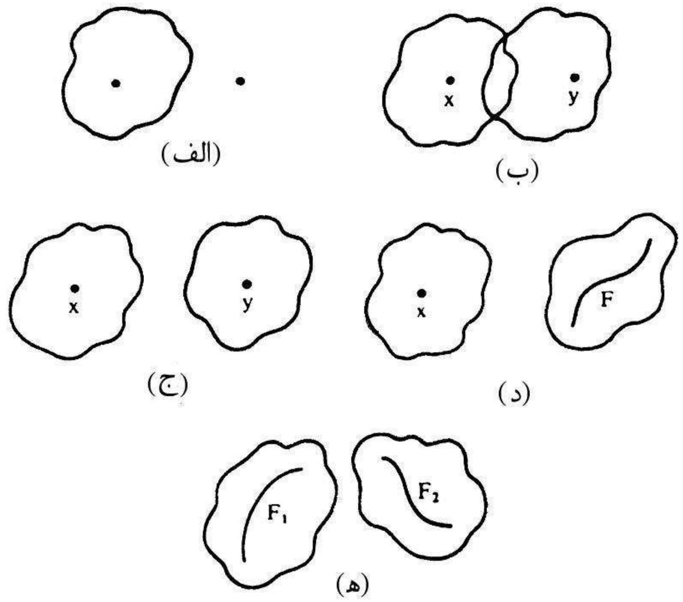
۱) گیریم X فضایی با توپولوژی متمم متناهی است. ثابت کنید X وقتی و تنها وقتی هاوسدورف است که X متناهی باشد.

۲) گیریم $\mathcal{F}$ توپولوژی با تعریف «$U \in \mathcal{F}$ اگر و تنها اگر به ازای هر $s \in U$، یک $t > s$ ای چنان یافت شود که $[s;t) \subseteq U$» بر $\mathbb{R}$ باشد. ثابت کنید که در این صورت $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ هاوسدورف است.

۳) فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژی همئومورفند. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه هاوسدورف بودن X این است که Y هاوسدورف باشد.

شرط هاوسدورف بودن، نمونه‌ای از **شروط جداسازی** است. در اینجا انواع متنوع این شروط را مطرح می‌کنیم. اما، عملاً در اکثر مواقع توجهمان به فضاهای هاوسدورف است.

شکل ۱.۴: انواع اصول جداسازی



۴.۲.۴ تعریف. گیریم k یکی از اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ و یا ۴ است. در صورتی می‌گوئیم فضای توپولوژی X یک T_k–فضا است، که در شرط جداسازی T_k مشروح در زیر صدق کند:

- T_0 : به ازای هر جفت از نقاط مجزای در X، مجموعه‌ای باز در X یافت شود که یکی را در بر دارد، ولی دیگری را خیر. به شکل ۱.۴ –(الف) توجه شود.
- T_1 : به ازای هر جفت از نقاط مجزای در X، دو مجموعهٔ باز در X یافت شوند که یکی x را در بر دارد و y را خیر، و دیگری y را در بر دارد و x را خیر. به شکل ۱.۴ –(ب) توجه شود.
- T_2 : به ازای هر جفت از نقاط مجزای در X، دو مجموعهٔ باز و مجزا در X یافت شوند که یکی x را در بر دارد و y را خیر، و دیگری y را در بر دارد و x را خیر. به شکل ۱.۴ –(ج) توجه شود.
- T_3 : X در شرط T_1 صدق می‌کند و به ازای هر زیر مجموعهٔ بسته F و هر نقطهٔ x خارج از F، دو مجموعهٔ باز و مجزا در X چنان یافت می‌شوند که یکی F را شامل می‌شود و x را خیر، و دیگری x را شامل می‌شود و F را قطع نمی‌کند. به شکل ۱.۴ –(د) توجه شود.

T_4 : X در شرط T_1 صدق می‌کند و به ازای هر جفت از زیر مجموعه‌های بسته و مجزای F_1 و F_2 از X، دو مجموعهٔ باز و مجزا در X چنان یافت می‌شوند که یکی F_1 را شامل می‌شود و F_2 را قطع نمی‌کند، و دیگری F_2 را شامل می‌شود و F_1 را قطع نمی‌کند. به شکل ۱.۴—(ه) توجه شود.

معمولاً T_2–فضای را **هاوسدورف**، و T_3–فضا را **منظم** می‌نامند.

۵.۲.۴ یادداشت. دلیل وجود شرط T_1 در تعریف شروط T_3 و T_4 این می‌باشد که در چنین فضاهایی است که مجموعه‌های تک نقطه‌ای بسته‌اند (به قضیهٔ ۸.۲.۴ توجه شود).

۶.۲.۴ قضیه. فرض کنیم $\mathcal{T}_i$ که $i = 0, 1, 2, 3, 4$، گردایهٔ همهٔ T_i–فضاهای توپولوژی است. در این صورت $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_3 \subset \mathcal{T}_4$.

اثبات: اینکه در هر مورد $\mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T}_{i+1}$ بدیهی است. اثبات اکید بودن این روابط زیر مجموعه‌ای را با ارائهٔ مثال می‌توان انجام داد. تمرین ۷.۲.۴—(۲) □

۷.۲.۴ تمرین.

۱) فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی همئومورفند. ثابت کنید که وقتی وتنها وقتی Y یک T_k—فضا است که X یک T_k—فضا باشد (که $k = 0, 1, 2, 3, 4$).

۲) فضاهای توپولوژی X_0، X_1، X_2، X_3 و X_4 را به گونه‌ای بسازید که به ازای هر k ای X_k یک T_k—فضا باشد، ولی به ازای هر $j > k$ ای T_j—فضا نباشد.

۳) ثابت کنید که هر فضای فشردهٔ هاوسدورف الزاماً T_4—فضا است. (راهنمایی: به اثبات قضیهٔ ۱۰.۲.۴ نگاهی بیاندازید، و اگر نا امید شدید به اثبات قضیهٔ ۲۰.۲.۴ توجه کنید.)

۸.۲.۴ قضیه. X وقتی و تنها وقتی T_1–فصا است که هر مجموعهٔ تک نقطه‌ای از آن بسته باشد.

اثبات: فرض کنید X یک T_1–فضا است. گیریم $x \in X$ و $y \in X - \{x\}$. در این صورت مجموعه‌ای باز U_y شامل y که x را در بر ندارد وجود دارد. بنابراین $\bigcup_{y \in X-\{x\}} U_y =$

$X-\{x\}$، که نشان می‌دهد $X-\{x\}$ اجتماعی از مجموعه‌های باز است و بنابراین در X باز می‌باشد. در نتیجه $\{x\}$ در X بسته است.

بالعکس، اگر $\{x\}$ و $\{y\}$ هر دو بسته باشند، آنگاه $X-\{x\}$ و $X-\{y\}$ هر دو بازند، که یکی x را در بر دارد و y را خیر، و دیگری y را در بر دارد و x را خیر. بنابراین X یک T_1–فضا است. □

۹.۲.۴ نتیجه. در هر فضای هاوسدورف، هر مجموعهٔ تک عضوی بسته است.

۱۰.۲.۴ قضیه. هر زیر مجموعهٔ فشرده A از فضایی هاوسدورف X، در آن فضا X بسته است.

اثبات: چون حکم در حالت $A=\emptyset$ و $A=X$ بدیهی است، می‌توانیم فرض کنیم که A تهی و یا خود فضا نیست. نقطه‌ای $x\in X-A$ انتخاب می‌کنیم. به ازای هر $a\in A$، زیر مجموعه‌های باز و مجزای U_a و V_a طوری یافت می‌شوند که $x\in U_a$ و $a\in V_a$. اکنون مجموعهٔ $\{V_a\,|\,a\in A\}$ پوششی باز برای A است. و چون A فشرده می‌باشد، زیر پ.ششی متناهی مانند $\{V_{a(1)},\cdots,V_{a(n)}\}$ دارد که A را می‌پوشاند. مجموعهٔ $U:=U_{a(1)}\cap\cdots\cap U_{a(n)}$ باز است، x را در بر دارد و از هر یک از $V_{a(i)}$ ها مجزا می‌باشد و در نتیجه $U\subseteq X-A$. پس، هر نقطه $x\in X-A$ مجموعه‌ای باز به گرد خود دارد که مشمول در $X-A$ می‌باشد؛ این به معنی باز بودن $X-A$ و در نتیجه، بسته بودن A می‌باشد. □

۱۱.۲.۴ قضیه. فرض کنید $f:X\to Y$ نگاشتی پیوسته از فضای فشردهٔ X به فضای هاوسدورف Y باشد. در این صورت، وقتی و تنها وقتی f همئومورفیسم است که f یکبیک باشد.

اثبات: روشن است که اگر f همئومورفیسم باشد، آنگاه f دو سویی است. عکس این حکم است که جالب توجه می‌باشد. بنابراین، فرض کنیم f دوسویی باشد. در نتیجه f^{-1} موجود است. در این صورت، وقتی و تنها وقتی f^{-1} پیوسته است که به ازای هر زیر مجموعهٔ بستهٔ V دز X، $(f^{-1})^{-1}(V)=f(V)$ در Y بسته باشد. اما، اگر V در X بسته باشد، آنگاه بنابه ۱۷.۱.۴ مجموعهٔ V فشرده است و بنابراین به دلیل قضیهٔ ۱۳.۱.۴، مجموعهٔ $f(V)$ نیز فشرده است و لذا بنابه قضیهٔ ۱۰.۲.۴، $f(V)$ بسته است، که این خود به معنی پیوستگی f^{-1} می‌باشد. □

۱۲.۲.۴ مثال. در حکم بالا به هر دو شرط هاوسدورف بودن و فشردگی احتیاج است. زیر فی المثل، اگر X مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی گسسته باشد (که الزاماً غیر هاوسدورف است) و Y نیز مجموعهٔ $\mathbb{R}$ به همراه توپولوژی معمولی‌اش باشد (که فشرده نیست)، در این صورت نگاشت همانی $Y \to X$ پیوسته، دوسویی و عیز همئومورفیسم می‌باشد.

۱۳.۲.۴ نتیجه. اگر $f : X \to Y$ نگاشتی پیوسته و یکبیک از فضای فشرده X به فضای هاوسدورف Y باشد، آنگاه $f : X \to f(X)$ همئومورفیسم است و در نتیجه $f(X) \cong X$.

۱۴.۲.۴ یادداشت. به کمک حکم بالا، اثبات همئومورفیسم بودن بسیاری از نگاشتهای در بخش ۲.۳ ساده می‌شود.

حال این پرسش را مطرح می‌کنیم که خاصیت هاوسدورف بودن چگونه در زیر فضاها، حاصلضربها و یا فضاهای خارج قسمتی نفوذ می‌کند.

۱۵.۲.۴ قضیه. هر زیر فضای یک فضای هاوسدورف، هاوسدورف است.

اثبات: گیریم x و y دو نقطهٔ متفاوت از S باشند. در این صورت یک جفت از مجموعه‌های باز U_x و U_y در X طوری یافت می‌شوند که $x \in U_x$ و $y \in U_y$. اکنون، مجموعه‌های $U_x \cap S$ و $U_y \cap S$ در S بازند، مجزا هستند، $x \in U_x \cap S$ و $y \in U_y \cap S$. بنابراین S هاوسدورف است. $\square$

۱۶.۲.۴ مثال. فرض کنیم $\mathbb{R}^n$ دارای توپولوژی معمولی‌اش باشد. در این صورت، هر زیر مجموعه از $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی زیر فضایی‌اش، هاوسدورف است.

۱۷.۲.۴ قضیه. گیریم X و Y فضای توپولوژی هستند. شرط لازم و کافی برای اینکه $X \times Y$ هاوسدورف باشد این است که فضاهای X و Y هاوسدورف باشند.

اثبات: فرض کنید X و Y هاوسدورف بوده و $w_۱ = (x_۱, y_۱)$ و $w_۲ = (x_۲, y_۲)$ دو نقطهٔ متمایز در $X \times Y$ باشند. اگر $x_۱ \neq x_۲$، آنگاه دو مجموعهٔ باز و مجزا $U_۱$ و $U_۲$ در X به گونه‌ای یافت می‌شوند که $x_۱ \in U_۱$ و $x_۲ \in U_۲$. در این صورت $U_۱ \times Y$ و $U_۲ \times Y$ زیر مجموعه‌های باز و مجزایی از $X \times Y$ هستند که $w_۱ \in U_۱ \times Y$ و

$w_2 \in U_2 \times Y$. اگر $x_1 = x_2$ و $y_1 \neq y_2$، استدلال مشابهی قابل اجرا است، که در آن از مجموعه‌های به شکل $X \times V_1$ و $X \times V_2$ استفاده می‌شود.

بالعکس، اگر $X \times Y$ هاوسدورف باشد، آنگاه زیر فضاهای $X \times \{y\}$ و $\{x\} \times X$ از $X \times Y$ که بترتیب با X و Y همئومورفند، هاوسدورف هستند. □

۱۸.۲.۴ مثال. چون $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ هاوسدورف است، فضای $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ هاوسدورف است.

۱۹.۲.۴ مثال. با اینکه هر زیر فضا از فضایی هاوسدورف، و هر حاصلضرب فضاهای هاوسدورف، هاوسدورف است، در حالت کلی نمی‌توان حکم نمود که فضای خارج قسمتی هر فضای هاوسدورف، الزاماً هاوسدورف است. مثلاً، فرض کنید X فضایی هاوسدورف با زیر مجموعه‌ای A غیر بسته باشد (مثل $X = \mathbb{R}$ و $A = (0; 1)$). گیریم Y عبارت از $X/\sim$ است که $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی با تعریف «$x \sim x'$ اگر و تنها اگر $x = x'$ یا $\{x, x'\} \in A$» بر X است (یعنی فضای حاصل از چروک نمودن A به یک نقطه در X؛ به ؟؟ توجه شود اگر Y را با توپولوژی خارج قسمتی نسبت به تصویر طبیعی $\pi : X \to Y$ همراه کنیم، در این صورت نگارهٔ وارون نقطهٔ $\{x_0\} \in Y$ که $x_0 \in A$ برابر A است و در X بسته نیست. بنابراین، نقطهٔ $\{x_0\}$ در Y بسته نیست و در نتیجه Y نمی‌تواند هاوسدورف باشد.

برای حصول اطمینان از اینکه خارخ قسمت فضایی هاوسدورف، حتماً هاوسدورف است، به مفروضات بیشتری در خصوص فضای X نیاز است. حکم زیر نمونه‌ای از آن است.

۲۰.۲.۴ قضیه. گیریم Y فضای خارج قسمتی فضای توپولوژی X باشد که توسط نگاشت پوشای $f : X \to Y$ مشخص شده است. اگر X هاوسدورف و فشرده باشد و نیز اگر f بسته باشد، آنگاه Y هاوسدورف (و فشرده) می‌باشد.

اثبات: نقاط Y عبارتند از تصاویر نقاط X تحت f، که همگی در X بسته‌اند. بنابریان همهٔ مجموعه‌های تک نقطه‌ای در Y بسته‌اند. گیریم y_1 و y_2 نقاط متمایزی در Y باشند. مجموعه‌های $f^{-1}(\{y_1\})$ و $f^{-1}(\{y_2\})$ مجزا و در X بسته هستند. به ازای هر نقطهٔ $x \in f^{-1}(y_1)$ و $a \in f^{-1}(y_2)$، یک جفت از مجموعه‌های باز و مجزا $U_{x,a}$ و $V_{x,a}$ طوری وجود دارند که $x \in U_{x,a}$ و $a \in V_{x,a}$. چون $f^{-1}(\{y_2\})$ بسته است، فشرده نیز می‌باشد و بنابراین زیر پوششی متناهی از $\{V_{x,a} \mid a \in f^{-1}(\{y_2\})\}$ وجود دارد که $f^{-1}(\{y_2\})$ را می‌پوشاند؛ مثلاً، $\{V_{a,x} \mid a \in A\}$، که A زیر مجموعه‌ای متناهی

از $f^{-1}(\{y_2\})$ می‌باشد. بخصوص، دو مجموعهٔ باز و مجزای U_x و V_x وجود دارند که $x \in U_x$ و $f^{-1}(\{y_2\}) \subseteq V_x$. در واقع $U_x = \bigcap_{a\in A} U_{x,a}$ و $V_x = \bigcup_{a\in A} V_{x,a}$.
اکنون $\{U_x \| x \in f^{-1}(\{y_2\})\}$ پوششی باز برای $f^{-1}(\{y_1\})$ است که می‌دنیم فشرده است. بنابریان زیر پوششی متناهی $\{U_x \,|\, x \in B\}$ دارد که B زیر مجموعه‌ای متناهی از $f^{-1}(y_1)$ می‌باشد. بنابراین مجموعه‌های $U = \bigcap_{x\in B} U_x$ و $V = \bigcup_{x\in B} V_x$ باز و مجزا می‌باشند و $f^{-1}(\{y_1\}) \subseteq U$ و $f^{-1}(\{y_2\}) \subseteq V$.

چون بنابه فرض f بسته است، $f(X-U)$ و $f(X-V)$ هر دو بسته‌اند و بنابراین $W_1 = Y - f(X-U)$ و $W_2 = Y - f(X-V)$ هر دو بازند و $y_1 \in W_1$ و $y_2 \in W_2$.
بالاخره، کافی است تحقیق شود که $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. فرض کنیم $y \in W_1 \cap W_2$.
بنابریان $y \notin f(X-U)$ و $y \notin f(X-V)$. در نتیجه $f^{-1}(\{y\}) \cap (X-U) = \emptyset$ و $f^{-1}(\{y\}) \cap (X-V) = \emptyset$ که از از اینها نتیجه می‌گردد $f^{-1}\{y\}) \subseteq U \cap V = \emptyset$.
بنابراین $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. □

۲۱.۲.۴ نتیجه. اگر X یک G–فضای هاوسدورف بوده و گروه G متناهی باشد، در این صورت X/G فضایی هاوسدورف و فشرده است.

اثبات: گیریم C زیر مجموعه‌ای بسته از X باشد. در این صورت $\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g\in G} g\centerdot C$، که $\pi : X \to X/G$ تصویر طبیعی است. چون عمل $G \ni g$ بر X همئومورفیسم است (منظور، نگاشت $\theta_g : X \to X$ با ضابطهٔ $x \mapsto g\centerdot x$ است)، $g\centerdot C = \theta_g(C)$ بسته است. بنابراین $\pi^{-1}(\pi(C))$ بسته است؛ در نتیجه $\pi(C)$ نیز بسته است. این نشان می‌دهد که نگاشت π بسته است. □

۲۲.۲.۴ مثال. چون $\mathbb{RP}^n$ از عمل گروه متناهی $G = \mathbb{Z}_2$ بر فضای هاوسدورف و فشردهٔ $\mathbb{S}^n$ حاصل شده است، بنابراین $\mathbb{RP}^n$ فضایی هاوسدورف و فشرده است.

۲۳.۲.۴ نتیجه. اگر X فضایی هاوسدورف و فشرده بوده و A زیر مجموعه‌ای بسته از X باشد. در این صورت X/A فضایی هاوسدورف و فشرده است.

اثبات: گیریم C زیر مجموعه‌ای بسته از X باشد و $p : X \to X/A$ نمایشگر تصویر طبیعی باشد. اگر $C \cap A = \emptyset$، آنگاه $C = p(C)$ نیز بسته است. اما، اگر $C \cap A \neq \emptyset$، آنگاه $p(C) = p(C-A) \cup p(C\cap A)$ که این نیز بسته می‌باشد، زیرا

$$p^{-1}\big(p(C-A) \cup p(C\cap A)\big) = (C-A) \cup A = C \cup A$$

بنابراین نگاشت p بسته است. □

محدودیتهای دیگری که می‌شود بر یک فضای هاوسدورف اعمال نمود تا به واسطهٔ آنها، فضای خارج قسمتی حاصل هاوسدورف باشد، در تمرین بعدی آورده شده است. همچنین وارون قضیهٔ ۲۰.۲.۴ نیز مطرح شده است.

۲۴.۲.۴ تمرین.

۱) گیریم $f:X\to Y$ نگاشتی پوشا از فضای فشردهٔ X بروی فضای هاوسدورف Y باشد. ثابت کنید زیر مجموعهٔ U از Y وقتی و تنها وقتی باز است که $f^{-1}(U)$ باز باشد. (راهنمایی: ثابت کنید زیر مجموعهٔ C از Y وقتی و تنها وقتی بسته است که $f^{-1}(C)$ بسته باشد.) نتیجه بگیرید که Y دارای توپولوژی خارج قسمتی مشخص شده توسط f است.

۲) ثابت کنید فضای توپولوژی X وقتی و تنها وقتی هاوسدورف است که قطر $\{(y_1,y_2)\in Y\times Y\,|\,y_1=y_2\}$ در $Y\times Y$ بسته باشد.

۳) گیریم $f:X\to Y$ نگاشتی پیوسته است. ثابت کنید که اگر Y هاوسدورف باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{(x_1,x_2)\in X\times X\,|\,f(x_1)=f(x_2)\}$ در $X\times X$ بسته است.

۴) گیریم $f:X\to Y$ نگاشتی پیوسته، باز و بسته است. ثابت کنید Y وقتی و تنها وقتی هاوسدورف است که مجموعهٔ $\{(x_1,x_2)\in X\times X\,|\,f(x_1)=f(x_2)\}$ در $X\times X$ بسته باشد.

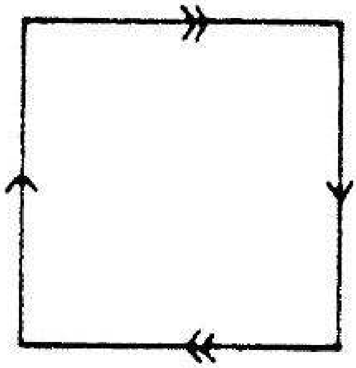
۵) گیریم X فضایی هاوسدورف و فشرده است و Y فضای خارج قسمتی نسبت به نگاشت $f:X\to Y$ می‌باشد. ثابت کنید Y وقتی و تنها وقتی هاوسدورف است که f بسته باشد. بعلاوه، ثابت کنید Y وقتی و تنها وقتی هاوسدورف است که مجموعهٔ $\{(x_1,x_2)\in X\times X\,|\,f(x_1)=f(x_2)\}$ در $X\times X$ بسته باشد.

۶) گیریم $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی بر $\mathbb{S}^1\times I$ با تعریف «$xt=ys \;\Leftrightarrow\; (x,t)\sim(y,s)$» است (که در اینجا فرض شده است $\mathbb{S}^1\subset\mathbb{C}$ و $I=[0;1]\subset\mathbb{R}$). ثابت کنید $(\mathbb{S}^1\times I)/\sim$ با قرص واحد $\mathbb{D}^2=\{x\in\mathbb{R}^2\,|\,\|x\|\le 1\}=\{x\in\mathbb{C}\,|\,|x|\le 1\}$ همئومورف است، مشروط به آنکه بر $\mathbb{D}^2$ توپولوژی القایی از $\mathbb{R}^2$ را قرار دهیم.

۷) گیریم $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی بر مربع $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}\,|\,0\le x,y\le 1\}$ با تعریف «$(x,y)\sim(x',y') \;\Leftrightarrow\; (x,y)=(x',y')$ یا $\{x,x'\}=\{0,1\}$ و $y'=1-y$»

یا $\{y,y'\}=\{۰,۱\}$ و $x'=۱-x$» است (شکل ۲.۴ را ملاحظه کنید). ثابت کنید که فضای یکی‌گیری شدهٔ $X/\sim$ با $\mathbb{RP}^۲$ همئومورف است.

شکل ۲.۴



۸) گیریم $\mathbb{S}^n_+$ زیر مجموعهٔ $\{x\in\mathbb{R}^{n+۱}\mid \|x\|=۱\,,\,x_{n+۱}\geq ۰\}$ از $\mathbb{S}^n\subseteq\mathbb{R}^{n+۱}$ است. ثابت کنید که در این صورت تابع $f:\mathbb{R}^{n+۱}\to\mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $f(x_۱,\cdots,x_{n+۱})=(x_۱,\cdots,x_n)$ همئومورفیسمی از $\mathbb{S}^n_+$ بروی n−قرص بستهٔ $\mathbb{D}^n$ معرفی می‌کند.

۹) رابطهٔ $\sim$ را بر $\mathbb{R}$ به صورت «$x\sim y \Leftrightarrow x-y$ گویا باشد» تعریف می‌کنیم. نشان دهید که در این صورت $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی است و $\mathbb{R}/\sim$ به همراه توپولوژی خارج قسمتی‌اش هاوسدورف نیست.

۱۰) گیریم X فضایی هاوسدورف و فشرده و U زیر مجموعه‌ای باز از X باشد که برابر خود X نیست. ثابت کنید $U^\infty\cong X/(X-U)$. (راهنمایی: نگاشت $h:U^\infty\to X/(X-U)$ با ضابطهٔ $h(u)=p(u)$ برای $u\in U$، و $h(\infty)=p(X-U)$ را در نظر بگیرید، که در آن $p:X\to X/(X-U)$ تصویر طبیعی است.) نتیجه بگیرید که اگر $x\in X$ (و X فضایی هاوسدورف و فشرده باشد)، در این صورت $(X-\{x\})^\infty\cong X$.

۱۱) ثابت کنید که $\mathbb{S}^n\cong(\mathbb{R}^n)^\infty\cong\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-۱}\cong I^n/\partial I^n$.
(راهنمایی: $\mathbb{S}^n-\{(۰,\cdots,۰,۱)\}\cong\mathbb{R}^n\cong\mathbb{D}^n-\mathbb{S}^{n-۱}\cong I^n-\partial I^n$.)

۱۲) (تعمیم قضیهٔ ۲۰.۲.۴) گیریم Y فضای خارج قسمتی X نسبت به نگاشت پوششی $f:X\to Y$ باشد. فرض کنید X فضایی هاوسدورف، f نگاشتی بسته و به ازای هر $y\in Y$ ای $f^{-۱}(\{y\})$ فشرده باشد. در این صورت ثابت کنید که Y هاوسدورف است.

۱۳) فرض کنید X فضایی هاوسدورف و فشرده است و A زیر فضایی بسته از X می‌باشد. بعلاوه فرض کنید G گروهی متناهی و A یک G–فضا می‌باشد. رابطهٔ $\sim$ را بر X به صورت «$x \sim x' \Leftrightarrow x = x'$ یا $x, x' \in A$ و به ازای یک $g \in G$ ای $x = g \bullet y$» تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر X است و بعلاوه $X/\sim$ نیز هاوسدورف است.

۱۴) ثابت کنید: زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ وقتی و تنها وقتی فشرده است که بسته و کراندار باشد. (راهنمایی: از قضیهٔ ۲۲.۱.۴ و تمرین ۲۵.۱.۴–(۲) و قضیهٔ ۱۰.۲.۴ استفاده شود.)

۳.۴ فضای همبند

از نظر شهودی فضای X در صورتی همبند است که «یک تکه» باشد؛ ولی مفهوم «تکه» در توپولوژی به چه معنی است؟ معقول این است که شرط کنیم «اگر A تکه‌ای در فضای X باشد، زیر مجموعه‌های باز و یا بسته در A، بترتیب باز یا بسته در X باشند». بنابراین، بر اساس لم ۱۶.۱.۳، انتظار داریم که هر تکه‌ای در X، هم باز هم بسته در X باشد.

۱.۳.۴ تعریف. فضای توپولوژی X را در صورتی **همبند** گوئیم که تنها زیر مجموعه‌های هم باز و هم بسته در X، عبارت از $\emptyset$ و X باشند. زیر مجموعهٔ A از X را در صورتی همبند گوئیم که به عنوان یک فضای توپولوژی (همراه با توپولوژی القایی از X) همبند باشد.

قضیهٔ زیر تعریف دومی را برای همبندی ارائه می‌کند.

۲.۳.۴ قضیه. فضای X وقتی و تنها وقتی همبند است که به صورت اجتماعی از دو زیر مجموعهٔ باز در X، غیر تهی و مجزا نتوان نوشت.

اثبات: گیریم X همبند بوده و $X = X_۱ \cup X_۲$، که $X_۱$ و $X_۲$ دو زیر مجموعهٔ باز در X و مجزا باشند. در این صورت $X - X_۱ = X_۲$ و بنابراین $X_۲$ نیز در X باز و بسته است. در نتیجه $X_۱ = \emptyset$ و $X_۲ = X$ یا $X_۱ = X$ و $X_۲ = \emptyset$. در هر دو حالت نتیجه می‌شود که X اجتماع دو زیر مجموعهٔ باز در X، مجزا و غیر تهی نمی‌توان نوشت.

بالعکس، فرض کنیم X اجتماع دو زیر مجموعهٔ باز در X، غیر تهی و مجزا نباشد و $U \subseteq X$. اگر U هم باز و هم بسته در X باشد، آنگاه $X - U$ نیز هم باز و هم بسته در X است. اما، چون در این صورت X اجتماع مجزایی از مجموعه‌های باز U و $X - U$ شده است، بایستی یکی از آن دو تهی باشد. یعنی $U = \emptyset$ یا $U = X$. □

۳.۳.۴ مثال. زیر مجموعهٔ $\mathbb{S}^۰ = \{-۱, ۱\}$ از $\mathbb{R}$ همبند نیست، زیرا $\{۱\}$ زیر مجموعه‌ای غیر تهی، باز و بسته از $\mathbb{S}^۰$ می‌باشد؛ یا بطور معادل $\mathbb{S}^۰$ اجتماعی مجزا از مجموعه‌های باز $\{-۱\}$ و $\{۱\}$ می‌باشد.

$[a; b]$ زیر مجموعه‌ای همبند از $\mathbb{R}$ است (به قضیهٔ ۶.۳.۴ توجه شود). پیش از اثبات آن، دو مثال مطرح می‌کنیم که نشان می‌دهند، در استفاده از شهود باید احتیاط نمود.

۴.۳.۴ مثال. گیریم X مجموعهٔ اعداد حقیقی با توپولوژی $\{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty; x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ باشد. در این صورت کلیهٔ زیر مجموعه‌های X همبند هستند. برای اثبات این امر، فرض کنیم S زیر مجموعه‌ای غیر تهی و دلخواه از X باشد و F زیر مجموعه‌ای غیر تهی از S که در S باز و بسته است. بنابراین F را به صورت $U \cap S = C \cap S$ می‌توان نوشت که U در X باز است و C در X بسته می‌باشد: مثلاً $U = (-\infty; b)$ و $C = [A; \infty)$، که $a, b \in \mathbb{R}$. چون $F = U \cap S = C \cap S$، نتیجه می‌گیریم که اگر $x \in S$، آنگاه $x < b$ و $a \leq x$ (اگر x ای از b بزرگتر یا مساوی باشد، آنگاه $C \cap S \neq U \cup S$: به صورت مشابه اگر x ای کمتر از a باشد، آنگاه $U \cup S \neq C \cap S$). بنابراین $S \subseteq [a; b)$ و $F = S$، که به معنی همبند بودن S می‌باشد.

۵.۳.۴ مثال. گیریم X مجموعه‌اعداد حقیقی به همراه توپولوژی $\mathcal{F}$ باشد: $S \in \mathcal{F}$ اگر و تنها اگر به ازای هر $s \in S$ ای یک $t > s$ ای چنان یافت گردد که $[s; t) \subseteq S$. در این صورت تنها زیر مجموعه‌های همبند و غیر تهی در X، مجموعه‌های تک عضوی هستند. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم T زیر مجموعه‌ای همبند و غیر تهی از X باشد و x نقطه‌ای در T. به ازای هر $\varepsilon > ۰$، زیر مجموعهٔ $[x; x + \varepsilon)$ از X باز و بسته است (تمرین ۱۵.۱.۲$-$(۴)). اما این تنها وقتی ممکن است که $T = \{x\}$. روشن است که همهٔ زیر مجموعه‌های تک عضوی همبند هستند و برهان تمام است.

حال به اثبات همبندی $[a; b] \subset \mathbb{R}$ می‌پردازیم.

۶.۳.۴ قضیه. بازهٔ $[a; b] \subset \mathbb{R}$ همبند است.

اثبات: فرض کنیم $[a; b]$ اجتماع دو مجموعهٔ مجزا و باز U و V در $[a; b]$ است. همچنین، فرض کنیم $a \in U$. توجه داریم که $U = [a; b] - V$ و $V = [a; b] - U$ در $[a; b]$ بسته‌اند؛ بنابراین، چون خود $[a; b]$ در $\mathbb{R}$ بسته است، U و V در $\mathbb{R}$ نیز بسته هستند. فرض کنیم h کوچکترین کران بالایی مجموعهٔ $\{u \in U \mid$ به ازای هر $v \in V$ ای $\}$ است (چون a به این مجموعه متعلق است، غیر تهی است). چون U بسته است، در نتیجه باید $h \in U$. حال، به ازای هر $\varepsilon > ۰$ ای $(h - \varepsilon; h + \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$، (زیرا در غیر این صورت h کران بالایی نمی‌شود) و در نتیجه بنابه لم ۱۹.۱.۲ باید $h \in \bar{V}$. ولی V نیز بسته است، در نتیجه $h \in V$ و $h \in U \cap V$، که تناقض است. $\square$

۷.۳.۴ قضیه. نگارهٔ هر فضای همبند تحت نگاشتی پیوسته، پیوسته است.

اثبات: فرض کنید X فضایی همبند و $f: X \to Y$ نگاشتی پوشا و پیوسته است. اگر U در Y باز و بسته باشد، آنگاه $f^{-1}(U)$ در X باز و بسته است، که این بنابه فرض همبندی X، به معنی $f^{-1}(U) = \emptyset$ یا $f^{-1}(U) = X$ است. در نتیجه $U = \emptyset$ یا $U = X$. بنابراین $f(X)$ همبند است. □

۸.۳.۴ مثال. چون $[0;1]$ زیر مجموعه‌ای همبند از $\mathbb{R}$ است و $f: [0;1] \to \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $f(t) = \exp(2\pi t)$ پیوسته است، بنابراین $\mathbb{S}^1 = f([0;1])$ نیز همبند است.

۹.۳.۴ نتیجه. اگر X و Y دو فضای همئومورف باشند، در این صورت وقتی و تنها وقتی X همبند است که Y همبند باشد.

به جهت ایجاد امکان اثبات همبندی مجموعه‌هایی به شکل $[a;b)$، $(a;b]$ و $(a;b)$ در $\mathbb{R}$، حکم بعدی را اثبات می‌کنیم.

۱۰.۳.۴ قضیه. فرض کنیم $\{Y_j \mid j \in J\}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های همبند از فضای X باشد. اگر $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$، آنگاه $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ همبند است.

اثبات: فرض کنیم U زیر مجموعه‌ای باز و بسته در Y باشد. در این صورت به ازای $i \in J$ ای $U \cap Y_i \neq \emptyset$ و مجموعهٔ $U \cap Y_i$ در Y_i غیر تهی، باز و بسته است. اما، Y_i مطابق فرض همبند است، بنابراین $U \cap Y_i = Y_i$ و لذا $Y_i \subseteq U$. Y_i سایر Y_j ها را قطع می‌کند، در نتیجه U نیز چنین است. حال، با تکرار استدلال در مورد Y_i نتیجه می‌شود که به ازای هر $j \in J$ ای $Y_j \subseteq U$. بنابراین $U = Y$. □

۱۱.۳.۴ نتیجه. همهٔ بازه‌های در $\mathbb{R}$ همبند هستند.

اثبات: با توجه به اینکه بنابه قضیهٔ ۶.۳.۴ همهٔ بازه‌های بسته در $\mathbb{R}$ همبند هستند، و نیز با توجه به اینکه $[a;b) = \bigcup_{n\geq 1}[a; b-(b-a)/2^n]$، از قضیهٔ ۱۰.۳.۴ نتیجه می‌گیریم که $[a;b)$ همبند است. اثبات همبندی $(a;b]$ و $(a;b)$ به صورت مشابه است. همچنین، چون $[a;\infty) = \bigcup_{n\geq 1}[a; a+n]$ بنابراین $[a;\infty)$ نیز همبند است. اثبات همبندی $(-\infty;b)$ و $(-\infty;\infty)$ به صورت مشابه است. □

۱۲.۳.۴ قضیه. گیریم X و Y فضای توپولوژی باشند. شرط لازم و کافی برای اینکه $X \times Y$ همبند باشد، این است که X و Y همبند باشند.

اثبات: فرض کنید X و Y همبند باشند. چون به ازای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$ ای $X \cong X \times \{y\}$ و $Y \cong \{x\} \times Y$، ملاحظه می‌کنیم که همهٔ مجموعه‌های $X \times \{y\}$ و $\{x\} \times Y$ همبند هستند. اما $(X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x,y)\}$ و لذا بنابه قضیهٔ ۱۰.۳.۴ مجموعهٔ $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$ همبند است. $X \times Y$ را به صورت $\bigcup_{x\in X} \Big((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)\Big)$ می‌توان نوشت، که $y \in Y$ عنصری دلخواه و ثابت است. چون $\bigcap_{x\in X} \Big((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)\Big) \neq \emptyset$، نتیجه می‌گیریم $X \times Y$ همبند است.

بالعکس، فرض کنیم $X \times Y$ همبند باشد. همبندی X و Y از قضیهٔ ۷.۳.۴ و این واقیت که $\pi_X : X \times Y \to X$ و $\pi_Y : X \times Y \to Y$ پیوسته و پوشا هستند، نتیجه می‌گردد. □

۱۳.۳.۴ مثال. به ازای هر $n \geq ۱$ ای $\mathbb{R}^n$، $\mathbb{S}^n$ و $\mathbb{RP}^n$ همبند هستند. به تمرین بعد توجه شود.

۱۴.۳.۴ تمرین.

۱) ثابت کنید که مجموعهٔ اعداد گویا $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ همبند نیست. زیر مجموعه‌های همبند $\mathbb{Q}$ کدامند؟

۲) ثابت کنید که زیر مجمموعه‌ای از $\mathbb{R}$ وقتی و تنها وقتی همبند است که یا بازه باشد و یا مجموعه‌ای تک نقطه‌ای. (در اینجا منظور از بازه در $\mathbb{R}$، زیر مجموعه‌ای A است که حد اقل دارای دو عضو باشد و نیز اگر به ازای هر دو عضو $a < b$ از A و به ازای هر x ای که $a < x < b$، داشته باشیم $x \in A$.)

۳) گیریم X مجموعه‌ای با حداقل دو عضو باشد. ثابت کنید:
الف) اگر X با توپولوژی گسسته باشد، آنگاه تنها زیر مجموعه‌های همبند در X زیر مجموعه‌های تک عضوی هستند.
ب) اگر X با توپولوژی ملموس باشد، آنگاه هر زیر مجموعه‌ای از X همبند است.

۴) کدام یک از زیر مجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}^۲$ همبند هستند؟

$$\{x \,|\, \|x\| < ۱\}, \qquad \{x \,|\, \|x\| > ۱\}, \qquad \{x \,|\, \|x\| \neq ۱\}.$$

کدام یک از زیر مجموعه‌های زیر از $\mathbb{R}^۳$ همبند هستند؟

$$\{x \,|\, x_۱^۲ + x_۲^۲ - x_۳^۲ = ۱\}, \quad \{x \,|\, x_۱^۲ + x_۲^۲ - x_۳^۲ = -۱\}, \quad \{x \,|\, x_۱ \neq ۱\}.$$

۵) ثابت کنید فضای توپولوژی X وقتی و تنها وقتی همبند است که هر تابع پیوسته از X بتوی فضایی گسسته (و با حد اقل دو عضو) نگاشتی ثابت باشد.

۶) فرض کنید A زیر فضایی همبند از X است و $A \subseteq Y \subseteq \bar{A}$. ثابت کنید Y نیز همبند است.

۷) فرض کنید $Y_\circ$ و $\{Y_j \,|\, j \in J\}$ زیر مجموعه‌هایی همبند از فضای X باشند. ثابت کنید که اگر به ازای همهٔ $j \in J$ ها $Y_\circ \cap Y_j \neq \emptyset$، آنگاه $Y = Y_\circ \cup \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right)$ همبند است.

۸) ثابت کنید اگر $n \leq ۱$، آنگاه $\mathbb{R}^{n+۱} - \{0\}$ همبند است. نتیجه بگیرید که به ازای هر $n \geq ۱$ ای $\mathbb{S}^n$ و $\mathbb{RP}^n$ همبند هستند. (راهنمایی: تابع $f : \mathbb{R}^{n+۱} \to \mathbb{S}^n$ با ضابطهٔ $f(x) = x/\|x\|$ را در نظر بگیرید.)

۹) فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی به شرح زیر از $\mathbb{R}^۲$ هستند:

$$A \,:\, x = \circ \,,\, -۱ \leq y \leq ۱, \qquad B =:\, \circ < x \leq ۱ \,,\, y = \cos(\pi/x),$$

ثابت کنید $X = A \cup B$ همبند است. (راهنمایی: ثابت کنید A و B همبند هستند. سپس، فرض کنید $X = U \cup V$، که U و V در X باز و بسته هستند. بالاخره، فرض کنید که نقطه‌ای از A در U قرار دارد.)

۱۰) فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی به شرح زیر از $\mathbb{R}^۲$ هستند:

$$A =:\, ۱/۲ \leq x \leq ۱ \,,\, y = \circ, \quad B =:\, \circ \leq x \leq ۱ \,,\, y = x/n \,,\, n \in \mathbb{N},$$

ثابت کنید $X = A \cup B$ همبند است.

۱۱) اولین گام به سوی توپولوژی جبری: گیریم X فضایی توپولوژی باشد و $H(X)$ مجموعهٔ کلیهٔ نگاشتهای پیوسته از X به $\mathbb{Z}_۲$ (فضایی شامل عناصر ۱ و ۱− با توپولوژی گسسته) است. اگر $f, g \in H(X)$، آنگاه $f + g$ را به صورت

$$\forall\, x \in X \;:\; (f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{(به پیمانهٔ ۲)}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $f + g$ پیوسته است و $H(X)$ نسبت به این عمل گروهی آبلی می‌باشد. ثابت کنید X وقتی و تنها وقتی همبند است که $H(X)$ با $\mathbb{Z}_۲$ ایزومورف باشد. فضاهای توپولوژی X_k را به گونه‌ای بسازید که $H(X_k)$ با $(\mathbb{Z}_۲)^k$ ایزومورف باشد.

۴.۴ کاربرد: مسایل پنکیک

در این فصل کاربردهایی زیبا و جالب توجه از احکام مطرح شده در فصول قبل را با نظر به مسایلی بنام «مسایل پنکیک» ارائه می‌کنیم. اولین مسأله به بیان ساده چنین است: فرض کنید دو پنکیک (یعنی، کیک تحت بزرگ) به هر شکل دلخواه بر میزی قرار دارد. نشان دهید که اگر چاقویی باندازهٔ کافی بزرگ در اختیار داشته باشیم، با تنها یک بار استفاده از آن می‌توانیم هر دو پنکیک را به دو نیم کنیم. در دومین مسأله خواسته می‌شود که با دو برش عمود بر هم، پنکیک دلخواهی به چهار قسمت مساوی تقسیم گردد. حل هر دو مسأله به گونه‌ای است که شبیه اثبات قضیهٔ مقدار میانی در حساب دیفرانسیل می‌باشد.

۱.۴.۴ لم. (قضیهٔ ریشهٔ اجباری) اگر $f : I \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد که حاصلضرب $f(\circ)f(\text{۱})$ متناهی و نامثبت است، در این صورت $t \in I$ ای چنان یافت می‌شود که $f(t) = \circ$.

اثبات: فرض کنیم به ازای هر $t \in I$ ای $f(t) \neq \circ$؛ بویژه $f(\circ)f(\text{۱}) < \circ$. تابعی $g : I \to \mathbb{S}^\circ := \{-\text{۱}, \text{۱}\}$ با ضابطهٔ $g(t) = f(t)/|f(t)|$ تعریف می‌کنیم. روشن است که این تابع پیوسته و پوشا می‌باشد (زیرا $f(\circ)f(\text{۱}) < \circ$). ولی I همبند است در حالی که $\mathbb{S}^\circ$ چنین نیست، که با قضیهٔ ۷.۳.۴ در تضاد است. □

۲.۴.۴ نتیجه. (قضیهٔ نقطه ثابت برای I) فرض کنید $f : I \to I$ تابعی پیوسته است. در این صورت نقطه‌ای $t \in I$ چنان وجود دارد که $f(t) = t$.

اثبات: اگر $f(\circ) = \circ$ یا $f(\text{۱}) = \text{۱}$ کار تمام است. بنابراین فرض کنیم $f(\circ) > \circ$ و $f(\text{۱}) < \text{۱}$. تابع $g : I \to I$ را با ضابطهٔ $g(t) = f(t) - t$ در نظر بگیرید. این تابعی پیوسته است که در شرط $g(\circ)g(\text{۱}) < \circ$ صدق دارد. بنابراین بر اساس لم ۱.۴.۴ به ازای یک $t \in I$ ای داریم $g(t) = \circ$. در نتیجه $f(t) = t$. □

۳.۴.۴ نتیجه. هر تابع پیوسته از دایره به مجموعهٔ اعداد حقیقی، حد اقل در دو نقطهٔ قطراً متقابل، یک مقدار می‌گیرد.

اثبات: فرض کنیم به ازای هر $t \in \mathbb{S}^\text{۱}$ ای $f(t) \neq f(-t)$؛ فرض می‌کنیم $h : \mathbb{S}^\text{۱} \to \mathbb{R}$ تابع با ضابطهٔ $h(t) = f(t) - f(-t)$ است. همچنین، فرض کنیم $e : I \to \mathbb{S}^\text{۱}$ با

ضابطهٔ $e(t) = \exp(\pi t i)$ است. اکنون، روشن است که $h \circ e$ پیوسته می‌باشد. اما

$$(h \circ e)(0) = h(1) = f(1) - f(-1),$$
$$(h \circ e)(1) = h(-1) = f(-1) - f(1) = -(h \circ e)(0).$$

یعنی $h(0)h(1) < 0$. پس، بنابه لم ۱.۴.۴ نقطه‌ای $t \in I$ چنانپ وجود دارد که $(h \circ e)(t) = 0$ و در نتیجه $x \in \mathbb{S}^1$ ای چنان وجود دارد که $h(x) = 0$؛ یعنی $f(x) = f(-x)$. □

در اینجا، تعبیری فیزیکی برای نتیجهٔ ۳.۴.۴ ارائه می‌کنیم.

۴.۴.۴ نتیجه. در هر لحظه و بر هر دایرهٔ عضیمه از کرهٔ زمین، حد اقل دو نقطهٔ قطراً متقابل وجود دارد که دمای یکسانی دارند.

۵.۴.۴ یادداشت. نقاط قطراً متقابل همان نقاط متقاطر در حالت $n = 1$ هستند، برای مشاهدهٔ تعمیم این مطلب به فصل ۲۰ روجوع شود.

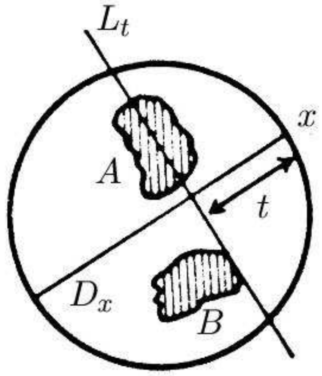
اکنون، صورت اولین مسألهٔ پنکیک را به دقیق ترین صورت بیان می‌کنیم.

۶.۴.۴ قضیه. گیریم A و B دو زیر مجموعهٔ کراندار در صفحهٔ اقلیدسی باشند. در این صورت خطی در صفحه وجود دارد که هر دو ناحیه را به دو نیمهٔ هم مساحت تقسیم می‌کند.

۷.۴.۴ یادداشت. توجه شود که ممکن است دو مجموعهٔ مورد خطاب در قضیهٔ بالا منطقهٔ مشترک داشته باشند. یعنی، قسمتهایی از دو پنکیک بر هم افتاده باشند. بعلاوه، لزومی ندار که ناحیه‌های مورد نظر همبند باشند. یعنی، ممکن است هر یک از پنکیکها چنک تکه‌ای باشد.

اثبات: گیریم S دایره‌ای به مرکز $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ باشد که A و B را یطور همزمان شامل می‌شود (چون A و B کراندارند، چنین دایره‌ای موجود است). با تعویض مقیاس روی محورها می‌توان فرض نمود که S به قطر واحد است. اکنون، به ازای هر $x \in S$ ای قطر D_x گذرنده از x در S را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم L_t خط عمود بر D_x باشد که محل برخوردش با D_x در فاصلهٔ t از x قرار دارد. به شکل ۳.۴ توجه شود.

شکل ۳.۴



گیریم $g_1(t)$ نمایشگر مساحت بخشی از A باشد که در سمت نزدیکتر به x از L_t قرار دارد. گیریم $g_2(t)$ نمایشگر مساحت قسمت دیگر باشد (توجه شود که $g_2(1) = 0 = g_1(0)$). روشن است که g_1 و g_2 توابعی پیوسته از I به $\mathbb{R}$ هستند. تابع $f : I \to \mathbb{R}$ را به صورت $f(t) = g_2(t) - g_1(t)$ تعریف می‌کنیم. این نیز پیوسته است و $f(0) = -f(1)$؛ در نتیجه $f(0)f(1) \leq 0$. اکنون، بر طبق لم ۱.۴.۴ عددی $t \in I$ چنان یافت می‌شود که $f(t) = 0$. این نقطه می‌تواند یکتا نباشد. چون $-g_1(t)$ و $g_2(t)$ توابعی اکیداً نزولی هستند (که این مطلب واضح است!)، بنابراین $f = g_2 - g_1$ نیز اکیداً نزولی است. پس یا بر بازه‌ای بسته چون $[a; b]$ صفر می‌شود، و یا در غیر این صورت تنها در یک نقطه c صفر می‌شود. در حالت اول فرض کنیم $h_A(x) = (a+b)/2$ و در حالت دوم $h_A(x) = c$. یعنی، خطی که عمود بر D_x است و آن را به فاصلهٔ $h_A(x)$ از x قطع می‌کند، مساحت A را به دو نیم تقسیم می‌کند. توجه داریم که همواره $h_A(-x) = 1 - h_A(x)$. همچنین، متوجه هستیم که $h_A : \mathbb{S}^1 \to I$ تابعی پیوسته است (کلک همیشگی: x را به نرمی تکان دهید و سپس مشاهده کنید که $h_A(x)$ چه می‌شود).

درست به همین طریق تابعی $h_B : \mathbb{S}^1 \to I$ با استفاده از B بجای A می‌توان تعریف نمود. اکنون، $h : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ را به صورت $h(x) = h_A(x) - h_B(x)$ تعریف می‌کنیم؛ که چون h_A و h_B پیوسته‌اند، این تابع نیز پیوسته است. در این صورت، به ازای هر $x \in \mathbb{S}^1$ ای داریم $h(x) = -h(-x)$. از سوی دیگر، مطابق نتیجهٔ ۳.۴.۴ نقطه‌ای $y \in \mathbb{S}^1$ چنان وجود دارد که $h(y) = h(-y)$. بنابراین $h(y) = 0$. یعنی $h_A(y) = h_B(y)$ و خط عمود بر D_y گذرنده از نقطه‌ای بر D_y به فاصلهٔ $h_A(y)$ از y،

مساحت A و نیز مساحت B را به دو نیمهٔ مساوی تقسیم می‌کند. □

۸.۴.۴ یادداشت. قضیهٔ بالا قابل تعمیم به ابعاد بالا نیز می‌باشد. یعنی، هر n ناحیهٔ کراندار در $\mathbb{R}^n$؛ برای مشاهدهٔ اثبات در حالت $n = ۳$ به فصل ۲۰ مراجعه شود.

حال، دومین مسألهٔ پنکیک را به دقیق‌ترین صورت بیان می‌کنیم.

۹.۴.۴ قضیه. اگر A ناحیه‌ای کراندار در صفحه باشد، در این صورت دو خط متعامد چنان وجود دارد که A را به چهار ناحیهٔ هم مساحت تقسیم می‌کنند.

اثبات: همانند اثبات قضیهٔ ۶.۴.۴ مجموعهٔ A را در دایره‌ای به مرکز $(۰,۱) \in \mathbb{R}$ و قطر یک محدود می‌کنیم. فرض کنیم به ازای $x \in \mathbb{S}^۱$ دلخواه، L_x خطی عمود بر D_x باشد که آن را در فاصلهٔ $h_A(x)$ از x قطع می‌نماید (خصوصاً، L_x ناحیهٔ A را به دو ناحیهٔ هم مساحت تقسیم می‌کند). گیریم y نقطه‌ای بر S باشد که زاویهٔ xOy برابر $\pi/۲$ بشود (به عبارت دیگر، $y = xi = x\sqrt{-۱}$). اکنون فرض کنیم M_x خطی عمود بر D_x باشد که D_x را در نقطه‌ای به فاصلهٔ $h_A(y)$ از y ملاقات می‌کند. سرانجام، اگر در جهت مثلثاتی (یعنی، عکس حرکت عقربه‌های ساعت) حرکت کنیم، چهار ناحیه جدا شده از A را بترتیب $A_۱(x)$، $A_۲(x)$، $A_۳(x)$ و $A_۴(x)$ می‌نامیم؛ به شکل ۴.۴ توجه شود.

توجه داریم که اگر مساحت $A_i(x)$ را $g_i(x)$ بنامیم، آنگاه

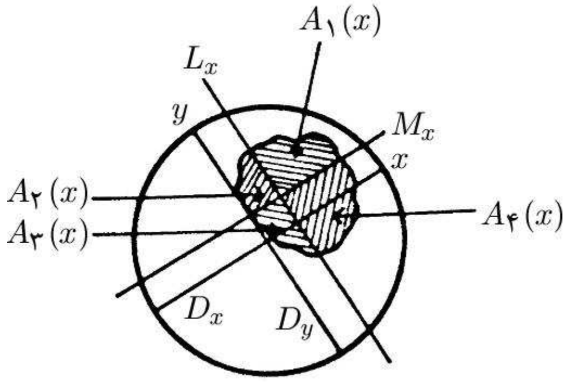
$$g_۱(x) + g_۲(x) = g_۳(x) + g_۴(x), \quad g_۴(x) + g_۱(x) = g_۲(x) + g_۳(x),$$

که از اینها نتیجه می‌گردد $g_۱(x) = g_۳(x)$ و $g_۲(x) = g_۴(x)$. روشن است که هر یک از توابع $g_i : \mathbb{S}^۱ \to \mathbb{R}$ پیوسته‌اند. گیریم f تابع پیوستهٔ با ضابطهٔ $f(x = g_۱(x) - g_۲(x) = g_۳(x) - g_۴(x)$ است. در این صورت

$$f(ix) = g_۱(ix) - g_۲(ix) = g_۲(x) - g_۳(x) = g_۲(x) - g_۱(x) = -f(x).$$

حال، لم ۱.۴.۴ را در مورد تابع $f \circ \sqrt{e} : I \to \mathbb{R}$ بکار می‌گیریم، که در آن $\sqrt{e} : T \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $\sqrt{e}(t) = \exp(\pi i t/۲)$ است؛ و به این ترتیب، برهان تمام است. □

شکل ۴.۴



۱۰.۴.۴ یادداشت. حل مسایل پنکیک به صورت وجودی صورت گرفتگ بر همین اساس می‌توانیم بگوئیم که چنین برشهایی وجود دارند. ولی، چگونه می‌توان چنین برشهایی را انجام داد؟ ممکن است ارائهٔ راح حل کلی برای این مسأله بسیار دشوار باشد. در زیر حالتی ساده که یافتن چنین برشی، کار ساده ای می‌باشد، ارائه شده است.

۱۱.۴.۴ تمرین.

۱) فرض کنید دو پنکیک بر میزی قرار دارند. اگر یکی از آنها بشکل $2n$−ضلعی منتظم و دیگری به شکل $2m$−ضلعی منتظم باشد، نشان دهید که همواره در عمل می‌توان وضعیتی برای چاقو پیدا نمود تا با تنها یک برش، هر دو پنکیک به دو نیم تقسیم شوند.

۳) (اثبات دیگری از قضیهٔ ۶.۴.۴) ابتدا با اشتفاده از نمادگذاریهای در ۶.۴.۴ نشان دهید که به ازای هر $x \in \mathbb{S}^1$، خطی L_x عمود بر D_x طوری می‌شود یافت که آن را به دو نیم تقسیم می‌کند. این خط B را به دو بخش تقسیم می‌کند. فرض کنید $k_1(x)$ و $k_2(x)$ مساحت هر یک از این بخشها باشد؛ $k_1(x)$ نزدیکتر و $k_2(x)$ دورتر به x. فرض کنید $k(x) = k_1(x) - k_2(x)$؛ در این صورت نشان دهید که $k : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ پیوسته است و حکم قضیهٔ ۶.۴.۴ را نتیجه بگیرید.

فصل ۵

منیفلد و سطح

در این فصل به دسته‌ای خاص از فضاهای توپولوژی توجه می‌کنیم؛ آنهایی که موضعاً شبیه به فضاهای اقلیدسی هستند.

۱.۵ تعریف و چند مثال

۱.۱.۵ تعریف. گیریم n عددی صحیح و نا منفی باشد. منظور از **منیفلد** n**–بعدی**، فضایی توپولوژی است که هاوسدورف می‌باشد و هر نقطه از آن دارای همسایگی‌ای همئومورف با قرص n–بعدی باز $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\| < 1\}$ است. در این مورد از اصطلاح n–**منیفلد** به اختصار استفاده می‌شود.

۲.۱.۵ یادداشت. توجه شود که $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n) \cong \mathbb{R}^n$. بنابراین، عملاً بر اساس تعریف بالا، در یک منیفلد باید هر نقطه دارای همسایگی‌ای همئومورف با خود $\mathbb{R}^n$ باشد.

۳.۱.۵ مثال. ۱) چون $\mathbb{R}^0$ تنها یک نقطه دارد، نتیجه می‌گیریم که هر فضای X با توپولوژی گسسته، یک ۰–منیفلد است. در واقع، هر فضای با توپولوژی گسسته،

هاوسدورف است و به ازای هر $x \in X$ ای مجموعهٔ $\{x\}$ یک همسایگی از x است که با $\mathbb{R}^۰$ همئومرف می‌باشد.

۲) سوای از ۰-منیفلدها، $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ و $\mathbb{R}^n$ ساده‌ترین مثالها از n-منیفلد هستند.

۳) هر زیر مجموعهٔ باز U از $\mathbb{R}^n$، یک n-منیفلد است. زیرا، اولاً به دلیل هاوسدورف بودن $\mathbb{R}^n$ و با توجه به قضیهٔ ۱۵.۲.۴، مجموعهٔ U با توپولوژی زیرفضایی‌اش از $\mathbb{R}^n$ هاوسدورف است. در ثانی، به ازای هر $x \in U$، عددی $\varepsilon > ۰$ چنان یافت می‌شود که $x \in B_\varepsilon(x) \subseteq U$ و البته $B_\varepsilon(x) \cong \mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$.

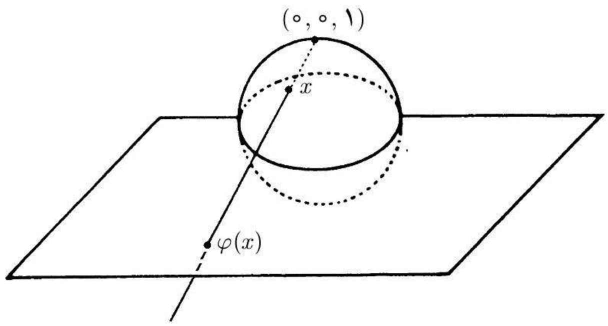
۴) دایره $\mathbb{S}^۱$ یک ۱-منیفلد است. برای مشاهدهٔ این امر فرض کنیم $\mathbb{S}^۱ = \{\exp(۲\pi i t) \,|\, t \in I\}$ زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت اگر $x = \exp(۲\pi i\theta) \in \mathbb{S}^۱$، آنگاه

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{S}^۱ - \{-x\} &= \mathbb{S}^۱ - \{\exp(۲\pi i(\theta - \tfrac{۱}{۲}))\} \\ &= \{\exp(۲\pi i t) \,|\, \theta - \tfrac{۱}{۲} < t < \theta + \tfrac{۱}{۲}\} \\ &\cong (\theta - \tfrac{۱}{۲}; \theta + \tfrac{۱}{۲}) \cong (-۱; ۱) = \mathrm{Int}(\mathbb{D}^۱). \end{aligned}$$

بنابراین، هر نقطه از $\mathbb{S}^۱$ همسایگی‌ای همئومورف با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^۱)$ می‌باشد.

در حالت کلی، داریم

شکل ۱.۵:



۴.۱.۵ مثال. به ازای هر n ای $\mathbb{S}^n$ یک n- منیفلد است. حالت $n = ۰$ و $n = ۱$ قبلاً مورد بررسی قرار گرفت. پس می‌توان فرض نمود $n \geq ۲$. برای مشاهدهٔ این مطلب، تصویر گنجنگاری را مطرح می‌کنیم که عملاً یک همئومورفیسم از $\mathbb{S}^n - \{(۰, \cdots, ۰, ۱)\}$ بروی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. این نگاشت φ چنین معرفی می‌شود: فرض کنیم $x \in \mathbb{S}^n - \{(۰, \cdots, ۰, ۱)\}$. خطی راست از $(۰, \cdots, ۰, ۱)$ به x در $\mathbb{R}^{n+۱}$ ترسیم نموده و سپس آن را امتداد می‌دهیم تا $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+۱} \,|\, x_{n+۱} = ۰\}$ را قطع کند. نقطهٔ برخورد $\varphi(x)$ به صورت یکتا مشخص می‌شود. به شکل ۱.۵ توجه شود.

پیوستگی و یکبیک بودن φ حد اقل از نظر شهودی ساده است. همچنین به راحتی دیده می‌شود $\psi = \varphi^{-1}$ را تعریف نمود و پیوستگی آن را نیز مشاهده کرد. فرمول دقیقی برای φ می‌شود بدست آورد: ابتدا معادلهٔ خط راستی که از $(0, \cdots, 0, 1)$ و x می‌گذرد را می‌نویسیم. سپس، نقطه‌ای از خط که در آن $x_{n+1} = 0$ را بدست می‌آوریم. به راحتی می شود تحقیق نمود که، در این صورت

$$\varphi(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right).$$

بعلاوه، وارون φ چنین است:

$$\psi(x_1, \cdots, x_n) = \left(\frac{2x_1}{1 + \|x\|^2}, \cdots, \frac{2x_n}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2} \right).$$

تحقیق پیوستگی φ و ψ و نیز اینکه $\varphi \circ \psi = 1_{\mathbb{R}^n}$ و $\psi \circ \varphi = 1_{\mathbb{S}^n - \{(0,\cdots,0,1)\}}$ به خواننده سپرده می‌شود. نتیجه اینکه هر $x \in \mathbb{S}^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$ دارای همسایگی‌ای همئومورف با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ (یعنی با خود $\mathbb{S}^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$) است. نقطهٔ $(0, \cdots, 0, 1)$ نیز دارای همسایگی $\mathbb{S}^n - \{(0, \cdots, 0, -1)\}$ همئومورف با $\mathbb{R}^n$ است. این همئومورفیسم به شرح زیر می‌باشد:

$$\varphi'(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right).$$

روش دیگر برای مشاهدهٔ $n-$ منیفلد بودن $\mathbb{S}^n$ وجود دارد. در این روش ابتدا به نقطهٔ $(0, \cdots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ توجه می‌کنیم. همسایگی باز $U = \{x \in \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} < 0\}$ را انتخاب می‌کنیم. این همسایگی به وسیلهٔ تصویر قائم $U \to \mathrm{Int}(\mathbb{D}^n) \subseteq \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \cdots, x_n)$ بروی $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ تصویر می‌گردد و این نگاشت همئومورفیسم می‌باشد.در حالت کلی به ازای $x \in \mathbb{S}^n$، فرض می‌کنیم $U_x = \{y \in \mathbb{S}^n \mid \|x - y\| < \sqrt{2}\}$، که به وضوح همسایگی بازی از $x \in \mathbb{S}^n$ است. اکنون، تصویر قائم بر $n-$صفحهٔ گذرنده از $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ و عمود بر بردار X، همئومورفیسمی میان U_x و $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ برقرار می‌سازد و نشان می‌دهد که $\mathbb{S}^n$ عملاً یک $n-$منیفلد می‌باشد.

۵.۱.۵ یادداشت. فرض هاوسدورف بودن در تعریف $n-$ منیفلد **الزامی** است. این سؤال مطرح است که آیا اگر X فضایی باشد که هر نقطه‌اش دارای همسایگی‌ای

همئومورف با $\mathbb{R}^n$ است، در این صورت آیا الزاماً X هاوسدورف است؟ پاسخ این پرسش منفی است. کافی است به مثال بعد توجه شود. در واقع اگر فرض هاوسدورف بودن را از تعریف $n-$منیفلد حذف کنیم، فضاهای عجیبی مانند در شکل ۲.۵ پدیدار می‌شوند، که با شهود ما در خصوص موضعاً همئومورف بودن منیفلدها با فضاهای اقلیدسی در تضاد است!

شاید یک دلیل دیگر برای الزام شرط هاوسدورف بودن پر تعریف منیفلد، این باشد که با وجود این شرط راه برای اثبات اینکه منیفلد در $\mathbb{R}^N$ با N مناسبی جا می‌گیرد، فراهم می‌شود. در این حالت شرط هاوسدورف بودن از فضای پیرامونی $\mathbb{R}^N$ بر منیفلد تحمیل می‌شود. در حقیقت، قضیه‌ای وجود دارد که بر اساس آن هر $n-$منیفلد شیک (مثلاً، فشرده) را با زیرفضایی از $\mathbb{R}^N$ (با N باندازهٔ کافی بزرگ) می‌توان همئومورف نمود. برای مشاهدهٔ این حکم در حالت منیفلدهای فشرده به تمرین۸.۲.۵$-$(٦) و (۷) توجه شود.

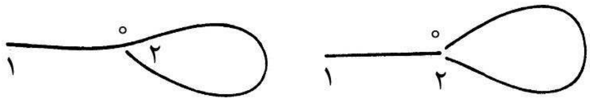
٦.۱.۵ مثال. فرض کنیم $X=\{x\in\mathbb{R}\mid -۱<x\leq ۲\}$ با توپولوژی $\mathcal{U}$ باشد، که «$U\in\mathcal{U}\ \Leftrightarrow\ U=\emptyset$ یا $U=X$ یا U اجتماعی دلخواه از مجموعه‌های به شکل باشد». توجه شود که X دارای توپولوژی زیر فضایی القاء شده توسط $\mathbb{R}$ بر X نیست! زیرا، مجموعه‌های به شکل $[\beta;۲)$ در توپولوژی $\mathcal{U}$ بر X باز نیستند. از نظر شهودی، شکل صحیح X در قسمت (الف) یا (ب) از شکل ۲.۵ می‌باشد. زیرا، $\{۲\}$ بی‌اندازه به $\{\circ\}$ نزدیک است (یعنی، هر همسایگی باز دلخواه از $\{۲\}$، همسایگی بازی به شکل $(\alpha;\circ)$ را در بر دارد). به وضوح X هاوسدورف نیست، زیرا هر همسایگی باز از $\{۲\}$، تمام همسایگی‌های باز شامل $\{\circ\}$ را قطع می‌کند. از سوی دیگر، هر نقطه در X دارای همسایگی‌ای همئومورف با $\mathbb{R}^۱$ می‌باشد. اگر $x\in X$ و $x\neq ۲$، در این صورت این حکم بدیهی است. ولی اگر $x=۲$، در این صورت $N=[-۱/۲;\circ)\cup(۳/۲;۲]$ همسایگی بازی از $\{۲\}$ است که توسط تابع $f:N\to(-۱;۱)$ با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases} ۲y & -۱/۲<y<\circ \\ ۴-۲y & ۳/۲<y\leq ۲ \end{cases}$$

با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^۱)$ همئومورف می‌باشد. لازم است خواننده تحقیق کند که f پیوسته و دوسویی است و همچنین وارونش عبارت است از $g:(-۱;۱)\to N$ با ضابطهٔ

$$g(x)=\begin{cases} x/۲ & -۱<x<\circ \\ ۲-x/۲ & \circ\leq x<۱ \end{cases}$$

شکل ۲.۵



۲.۵ ساخت منیفلدهای جدید

حاصلضرب دو منیفلد، منیفلد است. در واقع

۱.۲.۵ قضیه. اگر M و N بترتیب m−منیفلد و n− منیفلد باشند، آنگاه $M\times N$ یک $(n+m)$−منیفلد است.

اثبات: فرض کنیم $(x,y)\in M\times N$. فرض کنیم $f:U\to\mathbb{R}^m$ و $g:V\to\mathbb{R}^n$ همئومرفیسمهایی از همسایگی‌های باز $x\in U$ و $y\in V$ باشند. در این صورت، $(f,g):U\times V\to\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\cong\mathbb{R}^{m+n}$ نیز همئومورفیسم است و $U\times V$ همسایگی‌ای باز از (x,y) در $M\times N$ است. هاوسدورف بودن $M\times N$ از قضیهٔ ۱۷.۲.۴ استنتاج می‌گردد.
□

۲.۲.۵ مثال. تیوب $\mathbb{T}^۲:=\mathbb{S}^۱\times\mathbb{S}^۱$ یک ۲−منیفلد است. در حالت کلی، به ازای هر n ای n−تیوب $\mathbb{T}^n:=\underbrace{\mathbb{S}^۱\times\cdots\times\mathbb{S}^۱}_{n\ \text{کپی}}$ یک n−منیفلد است.

۳.۲.۵ تعریف. گیریم گروه G بر مجموعهٔ X عمل کند. در صورتی می‌گوئیم G بر X به شکل **آزاد** عمل می‌کند که به ازای هر $x\in X$ و هر $g\in G-\{1\}$ ای $g\bullet x\neq x$.

۴.۲.۵ قضیه. اگر G گروهی متناهی، X یک G−فضا بوده و عمل G بر X آزاد باشد، در این صورت X/G وقتی و تنها وقتی n−منیفلد است که X باشد.

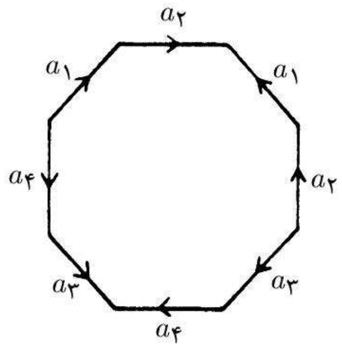
اثبات: تمرین ۸.۲.۵−(۴). □

۵.۲.۵ مثال. $\mathbb{RP}^n$ یک n−منیفلد است. زیرا، در اینجا گروه متناهی $\mathbb{Z}_۲$ بر n−منیفلد $\mathbb{S}^n$ به صورت آزاد عمل می‌کند.

برای مشاهدهٔ مستقیم این مطلب، نگاشت $p:\mathbb{S}^n\to\mathbb{RP}^n$ را در نظر بگیرید، که $x\in\mathbb{S}^n$ را به زوج $\{-x,x\}\in\mathbb{RP}^n$ می‌برد. فرض کنیم U_x همسایگی بازی از $x\in\mathbb{S}^n$ باشد که با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ همئومورف است و قطر آن از $\sqrt{۲}$ کمتر می‌باشد. در این صورت $p(U_x)$ همسایگی بازی از $p(x)$ می‌باشد که با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ همئومورف است. چرا که p (بنا به قضیهٔ ۱۲.۳.۳) نگاشتی پیوسته و باز است و اگر $U\subseteq\mathbb{S}^n$ باندازهٔ کافی کوچک باشد، آنگاه $p|_U:U\to p(U)$ دوسویی است.

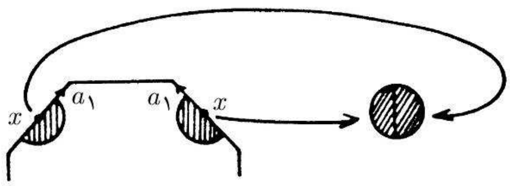
۶.۲.۵ مثال. فضای M حاصل از یکی گیری اضلاع ناحیهٔ X نشان داده شده در شکل ۳.۵ را در نظر بگیرید. این ناحیه‌ای است به شکل هشت وجهی منتظم که اضلاعش را به صورت نشان داده در شکل با هم یکی گرفته‌ایم. فرض کنیم $p:X\to M$ نگلشت تصویر طبیعی است.

شکل ۳.۵



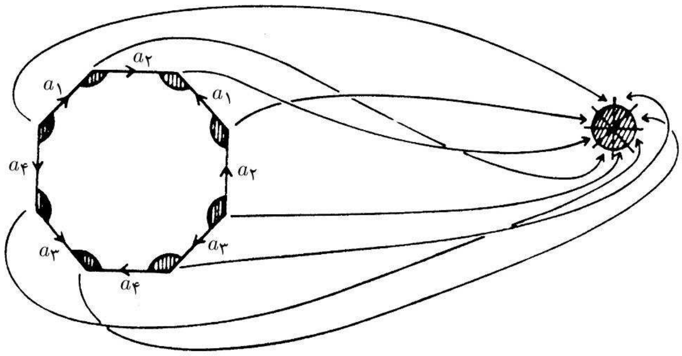
اگر $x\in M$ طوری باشد که $p^{-1}(x)$ در درون X قرار گیرد، آنگاه به وضوح x همسایکی‌ای همئومورف با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ دارد؛ در واقع، $p(\mathrm{Int}(X))$ چنین همسایگی‌ای است. اگر $x\in M$ طوری باشد که $p^{-1}(x)$ بر یکی از اضلاع X قرار بگیرد، ولی یکی از رئوس آن نباشد، در این صورت باز هم با کمی سعی می‌توان ملاحظه نمود که x همسایگی‌ای همئومورف با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ می‌دذیرد؛ شکل ۴.۵ را مشاهده کنید. سر انجام اگر $p^{-1}(x)$ یک رأس در X باشد، آنگاه خمسایگی N_x از x که با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ همئومورف است، $p^{-1}(N_x)$ نقاطی از X می‌باشد که به فاصلهٔ ε تا $p^{-1}(x)$ قرار دارند؛ که البته $\varepsilon>۰$ عددی مناسب است.

شکل ۴.۵



از نظر شهودی، مشاهدهٔ هاوسدورف بودن M کار دشواری نیست. برای اینکه موضوع از نظر ریاضی نیز قطعی شود، اثبات به شرح زیر را می آوریم. گیریم A نمایشگر اضلاع X باشد. A را به صورت $\bigcup_{i=1}^{8}(A_i \cup Y)$ می‌نویسیم که A_i ضلع (بستهٔ) i ام از X است و Y مجموعه‌ای مرکب از هر هشت رأس X می‌باشد. گیریم C زیر مجموعه‌ای بسته از X باشد، در این صورت

شکل ۵.۵



$$
\begin{aligned}
p^{-1}(p(C)) &= p^{-1}\Big(p\big((C-A)\cup(C\cap Y)\cup\bigcup_{i=1}^{8}(C\cap A_i)\big)\Big) \\
&= (C-A)\cup p^{-1}\Big(p\big(C\cap Y\big)\Big)\cup\bigcup_{i=1}^{8}p^{-1}\Big(p\big(C\cap A_i\big)\Big) \\
&= (C-A)\cup\varepsilon(Y)\cup\bigcup_{i=1}^{8}p^{-1}\big((C\cap A_i)\cup B_i\big)
\end{aligned}
$$

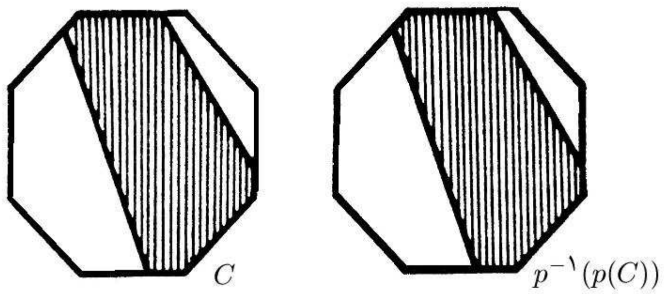
که اگر $C\cap Y$ غیر تهی باشد $\varepsilon(Y)=Y$ و در غیر این صورت $\varepsilon(Y)=\emptyset$. مجموعهٔ B_i زیر فضایی از A است که با $C\cap A_i$ همئومورف می‌باشد. عملاً اگر ضلع A_i با ضلع A_j در M یکی گرفته شوند، آنگاه B_i زیر فضایی از A_i خواهد بود که با $C\cap A_i$

همئومورف می‌باشد و $p(B_i) = p(C \cap A_i)$. (توجه شود که $p^{-1}(p((C \cap A_i) \cap A_j)) = B_i \cup (\varepsilon(Y) \cup A_j)$.) در نتیجه، ملاحظه می‌گردد که

$$p^{-1}(p(C)) = C \cup \varepsilon(Y) \cup \bigcup_{i=1}^{8} B_i$$

به شکل ۶.۵ توجه شود.

شکل ۶.۵



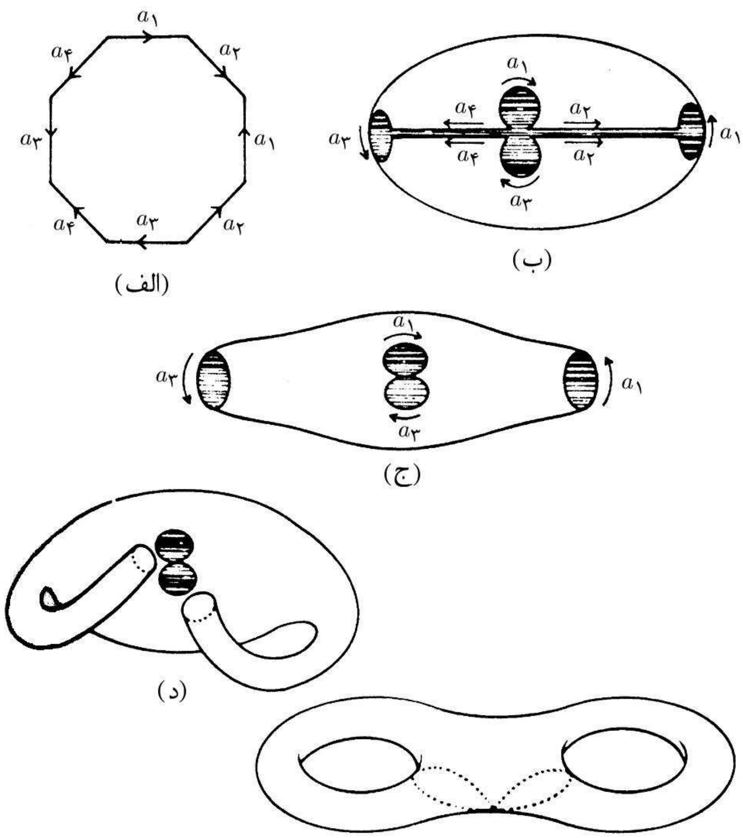
زیر فضاهای B_i که $i = 1, \cdots, 8$، زیر مجموعه‌هایی بسته در X هستند، زیرا B_i با مجموعهٔ بستهٔ $C \cap A_i$ در A_i همئومورف است؛ اما A_i نیز در X بسته است. بنابراین $p^{-1}(p(C))$ مجموعه‌ای بسته است و در نتیجه، بنا به تعریف توپولوژی خارج قسمتی، مجموعهٔ $p(C)$ در M ببسته است. نتیجه اینکه $p : X \to M$ نگاشتی بسته می‌باشد. چون به وضوح X فضایی فشرده و هاوسدورف است، از قضیهٔ ۲۰.۲.۴ نتیجه می‌گیریم که M نیز فضایی هاوسدورف و فشرده است و لذا M یک ۲−منیفلد می‌باشد.

یکی گیریهای در شکل ۳.۵ را عملاً در دنیاس سه بعدی می‌توانیم انجام دهیم. این را در شکل ۷.۵ نشان داده‌ایم. شیء حاصله را **تیوب دوگانه** می‌نامیم.

طریقهٔ دیگری برای تجسم ۲−منیفلد M نشان داده شده در شکل ۳.۵ این است که ابتدا قرصی باز که همسایگی‌ای از یک رأس است را مانند در شکل ۸.۵−(الف) از ناحیه حذف کنیم. اکنون، دو ضلع به نام a_1 را بطزور کامل بهم متصل می‌کنیم، و به شکل ۸.۵−(ج) می‌رسیم. ناحیهٔ سیاه در شکل ۸.۵−(د) را در نظر بگیرید. این با زیر فضایی از $\mathbb{R}^2$ که در شکل ۸.۵−(ه) نشان داده شده است، همئومورف است. تابع f با ضابطهٔ

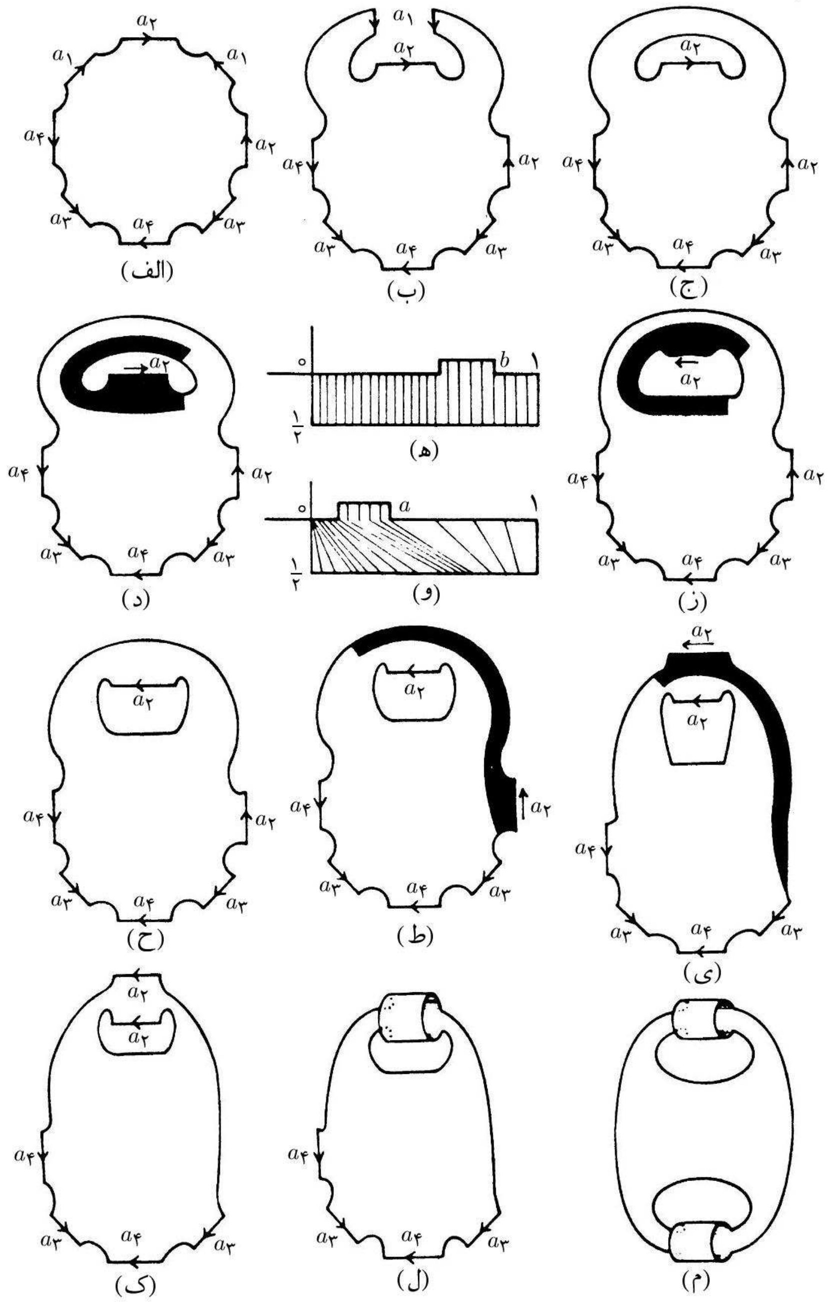
$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{x(a+2y(b-a))}{b}, y\right) & 0 \le x \le b\,,\ y \le 0 \\ \left(\frac{(x-b)(1-a-2y(b-a))}{1-b} + a + 2y(b-a), y\right) & b \le x \le 1\,,\ y \le 0 \\ \left(\frac{xa}{b}, y\right) & y \ge 0 \end{cases}$$

شکل ۷.۵



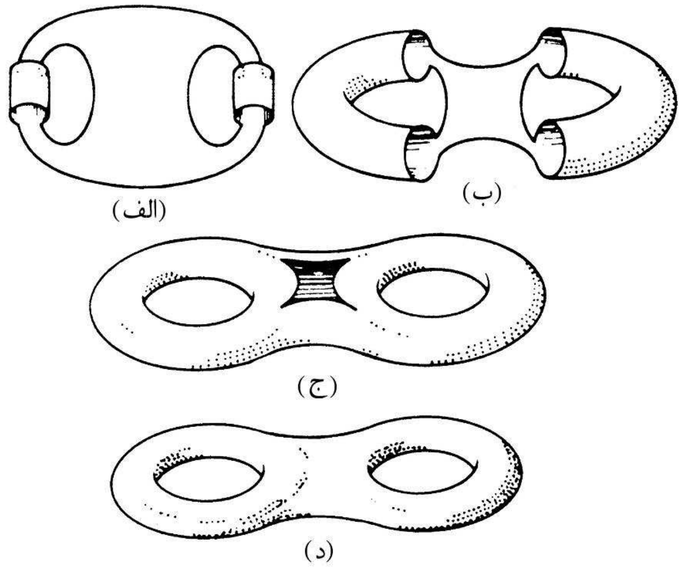
(که $0 < a \leq b < 1$) همئومورفیسمی میان فضاهای نشان داده شده در شکلهای ۸.۵–(هـ) و ۸.۵–(و) می‌باشد. توجه شود که f بر سه ضلع دیگری که هیچ دو تا از آنها با هم برخورد ندارند، به صورت همانی عمل می‌کند. بنابراین، همئومورفیسمی از Y به Y داریم که بر سه ضلع به غیر از a_2 همانی است. با استفاده از این همئومورفیسم بر Y و همانی بر قسمت غیر تیره شدهٔ در شکل ۸.۵–(د)، به همئومورفیسمی بین ۸.۵–(د) و ۸.۵–(ز) می‌رسیم. بنابراین فضاهای ۸.۵–(ج) و ۸.۵–(ح) همئومورفند. به صورت مشابه، با استفاده از قسمتهای تیره شده در ۸.۵–(ط) و ۸.۵–(ی) برای همئومورفیسم، فضاهای در ۸.۵–(ک) و ۸.۵–(ح) نیز همئومورفند. با یکی گیری دو کپی a_2 فضای ۸.۵–(ل) حاصل می‌گردد. با انجام عملیات مشابه، به همئومورف بودن فضاهای ۸.۵–(الف) و ۸.۵–(م) می‌رسیم.

شکل ۸.۵



در ادامه به شکل ۹.۵ می‌رسیم و پس از چند همئومورفیسم انقباضی ساده به شکل ۹.۵−(ج) دست می یابیم. سر انجام، همسایگی قرص بازی که در ابتدا حذف کردیم را به شکل اضافه نموده و به شکل ۹.۵−(د) می‌رسیم.

شکل ۹.۵



۷.۲.۵ یادداشت. ثابت می شود که هر ۲−منیفلد فشرده‌ای را به صورت فضای حاصل از یکی گیری ناحیهٔ چند ضلعی مناسبی می‌توان بدست آورد؛ در ادامه به این موضوع خواهیم پرداخت.

۸.۲.۵ تمرین.

۱) نشان دهید که هر زیر مجموعهٔ باز از $\mathbb{R}^n$، یک n−منیفلد است.

۲) گیریم $\mathbb{CP}^n := \mathbb{S}^n/\sim$، که $\sim$ رابطهٔ هم ارزی

$x \sim y \;\Leftrightarrow\;$ به ازای یک $t \in I$ ای $x = \exp(2\pi i t)y$

بر $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ می‌باشد. ثابت کنید که در این صورت $\mathbb{CP}^n$ یک $2n$−منیفلد است. (توجه کنید که $\sim$ دایره‌های در $\mathbb{S}^{2n+1}$ را با تک نقطه‌ای یکی می‌گیرد. مثلاً، $\{(\exp(2\pi i t), 0, \cdots, 0) \,|\, t \in I\}$ نقطه‌ای در $\mathbb{CP}^n$ را نشان می‌دهد.)

۳) گیریم $p \in \mathbb{N}$ و $L_p := \mathbb{S}^{2n+1}/\sim$، که $\sim$ رابطهٔ هم ارزی

$x \sim y \;\Leftrightarrow\;$ به ازای یک $k \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ ای $x = \exp(2\pi k/p)y$

بر $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ می‌باشد. ثابت کنید که در این صورت L_p یک $(2n+1)$–منیفلد است. (در حقیقت $L_p = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$، که $\mathbb{Z}_P$ به شکل طبیعی و آزاد بر $\mathbb{S}^{2n+1}$ عمل می‌کند.)

۴) فرض کنیم X یک G–فضا باشد، که G گروهی متناهی است که به صورت آزاد بر X عمل می‌کند. ثابت کنید اگر X یک n–منیفلد فشرده باشد، آنگاه X/G نیز چنین است. همچنین، ثابت کنید که اگر X/G منیفلد باشد، آنگاه X نیز هست.

۵) ثابت کنید که اگر M یک n–منیفلد باشد، در این صورت هر نقطه از M همسایگی‌ای دارد که با n–قرص بستهٔ $\mathbb{D}^n$ همئومورف می‌باشد.

۶) فرض کنیم M یک n–منیفلد فشرده باشد. ثابت کنید M با زیر فضایی از یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^N$ (با N ای مناسب) همئومورف است. (راهنمایی: چون M فشرده است، پوششی متناهی $\{D_1, \cdots, D_m\}$ برای M موجود است. همچنین، به ازای هر i، همئومورفیسمی $h_i : D_i \to \operatorname{Int}(\mathbb{D}^n)$ وجود دارد. از تمرینات ۲۴.۲.۴–(۱۰) و (۱۱) استفاده نموده و ثابت کنید که $M/(M-D_i) \cong (D_i)^\infty \cong (\operatorname{Int}(\mathbb{D}^n))^\infty \cong \mathbb{S}^n$. چون M فشرده و هاوسدورف است و $M - D_i$ بسته می‌باشد، تصویر $p_i : M \to M/(M-D_i)$ پیوسته است و بنابراین نگاشتهای پیوسته $f_i : M \to \mathbb{S}^n$ را می‌توان بدست آورد. اکنون $f : M \to (\mathbb{S}^n)^m$ را به صورت $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$ تعریف کنید. سرانجام توجه کنید که $(\mathbb{S}^n)^m \subset (\mathbb{R}^{n+1})^m = \mathbb{R}^{m(n+1)}$.)

۷) گیریم M یک n–منیفلد و D زیر فضایی از M باشد که با $\operatorname{Int}(\mathbb{D}^n)$ همئومورف است. چون $\operatorname{Int}(\mathbb{D}^n) \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{S}^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$، همئومرفیسمی به شکل $g : D \to \mathbb{S}^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$ وجود دارد. تابع $f : M \to \mathbb{S}^n$ را با ضابطهٔ

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in D \quad \text{اگر} \\ (0, \cdots, 0, 1) & x \in M - D \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید f پیوسته است. این حکم گزارهٔ تمرین ۶ را مجدداً اثبات می‌کند.

۳.۵ طبقه بندی منیفلدها

همهٔ ۰–منیفلدهای همبند و فشرده با هم همئومورفند. دایره $\mathbb{S}^۱$ یک ۱–منیفلد همبند و فشرده می‌باشد. در واقع،

۱.۳.۵ قضیه. $\mathbb{S}^۱$ در حد همئومورفیسم تنها ۱–منیفلد همبند و فشرده است.

اثبات: اولین مرحله و شاید سخت ترین آن، این است که از فشردگی استفاده نموده و نشان دهیم که اگر M یک ۱–منیفلد همبند و فشرده باشد، آنگاه M به طریقی «شیک» به تعدادی متناهی قطعه تقسیم می‌گردد که هر قطعه با بازهٔ واحد $I = [۰; ۱]$ همئومورف است. اگر نگارهٔ همئومورف با I را قوس بنامیم و نگارهٔ $\{۰, ۱\}$ توسط همان همئومورفیسم را مجموعهٔ رئوس بنامیم، در این صورت «شیک بودن» به این معنی است که هیچ قوسی خودش را قطع نکند و هر گاه دو قوس همدیگر را قطع کنند، محل برخورشان یک یا دو رأس مشترکشان باشد. (ایدهٔ کار چنین است: ۱) M را توسط همسایگی‌های از نقاط همئومورف با $\int(I) \cong \mathrm{Int}(\mathbb{D}^۱)$ بپوشانید، ۲) با استفاده از شرط فشردگی، تعدادی متناهی از آنها را انتخاب کنید، ۳) همسایگی‌های کوچکتری که با I همئومورفند و هنوز هم اجتماعشان M را می‌پوشاند، انتخاب کنید، ۴) از تعریف ۱–منیفلد استفاده نموده و نشان دهید که M یک تقسیم بندی شیک می‌پذیرد.) روشن است که در چنین تقسیم بندی‌های شیکی از M به اجتماعی از قوسها، هر رأس دقیقاً در دو قوس متمایز ظاهر می‌شود و هر قوس نیز دقیقاً دو رأس دارد. (اگر رأسی در تنها یک و بیشتر از دو قوس ظاهر شود، آنگاه آن رأس هیچ همسایگی همئومورف با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^۱)$ نخواهد داشت.) فرض کنید که M بیش از دو قوس داشته باشد، گیریم $A_۱$ و $A_۲$ دو تا از چنین قوسهای در M هستند، که یکدیگر را در یک رأس a قطع نمده‌اند. گیریم $h_۱ : A_۱ \to I$ و $h_۲ : A_۲ \to I$ همئومورفیسمهایی باشند که $A_۱$ و $A_۲$ رابه عنوان قوس تعریف می‌کنند. می‌توانیم فرض کنیم که $h_۱(a) = ۱$ و $h_۲(a) = ۰$. در غیر این صورت $h_۱$ و یا $h_۲$ را با همئومورفیسم $f : I \to I$ با ضابطهٔ $f(t) = ۱-t$ ترکیب می‌کنیم. $g : A_۱ \cup A_۲ \to I$ را به صورت

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۱}{۲}h_۱(x) & x \in A_۱ \quad \text{اگر} \\ \frac{۱}{۲}(۱ + h_۲(x)) & x \in A_۲ \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. این تابع خوش تعریف است و به وضوح دوسویی می‌باشد. برای مشاهدهٔ پیوستگی g، توجه می‌کنیم که $A_۱$ و $A_۲$ زیر مجموعه‌هایی بسته در $A_۱ \cup A_۲$ و

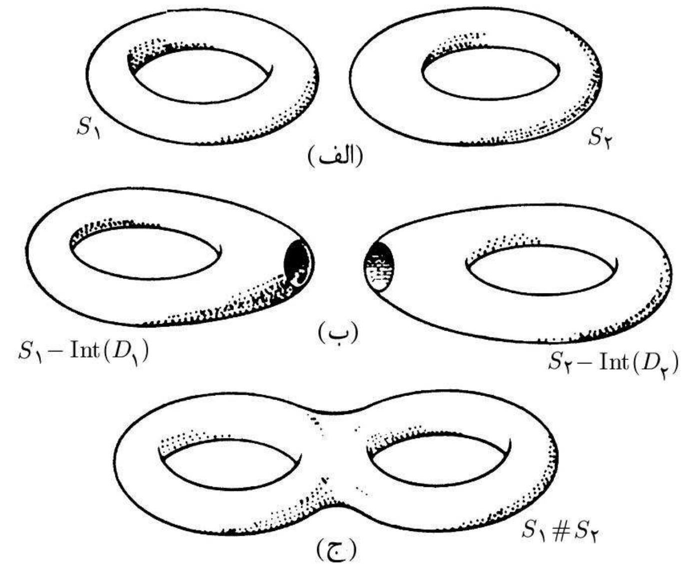
لذا M هستند. گیریم C زیر مجموعه‌ای بسته از I باشد، در این صورت

$$g^{-۱}(C) = h_۱^{-۱}([۰; ۱/۲] \cap C) \cup h_۲^{-۱}([۱/۲; ۱] \cap C),$$

که به وضوح در $A_۱ \cup A_۲$ بسته می‌باشد. بنابراین g پیوسته است. همئومورفیسم بودن g به راحتی قابل تحقیق است. بنابراین قوسهای $A_۱$ و $A_۲$ را با تنها یک قوس می‌توان تعویض نمود. اکنون، یک تقسیم بندی شیک جدید برای M داریم که یک قوس و یک رأس کمتر از قبلی دارد. با تکرار این روند، به تقسیم بندی‌ای شیک برای M می‌رسیم که در آن تنها دو قوس و تنها دو رأس وجود دارد. بنابراین، M با دو کپی از I که دو انتهایش یکی گرفته شده‌اند، همئومورف می‌باشد. به این ترتیب اثبات شد که M با $\mathbb{S}^۱$ همئومورف می‌باشد. □

حال نوبت ۲−منیفلدها است.

شکل ۱۰.۵



۲.۳.۵ تعریف. به ۲−منیفلد همبند و فشرده را **سطح** یا **رویه** گفته می‌شود.

۳.۳.۵ مثال. ۱) کره $\mathbb{S}^۲$، ۲) تیوب $\mathbb{T} = \mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱$، ۳) صفحهٔ تصویری $\mathbb{RP}^۲$ و ۴) تیوب دوتایی، که همگی تا اینجا معرفی شده‌اند، نمونه‌هایی از سطح هستند.

سه تای اول پایه‌ای هستند، به این معنی که هر سطح دیگری را با انجام عملیاتی معروف به «جمع همبندی» از روی سه تای اول می‌شود بدست آورد.

۴.۳.۵ تعریف. گیریم S_1 و S_2 دو سطح متمایز باشند. در این صورت **جمع همبندی** $S_1\#S_2$ آنها عبارت است از سطحی که به صورت ذیل حاصل می‌گردد: ابتدا دو قرص باز کوچک، یکی از هر کدام، جدا نموده و سپس مرز هر دو حفرهٔ ایجاد شده را بهم می چسبانیم. به شکل ۱۰.۵ توجه گردد.

۵.۳.۵ لم. جمع همبندی دو سطح، خود یک سطح است.

اثبات: ابتدا لازم است تا تعریف جمع همبندی را قدری دقیق تر بیان کنیم. فرض کنیم $D_1\subset S_1$ و $D_2\subset S_2$ چنان انتخاب شوند که D_1 و D_2 با $\mathbb{D}^2$ همئومورفند. همان طوری که به سهولت قابل مشاهده است، چنین نواحی‌ای موجودند: گیریم x نقطه‌ای از یک سطح باشد. در این صورت x همسایگی‌ای N دارد که توسط نگاشتی چون $h:N\to\mathrm{Int}(\mathbb{D}^2)$ با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^2)$ همئومورف است. زیر فضای $h^{-1}(\mathrm{Int}(\mathbb{D}^2_{1/2}))\subseteq N$، که $\mathbb{D}^2_{1/2}\subset\mathbb{D}^2$ قرصی به شعاع ۱/۲ و بسته می‌باشد، توسط همئومرفیسم $h^{-1}(\mathbb{D}^2_{1/2})\to\mathbb{D}^2$ با ضابطهٔ $y\mapsto 2h(y)$ با $\mathbb{D}^2$ همئومورف است. به تعریف $S_1\#S_2$ باز می‌گردیم و فرض می‌کنیم $D_1\subset S_1$ و $D_2\subset S_2$ زیر فضاهایی همئومورف با $\mathbb{D}^2$ باشند و $h_1:I\to\mathbb{D}^2$ و $h_2:I\to\mathbb{D}^2$ همئومورفیسمهای حاصل تحدید به I باشند. رویهٔ $S_1\#S_2$ را به صورت $\big((S_1-\mathrm{Int}(D_1))\cup(S_2-\mathrm{Int}(D_2))\big)/\sim$ تعریف می‌کنیم، که $\sim$ رابطه‌ای هم ارزی است که تنها بر $\partial(S_1-\mathrm{Int}(D_1))\cup\partial(S_2-\mathrm{Int}(D_2))=\partial D_1\cup\partial D_2$ غیر بدیهی است؛ این رابطه به صورت «$x\sim h_2^{-1}\circ h_1(x)$ با $x\in\partial D_1$» تعریف می‌گردد. جمع همبندی مستقل از انتخاب قرسهای D_1 و D_2 و نیز همئومورفیسمهای h_1 و h_2 است. ملاحظهٔ اینکه $S_1\#S_2$ خود سطح است، کار دشواری نیست: تنها کافی است که وجود همسایگی‌های نقاط بر ∂D_1 یا بر ∂D_2 را تحقیق کنیم. جزئیات بر عهدهٔ خواننده. □

۶.۳.۵ قضیه. فرض کنید S_1، S_2 و S_3 سه سطح باشند. در این صورت

۱) $S_1\#S_2\cong S_2\#S_1$,

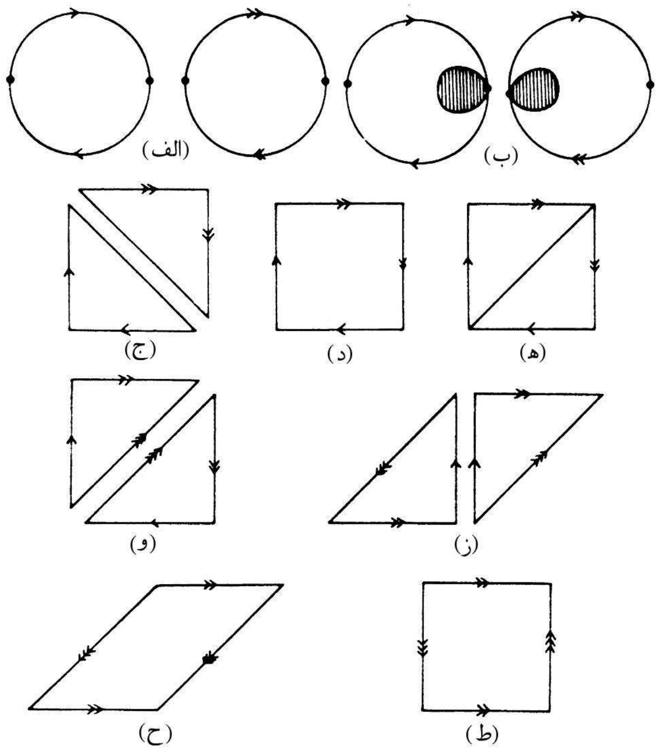
۲) $(S_1\#S_2)\#S_3\cong S_1\#(S_1\#S_3)$,

$$\text{۳)}\quad \mathbb{S}^{2}\#S_{1}\cong S_{1}.$$

اثبات: به عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده است. □

۷.۳.۵ مثال. ۱) تیوب دو تایی، جمع همبندی دو تیوب با هم است. شکل ۱۰.۵ را ملاحظه بفرمائید.

شکل ۱۱.۵



۲) بطری کلاین جمع همبندی دو صفحهٔ تصویری است. اینرا خیلی سریع از روی اطلاعات مطرح در بخش ۲.۳ می‌توان نشان داد. ولی، اثبات هندسی این مطلب در شکل ۱۱.۵ مجسم شده است. با دو صفحه‌تصویری همانند در شکل ۱۱.۵—(الف) شروع نموده، سپس دو قرص باز مثل در ۱۱.۵—(ب) را از آنها جدا می‌کنیم. نتیجه، با فضای نشان داده شده در ۱۱.۵—(ج) همئومورف است. با چسبانیدن (یعنی، جمع همبندی) لبهٔ قرصهای جداشده، به ۱۱.۵—(د) می‌رسیم. سر انجام، برشی همانند در

۱۱.۵—(ه) ایجاد نموده و به فضای یکی‌گیری شدهٔ ۱۱.۵—(و) می‌رسیم. نتیجه را ب صورت در ۱۱.۵—(ز) می‌شود مرتب نمود. اکنون یکی‌گیری نموده و به ۱۱.۵—(ح) می‌رسیم. سپس، با استفاده از همئومورفیسمی مناسب، به ۱۱.۵—(ط) می‌رسیم که همان بطری کلاین است.

این حکم که هر سطحی را به کمک کره، تیوب و صفحهٔ تصویری می‌شود بیان نمود، بنام **قضیهٔ طبقه بندی سطوح** معروف است.

۸.۳.۵ قضیه. گیریم S سطح باشد. در این صورت S با یک و تنها یکی از سطوح زیر همئومورف است:

$$\mathbb{S}^{۲}\#\underbrace{\mathbb{T}\#\mathbb{T}\#\cdots\#\mathbb{T}}_{m\ \text{کپی}} \qquad (m\geq ۰)$$

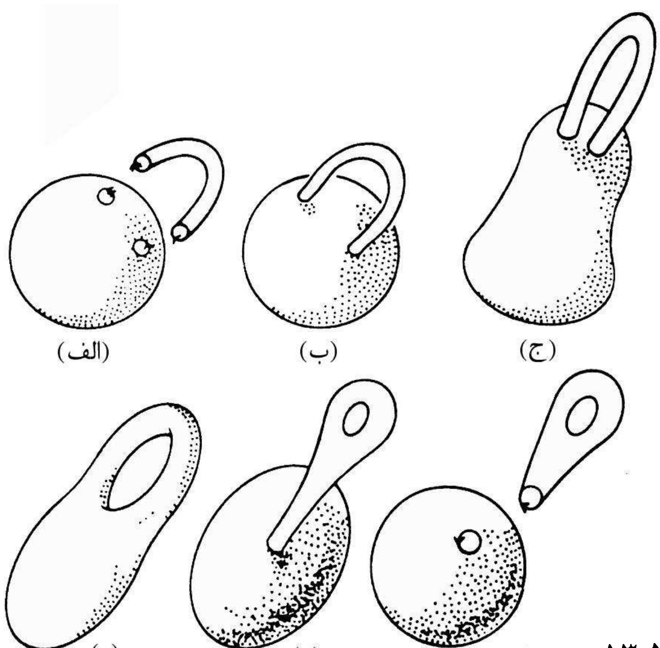
$$\mathbb{S}^{۲}\#\underbrace{\mathbb{RP}^{۲}\#\mathbb{RP}^{۲}\#\cdots\#\mathbb{RP}^{۲}}_{n\ \text{کپی}} \qquad (n\geq ۱)$$

اثبات این قضیه به دو بخش تقسیم می‌گردد: اول، اینکه هر سطح با حد اقل یکی از این سطوح همئومورف است، که اثبات کامل آن از حوصلهٔ این کتاب خارج است، و تنها اجمالی از آن را مطرح می‌کنیم. دوم، اینکه هیچ دو تایی از خانوده‌های مطرح شده در قضیهٔ ۸.۳.۵ همئومورف نیستند؛ که این را به شکل کامل در فصل ۲۶ اثبات می‌کنیم.

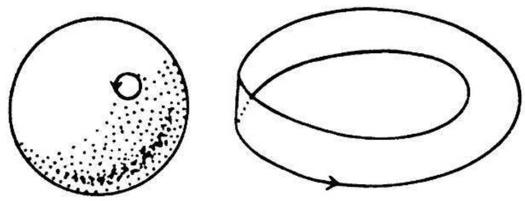
۹.۳.۵ تعریف. حاصل جمع همبندی یک سطح و یک تیوب را اصلاحاً **دوختن دسته به سطح** می‌نامند؛ که در اصطلاح **دسته** تیوبی است که قرصی باز از آن حذف شده است. دلیل این اسمگذاری روشن است (به شکل ۱۲.۵—(ه) و (و) توجه شود).

برخی اوقات، دوختن دسته به سطح را **دوختن به یک استوانه** نیز می‌گویند. برای این منظور، دو قرص باز از سطح جدا نمده و سپس مطابق شکل ۱۲.۵—(الف) این استوانه را به دو لبهٔ حفره‌های ایجاد شده می‌دوزیم. لازم است این دوخت با احتیاط انجام گردد، اگر استوانه را بی احتیاط بدوزیم (یعنی، جهت قرار گرفتن بر لبه‌ها را عکس کنیم)، نتیجه تغییر خواهد نمود. این معادل با دوختن بطری کلاین با سطح مورد نظر خواهد بود.

شکل ۱۲.۵: در (الف) یک استوانه و در (ب) یک دسته دوخته می‌شود.



شکل ۱۳.۵



۱۰.۳.۵ تعریف. حاصل جمع همبندی یک سطح و یک صفحهٔ تصویری حقیقی را اصلاحاً **دوختن نوار موبیوس به سطح** می‌نامند (به شکل ۱۳.۵ توجه شود). چرا که سطح حاصل از حذف یک قرص باز از صفحهٔ تصویری حقیقی، دقیقاً همان نوار موبیوس است (به بخش ۲.۳ توجه شود).

سطوحی که با جمع همبندی با $\mathbb{RP}^2$ حاصل می‌شوند، در این خاصیت مشترکند که همگی (به اصطلاح) **یک رو** هستند. دلیل این امر آن است که سطوح مذکور همگی دارای نوار موبیوس (به عنوان یک بخش) هستند، که خود این موضوع، دارای

پیامدهایی خاص به خود است، که در بخش ۲.۳ توضیح داده شد.

۱۱.۳.۵ تعریف. سطح را در صورتی **جهتپذیر** گوئیم که نشود نوار موبیوس را به عنوان جزئی از آن شناخت. از سوی دیگر، سطح را در صورتی **جهتناپذیر** گوئیم که بشود نوار موبیوس را به عنوان بخشی از آن در نظر گرفت.

۱۲.۳.۵ مثال. بطری کلاین و صفحهٔ تصویری سطوح جهتناپذیر هستند. در حالی که کره، تیوب و تیوب دو تایی، نمونه‌هایی از سطوح جهتپذیر هستند.

۱۳.۳.۵ تعریف. فرض کنیم

$$\mathbb{S}^2 \# m\mathbb{T} := \mathbb{S}^2 \# \underbrace{\mathbb{T} \# \mathbb{T} \# \cdots \# \mathbb{T}}_{m \text{ کپی}} \qquad (m \geq 0)$$

$$\mathbb{S}^2 \# n\mathbb{RP}^2 := \mathbb{S}^2 \# \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{n \text{ کپی}} \qquad (n \geq 1)$$

$\mathbb{S}^2 \# m\mathbb{T}$ را سطح جهتپذیر استاندارد از جنس m و $\mathbb{S}^2 \# n\mathbb{RP}^2$ را سطح جهتناپذیر استاندارد از جنس n می‌نامیم.

در اینجا بطور طبیعی این سؤال مطرح می‌شود که «حاصل جمع همبندی چند تیوب و چند صفحهٔ تصویری حقیقی، چه سطحی می‌شود؟» به بیان دیگر سطح

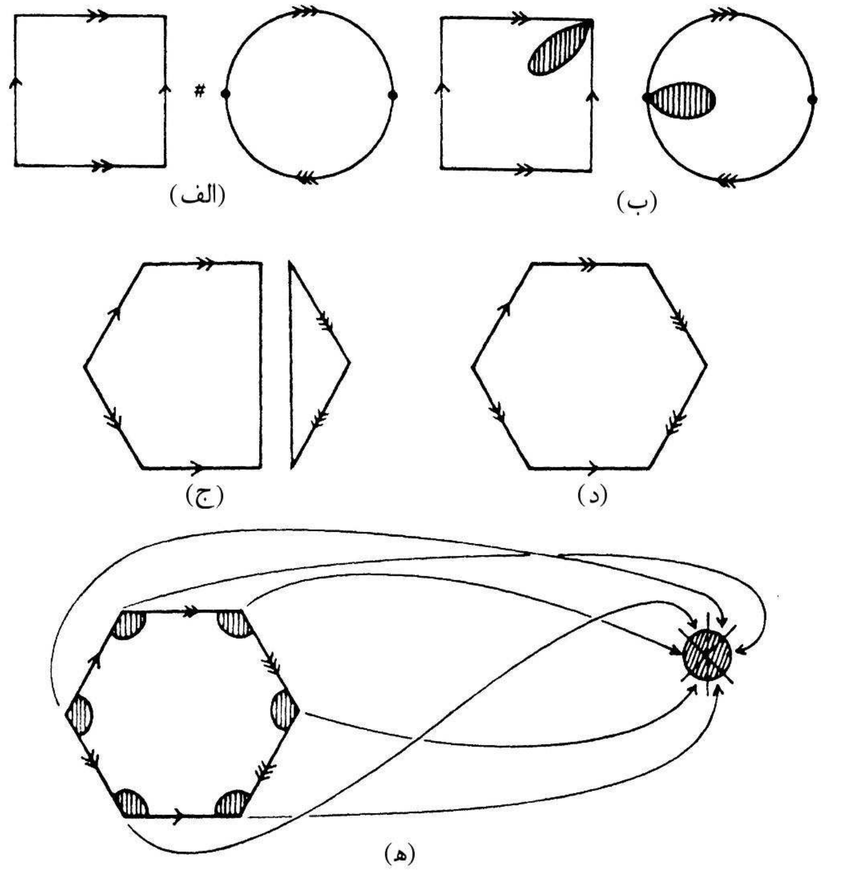
$$m\mathbb{T} \# n\mathbb{RP}^2 = \underbrace{\mathbb{T} \# \mathbb{T} \# \cdots \# \mathbb{T}}_{m \text{ کپی}} \# \underbrace{\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2}_{n \text{ کپی}}$$

که $m, n \geq 1$، با کدامین سطح استاندارد همئومورف است؟ روشن است که چنین سطحی چهتناپذیر می‌باشد. در نتیجه، بنابه قضیهٔ ۸.۳.۵ باید k ای یافت شود که این سطح با $k\#\mathbb{RP}^2$ همئومورف باشد. ابتدا مقدار k را برای حالت $n = m = 1$ تعیین می‌کنیم.

۱۴.۳.۵ لم. $\mathbb{T}\#\mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$.

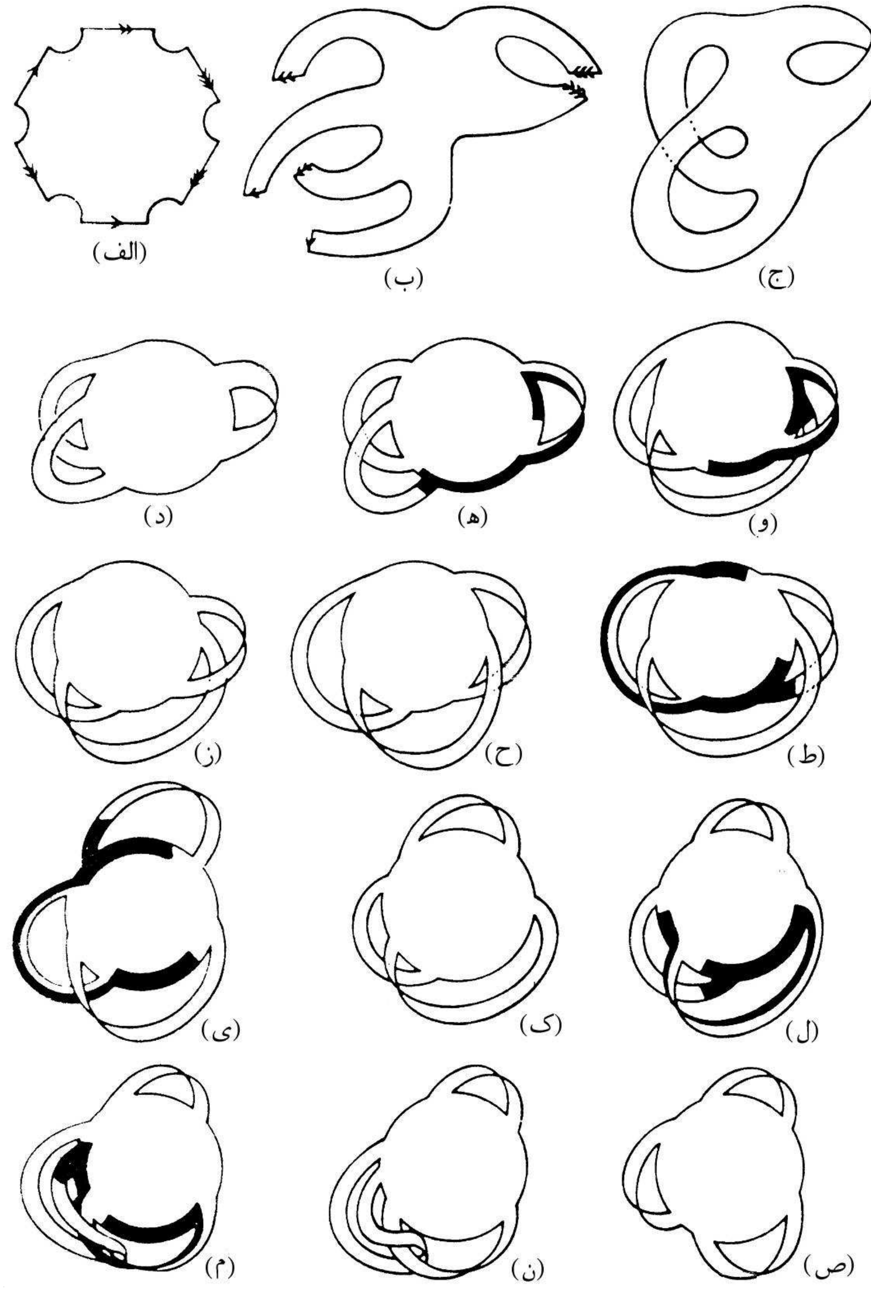
اثبات: سطح $\mathbb{T}\#\mathbb{RP}^2$ را با S_1 و $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$ را با S_2 نشان می‌دهیم. قدم اول بیان این سطوح به صورت سطوح یکی‌گیری شده می‌باشد. S_1 عبارت است از سطح خارج قسمتی حاصل از ناحیهٔ هشت ضلعی X مشروح در شکل ۱۴.۵.

شکل ۱۴.۵

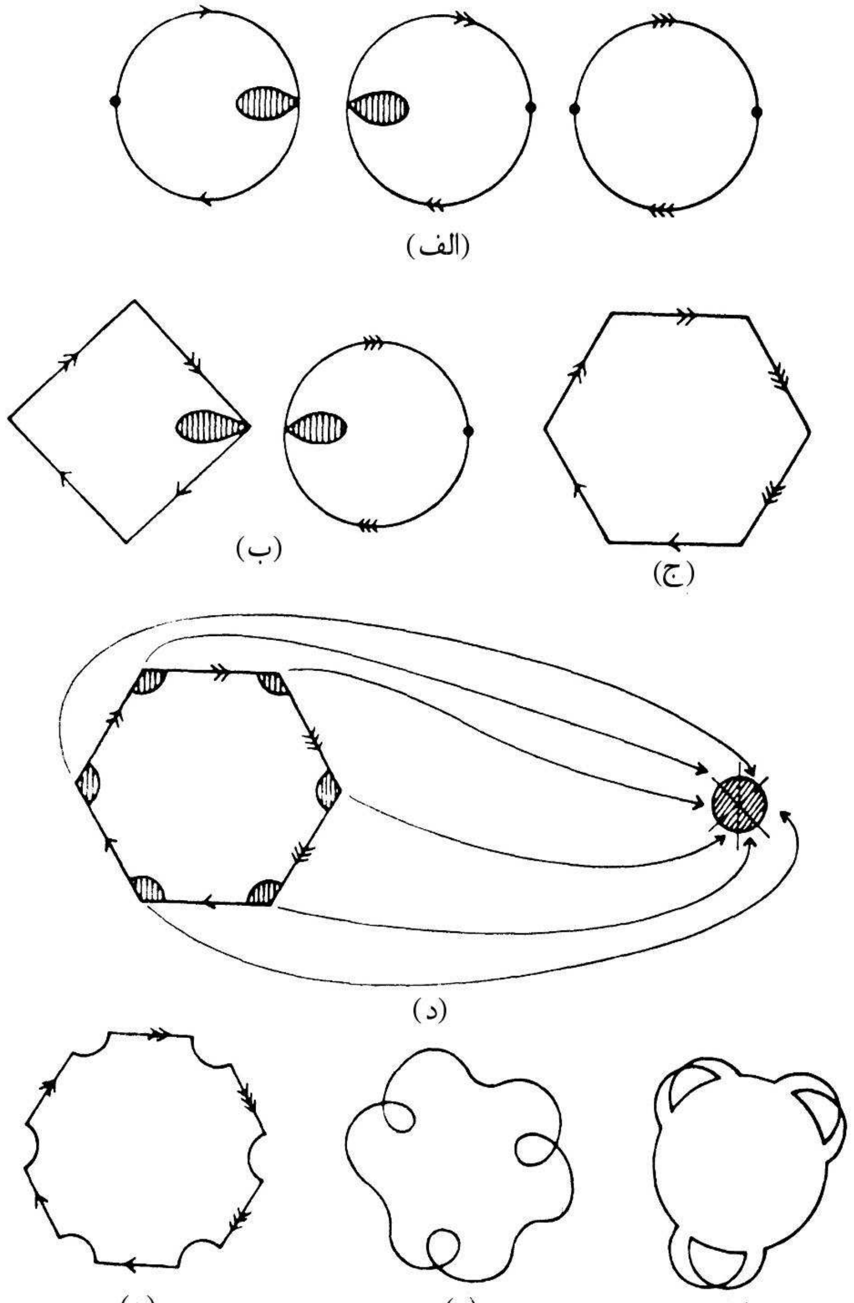


توجه شود که همهٔ رئوس X با یک نقطه در S_1 یکی گرفته می‌شوند، و همسایگی‌ای از این نقطه در S_1 می‌شود یافت نمود که با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^2)$ همئومورف است؛ به شکل ۱۴.۵ — (ه) توجه شود. با حذف این همسایگی، شکل ۱۵.۵ — (الف) حاصل می‌گردد و در ادامه، با انجام یکی‌گیریهای لازه به شکل ۱۵.۵ — (ج) می‌رسیم: این فضا با فضای نشان داده شده در شکل ۱۵.۵ — (د) همئومورف است. اکنون، لازم است تا دنباله‌ای از همئومورفیسمها به گونه‌ای ارائه کنیم که نشان دهد شکلهای ۱۵.۵ — (د) و (ص) همئومورف می‌باشند.

شکل ۱۵.۵



شکل ۱۶.۵



از سوی دیگر، $S_۲$ با فضای یکی گیری شدهٔ در شکل ۱۶.۵ −(ج) قابل بیان است. با حذف همسایگی $\mathrm{Int}(D_۲)$ (مشخص شده در شکل ۱۶.۵ −(۴)) که با یک قرص باز همیومورف است و سپس انجام یکی گیریهای لازم، به فضای در شکل ۱۶.۵ −(۷) می‌رسیم. روشن است که همیومورفیسم

$$h : S_۱ - \mathrm{Int}(D_۱) \cong S_۲ - \mathrm{Int}(D_۲)$$

را داریم. بعلاوه روشن است که h همیومورفیسم

$$\partial(S_۱ - \mathrm{Int}(D_۱)) \cong \partial(S_۲ - \mathrm{Int}(D_۲))$$

را القاء می‌کند. این همئومورفیسم بر مرزها به همئومرفیسمی بر کل $D_۱$ و بروی $D_۲$ می‌شود توسیع نمود: اگر $h : \partial(D_۱) \to \partial(D_۲)$ همئومورفیسم باشد و $h_۱ : D_۱ \cong \mathbb{D}^۲$ و $h_۲ : D_۱ \cong \mathbb{D}^۲$، در این صورت $x \in \mathbb{D}^۲$ را در مختصات قطبی به صورت $x = (r, t)$ می‌نویسم که $۰ \le t \le ۱$ و $t \in \partial(\mathbb{D}^۲) = \mathbb{S}^۱$. تابع $H : D_۱ \to D_۲$ را با ضابطهٔ $H(y) = h_۲^{-۱}(r, h_۲ \circ h \circ h_۱^{-۱}(y))$ تعریف می‌کنیم که $h_۱(y) = (r, t) \in \mathbb{D}^۲$. روشن است که $H|_{\partial D_۱} = h$ و نیز H همئومرفیسم می‌باشد. بنابراین

$$S_۱ = (S_۱ - \mathrm{Int}(D_۱)) \cup D_۱ \cong (S_۲ - \mathrm{Int}(D_۲)) \cup D_۲ = S_۲$$

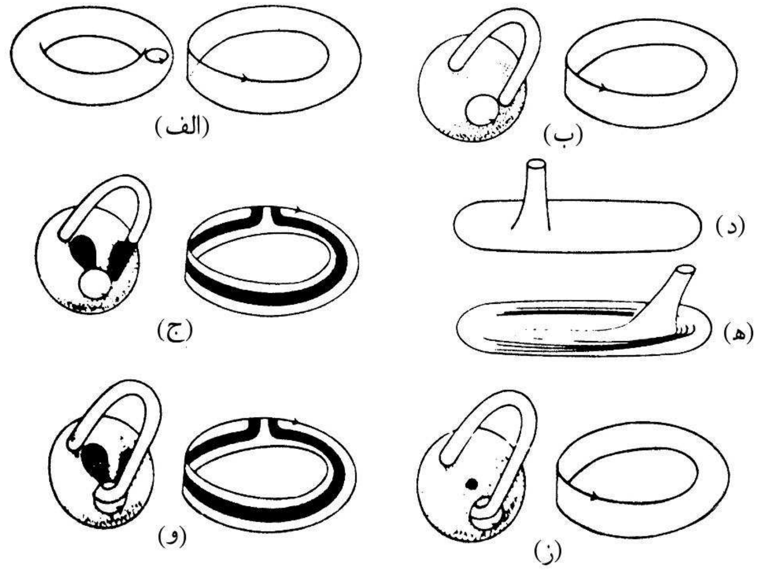
که اثبات لم ۱۴.۳.۵ را تکمیل می‌کند. □

۱۵.۳.۵ یادداشت. روش دیگری برای تجسم همئومورف بودن $S_۱$ و $S - ۲$ وجود دارد. با نمایش جمع همبندی $\mathbb{T}\#\mathbb{RP}^۲$ به صورت یک دسته (تیوب با یک سوراخ) به همراه یک نوار موبیوس که به آن دوخته شده است، شروع می‌کنیم. این مطلب در شکل ۱۷.۵ −(الف) نشان داده شده است و در آنجا ملاحظه می‌شود که چگونه با شکل ۱۷.۵ −(ب) همئومورف است. با اعمال همئومورفیسمهای نشان داده شده در شکلهای ۱۷.۵ −(ج) تا (و)، به شکل ۱۷.۵ −(ز) می‌رسیم.

بطری کلاینی که از آن یک قرص جدا شده است را در نظر بگیرید: به شکل ۱۸.۵ توجه شود.

به این ترتیب ملاحظه می‌گردد که $S_۱ \cong K\#\mathbb{RP}^۲$، که K نمایشگر بطری کلاین است. ولی $K \cong \mathbb{RP}^۲\#\mathbb{RP}^۲$ و بنابراین $S_۱ \cong S_۲$: که می‌خواستیم اثبات گردد.

شکل ۱۷.۵



۱۶.۳.۵ تمرین.

۱) قضیهٔ ۶.۳.۵ را اثبات کنید. آیا همهٔ کلاسهای همئومورف از سطوح نسبت به عمل جمع همبندی گروه تشکیل می‌دهند؟ چرا؟ و چرا نه؟

۲) فرض کنید M_1 و M_2 دو $n-$منیفلد همبند فشرده باشند. فرض کنید D_1 و D_2 زیر مجموعه‌هایی بترتیب از M_1 و M_2 باشند که توسط h_1 و h_2 با $\mathrm{Int}(\mathbb{D}^n)$ همئمورفند. جمع همبندی M_1 و M_2 را به صورت فضای خارج قسمتی $\Big((M_1 - \mathrm{Int}(D_1))\cup((M_2-\mathrm{Int}(D_2))\Big)/\sim$ تعریف می‌کنیم، که $\sim$ عنصر $x \in \partial((M_1 - \mathrm{Int}(D_1))$ را با $h_2^{-1}\circ h_1(x)$ یکی می‌گیرد. ثابت کنید $M_1\#M_2$ نیز $n-$منیفلد است.

۳) فرض کنید $S = n\mathbb{T}\#m\mathbb{RP}^2$ با $1 \leq m,n$. S با کدامیک از سطوح استاندارد همئومورف است؟

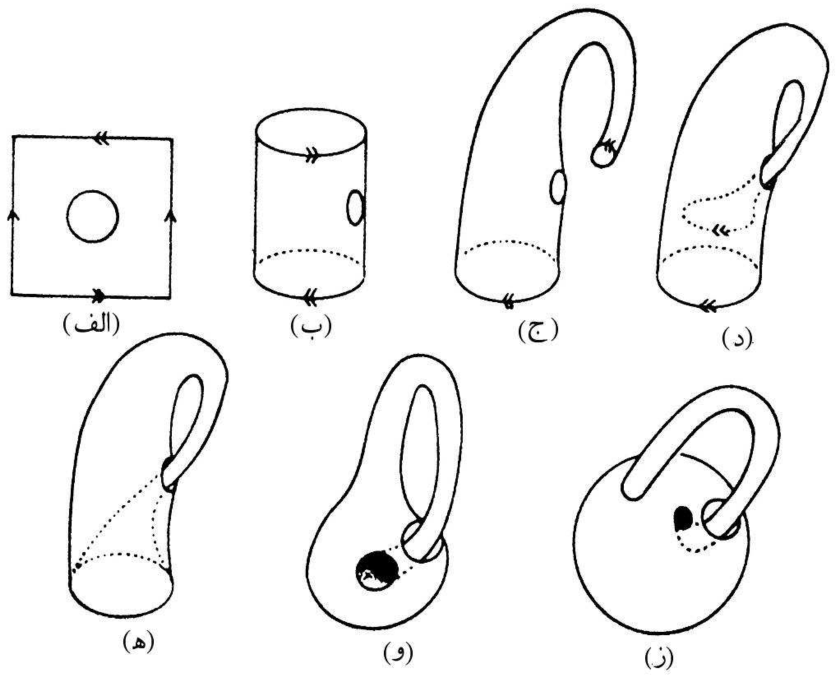
۴) فرض کنید S سطح است. ثابت کنید S درست با تنها یکی از سطوح زیر همئومورف است، که K بطری کلاین می‌باشد و $n > 0$:

 18/9/05

$\mathbb{S}^{۲}\#n\mathbb{T}, \qquad \mathbb{RP}^{۲}\#n\mathbb{T}, \qquad K\#n\mathbb{T}.$

۵) فرض کنید سطح S یک G–فضا باشد، که $G = \mathbb{Z}_{۲n+۱}$ گروهی دوری و از مرتبهٔ زوج است. ثابت کنید S/G سطح است. توجه شود که شرط آزادی عمل G بر S را الزامی ندانستیم.

شکل ۱۸.۵

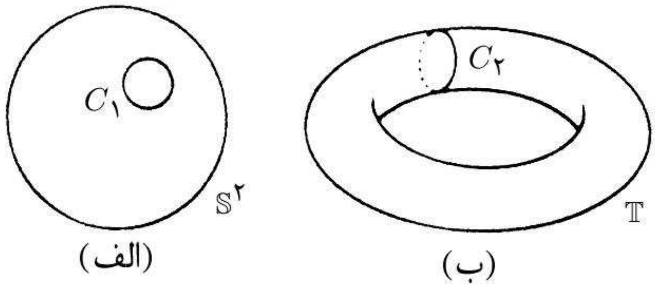


اکنون نوبت آن فرا رسیده است که قسمت اول از قضیهٔ دسته بندی ۸.۳.۵ را اثبات کنیم. برای این منظور به تعریف زیر نیاز داریم.

۱۷.۳.۵ تعریف. زیر فضایی از یک سطح را در صورتی **خم بستهٔ ساده** گوئیم که با دایره $\mathbb{S}^{۱}$ همئومورف باشد.

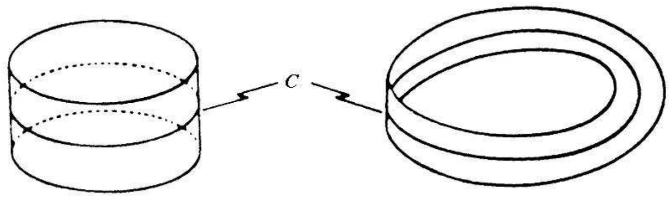
چنانچه C خم بستهٔ ساده‌ای در سطح S باشد، در صورتی می‌گوئیم C سطح S را **تجزیه** می‌کند که $S - C$ همبند نباشد. به عبارت دیگر، پس از برش S در راستای C، سطح به دو یا چند مؤلفه تقسیم شود (شکل ۱۹.۵ را مشاهده کنید).

شکل ۱۹.۵: در (الف) C_1 سطح $\mathbb{S}^1$ را تجزیه نکرده است، ولی در (ب) C_2 سطح $\mathbb{T}$ را تجزیه نموده است.



اثبات قضیهٔ ۸.۳.۵: گیریم S سطح و C خم بستهٔ ساده‌ای بر S باشد که آن را تجزیه نکرده است. در این صورت هر همسایگی از C یا با استوانه همئومورف است و یا با نوار موبیوس (به شکل ۲۰.۵ توجه شود). این حکم از نظر شهودی بدیهی است.

شکل ۲۰.۵



حال درون این استوانه یا نوار موبیوس را از سطح حذف می‌کنیم. در حالت اول، به دو حفرهٔ ایجاد شده دو قرص می‌دوزیم و در حالت دوم، به تنها حفرهٔ ایجاد شده یک قرص می‌دوزیم. پس به سطحی دیگر M_1 می‌رسیم. روشن است که M عبارت از سطح M_1 است که استوانه‌ای را به آن (بطور معمولی یا غیر معمولی) دوخته‌ایم و یا اینکه نوار موبیوسی را به آن دوخته‌ایم. به بیان دیگر $M = M_1\#\mathbb{RP}^2$، $M = M_1\#K$ و یا $M = M_1\#\mathbb{T}$.

اکنون به M_1 توجه نموده و خم بستهٔ ساده‌ای که M_1 را تجزیه نمی‌کند (در صورت وجود) انتخاب می‌کنیم و سپس مطابق عملیات بالا انجام داده و سطح M_2 را بدست می‌آوریم که $M_1 = M_2\#\mathbb{T}$، $M_1 = M_2\#K$ و یا $M_1 = M_2\#\mathbb{RP}^2$. با ادامهٔ این روند، پس از i مرحله به سطح M_i می‌رسیم که $M = M_1\#i_1\mathbb{T}\#i_2K\#i_3\mathbb{RP}^2$ و $i = i_1 + i_2 + i_3$. ثابت می‌شود که تابت روند پس از تعدادی متناهی مرحله (مثلاً

$k \geq ۰$ تا) می‌ایستد؛ به عبارت دیگر، همهٔ خمهای بستهٔ ساده در M_k آن را تجزیه نمی‌کنند. سر انجام با استفاده از این حکم که «اگر سطح M_k به گونه‌ای باشد که هر خم بستهٔ ساده بر آن، آن را تجزیه نمی‌کند، در این صورت M_k با کره همئومورف است»، کار را تمام می‌کنیم.

با جمعبندی ادعاهای اثبات نشدهٔ بالا، ملاحظه می‌کنیم که به ازای یک $l, m, n \geq ۰$ ای (که $l+m+n=k$) سطح M با $X = \mathbb{S}^۲\#l\mathbb{T}\#mK\#n\mathbb{RP}^۲$ همئومورف است. با بکارگیری لم ۱۴.۳.۵ براحتی دیده می‌شود که اگر $m+n=۰$، آنگاه X با $\mathbb{S}^۲\#l\mathbb{T}$ همئمورف است و اگر $m+n>۰$، آنگاه X با $\mathbb{S}^۲\#(۲l+m+n)\mathbb{RP}^۲$ همئومورف می‌باشد.

برای تکمیل اثبات قضیهٔ طبقه بندی، لازم است نشان داده شود که هیچ دو تایی از سطوح مطرح شده در قضیهٔ ۸.۳.۵ همئومورف نسیتند؛ این را در فصل ۲۶ انجام می‌دهیم. □

۱۸.۳.۵ تمرین.

۱) نشان دهید که در تیوب $\mathbb{T}$ دو خم بستهٔ ساده و متمایز (ولی نه لزوماً مجزا) مانند $C_۱$ و $C_۲$ وجود دارد که $\mathbb{T}-(C_۱\cup C_۲)$ همبند نیست.

۲) نشان دهید که تیوب $\mathbb{T}$ هیچ سه خم بستهٔ سادهٔ متمایز $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ ندارد که $\mathbb{T}-(C_۱\cup C_۲\cup C_۳)$ همبند باشد.

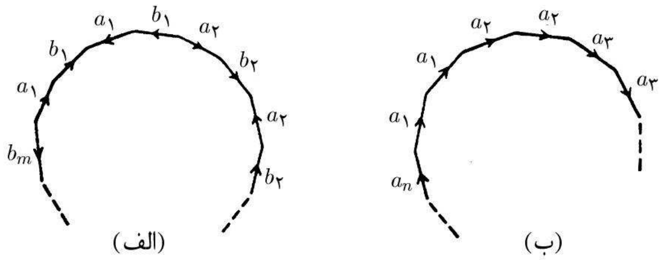
۳) تمرینات (۱) و (۲) را برای هر سطح دیگری تعمیم دهید.

این فصل را با حکمب به پایان می‌بریم که قبلاً قولش را دادیم: هر سطحی را به صورت فضای خارج قسمتی یک ناحیهٔ چند ضلعی در $\mathbb{R}^۲$ می‌توان نمایش داد.

۱۹.۳.۵ قضیه. ۱) اگر M سطح چهتپذیری از جنس $m \geq ۱$ باشد، در این صورت M فضای خارج قسمتی یک ناحیهٔ $۴m$–ضلعی است به گونه‌ای که در شکل ۲۱.۵–(الف) نشان داده شده است.

۲) اگر M سطح چهتناپذیری از جنس $n \geq ۱$ باشد، در این صورت M فضای خارج قسمتی یک ناحیهٔ $۲n$–ضلعی است به گونه‌ای که در شکل ۲۱.۵–(ب) نشان داده شده است.

شکل ۲۱.۵



اثبات: برای اثبات این حکم کافی است نشان دهیم که $m\mathbb{T}$ و $n\mathbb{RP}^2$ به شکل گفته شده قابل نمایش هستند. در واقع حالت $m \leq 2$ و $n \leq 3$ را مطالعه می‌کنیم. $\mathbb{T}\#\mathbb{T}$ به صورت در شکل ۲۳.۱۱ تشریح شده است. روند تعمیم مطلب و بدست آوردن اولین حکم در خصوص سطوح چهتپذیر، واضح است. برای حالت سطوح جهتناپذیر، شکل ۲۳.۱۱ را برای $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$ و شکل ۲۴.۱۱ را برای $\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2\#\mathbb{RP}^2$ داریم. باز هم مراحل بعدی کار واضح است. □

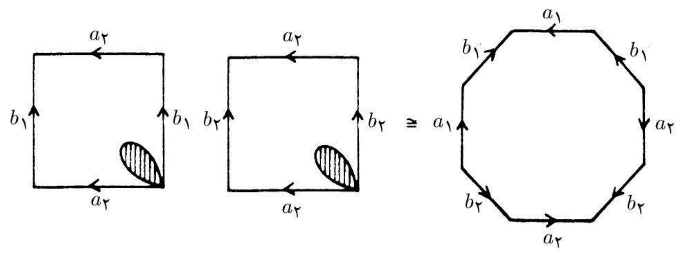
۲۰.۳.۵ تمرین.

۱) منظور از n–منیفلد مرزدار M، فضایی است هاوسدورف که در آن هر نقطه‌ای دارای همسایگی‌ای همئومورف با $\mathbb{R}^n$ یا نیم–فضای بالایی در $\mathbb{R}^n$ (یعنی، با $\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_n \geq 0\}$) دارد. مجموعهٔ نقاطی در M که همسایگی‌ای همئومورف با نیم–فضای بالایی دارند ولی هیچ همسایگی همئومورف با $\mathbb{R}^n$ ندارند را **مرز** M می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم که مرز هر n–منیفلد مرزدار، خود یک $(n-1)$–منیفلد است.

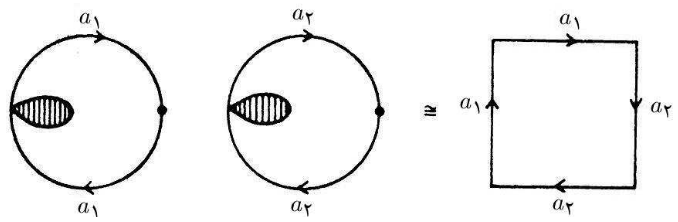
۲) سطح مرزدار، منیفلدی ۲–بعدی، مرزدار و فشرده است. ثابت کنید مرز هر سطح مرزدار، اجتماعی از تعداد متناهی دایره است. نتیجه بگیرید که اگر لبه‌های حاصل از مرز یک سطح را به تعداد متناهی (و مناسب) قرص بچسبانیم، نتیجه سطح خواهد بود.

۳) سطح مرزدار را در صورتی جهتپذیر گوئیم که هیچ نوار موبیوسی در آن نشود سراغ گرفت. ثابت کنید که سطح مرزدار وقتی و تنها وقتی جهتپذیر است که سطح وابسته‌اش (به تمرین (۲) در بالا توجه شود) جهتپذیر باشد.

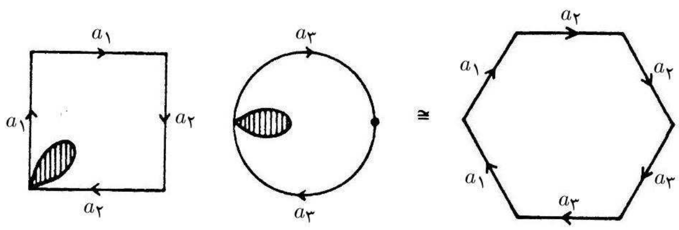
شکل ۲۲.۵



شکل ۲۳.۵



شکل ۲۴.۵



 18/9/05

فصل ٦

هموتوپی

۱.۶ فضای همبند راهی

همبندی در بخش ۳.۴ مطالعه شد. موضوعی که در این بخش مطرح می‌کنیم خیلی شبیه به آن است، ولی اساساً مفهوم همبندی جدیدی به شمار می‌آید: **همبند راهی**. پیش از تعریف این مفهوم، به تعریف زیر نیاز داریم.

۱.۱.۶ تعریف. فرض کنیم X فضایی توپولوژی باشد. نگاشت پیوستهٔ $f : [۰;۱] \to X$ را **راه در** X می‌نامیم. نقطهٔ $f(۰) \in X$ را **ابتدا** و $f(۱) \in X$ را **انتهی** راه مورپ نظر می‌نامیم. در این صورت گفته می‌شود که f راهای از $f(۰)$ به $f(۱)$ است، یا f نقطهٔ $f(۰)$ را به $f(۱)$ متصل می‌کند. برخی اوقات از اصطلاح **مسیر** بجای راه استفاده می‌شود.

۲.۱.۶ یادداشت. توجه شود که نگاشت f که از جنس تابع است، راه نامیده می‌شود؛ نه $f([۰;۱]) \subseteq X$ که از جنس مجموعه می‌باشد. این مجموعه را **خم** یا **منحنی** می‌نامیم.

اغلب $t \in [۰;۱]$ را به عنوان زمان می‌توان تصور نمود. در نتیجه، $f(t)$ وضعیت حرکت در لحظهٔ t را نشان می‌دهد.

۳.۱.۶ مثال. فرض کنیم X فضایی توپولوژی و $x \in X$ نقطه ای دلخواه است.

$X \to [۰;۱] : \varepsilon_x$ با ضابطهٔ $\varepsilon_x(t) = x$ را **راه ثابت در x** می‌نامیم. در این راه، همهٔ وقتمان را در مکان x صرف می‌کنیم!

دو روش ساده و در عین حال کلی برای تولید راههای جدید از روی راههای موجود، وجود دارد که در لم بعدی آنها را تشریح می‌کنیم.

۴.۱.۶ لم. فرض کنیم X فضایی توپولوژی، و f و g دو راه در X باشند. در این صورت

۱) $\bar{f} : [۰;۱] \to X$ با ضابطهٔ $\bar{f}(t) = f(۱-t)$ نیز راهی در X است. این را **راه وارون f** می‌نامیم.

۲) اگر $f(۱) = g(۰)$، آنگاه $f * g : [۰;۱] \to X$ با ضابطهٔ زیر نیز راهی در X است. این را **ضرب f در g** می‌نامیم:

$$(f*g)(t) = \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leq t \leq ۱/۲ \text{ اگر} \\ g(۱-۲t) & ۱/۲ \leq t \leq ۱ \text{ اگر} \end{cases}$$

اثبات: چون مطابق فرض راه $f : [۰;۱] \to X$ پیوسته است، و تابع $h : [۰;۱] \to [۰;۱]$ با ضابطهٔ $h(t) = ۱ - t$ نیز به وضوح پیوسته است، بنابراین $\bar{f} = f \circ h$ نیز پیوسته است و قسمت (۱) ثابت شد. در مورد قسمت (۲)، کافی است از لم چسب ؟؟ استفاده کنیم. چرا که در اینجا $[۰;۱/۲]$ و $[۱/۲;۱]$ در $[۰;۱]$ بسته هستند، f و g پیوسته‌اند، و سر انجام $f(۱) = g(۰)$. □

۵.۱.۶ مثال. فرض کنیم $X = \mathbb{S}^۲$ کرهٔ واحد است و f و g دو راه با ضابطهٔ بترتیب $f(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), ۰)$ و $g(t) = (-\cos(\pi t), ۰, \sin(\pi t))$ هستند. در این صورت

$$\bar{f}(t) = f(۱-t) = (-\cos(\pi t), \sin(\pi t), ۰),$$

و همچنین

$$\begin{aligned}(f*g)(t) &= \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leq t \leq ۱/۲ \text{ اگر} \\ g(۱-۲t) & ۱/۲ \leq t \leq ۱ \text{ اگر} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\cos(۲\pi t), \sin(۲\pi t), ۰) & ۰ \leq t \leq ۱/۲ \text{ اگر} \\ (\cos(۲\pi t), ۰, \sin(۲\pi t)) & ۱/۲ \leq t \leq ۱ \text{ اگر} \end{cases}\end{aligned}$$

٦.۱.٦ تعریف. فضای توپولوژی X را در صورت **همبند راهی** گوئیم که هر دو نقطه از آن را با راهی بتوان بهم متصل نمود. به بیان دیگر، به ازای هر $x_\circ, x_۱ \in X$، راهی f در X چنان یافت شود که $f(\circ) = x_\circ$ و $f(۱) = x_۱$.

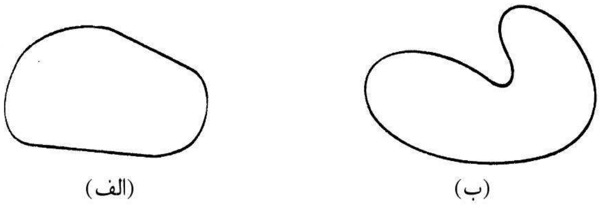
۷.۱.٦ یادداشت. بر اساس لم ؟؟ می‌شود ثابت نمود که شرط لازم و کافی برای اینکه فضایی همبند راهی باشد، این است که نقطه‌ای $x_\circ$ یافت شود که سایر نقاط فضا را با راهی بتوان به آن متصل نمود. در برخی کتب بجای اصطلاح همبند راهی، **همبند مسیری** یا **همبند قوسی** استفاده می‌شود.

۸.۱.٦ مثال. $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی معمولی، همبند راهی است. زیرا، به ازای هر $a, b \in \mathbb{R}^n$ دلخواه، نگاشت $f : [\circ; ۱] \to \mathbb{R}^n$ با ضابطهٔ $f(t) = (۱ - t)a + tb$ راهی در $\mathbb{R}^n$ از a به b است.

مثال بالا را می‌توان تعمیم داد. برای این مطلب، نیاز به تعریف زیر است.

۹.۱.٦ تعریف. زیر مجموعهٔ $E \subseteq \mathbb{R}^n$ را در صورتی محدب گوئیم که به ازای هر $a, b \in E$ مجموعهٔ $\{(۱ - t)a + tb \,|\, 0 \le t \le ۱\}$ تماماً در E قرار داشته باشد. به بیان دیگر، پاره خط واصل میان هر دو نقطه از E، در E قرار داشته باشد. به شکل ۱.٦ توجه شود.

شکل ۱.٦: (الف) محدب و (ب) غیر محدب است



۱۰.۱.٦ مثال. $\mathbb{R}^n$ محدب است. قرص D^n در $\mathbb{R}^n$ محدب است. پاره خط در $\mathbb{R}^۱$ محدب است.

۱۱.۱.٦ قضیه. هر زیر مجموعهٔ محدب از فضایی اقلیدسی (همراه با توپولوژی زیر فضایی‌اش) همبند راهی است.

احکام ؟؟ تا ۱۷.۱.٦ شبیه احکام ۷.۳.۴ تا ۱۲.۳.۴ هستند.

۱۲.۱.٦ قضیه. نگارهٔ هر فضای همبند راهی توسط نگاشتی پیوسته، همبند راهی است.

اثبات: فرض کنیم X همبند راهی بوده و $g : X \to Y$ نگاشتی پیوسته و پوشا باشد. اگر a و b دو نقطه از Y باشند، در این صورت دو نقطهٔ a' و b' در X چنان یافت می‌شوند که $g(a') = a$ و $g(b') = b$. چون X همبند راهی است، راهی f در X از a' به b' وجود دارد. اکنون، $g \circ f$ راهی در Y از a به b می‌باشد. این به معنی همبند راهی بودن Y است. $\square$

۱۳.۱.٦ نتیجه. در صورتی که X و Y فضاهای همئومورف باشند، شرط لازم و کافی برای همبند راهی بودن X، همبند راهی بودن Y است.

۱۴.۱.٦ مثال. ۱) $\mathbb{S}^۱$ همبند راهی است؛ زیرا، $[۰;۱]$ در $\mathbb{R}^۱$ محدب، و بنابراین همبند راهی است. بعلاوه $e : [۰;۱] \to \mathbb{S}^۱$ با ضابطهٔ $e(t) = \exp(۲\pi t i)$ پیوسته و پوشا است.

۲) $\mathbb{R}^{n+۱} - \{0\}$ همبند راهی است. زیرا، هر دو نقطه از آن را با قوسی از یک دایرهٔ غیر گذرنده از مبداء می‌توان بهم متصل نمود.

۳) $\mathbb{S}^n$ همبند راهی است، که $n \geq ۱$؛ زیرا، تصویر پیوستهٔ $\mathbb{R}^{n+۱} - \{0\}$ توسط نگاشت $x \mapsto x/||x||$ می‌باشد.

۴) $\mathbb{RP}^n$ همبند راهی است، که $n \geq ۱$؛ زیرا، تصویر پیوستهٔ $\mathbb{S}^n$ توسط نگاشت $x \mapsto \{-x, x\}$ می‌باشد.

۱۵.۱.٦ قضیه. فرض کنید $\{Y_j \,|\, j \in J\}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های همبند راهی در X است. اگر $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq \emptyset$، آنگاه $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ همبند راهی است.

اثبات: فرض کنیم $a, b \in Y$. در این صورت به ازای $k, l \in J$ ای $a \in Y_k$ و $b \in Y_l$. گیریم c نقطه‌ای دلخواه از اشتراک $\bigcap_{j\in J} Y_j$ است. چون Y_k همبند راهی است و $a, c \in Y_k$، راهی f در Y_k از a به c وجود دارد. به صورت مشابه، راهی g در Y_l از c به b وجود دارد. اکنون، راهی از a به b با ضابطهٔ $h := f * g$ وجود دارد. روشن است که این نگاشت مقدار خود را در $Y_k \cup Y_l \subseteq Y$ می‌گیرد. $\square$

۱٦.۱.٦ مثال. فرض کنیم $n \geq ۱$. در این صورت $\mathbb{S}^n$ همبند راهی است. زیرا، گیریم $S^+ := \{x \in \mathbb{S}^n | x_{n+۱} \geq ۰\}$ و $S^- := \{x \in \mathbb{S}^n | x_{n+۱} \leq ۰\}$. در این صورت

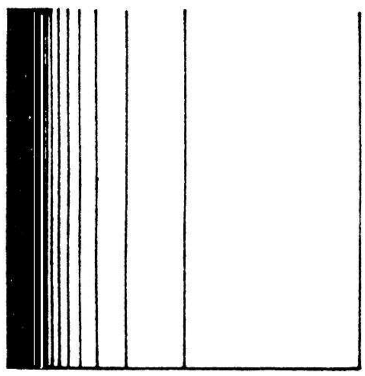
S^+ نگارهٔ پیوستهٔ $D^n \subset \mathbb{R}^n$ توسط نگاشت $x \mapsto (x_1, \cdots, x_n, \sqrt{1 - \|x\|})$ است. در نتیجه S^+ همبند راهی است. به صورت مشابه، S^- نیز همبند راهی است. از طرفی $S^+ \cap S^- = \{x \in \mathbb{S}^n \,|\, x_{n+1} = 0\}$. در نتیجه، بنابه قضیهٔ ۱۵.۱.٦ فضای $\mathbb{S}^n$ همبند راهی است.

۱۷.۱.٦ قضیه. گیریم X و Y فضاهای توپولوژی باشند. شرط لازم و کافی برای اینکه $X \times Y$ همبند راهی باشد، این است که X و Y همبند راهی باشند.

اثبات: کاملاً شبیه اثبات حکم ۱۲.۳.۴ است؛ تنها کافی است در همه جا بجای همبند، از همبند راهی استفاده شود. □

شاید احکام بالا چنین القاء کند که همبندی و همبند راهی بودن عملاً یکی است! ولی چنین نیست.

شکل ۲.٦: کک و شانه



۱۸.۱.٦ قضیه. هر فضای همبند راهی، الزاماً همبند است. این طور نیست که هر فضای همبند، الزاماً همبند راهی باشد.

اثبات: فرض کنیم X فضایی همبند راهی باشد. ثابت می‌کنیم X همبند است. برای این منظور فرض کنیم $X = U \cup V$، که U و V زیر مجموعه‌هایی باز و غیر تهی از X هستند. چون X همبند راهی است و U و V غیر تهی هستند، راهی $f : [0; 1] \to X$ با $f(0) \in U$ و $f(1) \in V$ وجود دارد. چون $[0; 1]$ همبند است، $f([0; 1])$ نیز همبند است و بنابراین $U \cap f([0; 1])$ و $V \cap f([0; 1])$ نمی‌توانند مجزا باشند. در نتیجه U و V نمی‌توانند مجزا باشند، و بنابراین X همبند است.

برای نشان دادن حکم دوم، کافی است مثالی از یک فضای همبند بیاوریم که همبند راهی باشد. مثالی که ارائه می‌کنیم، تحت عنوان **کک و شانه** معروف است؛ به شکل ۲.٦ توجه شود. زیر مجموعهٔ $X \subset \mathbb{C}$ را در نظر بگیرید که $X = A \cup B$ و

$$\text{کک} \qquad A = \{i\},$$
$$\text{شانه} \qquad B = [۰;۱] \cup \left\{ \frac{۱}{n} + yi \,\middle|\, n \in \mathbb{N},\ ۰ \leq y \leq ۱ \right\}.$$

ادعا می‌کنیم که X همبند و غیر همبند راهی است. برای اثبات همبندی X، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که B همبند راهی است، چرا که $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ و همهٔ $B_n = [۰;۱] \cup \{۱/n + yi \,|\, ۰ \leq y \leq ۱\}$ ها همبند راهی هستند و با هم اشتراک غیر تهی دارند؛ در نتیجه، بنابه قضیهٔ ۱۵.۱.٦، B همبند راهی است. فرض کنیم U زیر مجموعه‌ای باز و بسته از X باشد. می‌توانیم فرض کنیم که $A \subseteq U$، چرا که در غیر این صورت $X - U$ زیر مجموعه‌ای باز و بسته است که A را در بر دارد. چون U باز است و $i \in U$، عددی $\varepsilon > ۰$ چنان وجود دارد که $\{x \,|\, |i-x| < \varepsilon\} \cap X \subseteq U$. اکنون، عددی صحیح n ای وجود دارد که $۱/n + i \in U$؛ به ویژه $U \cap B \neq \emptyset$. اما، B همبند است و $U \cap B$ زیر مجموعه‌ای غیر تهی، باز و بسته از B. بنابراین $U \cap B = B$. یعنی $B \subset U$. ولی $X = A \cup B$ و $A \subset U$؛ در نتیجه $U = X$ و بنابراین X همبند می‌باشد. (در واقع اثبات نموده‌این که $B \subseteq X \subseteq \bar{B}$ و در نتیجه، بنابه تمرین ۱۴.۳.۴—(٦) فضای X همبند است.)

برای اثبات اینکه X همبند راهی نیست، نشان می‌دهیم که تنها راهی در X که از $i \in X$ شروع می‌گردد، راه ثابت است. گیریم f راهی در X باشد که از i شروع می‌گردد. چون $\{i\}$ در X بسته است، $f^{-۱}(i)$ در $[۰;۱]$ بسته می‌باشد و بعلاوه چون $۰ \in f^{-۱}(i)$، داریم $f^{-۱}(i) \neq \emptyset$. گیریم U زیر مجموعهٔ باز $X \cap \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-i| < ۱/۲\}$ از X باشد. اگر $t_۰ \in f^{-۱}(i)$، در این صورت چون f پیوسته است، $\varepsilon > ۰$ ای چنان یافت می‌شود که به ازای هر $t \in (t_۰ - \varepsilon; t_۰ + \varepsilon)$ ای $f(t) \in U$. ادعا می‌کنیم که $f((t_۰-\varepsilon;t_۰+\varepsilon)\cap[۰;۱]) = \{i\}$. برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض کنیم $|t_۱ - t_۰| < \varepsilon$ و $f(t_۱) \in B$. چون $U \cap B$ اجتماعی از بازه‌های مجزا است، بازهٔ شامل $f(t_۱)$ در U باز و بسته است (باز است، زیرا U باز می‌باشد، و بسته است، زیرا بازه‌ای به شکل $\{۱/n + i \,|\, ۰ \leq y \leq ۱\} \cap U$ است که $n \in \mathbb{N}$.) اما، این موضوع با همبندی $f((t_۰ - \varepsilon;t_۰+\varepsilon)\cap[۰;۱])$ در تضاد است. بنابراین، $(t_۰-\varepsilon;t_۰+\varepsilon)\cap[۰;۱] \subseteq f^{-۱}(i)$. اکنون، کافی است نشان دهیم که اگر $t_۰ \in f^{-۱}(i)$، آنگاه $f^{-۱}(i) \subseteq (t_۰-\varepsilon;t_۰+\varepsilon)\cap[۰;۱]$، که به معنی باز بودن $f^{-۱}(i)$ می‌باشد. چون $f^{-۱}(i)$ بسته نیز هست و بعلاوه $[۰;۱]$ همبند می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که $f^{-۱}(i) = [۰;۱]$، به بیان دیگر $f([۰;۱]) = \{i\}$.

بنابراین هیچ راهی بین $i \in X$ و نقطه‌ای از $B \subset X$ وجود ندارد که در نتیجه X همبند راهی نیست. □

مثالهای بیشتری از فضاهای همبند و غیر همبند راهی، در تمرین ۲۰.۱.٦ آورده شده است. حکم آخری که در این بخش ثابت می‌کنیم، در ارتباط با زیر مجموعه‌های باز و همبند در فضاهای اقلیدسی است.

۱۹.۱.٦ قضیه. هر زیر مجموعهٔ غیر تهی، باز و همبند در $\mathbb{R}^n$ همبند راهی است.

اثبات: گیریم $p \in E$ و F زیر مجموعهٔ متشکل از همهٔ نقاطی از E باشد که توسط راهی در E قابل اتصال به p هستند. ادعا می‌کنیم F باز است. برای اثبات این مطلب، فرض کنیم $q \in F \subseteq E$. چون E باز است، n–گوی بازی $B_\varepsilon(q) \subseteq E$ با مرکز q وجود دارد. اما هر n–گوی در $\mathbb{R}^n$ همبند راهی است (چرا که با $\mathbb{R}^n$ همئومورف می‌باشد). بنابراین، هر نقطه از $B_\varepsilon(q)$ را توسط راهی به q می‌توان متصل نمود. در نتیجه، هر نقطه از $B_\varepsilon(q)$ را توسط راهی در E به p می‌توان متصل نمود. بنابراین، $q \in B_\varepsilon(q) \subseteq F$ و لذا F باز است.

ادعا می‌کنیم که F بسته نیز هست. برای ملاحظهٔ این امر، $G = E - F$ را در نظر می‌گیریم؛ پس G از آن نقاطی تشکیل می‌شود که به E متعلقند و آنها را توسط هیچ راهی در E به q نمی‌توان متصل نمود. با استدلالی شبیه به آنچه که در مورد باز بودن F گفته شد، می‌توان نشان داد که G باز است و بنابراین F بسته می‌باشد. زیر مجموعهٔ F غیر تهی است، بسته و باز است؛ چون E همبند است، بنابراین $F = E$ و لذا E همبند راهی می‌باشد. □

۲۰.۱.٦ تمرین.

۱) ثابت کنید که هر فضای با توپولوژی ملموس، همبند راهی است

۲) کدارم زیر مجموعه‌های زیر از $\mathbb{C}$ همبند راهی هستند؟
$\{z \,|\, |z| \neq ۱\}, \ \{z \,|\, |z| > ۱\}, \ \{z \,|\, z^۲ \in \mathbb{R}\}$

۳) حکم لم ؟؟ را با فرض اینکه A و B زیر مجموعه‌هایی باز از W هستند، ثابت کنید.

۴) گیریم $X = A \cup B$ زیر فضایی از $\mathbb{R}^2$ باشد که
$$A=\{(x,y)|x=0,-1\leq y\leq 1\},\ B=\{(x,y)|0<x\leq 1, y=\cos(\tfrac{\pi}{x})\}.$$
نشان دهید X همبند است، ولی همبند راهی نیست.

۵) گیریم $X = A \cup B$ زیر فضایی از $\mathbb{R}^2$ باشد که
$$A=\{(x,y)|x=0,-1\leq y\leq 1\},\ B=\{(x,y)|0<x\leq 1, y=\sin(\tfrac{1}{x})\}.$$
نشان دهید X همبند است، ولی همبند راهی نیست.

٦) گیریم $X = A \cup B$ زیر فضایی از $\mathbb{R}^2$ باشد که
$$A=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, y=\tfrac{x}{n}, n\in\mathbb{N}\},\ B=\{(x,y)|\tfrac{1}{2}\leq x\leq 1, y=0\}.$$
نشان دهید X همبند است، ولی همبند راهی نیست.

۷) فرض کنید A زیر مجموع‌ای همبند راهی از فضای X باشد و $\{A_j \,|\, j\in J\}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های همبند راهی از X باشد که با A اشتراک دارند. ثابت کنید $Y = A\cup\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)$ همبند راهی است.

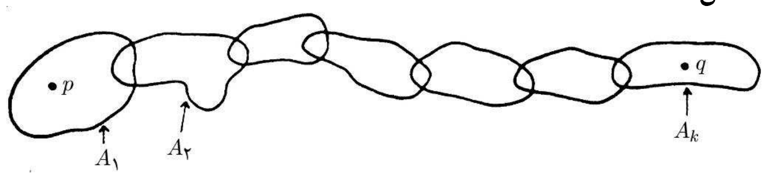
۸) گیریم $\mathbb{S}^n = \mathbb{S}^n_+ \cup \mathbb{S}^n_-$ که
$$\mathbb{S}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\| = 1, x_{n+1}\geq 0\},\ \mathbb{S}^n_- = \{x\in\mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\| = 1, x_{n+1}\leq 0\}.$$
با استفاده از تمرین ۷.۲.۴$-$(۸) ثابت کنید هر $n>0$ ای $\mathbb{S}^n$ همبند راهی است.

۹) گیریم $\sim$ رابطه‌ای بر فضای X است با تعریف «$x\sim y$ اگر و تنها اگر راهی در X از x به y وجود داشته باشد». ثابت کنید $\sim$ رابطه‌ای هم ارزی است. همچنین، ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه X همبند راهی باشد، این است که فضای خارج قسمتی $X/\sim$ همبند راهی باشد.

۱۰) یاد آور می‌شویم که، **همسایگی باز** برای نقطهٔ $x\in X$، مجموعه‌ای باز $U\subseteq X$ است که $x\in U$. فضای X را در صورتی **موضعاً همبند راهی** گوئیم که به ازای هر همسایگی باز U از x، همسایگی باز و همبند راهی V از x یافت شود که $V\subseteq U$. ثابت کنید که اگر X موضعاً همبند راهی بوده و $U\subseteq X$ باز باشد، در این صورت U موضعاً همبند راهی است. ثابت کنید که $\mathbb{R}^n$ و هر زیر مجموعهٔ باز در $\mathbb{R}^n$ موضعاً همبند راهی هستند. ثابت کنید که اگر X موضعاً همبند راهی و همبند باشد، آنگاه X همبند راهی است (این اثباتی مجدد از قضیهٔ ۱۹.۱.٦ می‌باشد).

۱۱) گیریم X فضایی توپولوژی و $p,q \in X$. زیر مجموعه‌های A_1، . . . و A_k از X در صورت یک **زنجیرهٔ ساده** واصل بین p و q نامیده می‌شود که $p \in A_1$، $q \in A_k$ و به ازای هر $i,j \in \{1,\cdots,k\}$ با $|i-j| > 1$ داشته باشیم $A_i \cap A_j = \emptyset$ و به ازای هر $i \in \{1,\cdots,k-1\}$ ای $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$؛ به شکل ۳.٦ توجه شود.

شکل ۳.٦



ثابت کنید که اگر X همبند بوده و $\mathcal{U} = \{U_j \,|\, j \in J\}$ پوششی باز برای X باشد، در این صورت هر جفت از نقاط در X را با زنجیره‌ای ساده از اعضای $\mathcal{U}$ بتوان بهم متصل نمود. (راهنمایی: به ازی $p \in X$، مجموعهٔ نقاطی در X که توسط زنجیره‌ای ساده از اعضاء $\mathcal{U}$ می‌توان بهم متصل نمود را در نظر بگیرید.)

۱۲) با استفاده از تمرین ۱۱، اثبات دیگری برای قضیهٔ ۱۹.۱.٦ بیابید.

۱۳) ثابت کنید که هر n–منیفلد همبند، همبند راهی است.

۱۴) ثابت کنید که هر n–منیفلد، موضعاً همبند راهی است.

۱۵) ثابت کنید که فضای $Y \subseteq \mathbb{R}^2$ با تعریف $Y = A \cup B \cup C$ که

$A=\{(x,y)|x^2+y^2=1, y \geq 0\}$, $B=\{(x,y)|-1 \leq x \leq 0, y=0\}$,
$C=\{(x,y)\,|\, 0 < x \leq 1, y=\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{x})\}$,

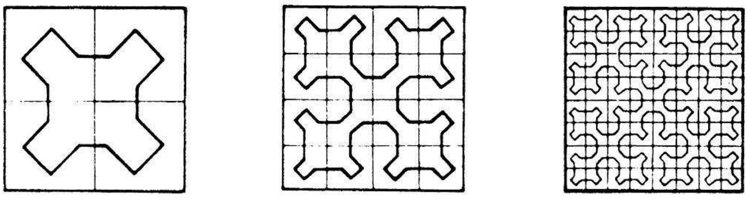
همبند راهی است، ولی موضعاً همبند راهی نیست.

۱٦) گیریم $Z = Y \cup D \subseteq \mathbb{R}^2$ که Y همان است که در تمرین ۱۵ می‌باشد و D دایرهٔ $\{(x,y)|(x-1)^2+y^2=1\}$ می‌باشد. ثابت کنید Z همبند راهی است، ولی موضعاً همبند راهی نیست.

۲۱.۱.٦ راه فضا پر کن. موضوع این قسمت معرفی راهی عجیب است. راهی که قادر است در عین پیوستگی، یک مربع کامل را پوشش دهد! چنین راهی را **راه فضا پر کن** می‌نامند. آقای ج. پئانو حدود سال ۱۸۹۰ میلادی برای اول بار به این گونه خمها برخورد نمود.

راه f به صورت حدی راههای $f_n : I \to I^۲$ تعریف می‌گردد. سه تای اول در شکل ۴.٦ نشان داده شده‌اند. تجسم مرحلهٔ n ام برای خواننده زحمتی ندارد. پس از مرحلهٔ n ام، هر نقطه از مربع $I^۲$ در فاصلهٔ حد اکثر $(۱/۲)^n$ تا نقطه‌ای از $f_n(I)$ قرار دارد. در حالت حدی به نگاشتی پیوسته و پوشا $f : I \to I^۲$ می‌رسیم. توجه کنید که در کلیهٔ مراحل (متناهی) نگاشت $f_n : I \to I^۲$ یکبیک است، بجز در نقاط $۰, ۱ \in I$. عملاً $f_n(۰; ۱) \cong (۰; ۱)$. در حالی که، حد آنها یکبیک نیست.

شکل ۴.٦


$f_۱(I)$ $f_۲(I)$ $f_۳(I)$

۲.۶ کاربرد: قضیهٔ خم ژردان

۱.۲.۶ تعریف. فرض کنید X فضای توپولوژی است. **خم بستهٔ ساده** در صفحه، عبارت است از نگارهٔ همئومورف دایره؛ به عبارت دیگر، مجموعه‌ای چون $C = f(I)$، که $f : I \to X$ پیوسته، یکبیک و با معکوس پیوسته است. توجه شود که f منحصر بفرد نیست. برای راحتی، می‌توان بجای اصطلاح خم بستهٔ ساده در $X = \mathbb{R}^2$، از **خم ژردان** استفاده نمود. در صورتی که خم ژردان از تنها تعدادی پاره خط تشکیل شود، آن را **چند ضلعی ژردان** می‌نامیم.

۲.۲.۶ تعریف. فرض کنید X فضایی توپولوژی است. زیر مجموعهٔ $U \subseteq X$ را در صورتی **مؤلفهٔ همبندی** گوئیم که همبند بوده و زیر مجموعهٔ اکید هیچ زیر مجموعهٔ همبند دیگر از X نباشد؛ به این معنی که اولاً U همبند باشد و در ثانی، اگر $V \subseteq X$ همبند بوده $U \subseteq V$ باشد، آنگاه $V = U$.

۳.۲.۶ لم (دریاچه‌های وادا). از میان دو گزارهٔ مشروح در ذیل، تنها یکی ممکن است درست باشد.

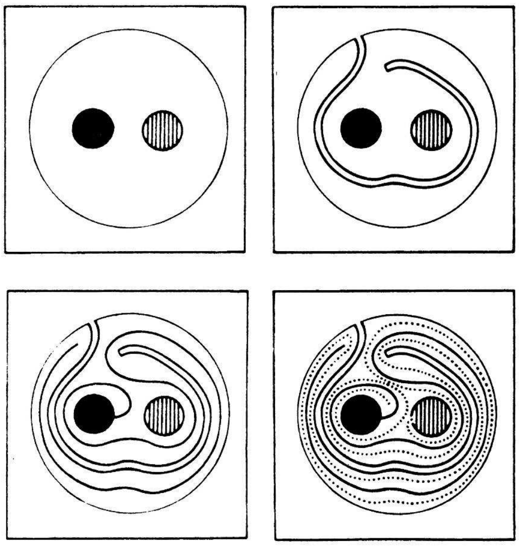
۱) گیریم C خم بستهٔ ساده‌ای در صفحهٔ اقلیدسی باشد. در این صورت، $\mathbb{R}^2 - C$ غیر همبند است و از دو مؤلفهٔ همبندی تشکیل می گردد، که C مرز مشترک آنها است. تنها یکی از این دو مؤلفهٔ همبندی کراندار است.

۲) گیریم C زیر مجموعه‌ای از صفحهٔ اقلیدسی است. اگر D مرز هر یک از مؤلفه‌های متممش $\mathbb{R}^2 - D$ باشد، و نیز اگر $\mathbb{R}^2 - D$ دارای مؤلفه‌ای کراندار باشد، در این صورت D خم بستهٔ ساده است.

اثبات: برای اثبات این ادعا کافی است مثالی بیاوریم که نشان دهد برقراری همزمان آنها منجر به تناقض می‌شود. این مثال را ک. یونیوما K. Yoneyuma در سال ۱۹۱۷ تحت عنوان دریاچه‌های وادا Lakes of Wada مطرح نمود. ناحیه‌ای به شکل یک جفت تاجی در نظر بگیرید؛ شکل ۵.۶ را ملاحظه کنید. این را به صورت جزیره‌ای تصور می‌کنیم که اطراف آن را آب دریایی احاطه نموده است و دو دریاچه نیز درون آن واقع می‌باشد. برای بهتر روشن شدن بحث، فرض می‌کنیم رنگ آب دو دریاچه متفاوت است. هدف این است که با احداث کانالهای مناسب از دریا و هر یک از دریاچه‌ها بر سطح جزیره، سه مجموعهٔ باز همبند تعریف کنیم. در لحظهٔ $t = 0$، کانالی از

دریا می‌کشیم که آب دریل را به فاصلهٔ حداکثر یک واحد از کلیهٔ نقاط جزیره می‌تواند توزیع می‌کند. در لحظهٔ $t = ۱/۲$، کانالی از دریاچهٔ شماره یک حفر می‌کنیم که آب دریاچه را به فاصلهٔ حداکثر $۱/۲$ از هر نقطه از جزیره می‌تواند توزیع نماید. در لحظهٔ $t = ۳/۴$، کانالی از دریاچهٔ شماره دو حفر می‌کنیم که آب دریاچه را به فاصلهٔ حداکثر $۱/۴$ از هر نقطهٔ جزیره می‌توان توزیع کند. این روند را ادامه می‌دهیم تا در لحظهٔ $t = ۱ - (۱/۲)^n$، آب مربوطه را به فاصلهٔ حداکثر $(۱/۲)^n$ واحد از هر نقطهٔ جزیره توزیع نماید. به این ترتیب، دو دریاچه به همراه شبکهٔ کانالهای متصل به آنها و نیز دریا و شبکهٔ کانالهای متصل به آنها، سه مجموعهٔ باز و همبند تشکیل می‌دهند که «مناطق خشک $= D$» مرز مشترک آنها هستند.

شکل ۵.٦: دریاچه‌های وادا



حال اگر حکم (۱) از لم درست باشد، آنگاه ناحیهٔ D در دریاچه‌های وادا یک خم بستهٔ ساده است و بنابراین حکم (۲) از لم غلط است. از سوی دیگر، اگر حکم (۲) از لم درست باشد، آنگاه لزوماً حکم (۲) از لم غلط است؛ و به این ترتیب ادعای ما اثبات شد. □

۴.۲.٦ یادداشت. عملاً حکم (۱) از لم ۳.۲.٦ درست است. حکم (۱) را **قضیهٔ خم ژردان** می‌نامند. این اسم به افتخار س. ژردان C. Jordan نام گزاری شده است؛ کسی که در سال ۱۸۹۰ میلادی اظهار نمود « با اینکه حکم (۱) از نظر شهودی

بدیهی است، باید آن را اثبات نمود». چنین اثباتی را بعداً او. وبلن O. Veblen در سال ۱۹۰۰ ارائه نمود. اثباتی که در اینجا می‌آوریم، اثبات جدید ساده‌تری است که هلگ وربرگ Helge Tverberg ارائه نموده است و از این بابت مرهون او هستیم.

برای راحتی در بحث، قرارداد می‌کنیم که

۵.۲.٦ قرارداد. در ادامه دایره $\mathbb{S}^1$ و قرص واحد $\mathbb{D}^2$ را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از صفحهٔ مختلط $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ در نظر می‌گیریم.

٦.۲.٦ تعریف. فاصلهٔ x و y از $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{S}^1$ به صورت $|x-y|$ قابل محاسبه می‌باشد. اگر A و B دو زیر مجموعهٔ فشردهٔ مجزا در $\mathbb{R}^2$ باشند، فاصلهٔ آنها را به صورت $d(A,B) := \inf\{|b-a| \,|\, a\in A\,,\, b\in B\}$ تعریف می‌کنیم. چنانچه $A=\{a\}$ تک نقطه‌ای باشد، تعریف می‌کنیم $d(a,B) := \inf\{|b-a| \,|\, b\in B\}$.

اولین حکمی که اثبات می‌کنیم، نشان می‌دهد قضیهٔ خم ژردان در مورد چند ضلعی‌های ژردان درست است.

۷.۲.٦ قضیهٔ ژردان برای چند ضلعی‌ها. اگر D یک چند ضلعی ژردان باشد، در این صورت $\mathbb{R}^2 - C$ از دو مؤلفهٔ همبندی تشکیل می‌گردد، که C مرز مشترک آنها است و دقیقاً یکی از آنها کراندار می‌باشد.

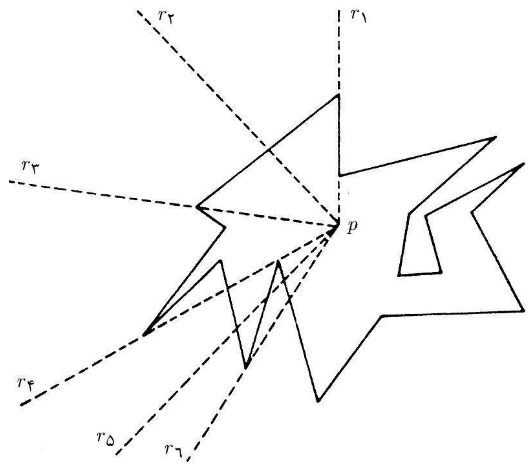
اثبات: ابتدا نشان می‌دهیم که اگر C چند ضلعی ژردان باشد، آنگاه $\mathbb{R}^2 - C$ حد اقل دو مؤلفه دارد. گیریم $p\in\mathbb{R}^2 - C$ و نیم خطی دلخواه r با آغاز از نقطهٔ p است؛ چنین مجموعه‌ای را **شعاع** در p می‌نامیم. گیریم $P(r,p)$ نمایشگر تعداد دفعاتی باشد که r با C برخورد می‌کند، مشروط به اینکه اگر r از یک رأس V بگذرد یا تمام پاره خطی L از C را قطع کند، آنگاه چنین برخوردی را دو به شمار بیاوریم؛ به شرط آنکه هر دو رأس مجاور با V یا L به ترتیب در یک سمت V یا L قرار داشته باشند. در غیر این صورت، آن را یک به شمار می‌آوریم. مثلاً در شکل ٦.٦—(الف) داریم

$$P(r_1,p)=1,\ \ P(r_2,p)=1,\ \ P(r_3,p)=1,$$
$$P(r_4,p)=5,\ \ P(r_5,p)=3,\ \ P(r_6,p)=3.$$

با چرخش شعاع f در p، مقدار $P(r,p)$ در کل تغییر خواهد نمود، ولی زوج و فرد بودن آن اصلاً تغییر نخواهد نمود. بنابراین، $\mathbb{R}^2 - C$ به نقاط زوج و فرد تقسیم می‌گردد: X_e و X_o. روشن است که $\mathbb{R}^2 - C = X_e \cup X_o$ و $X_e\cap X_o=\emptyset$. نشان می‌دهیم

که هر دو مجموعهٔ X_e و X_o در $\mathbb{R}^2 - C$ بازند. گیریم $p \in \mathbb{R}^2 - C$ و ε و $d(p, C) = \varepsilon$. این بدان معنی است که $B_\varepsilon(p) \subseteq \mathbb{R}^2 - C$. زوج و فرد بودن تمام نقاط در $B_\varepsilon(p)$ با زوج و فرد بودن p یکی است؛ چرا که برای ملاحظهٔ اسن مطلب کافی است به ازای $x \in B_\varepsilon(p)$، شعاع گذشته از x و با آغاز از p را در نظر بگیریم. در نتیجه، X_e و X_o بازند و لذا $\mathbb{R}^2 - C$ غیر همبند است و حد اقل دو مؤلفه دارد.

شکل ٦.٦



X_e و X_o همبند راهی هستند. برای مشاهدهٔ این مطلب، پاره خط راست دلخواهی در $\mathbb{C}$ انتخاب نموده و فرض می‌کنیم $a, b \in \mathbb{R}^2 - C$، نزدیک به C و در دو سوی آن قرار دارند. به این ترتیب $a \in X_e$ و $b \in X_o$. حال اگر p نقطهٔ دلخواهی در $\mathbb{R}^2 - C$ باشد، آنگاه به وضوح راهی در $\mathbb{R}^2 - C$ وجود دارد که از p شروع شده و به نقطه‌ای نزدیک به C می‌رود. با ادامهٔ این روند، به صورتی که در حین انجام آن در $\mathbb{R}^2 - C$ بمانیم و همواره نزدیک به C باشیم، عملاً به a یا b خواهیم رسید. این نشان می‌دهد که X_e و X_o همبند راهی هستند و لذا همبند می‌باشند، و برهان تمام است. □

در ادامه به مفهوم پیوستگی یکنواخت و این واقعیت که اگر $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ پیوسته باشد، آنگاه پیوستهٔ یکنواخت نیز هست، نیاز داریم.

۸.۲.٦ تعریف. گیریم M_1 و M_2 دو فضای متری با متر بترتیب d_1 و d_2 باشند. نگاشت $f : M_1 \to M_2$ در صورتی **پیوستهٔ یکنواخت** است که به ازای هر $\varepsilon > 0$، یک $\delta > 0$ ای چنان یافت شود که به ازای هر $x, y \in M_1$ با $d_1(x, y) < \delta$ داشته باشیم $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

۹.۲.٦ یادداشت. پیوستگی یکنواخ از پیوستگی معمولی قوی‌تر است. به این معنی که اگر تابعی پیوستهٔ یکنواخت باشد، آنگاه پیوسته است، ولی عکس آن کلیت ندارد.

۱۰.۲.٦ قضیه. گیریم $M_۱$ و $M_۲$ فضای متری و $f : M_۱ \to M_۲$ پیوسته باشد. در این صورت اگر $M_۱$ فشرده باشد، آنگاه f پیوستهٔ یکنواخت است.

اثبات: گیریم $\varepsilon > ۰$. به ازای هر $x \in M_۱$، عددی $\delta(x) > ۰$ چنان وجود دارد که اگر $y \in M_۱$ و $d_۱(x,y) < \delta(x)$، آنگاه $d_۲(f(x),f(y)) < \varepsilon/۲$. مجموعهٔ $\{B_{\delta(x)}(x) \,|\, x \in M_۱\}$ پوششی باز برای $M_۱$ تشکیل می‌دهد. چون $M_۱$ فشرده است، زیر پوششی متناهی دارد: $\{\{B_{\delta(x_۱)}(x_۱),\cdots,\{B_{\delta(x_n)}(x_n)\}$. گیریم $\delta = \min\{\delta(x_۱),\cdots,\delta(x_n)\}$. در این صورت، اگر $x,y \in M_۱$ و $d_۱(x,y) < \delta$، آنگاه به ازای یک $i \in \{۱,\cdots,n\}$ ای $x \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$ و بنابراین $d_۲(f(x),f(x_i)) < \varepsilon/۲$، زیرا $\delta \le \delta(x_i)$. همچنین

$$d_۱(y,x_i) < d_۱(y,x) + d_۱(x,x_۱) < \delta + \delta(x_i) \le ۲\delta$$

و در نتیجه $d_۲(f(y),f(x_i)) < \varepsilon$. بنابراین

$$d_۲(f(x),f(y)) \le d_۲(f(x),f(x_i)) + d_۲(f(x_i),f(y)) < \varepsilon$$

که حکم را به اثبات می‌رساند. □

۱۱.۲.٦ نتیجه. اگر $f : \mathbb{S}^۱ \to \mathbb{R}^۲$ نگاشتی پیوسته باشد، آنگاه f پیوسته یکنواخت است.

۱۲.۲.٦ نتیجه. گیریم $M_۱$ و $M_۲$ فضای متری با متر بترتیب $d_۱$ و $d_۲$ باشند. اگر $f : M_۱ \to M_۲$ نگاشتی پیوسته بوده و $M_۱$ فشرده باشد، و نیز اگر $f : M_۱ \to f(M_۱)$ همئومورفیسم باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک $\delta > ۰$ ای چنان یافت می‌شود که هر گاه $x,y \in M_۱$ و $d_۲(f(x),f(y)) < \delta$ آنگاه $d_۱(x,y) < \varepsilon$.

اثبات: $f^{-۱} : f(M_۱) \to M_۱$ نگاشتی پیوسته میان فضاهای متری است که در آن $f(M_۱)$ فشرده است. □

۱۳.۲.٦ قضیه. گیریم C خم ژردان با ضابطهٔ $f : \mathbb{S}^۱ \to \mathbb{R}^۲$ باشد. به ازای هر $\varepsilon > ۰$ یک چند جمله‌ای ژردان C' با ضابطهٔ $f' : \mathbb{S}^۱ \to \mathbb{R}^۲$ طوری وجود دارد که به ازای همهٔ $x \in \mathbb{S}^۱$ ها $|f(x) - f'(x)| < \varepsilon$.

اثبات: چون f پیوستهٔ یکنواخت بر $\mathbb{S}^1$ است، $\varepsilon_1 > 0$ ای چنان وجود دارد که

$$|x-y| < \varepsilon_1 \implies |f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

چون $f:\mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}$ همئومرفیسم است، بنابه نتیجهٔ ۱۲.۲.٦، یک $\varepsilon_1 > 0$ ای چنان وجود دارد که

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon_2 \implies |x-y| < \min\{\varepsilon_1, \sqrt{3}\},$$

(دلیل وجود $\sqrt{3}$ این است که اگر A زیر مجموعه‌ای با قطر کمتر از $\sqrt{3}$ باشد، آنگاه A در یک قوس بستهٔ کوچکتر واقع خواهد بود).

گیریم $\delta = \min\{\varepsilon/2, \varepsilon_2\}$. C را توسط مربعات S_1، . . . و S_n طوری می‌توان پوشاند که S_i ها نواحی مشترک (بجز رئوس) ندارند، و همچنین قطر هر مربع برابر δ است. چون $\varepsilon_2 < \delta$، می‌دانیم که $f^{-1}(S_1)$ در یک قوس بستهٔ کوچکتر $A_1 \neq \mathbb{S}^1$ قرار دارد. حال $f(A_1)$ را راست می‌کنیم تا به خم ژردان C_1 برسیم؛ به عبارت دیگر $f_1:\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ را با ضابطهٔ

$$f_1(e(t)) = \begin{cases} f(e(t)) & \text{اگر } e(t) \notin A_1 \\ \left(1 - \dfrac{t-a}{b-a}\right) f(e(t)) + \dfrac{t-a}{b-a} f(e(b)) & \text{اگر } e(t) \in A_1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $A_1 = \{e(t) \,|\, a \le t \le b\}$ و $e(t) = \exp(2\pi i t)$؛ سپس فرض می‌کنیم $C_1 = f_1(\mathbb{S}^1)$، که به وضوح یک خم ژردان می‌باشد. توجه شود که $f(A_1)$ الزاماً در S_1 قرار ندارد. همچنین، توجه داریم که به ازای هر $i = 1, \cdots, n$ ای $f_1^{-1}(S_i) \subseteq f^{-1}(S_i)$.

مرحلهٔ دوم راست نمودن $f_1(A_2)$ است که A_2 قوس کوچکتری شامل $f_1^{-1}(S_2)$ است. این خمی ژردان C_2 با ضابطهٔ $f_2 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ بماد می‌دهد (اگر $f_1^{-1}(S_2) = \emptyset$، در این صورت قرار می‌دهیم $f_2 = f_1$ و $C_2 = C_1$). باز هم توجه می‌کنیم که به ازای هر $i = 1, \cdots, n$ ای داریم $f_2^{-1}(S_i) \subseteq f_2^{-1}(S)$. با ادامهٔ این روند، یک چند ضلعی ژردان C_n با ضابطهٔ $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ می‌رسیم. تحقیق می‌کنیم C_n $\varepsilon-$چسبیده به C است.

فرض کنیم $x \in \mathbb{S}^1$ و $f(x) \neq f_n(x)$. در این صورت به ازای یک $j \ge 1$ ای $f_n(x) = f_j(x) \neq f_{j-1}(x)$ که $f_0 = f$. به این ترتیب x به یک قوس A_j با نقاط انتهایی (مثلاً) y و z متعلق است. همچنین $f_j(z) = f(z)$ و $f_j(y) = f(y)$. داریم

$$|f(x) - f_n(x)| \;=\; |f(x) - f(y) + f_j(y) - f_j(x)|$$

$$\begin{aligned} &= |f(x) - f(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| \\ &\le |f(x) - f(y)| + \delta \le |f(x) - f(y)| + \frac{\varepsilon}{۲}. \end{aligned}$$

چون $|f(z) - f(y)| \le \delta \le \varepsilon_۲$، نتیجه می‌گیریم که $|z - y| < \varepsilon_۱$. ولی $|x - y| <$ $|z - y|$، نتیجه می‌گیریم $|x - y| < \varepsilon_۱$ و بنابراین $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/۲$. در نتیجه $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/۲ + \varepsilon/۲ = \varepsilon$. □

۱۴.۲.٦ قضیه. گیریم C خم ژردانی با ضابطهٔ $f : \mathbb{S}^۱ \to \mathbb{R}^۲$ است. در این صورت مؤلفهٔ کراندار در $\mathbb{R}^۲ - C$ شامل قرص بازی است که دایرهٔ مرزش C را در دو نقطهٔ $f(a)$ و $f(b)$ با $|b - a| > \sqrt{۳}$ قطع می‌کند.

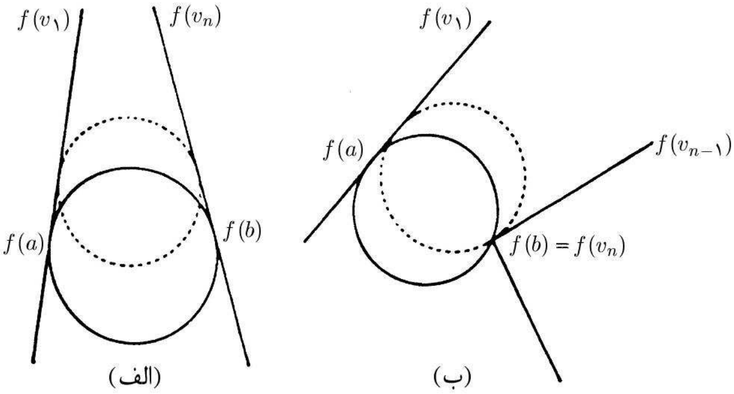
اثبات: گیریم D قرص بازی باشد که $D \subseteq \mathbb{R}^۲ - C$ و نیز دو نقطه $f(a), f(b) \in \partial D$ با $|b-a|$ حد اکثر در نظر می‌گیریم. چنین قرصی وجود دارد. فرض کنیم $|b-a| < \sqrt{۳}$، در این صورت بایستی a و b دو انتهای قوسی A بطول بزرگتر از $۴\pi/۳$ باشند. دایرهٔ مرز نمی‌تواند $f(A) - \{f(a), f(b)\}$ را قطع کند، زیرا به ازای هر $c \in A - \{a, b\}$ ای $\max\{|c-a|, |c-b|\} > |b-a|$.

گیریم $f(v_۱)$، . . . و $f(v_n)$ رئوس C در $f(A)$ باشند که از $f(a)$ شروع و به $f(b)$ ختم می‌شوند. چهار احتمال ممکن است رخ دهد: ۱) $a \neq v_۱$ و $v_n \neq b$؛ ۲) $v_۱ \neq a$ و $v_n = b$؛ ۳) $v_۱ = a$ و $v_n \neq b$؛ ۴) $v_۱ = a$ و $v_n = b$. در حالت اول دایره ∂D به پاره خطهای راست $f(a)f(v_۱)$ و $f(b)f(v_n)$ مماس است. قرصی $D' \subseteq \mathbb{R}^۲ - C$ چسبیده به D چنان وجود دارد که با دایرهٔ $\partial D'$ در نقاط چسبیده به $f(a)$ و $f(b)$، مثلاً $f(a')$ و $f(b')$ تماس دارد، در حالی که می‌دانیم این نقاط برخورد به ترتیب به $f(a)f(v_۱)$ و $f(b)f(v_n)$ متعلقند؛ شکل ۷.٦—(الف) را مشاهده کنید. چون $|b' - a'| > |b - a|$ به تناقض رسیده‌ایم. در حالت دوم دایرهٔ ∂D به $f(a)f(v_۱)$ مماس است و قرصی $D' \subseteq \mathbb{R}^۲ - C$ چنان وجود دارد که $\partial D'$ خم C را در نقطه‌ای نزدیک به $f(a)$ در $f(a)f(v_۱)$ مماس می‌کند و از $f(b)f(v_{n-۱})$ می‌گذرد؛ شکل ۷.٦—(ب) را ملاحظه کنید. این به تناقض می‌انجامد. حالت سوم مشابه حالت دوم است. برای حالت چهارم، ناحیهٔ R محدود به $f(A)$ و پرتوهای از D' به $f(a)$ و $f(b)$ را در نظر می‌گیریم. به ازای هر $x \in \mathbb{R}$، دایره‌ای S_x منحصر بفرد وجود دارد که مرکزش x است و از $f(a)$ و $f(b)$ می‌گذرد. فرض کنیم x بطور پیوسته از مرکز D حرکت کند. در این صورت، به ازای یک x ای به دایره‌ای می‌رسیم S_x که قرص حاصل از آن D_x تماماً در $\mathbb{R}^۲ - C$ قرار می‌گیرد. خوشبختانه، به ازای x ای بخصوص، دایرهٔ S_x یا $f(A)$ را در نقطه‌ای غیر از $f(a)$ و $f(b)$ ملاقات می‌کند، و یا اینکه به یکی از پاره خطهای $f(a)f(v_۲)$ و $f(b)f(v_{n-۱})$

 18/9/05

مماس است. پیشتر نشان دادیم که اولین حالت غیر ممکن است، در حالی که دومین حالت با روش استفاده شده در حالت دوم به تناقض می‌انجامد. همهٔ این تناقضات تنها یک موضوع را القاء می‌کنند؛ به عبارت دیگر $|b-a| \geq \sqrt{3}$. □

شکل ۷.٦



اکنون قسمتی از قضیهٔ ژردان را اثبات می‌کنیم.

۱۵.۲.٦ قضیه. اگر C خم ژردان باشد، در این صورت $\mathbb{R}^2 - C$ حداقل دو مؤلفه دارد.

اثبات: به وضوح یکی از این دو مؤلفه بی‌کران است. می‌خواهیم نشان دهیم که مؤلفه‌ای کراندار نیز دارد. گیریم C_1، C_2 و . . . دنباله‌ای از چند ضلعیهای ژردان همگرا به C باشد (همانند آنچه که در قضیهٔ ۱۳.۲.٦ مشخص شده، با ε_1، ε_2 و . . . که به صفر میل می‌کنند). گیریم C، C_1، C_2 و . . . بترتیب توسط نگاشت f، f_1، f_2 و . . . مطرح شده باشند، به گونه‌ای که وقتی $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. اکنون بنا به قضیهٔ ۱۴.۲.٦، به ازای هر n ای، دایره‌ای S_n شامل نقاط $f_n(a_n)$ و $f_n(b_n)$ با $|b_n - a_n| \geq \sqrt{3}$ وجود دارد. گیریم مرکز S_n نقطهٔ z_n باشد. دایره‌ای S_0 وجود دارد که همهٔ خمهای ژردان C_n و نیز C را احاطه می‌کند. در نتیجه S_0 همهٔ S_n ها را احاطه می‌کند. به این ترتیب، دنبالهٔ z_1، z_2، و . . . در $\mathbb{R}^2$ کراندار است و بنابراین زیر دنباله‌ای کراندار دارد. در نتیجه، می‌توانیم فرض کنیم که دنبالهٔ $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ دارای حد z در بینهایت است.

به ازای n های به اندازهٔ کافی بزرگ، z و z_n در یک مؤلفهٔ $\mathbb{R}^2 - C$ قرار دارند. این را به صورت ذیل می‌شود مشاهده نمود: $\delta > 0$ ای چنان وجود دارد که اگر $|y-x| < \sqrt{3}$، آنگاه $|f(y)-f(x)| \geq \delta$. بنابراین به ازای هر $n \geq 1$ ای $|f(b_n)-f(a_n)| \geq \delta$ و در نتیجه به ازای هر $n \geq N$ ای $|f(y)-f(x)| \geq \delta/2$؛ که N باندازهٔ کافی بزرگ

می‌باشد. بنابراین، $\varepsilon_N < \delta/۲$. این بدان معنی است که به ازای هر $n \geq N$ ای قطر S_n بزرگتر از $\delta/۲$ است و در نتیجه $d(z_n, C_n) > \varepsilon/۲$. ولی به ازای n های باندازهٔ کافی بزرگ داریم $|z - z_n| < \delta/۲$. بنابراین، بایستی z و z_n در یک مؤلفهٔ $\mathbb{R}^۲ - C$، یعنی مؤلفهٔ کرانداری از آن، قرار داشته باشند. زیرا، بنا به تعریف z_n در مؤلفهٔ کرانداری از $\mathbb{R}^۲ - C$ واقع می‌باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که z نمی‌تواند در مؤلفهٔ غیر کراندار $\mathbb{R}^۲ - C$ واقع باشد.

فرض کنیم z در مؤلفهٔ غیر کراندار $\mathbb{R}^۲ - C$ قرار داشته باشد. بنابراین، راهی پیوسته g در $\mathbb{R}^۲ - C$ از z به نقطه‌ای خارج از C_n وجود دارد (بنابه قضیهٔ ۱۹.۱.۶ هر زیر مجموعهٔ همبند و باز در $\mathbb{R}^۲$، الزاماً همبند راهی است). گیریم $d(g(I), C) = \delta$، که این بدان معنی است که به ازای n های باندازهٔ کافی بزرگ، نقطهٔ z در مؤلفهٔ غیر کراندار $\mathbb{R}^۲ - C$ قرار دارد. ولی این با حکمی که قبلاً درستی آن را نشان دایم، در تناقض است. نتیجه می‌گیریم که z به مؤلفهٔ غیر کراندار $\mathbb{R}^۲ - C$ متعلق نیست و بنابراین $\mathbb{R}^۲ - C$ حداقل دو مؤلفه دارد. □

در ادامه، جهت اثبات قسمت دوم قضیهٔ ژردان به تعریف و لم زیر نیاز داریم.

۱۶.۲.۶ تعریف. وتر Γ خم ژردان C عبارت از پاره خطی راست است که C را در تنها دو نقطه قطع می‌کند. پس، Γ سوای نقاط انتهایی‌اش به $\mathbb{R}^۲ - C$ متعلق می‌باشد.

۱۷.۲.۶ یادداشت. چنانچه C چند ضلعی ژردان بوده و Γ وتری از C باشد، در این صورت $\Gamma \subseteq X \cup C$، که X یکی از مؤلفه‌های $\mathbb{R}^۲ - C$ می‌باشد. بعلاوه $X - \Gamma$ دو مؤلفه دارد.

۱۸.۲.۶ لم. گیریم C چند ضلعی ژردان بوده و a و b دو نقطه در یکی از مؤلفه‌های X در $\mathbb{R}^۲ - C$ باشند به گونه‌ای که به ازای یک $\delta > ۰$ ای $d(\{a, b\}, C) \geq \delta$. فرض کنیم هر گاه Γ وتری از C در $X \cup C$ به طول کمتر از ۲δ باشد، در این صورت a و b هر دو در یک مؤلفهٔ $X - \Gamma$ قرار دارند. در چنین موقعیتی، راهی g در X وجود دارد که $d(g(I), C) > \delta$.

اثبات: ایدهٔ اصلی اثبادت چنین است که ابتدا قرص بازی به شعاع δ و مرکز در a در نظر گرفته و سپس با حفظ مرکزش بر X، آن را به آرامی به سمت b حرکت بدهیم. تنها هنگامی این حرکت قرص (با قطر ۲δ) را می‌توان انجام داد که یک وتر بطول کمتر

از 2δ در $X \cup C$ وجود داشته باشد. مفروضات بر وتر ایجاب می‌کند که چنین اتفاقی امکان ندارد. $\square$

۱۹.۲.٦ قضیه. گیریم C خم ژردان باشد، در این صورت $\mathbb{R}^2 - C$ حد اکثر دو مؤلفه دارد.

اثبات: فرض کنیم $\mathbb{R}^2 - C$ سه یا بیشتر مؤلفه دارد و p، q و r نقاطی از سه مؤلفهٔ متمایز آن باشند. گیریم $d(\{p,q,r\},C) = \varepsilon$ و $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از چند ضلعیهای ژردان همگرا به C باشد. فرض کنیم C، C_1، C_2 و . . . توسط نگاشتهای بترتیب f، f_1، f_2 و . . . معرفی شده باشند. به ازای n های باندازهٔ کافی بزرگ داریم $d(C_n,C) < \varepsilon/2$ و بنابراین $d(\{p,q,r\},C_n) < \varepsilon/2$. با استفاده ار قضیهٔ ۷.۲.٦ ملاخظه می‌کنیم که به ازای هر n به اندازهٔ کافی بزرگ، دو تا از سه نقطهٔ $\{p,q,r\}$ در یک مؤلفهٔ X_n از $\mathbb{R}^2 - C_n$ قرار دارند. چنانچه در صورت لزوم از زیر دنباله استفاده کنیم، می‌توانیم فرض کنیم که p و q به ازای همهٔ n ها به X_n متغلقند.

فرض کنیم δ ای با $0 < \delta < \varepsilon$ و بینهایت n طوری وجود داشته باند که نقاط p و q توسط راهی g_n در X_n با $d(g_n(I),C_n) \geq \delta$ بهم متصل می‌شوند. به ازای n های به اندازهٔ کافی بزرگ، داریم $d(C_n - C) < \delta/2$؛ در نتیجه، به ازای n های به اندازهٔ کافی بزرگ $d(g_n(I),C) > \delta/2$، که این خود به معنی قرار داشتن p و q ذز یک مؤلفه از $\mathbb{R}^2 - C$ است. بر اساس این تناقض، هیچ δ ای با ویژگی بالا وحود ندارد. با استفاده از لم ۱۸.۲.٦ نتیجه می‌گیریم که به ازای بینهایت مقدار از n، وتری Γ_n به طول δ_n وجود دارد که p و q در مؤلفه‌های متفاوتی از $X_n - \Gamma_n$ واقع می‌باشند و $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$. فرض کنیم این بینهایت مقدار n، به ترتیب صعودی مرتب شده باشند و بترتیب $n(1)$، $n(2)$، و . . . باشند. همچنین، فرض کنیم نقاط انتهایی $\Gamma_{n(i)}$ برابر $f_{n(i)}(a_i)$ و $f_{n(i)}(b_i)$ باشند. چون $\lim_{i\to\infty}\delta_{n(i)} = 0$، داریم $\lim_{i\to\infty}(f_{n(i)}(b_i) - f_{n(i)}(a_i)) = 0$ و بنابراین $\lim_{i\to\infty}(f(b_i) - f(a_i)) = 0$، که این ایجاب می‌کند $\lim_{i\to\infty}(b_i - a_i) = 0$. چون به ازای هر i ای نقاط p و q در دو مؤلفهٔ متمایز $X_{n(i)} - \Gamma_{n(i)}$ قرار دارند، یکی از این دو نقطه، مثلاً p، به ازای بینهایت مقدار از n، به مؤلفهٔ کرانداری از $X_{n(i)} - \Gamma_{n(i)}$ متغلق است، که به $\Gamma_{n(i)}$ و $f_{n(i)}(A_i)$ محدود می‌باشد و A_i کوچکترین قوسی در $\mathbb{S}^1$ است که نقاط انتهایی آن a_i و b_i می‌باشد. چون $\lim_{i\to\infty}(b_i - a_i) = 0$، نتیجه می‌گیریم که قطر این مؤلفه به ازای n های به اندازهٔ کافی بزرگ، کمتر از ε است. به خصوص $|p - f(a_i)| < \varepsilon$، که تناقض است و حکم اثبات شد. $\square$

اکنون قضیهٔ خم ژردان از قضایای ۱۵.۲.٦ و ۱۹.۲.٦ نتیجه می‌گردد.

۲۰.۲.۶ تمرین.

۱) ثابت کنید که اگر A نگارهٔ یک نگاشت پیوسته و یکبیک $f : I \to \mathbb{R}^۲$ باشد، در این صورت $\mathbb{R}^۲ - C$ همبند است.

۲) فرض کنید C خم ژردانی با ضابطهٔ $f : \mathbb{S}^۱ \to \mathbb{R}^۲$ باشد. δ را به صورت

$$\delta = \min\{|f(y) - f(x)| \,|\, x, y \in \mathbb{S}^۱,\ |y - x| \geq \sqrt{۳}\}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت کنید مؤلفهٔ کراندار $\mathbb{R}^۲ - C$ یک قرص به قطر δ را در بر دارد.

۳) به تعداد ناشمارا خم بستهٔ ساده و دو به دو جدا از هم در $\mathbb{R}^۲$ می‌توان انتخاب نمود؛ مثلاً $\{Ct \,|\, ۰ < t \in \mathbb{R}\}$، که در آن $C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \,|\, x^۲ + y^۲ = r\}$.
خم شکل هشت، فضایی است همئومورف با

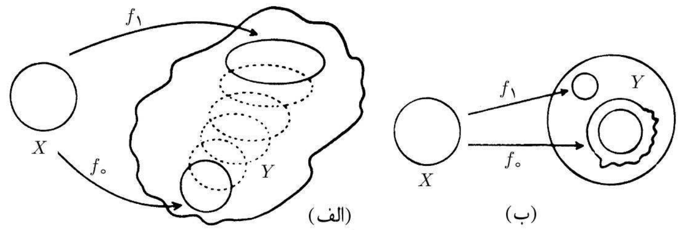
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^۲ \,|\, (x \pm ۱)^۲ + y^۲ = ۱\}$$

ثابت کنید که اگر $\{E_j \,|\, j \in J\}$ گردایه‌ای از خمهای به شکل هشت و دو به دو مجزا در $\mathbb{R}^۲$ باشد، آنگاه J الزاماً شمارا است.

۳.۶ هموتوپی نگاشتهای پیوسته

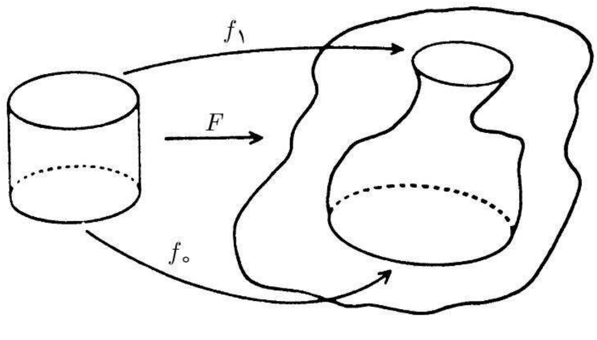
در این فصل رابطهٔ هم‌ارزی‌ای بر مجموعهٔ نگاشتهای بین فضاهای توپولوژی تعریف می‌کنیم. این رابطه در فصول بعدی، خصوصاً هنگامی که در مورد راهها بکار گرفته می‌شوند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

شکل ۸.۶



به بیان ساده، دو نگاشت پیوسته $f_0, f_1 : X \to Y$ را در صورتی **هموتوپ** گوئیم که خانواده‌ای از نگاشتهای پیوسته $\{f_t : X \to Y \mid 0 \leq t \leq 1\}$ طوری بتوان میان آنها یافت که نسبت به t پیوسته باشد؛ به شکل ۸.۶–(الف) توجه شود. در شکل ۸.۶–(ب) دو نگاشت غیر هموتوپ نشان داده شده است؛ در اینجا $X = \mathbb{S}^1$ و Y یک تاجی در $\mathbb{R}^2$ می‌باشد. به بیان دقیقتر

شکل ۹.۶



۱.۳.۶ تعریف. دو نگاشت $f_0, f_1 : X \to Y$ را در صورتی **هموتوپ** گوئیم که نگاشتی پیوسته $F : X \times Y \to Y$ چنان یافت شود که $F(x, 0) = f_0(t)$ و $F(x, 1) = f_1(t)$. به شکل ۹.۶ توجه شود.

نگاشت F را **هموتوپی بین** f_0 و f_1 می‌نامند. در این حالت می‌نویسیم $F : f_0 \simeq f_1$ یا به اختصار $F : f_0 \simeq f_1$. به ازای هر $t \in [0; 1]$ ای مقدار $F(x,t)$ را با $f_t(x)$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب، به نگاشتی پیوسته $f_t : X \to Y$ می‌رسیم. این طور می‌توان

اظهار نمود که $\{f_t \mid \circ \leq t \leq ۱\}$ خانواده‌ای از نگاشتهای پیوسته از $f_\circ$ به $f_۱$ است.

۲.۳.٦ مثال. فرض کنید Y فضای توپولوژی دلخواه، و $f : I \to Y$ راهی در Y است. در این صورت $F : I \times I \to Y$ با ضابطهٔ $F(x,t) = f((۱ - t)x)$ ترکیبی از نگاشتهای $\mathbb{R} \ni t \mapsto ۱ - t \in \mathbb{R}$ و f است و بنابراین، پیوسته می‌باشد. بعلاوه $f_\circ(x) = F(x, \circ) = f(x)$ و $f_۱(x) = F(x, ۱) = f(\circ) = \varepsilon_{f(\circ)}(x)$. بنابراین F یک هموتوپی بین f و $\varepsilon_{f(\circ)}$ است؛ یا به اختصار $F : f \simeq \varepsilon_{f(\circ)}$.

برای اجتناب از این چنین وضعیتی (البته، در صورت لزوم) از مفهوم کلی‌تری بنام **هموتوپی نسبی** — یعنی هموتوپی نسبت به زیر مجموعه‌ای بخصوص A — استفاده می‌کنیم. در این حالت فرض می‌کنیم که در روند هموتوپی، هیچ یک از نقاط A تغییر نمی‌کنند.

۳.۳.٦ تعریف. فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از X بوده و $f_\circ, f_۱ : X \to Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند. در صورتی می‌گوئیم $f_\circ$ و $f_۱$ **نسبت به مجموعهٔ** A **هموتوپند**، که یک هموتوپی $F : X \times I \to Y$ میان $f_\circ$ و $f_۱$ چنان یافت شود که به ازای هر $a \in A$، نگاشت $F(a, \ ) : I \to Y$ با ضابطهٔ $t \mapsto F(a,t)$ به t بستگی نداشته باشد، یعنی ثابت باشد. به بیان دیگر

$$\forall a \in A \, \forall t \in I \,:\, F(a,t) = f_\circ(a).$$

در این حالت، می‌گوئیم F هموتوپی نسبیِ نسبت به A است و می‌نویسیم $f_\circ \underset{rel\,A}{\simeq} f_۱$، $f_\circ \simeq f_۱ \ (rel\ A)$ و یا $F : f_\circ \underset{A}{\simeq} f_۱$.

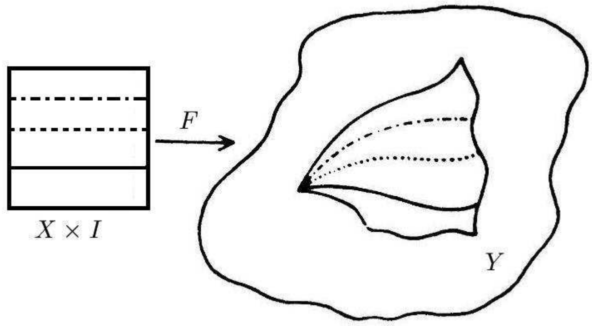
۴.۳.٦ یادداشت. اگر $f_\circ \underset{A}{\simeq} f_۱$، آنگاه الزاماً به ازای هر $a \in A$ ای $f_\circ(a) = f_۱(a)$؛ یا به اختصار $f_\circ|_A \equiv f_۱|_A$.

در حالت کلی، هموتوپی کلی‌تر از هموتوپی نسبی است. به این معنی که اگر دو نگاشت هموتوپ نسبی باشند، هموتوپ نیز هستند. بعلاوه، چنانچه $A = \emptyset$، هموتوپی همان هموتوپی نسبت به A است.

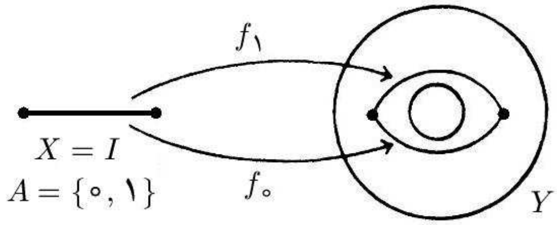
۵.۳.٦ مثال. ۱) در شکل ۱۰.٦ یک هموتوپی نسبی با $X = I$ و $A = \{\circ\} \subset X$ مشاهده می‌شود.

۲) در شکل ۱۱.٦ با فرض $X = I$، $A = \{\circ, ۱\}$ و $Y =$ «یک تاجی در $\mathbb{R}^۲$»، نگاشتهای $f_\circ$ و $f_۱$ هموتوپند، ولی هموتوپ نسبی نسبت به A نیستند.

شکل ۱۰.٦



شکل ۱۱.٦



بر اساس حکم بعد، رابطهٔ هموتوپی، هم ارزی است.

٦.۳.٦ لم. رابطهٔ $\underset{A}{\simeq}$ بر مجموعهٔ نگاشتهای پیوسته از X به Y، رابطه‌ای هم ارزی است.

اثبات: چون $F(x,t) = f(x)$ هموتوپی نسبی نسبت به A میان f و خودش است، بنابراین $f \underset{A}{\simeq} f$ و رابطهٔ مذکور بازتابی است. این رابطه تقارنی نیز هست، زیرا اگر $F : f \underset{A}{\simeq} g$، آنگاه $G : g \underset{A}{\simeq} f$، که G با ضابطهٔ $G(x,t) = F(x, ۱-t)$ است. بالاخره، رابطه متعدی است، زیرا اگر $F : f \underset{A}{\simeq} g$ و $G : g \underset{A}{\simeq} h$، آنگاه $H : f \underset{A}{\simeq} h$، که در آن

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, ۲t) & \text{اگر } ۰ \leq t \leq ۱/۲ \\ F(x, ۱-۲t) & \text{اگر } ۱/۲ \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

می‌باشد، و بر اساس لم چسب، پیوسته می‌باشد. □

۷.۳.٦ تمرین.

۱) فرض کنید X فضایی توپولوژی و $f : \mathbb{S}^۱ \to X$ نگاشتی پیوسته باشد. نشان دهید که f وقتی و تنها وقتی **پوچ هموتوپی** است (یعنی، با نگاشتی ثابت هموتوپ

است)، که نگاشتی $g:\mathbb{D}^2\to X$ وجود داشته ابشد به گونه‌ای که $g|_{\mathbb{S}^1}=f$؛ یعنی تحدید آن به $\mathbb{S}^1=\partial\mathbb{D}^2$ برابر خود f باشد. (راهنمایی: اگر c نگاشت ثابت مذکور باشد و $F:c\simeq f$، آنگاه به ازای $x\in\mathbb{S}^1$ و $t\in I$ تعریف کنید $g(tx)=F(x,t)$ و سپس از تمرین ۲۴.۲.۴—(۶) استفاده کنید.)

۲) فرض کنید X فضایی توپولوزی است و $x,y\in X$. مجموعهٔ همهٔ دسته‌های هم‌ارزی از راههای در X از x به y نسبت به رابطهٔ هم‌ارزی $\underset{\{0,1\}}{\simeq}$ را $P(x,y)$ نشان می‌دهیم. (بعبارت دیگر، دو راه $p,q:I\to X$ از x به y در صورتی یک عضو از $P(x,y)$ را مشخص می‌کنند که $p\underset{\{0,1\}}{\simeq}q$.) نشان دهید که اگر $P(x,y)\neq\emptyset$، آنگاه تناضری یکبیک میان اعضاء $P(x,y)$ و $P(x,x)$ وجود دارد؛ و بالعکس.

۳) گیریم $0<s<1$. فرض کنیم p و q راههایی با $p(1)=q(0)$ در X باشند. نگاشت $h:I\to X$ با ضابطهٔ

$$h(t)=\begin{cases} p\left(\frac{s}{t}\right) & \text{اگر } 0\leq t\leq s \\ q\left(\frac{t-s}{1-s}\right) & \text{اگر } s\leq t\leq 1 \end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم. نشان دهید که در این صورت h و $p*q$ نسبت به $\{0,1\}$ هموتوپند.

۴) به ازای راه مفروض f، نگاشت $\bar{f}$ را با ضابطهٔ $\bar{f}(t):=f(1-t)$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $f\underset{A}{\simeq}g$ اگر و تنها اگر $\bar{f}\underset{A}{\simeq}\bar{g}$.

۵) نشان دهید که اگر $f_0\underset{A}{\simeq}f_1:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ نگاشتی پیوسته باشد، آنگاه $g\circ f_0\underset{A}{\simeq}g\circ f_1:X\to Z$.

۶) فرض کنید $f_0\underset{A}{\simeq}f_1:X\to Y$ و $g_0\underset{A}{\simeq}g_1:Y\to Z$. ثابت کنید $g_0\circ f_0\underset{A}{\simeq}g_1\circ f_1:X\to Z$. (راهنمایی: از تمرین (۵) استفاده نموده، نشان دهید که $g_0\circ f_0\simeq g_0\circ f_1$ و سپس $g_0\circ f_1\simeq g_1\circ f_1$.)

۷) گیریم x و Y فضای توپولوژی باشند و $\mathcal{F}(X,Y)$ مجموعهٔ توابع پیوسته از X به Y با توپولوژی فشرده—باز باشد (به تمرین ۲۵.۱.۴—(۴) توجه شود). ثابت کنید که اگر $f\simeq g:X\to Y$، آنگاه راهی از f به g در فضای $\mathcal{F}(X,Y)$ وجود دارد. فرض کنید X فشرده و هاوسدورف باشد؛ ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه راهی از f به g در $\mathcal{F}(X,Y)$ وجود داشته باشد، این است که $f\simeq g:X\to Y$. (برای تحقق حکم آخر، کافی است X موضعاً فشرده و هاوسدورف باشد.)

از مفهوم هموتوپی نگاشتها، رابطه‌ای هم‌ارزی بین فضاهای توپولوژی می‌توان بدست آورد.

۸.۳.۶ تعریف. دو فضای توپولوژی X و Y را در صورتی **هم نوع هموتوپی** یا به اختصار **هموتوپ** گوئیم که نگاشتهای پیوستهٔ $f : X \to Y$ و $g : Y \to X$ چنان یافت شوند که $f \circ g \simeq 1_Y : Y \to Y$ و $g \circ f \simeq 1_X : X \to X$. در این صورت f و g را **هم‌ارزی هموتوپی** می‌نامیم و می‌نویسیم $X \simeq Y$.

۹.۳.۶ مثال. استوانه و دایره هم نوع هموتوپی هستند. برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض کنیم $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \,|\, x^۲ + y^۲ = ۱\,,\, -۱ \leq z \leq ۱\}$ استوانه و $\mathbb{S}^۱ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^۳ \,|\, x^۲ + y^۲ = ۱\,,\, z = ۰\}$ دایره باشد. نگاشت $i : \mathbb{S}^۱ \hookrightarrow C$ را به صورت احتوی و $r : C \to \mathbb{S}^۱$ را به صورت $r(x,y,z) = (x,y,۰)$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^۱} : \mathbb{S}^۱ \to \mathbb{S}^۱$ و همچنین $F : C \times I \to C$ با ضابطهٔ $F\big((x,y,z),t\big) = (x,y,tz)$ هموتوپی بین $i \circ r$ و $1_C : C \to C$ برقرار می‌کند.

۱۰.۳.۶ قضیه. فضاهای هموتوپ، هئومورفند. در حالت کلی ممکن است دو فضا هموتوپ و غیر همئومورف باشند.

اثبات: چون هر نگاشتی با خودش هموتوپ است، اگر $f : X \to Y$ همئومورفیسم باشد، آنگاه $f \circ f^{-۱} = 1_Y \simeq 1_Y$ و $f^{-۱} \circ f = 1_X \simeq 1_X$. به این ترتیب حکم اول اثبات شد. برای اثبات برقراری حکم دوم، کافی است مثال بزنیم.

فرض کنیم $n \geq ۱$ و $y \in \mathbb{D}^n$ دلخواه و از این پس ثابت است. فرض کنیم $f : \{y\} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ نگاشت احتوی بوده و $g : \mathbb{D}^n \to \{y\}$ نگاشت ثابت باشد. به وضوح، $g \circ f = 1_{\{y\}} \simeq 1_{\{y\}}$ و بعلاوه $F : \mathbb{D}^n \times I \to \mathbb{D}^n$ با ضابطهٔ $F(x,t) = tx + (۱-t)y$ هموتوپی بین $f \circ g$ و $1_{\mathbb{D}^n}$ می‌باشد؛ یعنی $F : f \circ g \simeq 1_{\mathbb{D}^n}$. بنابراین $\mathbb{D}^n$ و $\{y\}$ هموتوپند. این دو فضا غیر همئومورفند، زیرا غیر همعدد هستند! $\square$

۱۱.۳.۶ تعریف. فضای X را در صورتی **انقباض پذیر** گوئیم که با مجموعه‌ای تک نقطه‌ای هم نوع هموتوپ باشد.

از نقطه نظر شهودی، فضایی انقباض پذیر است که به یک نقطه قابل مچاله کردن است. نظیر قرص بسته. فضاهایی چون دایره $\mathbb{S}^۱$ چنین قابلیتی را ندارند.

۱۲.۳.۶ مثال. هر مجموعهٔ محدب انقباض پذیر است. استدلال آن کاملاً شبیه بع اثبات قضیهٔ ۱۰.۳.۶ است. فرض کنیم X زیرفضایی محدب از $\mathbb{R}^n$ با توپولوژی معمولی است. فرض کنیم $y \in X$ دلخواه و از این پس ثابت باشد. فرض کنیم $f : \{y\} \hookrightarrow X$ نگاشت احتوی و $g : X \to \{y\}$ نگاشت ثابت باشد. در این صورت $g \circ f = 1_{\{y\}}$ و $f \circ g \simeq 1_X$.

۱۳.۳.۶ تعریف. زیر مجموعهٔ A از فضای توپولوژی X را در صورتی **انقباض برای** X گوئیم که نگاشتی پیوسته $r : X \to A$ چنان یافت شود که $r \circ i = 1_A$ (که در اینجا $i : A \hookrightarrow X$ نگاشت احتوی است)؛ به بیان دیگر، $r|_A = 1_A$. نگاشت r را **انقباض** می‌نامیم.

۱۴.۳.۶ تعریف. زیر مجموعهٔ A از فضای توپولوژی X را در صورتی **انقباض دگردیسی برای** X گوئیم که انقباضی $r : X \to A$ چنان یافت شود که $i \circ r \simeq 1_X$؛ به بیان دیگر، نگاشت پیوستهٔ $F : X \times I \to X$ چنان یافت شود که به ازای هر $x \in X$ ای $F(x, \circ) = x$ و $F(x, ۱) \in A$.

۱۵.۳.۶ قضیه. هر انقباض دگردیسی، انقباض است. عکس این مطلب ذر حالت کلی درست نیست.

۱۶.۳.۶ مثال. دایره $\mathbb{S}^۱$ انقباض دگردیسی استوانه $\mathbb{S}^۱ \times [\circ; ۱]$ است.

در مثال بالا، عملاً $i \circ r$ نسبت به $A = \mathbb{S}^۱$ با 1_X هموتوپ است، که بیشتر از انقباض دگردیسی است!

۱۷.۳.۶ تعریف. زیر مجموعهٔ A از فضای توپولوژی X را در صورتی **انقباض دگردیسی قوی برای** X گوئیم که انقباضی $r : X \to A$ چنان یافت شود که $i \circ r \simeq_A 1_X$؛ به بیان دیگر، نگاشت پیوستهٔ $F : X \times I \to X$ چنان یافت شود که
۱) به ازای هر $x \in X$ ای $F(x, \circ) = x$ و $F(x, ۱) \in A$؛ و
۲) به ازای هر $a \in A$ و هر $t \in I$ ای $F(a, t) = a$.

از نقطه نظر شهودی، A در صورتی انقباض دگردیسی قوی برای X است که X را با ثابت نگاه داشتن A بتوان مچاله نمود.

۱۸.۳.٦ قضیه. هر انقباض دگردیسی قوی، انقباض دگردیسی است. عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست.

۱۹.۳.٦ یادداشت. در برخی مراجع بجای اصلاح «انقباض دگردیسی قوی»، از اصطلاح «انقباض دگردیسی» استفاده می‌شود.

۲۰.۳.٦ مثال. زیر مجموعهٔ $Y = C_1 \cup C_2$ از $\mathbb{R}^2$ را در نظر بگیرید، که

$$\begin{aligned} C_1 &= \{x = (x_1, x_2) \,|\, (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1\}, \\ C_2 &= \{x = (x_1, x_2) \,|\, (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1\}. \end{aligned}$$

بنابراین، Y به شکل ∞ است. به عبارت دیگر، اجتماعی از دو دایرهٔ مماس بر هم است. فرض کنید $X = Y - \{(2, 0), (-2, 0)\}$. در این صورت نقطهٔ $x_0 = (0, 0)$ یک انقباض دگردیسی قوی برای X است. برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض کنیم $i : \{x_0\} \hookrightarrow X$ و $r : X \to \{x_0\}$ بترتیب نگاشت احتوی و ثابت باشند. روشن است که $r \circ i = 1_{\{x_0\}}$؛ برای اثبات $i \circ r \simeq_{\{x_0\}} 1_X$ از هموتوپی $F : X \times I \to X$ با ضابطهٔ

$$F(x, s) = \frac{1 - s}{\|((1 - s)x_1 + (-1)^i, (1 - s)x_2)\|} \quad \Leftrightarrow \quad x \in C_i \,,\; i = 1, 2$$

استفاده می‌کنیم. توجه شود که به ازای هر $x \in X$ ای مخرج $F(x, s)$ مخالف صفر است. پیوستگی F به راحتی قابل تحقیق است. چون $F(x_0, s) = x_0$، $F(x, 0) = x$ و $F(x, 1) = x_0$، نتیجه می‌گیریم $i \circ r \simeq_{\{x_0\}} 1_{\{x_0\}}$ و بنابراین $\{x_0\}$ انقباض دگردیسی قوی برای X. است.

۲۱.۳.٦ تمرین.

۱) نشان دهید که دایره‌ای در نوار موبیوس وجود دارد که یک انقباض دگردیسی قوی برای نوار مذکور است. نشان دهید که نوار موبیوس و استوانه هموتوپند.

۲) ثابت کنید که فضای X وقتی و تنها وقتی انقباض پذیر است که نگاشت همانی 1_X با نگاشتی ثابت هموتوپ باشد.

۳) ثابت کنید که وقتی و تنها وقتی انقباضی به شکل $r : \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ وجود دارد که $\mathbb{S}^{n-1}$ انقباض پذیر باشد. (راهنمایی: فرض کنید $F : \mathbb{S}^{n-1} \times I \to \mathbb{S}^{n-1}$ هموتوپی بین نگاشتی ثابت و نگاشت همانی 1_X باشد. سپس، از نگاشت طبیعی $\mathbb{S}^{n-1} \times I \to \mathbb{D}^n$ با ضابطهٔ $(x, t) \mapsto tx$، و نیز اینکه $F(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\})$ از تنها یک نقطه تشکیل می‌گردد، استفاده کنید.)

۴) ثابت کنید که اگر X همبند و هم نوع هموتوپی با Y باشد، در این صورت Y نیز همبند است.

۵) زیر مجموعهٔ $A \subseteq X$ را در صورتی انقباض ضعیف برای X گوئیم که نگاشتی پیوسته $r : X \to A$ چنان یافت شود که $r \circ i \simeq 1_A$؛ که در اینجا $i : A \hookrightarrow X$ نگاشت احتوی است. روشن است که هر انقباض، انقباض ضعیف است. مثالی بیاورید که انقباض ضعیف باشد، ولی انقباض نباشد.

٦) مثالی از یک مجموعه بیاورید که انقباض دگردیسی باشد، ولی انقباض دگردیسی قوی نباشد.

۷) زیر مجموعهٔ $A \subseteq X$ را در صورتی انقباض دگردیسی ضعیف برای X گوئیم که نگاشتی احتوی $i : A \hookrightarrow X$ هم ارزی هموتوپی باشد. روشن است که هر انقباض دگردیسی، انقباض دگردیسی ضعیف است. مثالی بیاورید که انقباض دگردیسی ضعیف باشد، ولی انقباض دگردیسی نباشد.

۸) فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژی بوده، $A \subseteq X$ و $Y \neq \emptyset$. ثابت کنید $A \times Y$ وقتی و تنها وقتی انقباضی برای $X \times Y$ است که A انقباضی برای X باشد.

۹) ثابت کنید که رابطهٔ «انقباض بودن» متعدی است (یعنی، اگر A انقباضی برای B، و B انقباضی برای C باشد، آنگاه A انقباضی برای C است.)

۱۰) فرض کنید $x_\circ \in \mathbb{S}^۱$. ثابت کنید $\mathbb{S}^۱ \times \{x_\circ\}$ انقباضی برای $\mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱$ است، که انقباض دگردیسی قوی برای $\mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱$ نیست. آیا انقباض دگردیسی است؟ انقباض دگردیسی قوی چطور؟

۱۱) فرض کنید $x_\circ \in \mathbb{R}^۲$. دایره‌ای در $\mathbb{R}^۲$ بیابید که انقباض دگردیسی قوی برای $\mathbb{R}^۲ - \{x_\circ\}$ باشد.

۱۲) فرض کنید T تیوب و X متمم نقطه‌ای از T باشد. زیر مجموعه‌ای از X بیابید که با شکل 8 همئومورف است و انقباض دگردیسی قوی برای X است.

۱۳) ثابت کنید که $\mathbb{S}^n$ انقباض دگردیسی قوی برای $\mathbb{R}^{n+۱} - \{0\}$ است.

۱۴) نشان دهید که هر انقباض فضایی هاوسدورف، زیر مجموعه‌ای بسته است.

۱۵) گیریم Y زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $f, g : X \to Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند. ثابت کنید که اگر به ازای هر $x \in X$ ای نقاط $g(x)$ و $f(x)$ توسط خطی مستقیم در Y به هم متصل شوند، آنگاه $f \simeq g$. نتیجه بگیرید که بایستی نگاشتهای $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ هموتوپ باشد.

۱٦) گیریم Y زیر فضایی از $\mathbb{R}^n$ باشد و $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ نگاشتهایی پیوسته باشند که به ازای هر $x \in X$ ای $f(x) \neq -g(x)$. ثابت کنید که $f \simeq g$. (راهنمایی: تابع پیوستهٔ $(\mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1})$ با ضابطهٔ $x \mapsto x/\|x\|$ را در نظر گرفته و سپس از تمرین ۱۵ در بالا، استفاده کنید.) تحقیق کنید که اگر $f : X \to \mathbb{S}^n$ نگاشتی پیوسته و غیر پوشا باشد، در این صورت f با نگاشتی ثابت هموتوپ می‌باشد.

فصل ۷

گروه بنیادی

اگر f و g دو راه در X باشند که $f(x) = g(x)$، در این صورت حاصلضرب f در g را به معنی راه $f * g$ می‌دانیم که همانند که در بخش ۱.۶ تعریف می‌گردد:

$$(f * g)(t) := \begin{cases} f(۲t) & ۰ \leq t \leq ۱/۲ \\ g(۲t - ۱) & ۱/۲ \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

در این بخش برآنیم تا این ضرب را بیشتر مطالعه کنیم. در حقیقت، به دنبال مطالعهٔ خواص ضرب راهها در حد هموتوپی نسبت به $\{۰, ۱\}$ هستیم، و می‌خواهیم خواص گروه بودن را در مورد آن بررسی قرارداده و مفهوم گروه بنیادی را مطرح می‌کنیم. در ادامه، به عنوان مثالی غیر بدیهی از گروه بنیادی، گروه بنیادی دایره را محاسبه می‌کنیم.

۱.۷ ضرب راهها

هدف از این بخش، بررسی خواص گروهی ضرب راهها است. با یک تعریف شروع می‌کنیم.

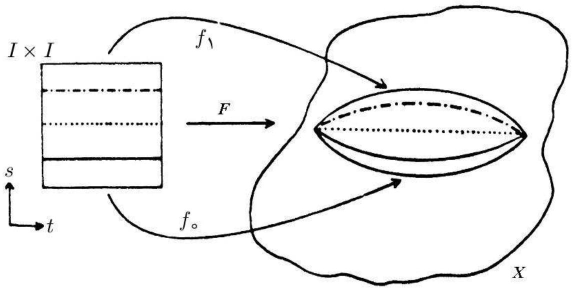
۱.۱.۷ تعریف. دو راه مفروض f و g در X را در صورتی **هم ارز** گوئیم که نسبت به $\{۰, ۱\}$ هموتوپ نسبی باشند. در این حالت می‌نویسیم $f \sim g$.

۲.۱.۷ یادداشت. به بیان دقیقتر، اگر $f_۰, f_۱ : I \to X$ راه باشند، در صورتی می‌گوئیم آن دو هم ارزند که نگاشتی پیوسته $F : X \times I \to X$ چنان یافت شود که

۱) $f_\circ(\circ) = f_1(\circ)$ و $f_\circ(1) = f_1(1)$؛
۲) به ازای هر $t \in I$ ای $F(t,\circ) = f_\circ(t)$ و $F(t,1) = f_1(t)$؛ و
۳) به ازای هر $s \in I$ ای $F(\circ,s) = f_\circ(\circ)$ و $F(1,s) = f_\circ(1)$.

به شکل ۱.۷ توجه شود. در این حالت می‌نویسیم $F : f_\circ \sim f_1$.

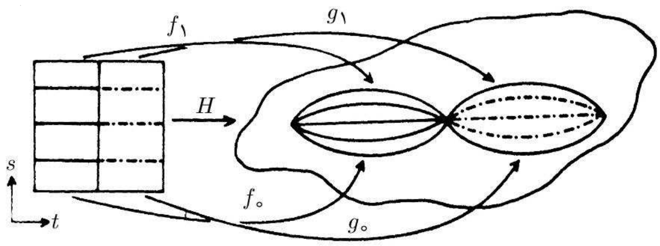
شکل ۱.۷



۳.۱.۷ تعریف. بر اساس لم ٦.٣.٦ $\sim$ رابطه‌ای هم ارزی بر مجموعهٔ راههای در X است. دستهٔ هم ارزی شامل f را با نماد $[f]$ نشان می‌دهیم.

۴.۱.۷ لم. فرض کنید $f_\circ$، f_1، $g_\circ$و g_1 راههایی در X با $f_\circ(1) = g_\circ(\circ)$ و $f_1(1) = g_1(\circ)$ هستند. اگر $f_\circ \sim f_1$ و $g_\circ \sim g_1$، آنگاه $f_\circ * g_\circ \sim f_1 * g_1$.

شکل ۲.۷



اثبات: گیریم $F : f_\circ \sim f_1$ و $G : g_\circ \sim g_1$ هموتوپیهای نسبت به $\{\circ, 1\}$ باشند، که وجودشان از تعریف نتیجه می‌گردد. نگاشت $H : I \times I \to X$ را با ضابطهٔ

$$H(t,s) = \begin{cases} F(2t,s) & \text{اگر } \circ \le t \le 1/2 \\ G(2t-1,s) & \text{اگر } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم، که چون $F(1,s) = f_\circ(1) = g_\circ(\circ) = G(\circ,s)$، بنابه لم جسب H پیوسته است. به سادگی ملاحظه می‌شود که $H(t,\circ) = (f_\circ * g_\circ)(t)$ و $H(t,1) = (f_1 * g_1)(t)$. در نتیجه $H : f_\circ * g_\circ \simeq_{\{\circ,1\}} f_1 * g_1$. به شکل ۲.۷ توجه شود. □

۵.۱.۷ تعریف. اگر f و g راههایی در X با $f(1) = g(0)$ باشند، **ضرب** $[f]$ در $[g]$ را به صورت $[f][g] := [f * g]$ تعریف می‌کنیم. بر اساس لم ۴.۱.۷ این ضرب خوشتعریف است.

۶.۱.۷ لم. ضرب همدسته‌ها شرکتپذیر است؛ به بیان دقیقتر، فرض کنید f، g و h راههایی در X با $f(1) = g(0)$ و $g(1) = h(0)$ باشند. در این صورت $[f]([g][h]) = ([f][g])[h]$.

اثبات: باید اثبات شود که $(f * g) * h \sim f * (g * h)$. ابتدا توجه می‌کنیم که

$$\big(f * (g * h)\big)(t) = \begin{cases} f(4t) & \text{اگر } 0 \le t \le 1/4 \\ g(4t-1) & \text{اگر } 1/4 \le t \le 1/2 \\ h(2t-1) & \text{اگر } 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

$$\big((f * g) * h\big)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{اگر } 0 \le t \le 1/2 \\ g(4t-2) & \text{اگر } 1/2 \le t \le 3/4 \\ h(4t-3) & \text{اگر } 3/4 \le t \le 1 \end{cases}$$

چگونگی این راهها را با استفاده از نمودار زیر می‌توان توضیح داد:

$(f * g) * h$ $\qquad$ $f * (g * h)$

از این گونه نمودارها به راحتی برای توضیح جبری راههای مورد مطالعه می‌توان استفاده نمود. مثلاً، $(f * g) * h$ را در نظر بگیرید؛ وقتی $1/4 \le t \le 1/2$، از g استفاده می‌کنیم و اینرا با تابعی خطی، که بازهٔ $[1/4; 1/2]$ را به $[0; 1]$ می‌نگارد (یعنی $t \mapsto 4t - 1$)، ترکیب می‌کنیم. عملاً، هر تابع پیوسته‌ای از $[1/4; 1/2]$ بروی $[0; 1]$ که $1/4$ را به 0 و $1/2$ را به 1 بنگارد، برای این منظور می‌توان استفاده نمود.

از شکل ۳.۷ برای تهیهٔ هموتوپی‌ای بین $(f * g) * h$ و $f * (g * h)$ می‌توان استفاده نمود. به ازای هر $s \in [0; 1]$ دلخواه، از تابع f بر بازهٔ $[0; (s+1)/4]$، از تابع g بر بازهٔ $[(s+1)/4; (s+2)/4]$ و از تابع h بر بازهٔ $[(s+2)/4; 1]$ استفاده می‌کنیم. با بکار گیری روش مشروح در بالا، به تعریف $F : I \times I \to X$ به شکل زیر می‌رسیم:

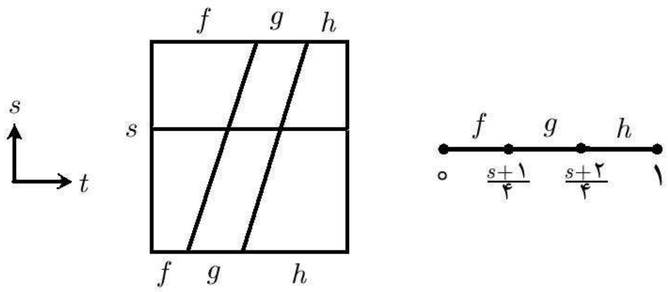
$$F(t,s) = \begin{cases} f\Big(\dfrac{4t}{s+1}\Big) & \text{اگر } 0 \le t \le \dfrac{s+1}{4} \\ g(4t - s - 1) & \text{اگر } \dfrac{s+1}{4} \le t \le \dfrac{s+2}{4} \\ h\Big(\dfrac{4t - s - 2}{2 - s}\Big) & \text{اگر } \dfrac{s+2}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$

تابع F پیوسته است و بعلاوه

$$F(t,\circ) = \big((f*g)*h\big)(t), \qquad F(t,\text{۱}) = \big(f*(g*h)\big)(t),$$
$$F(\circ,s) = f(\circ) = \big((f*g)*h\big)(\circ), \qquad F(\text{۱},s) = h(\text{۱}) = \big(f*(g*h)\big)(\text{۱}).$$

بنابراین، F هموتوپی مورد نظر می‌باشد. □

شکل ۳.۷: مربوط به لم ۶.۱.۷.



و اینک نوبت به عناصر خنثی ضرب همدسته‌های است. به بیان دقیقتر

۷.۱.۷ لم. فرض کنید f راهی از x به y در X باشد، در این صورت $[\varepsilon_x][f] = [f]$ و $[f][\varepsilon_y] = [f]$.

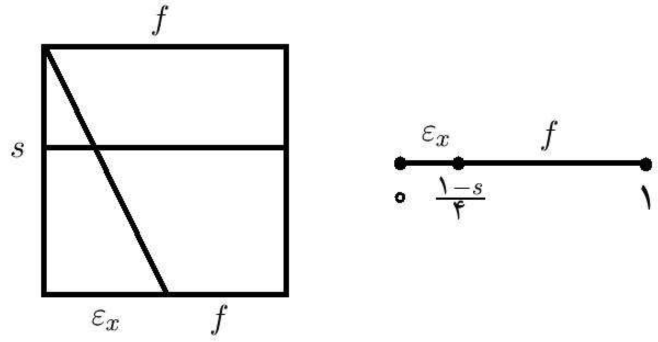
اثبات: باید اثبات شود که $f \sim f*\varepsilon_y$ و $\varepsilon_x * f \sim f$. به دلیل تشابه، تنها حکم دوم را اثبات می‌کنیم. شکل ۴.۷ را مشاهده کنید. نگاشت $F : I\times I \to X$ را با ضابطهٔ

$$F(t,s) = \begin{cases} x & \text{اگر } \circ \le t \le \frac{\text{۱}-s}{\text{۲}} \\ f\Big(\frac{\text{۲}t-\text{۱}+s}{s+\text{۱}}\Big) & \text{اگر } \frac{\text{۱}-s}{\text{۲}} \le t \le \text{۱} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت $F(t,\circ) = (\varepsilon_x * f)(t)$، $F(t,\text{۱}) = f(t)$ و F هموتوپی نسبی نسبت به $\{\circ,\text{۱}\}$ می‌باشد. □

۸.۱.۷ یادداشت. توجه شود که ب اساس لم بالا، هر عنصری دارای خنثی چپ و خنثی راست مخصوص به خود است. تنها در صورتی این دو خنثی برابرند که راه به نقطه‌ای پایان بیابد که از آن شروع نموده است.

شکل ۷.۴۰: مربوط به لم ۷.۱.۷



در پایان می‌خواهیم وارون راهها را در صورت وجود و در حد هم ارزی بیابیم. یاد آور می‌شویم که برای راه مفروض f، وارون $\bar{f}$ را به صورت $\bar{f}(t) := f(۱-t)$ تعریف می‌کنیم. توجه شود که $f \sim g$ اگر و تنها اگر $\bar{f} \sim \bar{g}$ (تمرین).

۹.۱.۷ لم. فرض کنید f راهی از x به y در X باشد، در این صورت $[\bar{f}][f] = [\varepsilon_y]$ و $[f][\bar{f}] = [\varepsilon_x]$.

اثبات: باید اثبات شود که $f * \bar{f} \sim \varepsilon_x$ و $\bar{f} * f \sim \varepsilon_y$. به دلیل تشابه، تنها حکم اول را اثبات می‌کنیم. $f * \bar{f}$ را عبارت است از

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(۲t) & \text{اگر } ۰ \le t \le \frac{۱}{۲} \\ \bar{f}(۲t-۱) = f(۲-۲t) & \text{اگر } \frac{۱}{۲} \le t \le ۱ \end{cases}$$

در نیمهٔ اول از این راه، کل راه f و در نیمهٔ دوم آن، کل راه f با جهت وارون طی می‌شود. برای اطمینان از اینکه از x شروع کرده، به y برسیم و سپس به x برگردیم، سرعتمان را ۲ انتخاب نموده‌ایم (یعنی، دو برابر سرعت عادی). حال اگر به ازای هر $s \in [۰;۱]$ دلخواه، سرعت را متناسب با $۱-s$ بگیریم. در این صورت به ازای هر $s \in [۰;۱]$ ای یک راه با شروع از x داریم که به $f(۲(۱-s))$ می‌رود و سپس به x باز می‌گردد. به ازای $s = ۰$ به $f * \bar{f}$ و به ازای $s = ۱$ به ε_x می‌رسیم. بنابراین $F : I \times I \to X$ را با ضابطهٔ

$$F(t,s) = \begin{cases} f\big(۲t(۱-s)\big) & \text{اگر } ۰ \le t \le \frac{۱}{۲} \\ f\big(۲(۱-t)(۱-s)\big) & \text{اگر } \frac{۱}{۲} \le t \le ۱ \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. به وضوح F پیوسته است و

$$\begin{array}{ll} F(t,\circ)=\big(f*\bar f\big)(t), & F(t,\text{۱})=f(\circ)=\varepsilon_x(\text{۱}),\\ F(\circ,s)=f(\circ)=\big(f*\bar f\big)(\circ), & F(\text{۱},s)=f(\circ)=\big(f*\bar f\big)(\text{۱}). \end{array}$$

بنابراین $F: f*\bar f\sim\varepsilon_x$ و برهان تمام است. □

۱۰.۱.۷ یادداشت. هموتوپی دیگری $G: I\times I\to X$ به شرح زیر بین $f*\bar f$ و ε_x وجود دارد:

$$G(t,s)=\begin{cases} f(\text{۲}t) & \circ\le t\le \frac{\text{۱}-s}{\text{۲}} \text{ اگر}\\ f(\text{۱}-s) & \frac{\text{۱}-s}{\text{۲}}\le t\le\frac{\text{۱}+s}{\text{۲}} \text{ اگر}\\ f(\text{۲}-\text{۲}t) & \frac{\text{۱}+s}{\text{۲}}\le t\le \text{۱} \text{ اگر}\end{cases}$$

ایدهٔ طرح این نگاشت چنین است. زمانی که برای طی راه f لازم است، متناسب با $\text{۱}-s$ می‌باشد. پس، برای $(\text{۱}-s)/\text{۲}$ قسمت اول وقتمان را صرف حرکت در امتداد f می‌کنیم؛ سپس، در نقطهٔ $f(\text{۱}-s)$ صبر می‌کنیم و آنگاه برای $(\text{۱}+s)/\text{۲}$ قسمت آخر، وقتمان را صرف بازگشت از راه f می‌کنیم. بنابراین، وقتی $s=\circ$، نگاشت $f*\bar f$ را داریم و وقتی $s=\text{۱}$، تمام وقت در x هستیم؛ یعنی به ε_x دست می‌یابیم.

در فصل بعدی، بار دیگر به مطالعهٔ دسته‌های هم ارزی از مسیرها و ضرب بین آنها می‌پردازیم.

۱۱.۱.۷ تمرین.

۱) مثالی از سه راه f، g و h در فضایی توپولوژی X با $f(\text{۱})=g(\circ)$ و $g(\text{۱})=h(\circ)$ بیاورید که $(f*g)*h\neq f*(g*h)$. مثالی نیز بیاورید که $(f*g)*h=f*(g*h)$.

۲) اثباتی مستقیم برای $\varepsilon_{f(\circ)}*f\sim f*\varepsilon_{f(\text{۱})}$ اقامه کنید.

۳) گیریم f راهی در X بوده و $h: I\to I$ نگاشتی پیوسته با $h(\circ)=\circ$ و $h(\text{۱})=\text{۱}$ باشد. نشان دهید که $f\sim f\circ h$.

۴) با استفاده از تمرین ۳ در بالا، اثباتی مستقیم برای $f\sim\varepsilon_x*f$ بیاورید، که f راهی با آغاز در x است.

۵) گیریم $f,g : I \to X$ راههایی در X با شروع مشترک از x و پایان مشترک باشند. ثابت کنید وقتی و تنها وقتی $f \sim g$ که $f * \bar{g} \sim \varepsilon_x$.

۶) گیریم f راهی در X بوده و $h : I \to I$ نگاشتی پیوسته با $h(\circ) = ۱$ و $h(۱) = \circ$ باشد. نشان دهید که $\bar{f} \sim f \circ h$.

۷) فرض کنید $\circ = t_\circ \le t_۱ \le t_۲ = ۱$ و $f : I \to X$ راه باشد. راههای $f_۱$ و $f_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_۱(t) = f\big((۱-t)\,t_\circ + t\,t_۱\big) \;\;,\;\; f_۲(t) = f\big((۱-t)\,t_۱ + t\,t_۲\big).$$

ثابت کنید $f_۱ * f_۲ \sim f$. (راهنمایی: از تمرین ۳ در بالا، استفاده کنید.)

۸) فرض کنید $\circ = t_\circ \le t_۱ \le t_۲ \le \cdots \le t_q = ۱$ و $f : I \to X$ راه باشد. راههای $f_۱$، $f_۲$، . . . و f_q را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_i(t) = f\big((۱-t)\,t_{i-۱} + t\,t_i\big), \;\;,\;\; i = ۱, ۲, \cdots, q$$

ثابت کنید $[f] = [f_۱][f_۲]\cdots[f_q]$.

۹) فرض کنید X فضایی توپولوژی باشد و $X = U \cup V$، که U و V زیر مجموعه‌هایی بازند. نشان دهید که اگر f راهی در X باشد، در این صورت $[f]$ را به صورت $[f] = [f_۱][f_۲]\cdots[f_q]$ می‌توان نوشت، که در آن هر یک از f_i ها راهی تماماً در U و یا تماماً در V است. (راهنمایی: پوشش باز $\{f^{-۱}(U), f^{-۱}(V)\}$ از I را در نظر گرفته، سپس $f^{-۱}(U)$ و $f^{-۱}(V)$ را به صورت اجتماعی مجزا از بازه‌های باز بنویسید و سپس از فشردگی I استفاده کنید؛ یا اینکه از تمرین ۲۵.۱.۴—(۷) استفاده کنید. در آخر از تمرین ۸ در بالا، استفاده کنید.)

۱۰) ۱) ثابت کنید که اگر $h : (\circ;۱) \to (\circ;۱)$ همئومورفیسم باشد، آنگاه همئومورفیسمی $f : [\circ;۱] \to [\circ;۱]$ چنان وجود دارد که $f|_{(\circ;۱)} = h$. نشان دهید که چنین f ای یکتا است. (راهنمایی: به بازهٔ $[\circ;a)$ که در $\mathrm{Int}(I) = (\circ;۱)$ بسته است توجه نموده و نشان دهید که $h((\circ;a])$ به شکل $(\circ;b]$ یا $[c;۱)$ است، که b و c اعدای بین $\circ$ و ۱ هستند.)

۲) ثابت کنید که اگر $h : I \to I$ همئومورفیسم باشد، آنگاه $h(\partial I) = \partial I$. (راهنمایی: از همبندی استفاده کنید.)

۳) فرض کنید f و g راههایی در X باشند که $f : I \to f(I)$ و $g : I \to g(I)$ همئومورفیسم هستند. ثابت کنید که اگر $f(I) = g(I)$، آنگاه $f \sim g$ یا $f \sim \bar{g}$. (راهنمایی: از قسمت ۲ از همین تمرین استفاده کنید.)

۴) فرض کنید f و g راههایی بسته در X باشند که $f:\mathrm{Int}(I)\to f(\mathrm{Int}(I))$ و $g:\mathrm{Int}(I)\to g(\mathrm{Int}(I))$ همئومورفیسم هستند. ثابت کنید که اگر $f(I)=g(I)$ و $f(\partial I)=g(\partial I)$، آنگاه $f\sim g$ یا $f\sim\bar{g}$.

۲.۷ گروه بنیادی

در بخش قبل دیدیم که عمل ضرب در مجموعهٔ دسته‌های هم‌ارزی از راهها (دو راه در صورتی هم‌ارزند که نسبت به $\{۰, ۱\}$ هموتوپ باشند) در فضایی چون X در اصول موضوعهٔ گروه صدق دارد. مسأله این است که ممکن است حاصلضرب دو راه مفروض تعریف نگردد و همچنین عنصر همانی از نقطه‌ای به نقطه‌دیگر، تغییر می‌کند، اصطلاحاً شناور است! برای غلبه بر این دو مشکل، تنها از راههای بسته (و با ابتدا و انتهی در یک نقطهٔ مفروض) استفاده می‌کنیم. بر این اساس تعریف می‌کنیم:

۱.۲.۷ تعریف. راه f را در صورتی **بسته** گوئیم که $f(۰) = f(۱)$. در صورتی که $f(۰) = f(۱) = x$، نقطهٔ x را **پایهٔ** f می‌نامیم. راه بسته را **حلقه** نیز می‌گوئیم. مجموعهٔ همهٔ دسته‌های هم ارزی از راههای بستهٔ با پایهٔ در $x \in X$ را با نماد $\pi(X, x)$ نشان می‌دهیم.

۲.۲.۷ قضیه. مجموعهٔ $\pi(X, x)$ همراه با عمل ضرب $[f][g] = [f * g]$، گروه تشکیل می‌دهد.

اثبات: با توجه به احکام ۶.۱.۷ و ۷.۱.۷ از بخش قبل و نیر این مطلب که عنصر خنثی دیگر شناور نیست و همواره $[\varepsilon_x]$ می‌باشد، حکم بدیهی است. □

۳.۲.۷ تعریف. $\pi(X, x)$ را **گروه بنیادی** X با پایهٔ در نقطهٔ x می‌نامیم.

۴.۲.۷ یادداشت. توجه شود که $[\bar{f}] = [f]^{-۱}$. بعلاوه، با توجه به شرکتپذیری عمل ضرب در $\pi(X, x)$، بجای $([f][g])[h]$ می‌توان از $[f][g][h]$ استفاده نمود. در حالی که $f * g * h$ بی معنی است، زیرا $(f * g) * h$ و $f * (g * h)$ اغلب متفاوتند.

۵.۲.۷ تمرین.

۱) چرا در $\pi(X, x)$ ذکر نقطهٔ x الزامی است؟

۲) نشان دهید که اگر X فضایی متناهی با توپولوزی گسسته باشد، آنگاه $\pi(X, x) = 1$.

۳) گروه $\pi(\mathbb{Q}, ۰)$ را بدست آورید، که $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد مختلط با توپولوزی القایی از $\mathbb{R}$ می‌باشد (توپولوژی بر $\mathbb{R}$ استاندارد فرض شده است).

۴) گیریم X فضایی با $\pi(X,x) = 1$ باشد. نشان دهید که اگر f و g راههایی در X با $f(\circ) = g(\circ) = x$ و $f(۱) = g(۱)$ باشند، آنگاه $f \sim g$. (راهنمایی: از تمرین ۱۱.۱.۷—(۵) استفاده کنید.)

هیچ دلیل کلی‌ای برای وجود ارتباط بین $\pi(X,x)$ و $\pi(X,y)$ وجود ندارد، مگر آنکه راهی از x به y بتوان یافت.

۶.۲.۷ قضیه. گیریم $x,y \in X$. اگر راهی در X از x به y وجود داشته باشد، آنگاه گروههای $\pi(X,x)$ و $\pi(X,y)$ ایزومورفند.

اثبات: گیریم f راهی از x به y باشد. اگر g راه بسته‌ای با پایهٔ در x باشد، آنگاه $(\bar{f} * g) * f$ راهی بسته با پایهٔ در y خواهد بود. بنابراین نگاشت $\mathfrak{u}_f : \pi(X,x) \to \pi(X,y)$ با ضابطهٔ

$$\mathfrak{u}_f([g]) := [f]^{-۱}[g][f] = [(\bar{f} * g) * f]$$

را تعریف می‌کنیم. $\mathfrak{u}_f$ هومومورفیسم بین گروهها است، زیرا

$$\begin{aligned}
\mathfrak{u}_f([g][h]) &= \mathfrak{u}_f([g*h]) = [\bar{f}][g*h][f] = [\bar{f}][g][h][f] \\
&= [\bar{f}][g].([f][\bar{f}]).[h][f] = ([\bar{f}][g][f]).([\bar{f}][h][f]) \\
&= \mathfrak{u}_f([g]).\mathfrak{u}_f([h]).
\end{aligned}$$

حال با استفاده از راه $\bar{f}$ از y به x، به نگاشت $\mathfrak{u}_{\bar{f}} : \pi(X,y) \to \pi(X,x)$ با ضابطهٔ $\mathfrak{u}_{\bar{f}}([h]) = [(f*h)*\bar{f}]$ می‌رسیم. به راحتی می‌شود نشان داد که $(\mathfrak{u}_f \circ \mathfrak{u}_{\bar{f}})([g]) = [g]$. بنابراین $\mathfrak{u}_f$ دو سویی است و لذا ایزومورفیسم می‌باشد. □

۷.۲.۷ نتیجه. اگر X همبند راهی باشد، آنگاه به ازای هر $x,y \in X$ ای گروههای $\pi(X,x)$ و $\pi(X,y)$ ایزومورفند.

۸.۲.۷ تعریف. نظر به حکم بالا، در صورتی که X همبند راهی باشد، از **گروه بنیادی** X می‌توان سخن گفت و از ذکر نقطهٔ پایه خودداری نمود: $\pi(X)$. اما چون راهی مشخص از x به y عملاً وجود ندارد، از حذف آن خودداری می‌کنیم.

۹.۲.۷ یادداشت. فرض همبند راهی در قضیهٔ ۶.۲.۷ الزامی است. در آینده که امکانات بیشتری در خصوص محاسبهٔ گروههای بنیادی معرفی می‌گردد، امکان معرفی مثالی وجود دارد که به ازای $x,y \in X$ های مختلف $\pi(X,x)$ و $\pi(X,y)$ غیر ایزومورفند.

۱۰.۲.۷ تمرین.

۱) ثابت کنید راههای f و g از x به y وقتی و تنها وقتی ایزومورفیسم یکسانی از $\pi(X,x)$ به $\pi(X,y)$ تعریف می‌کنند (یعنی $\mathfrak{u}_f=\mathfrak{u}_g$)، که عنصر $[g*\bar{f}]$ به مرکز $\pi(X,x)$ متعلق باشد. (راهنمایی: مرکز $Z(G)$ گروه مفروض G، به صورت $Z(G):=\{a\in G\,|\,\forall\, b\in G\ :\ ab=ba\}$ تعریف می‌گردد.)

۲) گیریم $\mathfrak{u}_f:\pi(X,x)\to\pi(X,y)$ ایزومورفیسم مشخص شده توسط راه f از x به y باشد. ثابت کنید $\mathfrak{u}_f$ وقتی و تنها وقتی مستقل از انتخاب f است که گروه $\pi(X,x)$ آبلی باشد.

در ادامه به مطالعهٔ تأثیر نگاشتهای پیوسته بر گروههای بنیادی می‌پردازیم.

۱۱.۲.۷ لم. گیریم $\varphi:X\to Y$ نگاشتی پیوسته است. در این صورت

۱) اگر f راهی در X باشد، آنگاه $\varphi\circ f$ راهی در Y است.

۲) اگر $f\sim g$، آنگاه $\varphi\circ f\sim\varphi\circ g$.

۳) اگر f راهی بسته با پایهٔ در $x\in X$ باشد، آنگاه $\varphi\circ f$ راهی بسته با پایهٔ در $\varphi(x)\in Y$ می‌باشد.

۱۲.۲.۷ تعریف. با توجه به لم ۱۱.۲.۷، به ازای هر $[f]\in\pi(X,x)$ ای، عنصر $[\varphi\circ f]$ خوشتعریف و متعلق به $\pi(Y,\varphi(x))$ می‌باشد. بنابراین $\varphi_*:\pi(X,x)\to\pi(Y,\varphi(x))$ را به صورت $\varphi_*([f]):=[\varphi\circ f]$ می‌توان تعریف نمود. نظر به لم بعد، φ_* را **نگاشت القایی توسط** φ می‌نامیم.

۱۳.۲.۷ لم. φ_* همومورفیسم بین گروهها است.

اثبات: بسیار ساده است. در حقیقت

$$\begin{aligned}\varphi_*([f].[g]) &= \varphi_*([f*g])=[\varphi\circ(f*g)]\\ &= [(\varphi\circ f)*(\varphi\circ g)]=[\varphi\circ f].[\varphi\circ g]\\ &= \varphi_*([f]).\varphi_*([g])\end{aligned}$$

و برهان تمام است. □

احکام بعدی به راحتی قابل اثباتند، و به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم.

۱۴.۲.۷ قضیه.

۱) فرض کنید نگاشتهای $\varphi : X \to Y$ و $\psi : Y \to Z$ پیوسته‌اند، در این صورت $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$.

۲) اگر $1 : X \to X$ نگاشت همانی باشد، در این صورت 1_* هومورفیسم همانی بر $\varphi(X, x)$ است.

۱۵.۲.۷ نتیجه. فضاهای همئومورف، دارای گروههای بنیادی ایزومورفند. به بیان دیگر، اگر $\varphi : X \to Y$ همئومورفیسم باشد، آنگاه $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ ایزوموذفیسم است.

۱۶.۲.۷ یادداشت. نظر به احکام بالا، محاسبهٔ گروه بنیادی، روندی برای انتقال مسایل توپولوژی به حوزهٔ جبر می‌باشد. این نمونه‌ای مناسب برای معرفی چگونگی عمل در **توپولوژی جبری** می‌باشد. در واقع، در توپولوژی جبری مسایل را از توپولوژی به جبر منتقل نموده، آن را در جبر مورد بررسی قرار می‌دهیم، و سپس از نتیجهٔ حاصل برای حل مسایل توپولوژی بهره می‌بریم. این روند، دارای مختصاتی به شرح زیر است:

۱) به ازای هر فضای توپولوژی (و به ازای هر نقطهٔ دلخواه از آن به عنوان پایه)، گروهی (بنام گروه بنیادی) در اختیار داریم.

۲) به ازای هر نگاشت پیوسته بین فضاهایی توپولوژی، هومورفیسمی (بنام هومورفیسم القایی) بین گروههای نظیر به‌انها در اختیار داریم.

۳) ترکیب نگاشتهای القایی، ترکیب هومورفیسمهای مربوطه را القاء می‌کند.

۴) نگاشت همانی، هومورفیسم همانی را القاء می‌کند.

۵) همئومورفیسمها، ایزومورفیسم القاء می‌کنند.

توجه شود که بر اساس نتیجهٔ ۱۵.۲.۷، فضاهای همئومورف، گروههای بنیادی ایزومورف دارند، ولی مثالهای فراوانی وجود دارد که نشان می‌دهد «ممکن است گروه بنیادی دو فضا ایزومورف باشند، اما آن دو فضا همئومورف نباشند». با این حال، اگر گروه بیادی دو فضای مفروض ایزومورف نباشند، می‌توان نتیجه گرفت که حتماً آن دو فضا غیر همئومورفند.

۱۷.۲.۷ یادداشت. تناظری که خواص ۱ تا ۵ مذکور در بالا را داشته باشد، **فانکتور** نامیده می‌شود. به بیان دقیقتر، محاسبهٔ گروه بنیادی π، فانکتوری از کاتگوری فضاهای توپولوژی $\mathcal{TOP}$ به کاتگوری گرووها $\mathcal{GRO}$ می‌باشد: $\pi:\mathcal{TOP}\to\mathcal{GRO}$.

به عنوان نمونه‌ای دیگر از فانکتور، می‌توان فانکتور M از کاتگوری فضاهای متری $\mathcal{MET}$ به کاتگوری فضاهای توپولوژی $\mathcal{TOP}$ نام برد، که به هر فضای متری مفروض، ساختار توپولوژی بر آن را نسبت می‌دهد؛ و به هر نگاشت، خود آن نگاشت را نسبت می‌دهد.

۱۸.۲.۷ تمرین.

۱) مثالی از نگاشت پیوسته و یکبیک $\varphi:X\to Y$ بیاورید که نگاشت φ_* نظیر به آن، یکبیک نباشد. (راهنمایی: فرض کنید $\pi(\mathbb{S}^1,x)=\mathbb{Z}$ و $\pi(\mathbb{D}^2,x)=1$.)

۲) مثالی از نگاشت پیوسته و پوشا $\varphi:X\to Y$ بیاورید که نگاشت φ_* نظیر به آن، پوشا نباشد.

۳) ثابت کنید که اگر نگاشت $\varphi:X\to Y$ پیوسته باشد و f راهی از x به y در X باشد، آنگاه $\varphi_*\circ\mathfrak{u}_f=\mathfrak{u}_{\varphi\circ f}\circ\varphi:\pi(X,x)\to\pi(Y,\varphi(y))$، که $\mathfrak{u}_f$ و $\mathfrak{u}_{\varphi\circ f}$ ایزومورفیسمهای مشخص شده توسط راههای بترتیب f و $\varphi\circ f$ میان گروههای بنیادی می‌باشند.

۴) فرض کنید X و Y فضاهای توپولوژی هستند و $x_\circ\in X$. ثابت کنید که نگاشتهای $\psi,\varphi:X\to Y$ با $\varphi(x_\circ)=\psi(x_\circ)$ در صورتی هomomorفیسم یکسانی از $\pi(X,x_\circ)$ به $\pi(Y,\varphi(x_\circ))$ مشخص می‌کنند که φ و ψ نسبت به $x_\circ$ هموتوپ باشند.

۵) فرض کنید A انقباضی برای X با نگاشت انقباض $r:X\to A$ و نگاشت احتوی $i:A\hookrightarrow X$ می‌باشد و $a\in A$. ثابت کنید $i_*:\pi(A,a)\to\pi(X,a)$ منومورفیسم است (یعنی، هومومورفیسم یکبیک می‌باشد)؛ و نگاشت $r_*:\pi(X,a)\to\pi(A,a)$ اپیمورفیسم است (یعنی، هومومورفیسم پوشا می‌باشد).

۶) با مفروضات در تمرین بالا، فرض کنید $i_*(\pi(A,a))$ زیرگروهی نرمال از $\pi(X,a)$ است. ثابت کنید $\pi(X,a)$ حاصلضرب مستقیم زیرگروههای $\mathrm{Image}(i_*) :=$ $i_*(\pi(A,a))$ و $\mathrm{Kernel}(r_*) := r_*^{-1}([\varepsilon_a])$ می‌باشد.

۷) نشان دهید که اگر A انقباض دگردیسی قوی برای X باشد و $a \in A$، در این صورت، نگاشت احتوی $i : A \hookrightarrow X$ موجب القاء ایزومورفیسم $i_* : \pi(A,a) \to$ $\pi(X,a)$ می‌شود.

۸) نشان دهید که اگر $\varphi : X \to X$ نگاشتی پیوسته با $\varphi \simeq 1_X$ باشد و $x_\circ \in X$، آنگاه نگاشت $\varphi_* : \pi(X,x_\circ) \to \pi(X,\varphi(x_\circ))$ ایزومورفیسم است. (راهنمایی: اگر ناچار شدید، به اثبات قضیهٔ ۱۹.۲.۷ توجه کنید.)

حکم بعدی تعمیم تمرین ۱۵.۴.۷—(۴) می باشد.

۱۹.۲.۷ قضیه. گیریم $\psi, \varphi : X \to Y$ نگاشتهایی پیوسته، $F : \varphi \simeq \psi$ هموتوپی و $x_\circ \in X$ باشد. فرض کنیم $f : I \to X$ راه با ضابطهٔ $f(t) = F(x_\circ, t)$، و $\mathfrak{u}_f$ ایزومورفیسم القائی توسط راه f از $\pi(X,x_\circ)$ به $\pi(Y,\psi(x_\circ))$ باشد. در این صورت هومورفیسمهای القائی $\varphi_* : \pi(X,x_\circ) \to \pi(X,\varphi(x_\circ))$ و $\psi_* : \pi(X,x_\circ) \to$ $\pi(X,\psi(x_\circ))$ در رابطهٔ $\psi_* = \mathfrak{u}_f \circ \varphi_*$ صدق دارند.

اثبات: می‌خواهیم نشان دهیم که اگر $[g] \in \pi(X,x_\circ)$، آنگاه $[\psi \circ g] = [(\bar{f} * (\varphi \circ$ $g)) * f]$. به بیان دیگر، می‌خواهیم نشان دهیم که راههای $f * ((\bar{f} * (\varphi \circ g))$ و $\psi \circ g$ هم ارزند. ملاحظه می‌شود که چون $(\varphi \circ g)(t) = F(g(t), ۱)$ و $f(t) = F(x_\circ, t)$، داریم

$$\begin{aligned}
\Big((\bar{f} * (\varphi \circ g)) * f\Big)(t) &= \begin{cases} f(۱ - ۴t) & \text{اگر } \circ \le t \le ۱/۴ \\ (\varphi \circ g)(۴t - ۱) & \text{اگر } ۱/۴ \le t \le ۱/۲ \\ f(۲t - ۱) & \text{اگر } ۱/۲ \le t \le ۱ \end{cases} \\
&= \begin{cases} F(x_\circ, ۱ - ۴t) & \text{اگر } \circ \le t \le ۱/۴ \\ F(g(۴t - ۱), \circ) & \text{اگر } ۱/۴ \le t \le ۱/۲ \\ F(x_\circ, ۲t - ۱) & \text{اگر } ۱/۲ \le t \le ۱ \end{cases}
\end{aligned}$$

برای مشاهدهٔ هموتوپ بودن $(\bar{f} * (\varphi \circ g)$ و $\psi \circ g$، کافی است توجه شود که $\psi \circ g$ با $(\varepsilon_x * (\psi \circ g))\varepsilon_x$ هم ارز است، که در اینجا $x = \psi(x_\circ)$. اما، راه $(\varepsilon_x * (\psi \circ g))\varepsilon_x$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Big((\varepsilon_x * (\psi \circ g))\varepsilon_x\Big)(t) = \begin{cases} F(x_\circ, ۱) & \text{اگر } \circ \le t \le ۱/۴ \\ F(g(۴t - ۱), \circ) & \text{اگر } ۱/۴ \le t \le ۱/۲ \\ F(x_\circ, ۱) & \text{اگر } ۱/۲ \le t \le ۱ \end{cases}$$

در ادامه، نگاشت $H : I \times I \to Y$ با ضابطهٔ

$$H(t,s) = \begin{cases} F(x_{۰}, ۱ - ۴t(۱-s)) & \text{اگر } ۰ \leq t \leq ۱/۴ \\ F(g(۴t-۱), s) & \text{اگر } ۱/۴ \leq t \leq ۱/۲ \\ F(x_{۰}, ۱ + ۲(t-۱)(۱-s)) & \text{اگر } ۱/۲ \leq t \leq ۱ \end{cases}$$

را تعریف می‌کنیم. این نگاشت به وضوح پیوسته است، و بعلاوه

$$\begin{array}{ll} H(t,۰) = \big((\bar{f} * (\varphi \circ g)) * f\big)(t), & H(t,۱) = \big((\varepsilon_x * (\varphi \circ g)) * \varepsilon_x\big)(t), \\ H(۰,s) = F(x_{۰}, ۱) = \psi(x_{۰}), & H(۱,s) = F(x_{۰}, ۱) = \psi(x_{۰}). \end{array}$$

بنابراین، $(\bar{f} * (\varphi \circ g)) * f \sim (\varepsilon_x * (\varphi \circ g)) * \varepsilon_x \sim \psi \circ g$، و برهان تمام است. □

۲۰.۲.۷ یادداشت. روش دیگری برای بیان حکم بالا بر اساس نمودار تعویض‌پذیر زیر وجود دارد:

$$\begin{tikzcd} \pi(X, x_{۰}) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[dr, "\psi_*"'] & \pi(Y, \varphi(x_{۰})) \arrow[d, "\mathfrak{u}_f"] \\ & \pi(Y, \psi(x_{۰})) \end{tikzcd}$$

۲۱.۲.۷ قضیه. اگر $\varphi : X \to Y$ هم ارزی هموتوپی باشد و $x \in X$، در این صورت نگاشت $\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ ایزومورفیسم است.

اثبات: چون φ هم ارزی هموتوپی است، نگاشتی پیوسته $\psi : Y \to X$ چنان وجود دارد که $\varphi \circ \psi \simeq 1_Y$ و $\psi \circ \varphi \simeq 1_X$. بنا به قضیهٔ ۱۹.۲.۷ داریم $\mathfrak{u}_f \circ (\psi \circ \varphi)_* \simeq 1_{X*}$. چون $\mathfrak{u}_f$ و 1_{X*} ایزومورفیسم هستند، نگاشت $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ نیز ایزومورفیسم می‌باشد؛ که به معنی اپیمورفیسم بودن ψ_* و منومورفیسم بودن φ_* است. به صورت مشابه $\varphi_* \circ \psi_*$ نیز ایزومورفیسم است؛ که به معنی اپیمورفیسم بودن φ_* و منومورفیسم بودن ψ_* است، و برهان تمام است. □

۲۲.۲.۷ نتیجه. گروه بنیادی هر فضای انقباض پذیر، بدیهی است.

اصطلاح بخصوصی در مورد فضاهای همبند راهی که گروه بنیادیشان بدیهی است، استفاده می‌شود.

۲۳.۲.۷ تعریف. فضای توپولوژی X را در صورتی **همبند ساده** گوئیم که همبند راهی بوده و گروه بنیادی آن بدیهی باشد. یعنی، به ازای یک $x \in X$ (و بنابراین هر $x \in X$ ای) داشته باشیم $\pi(X, x) = 1$.

۲۴.۲.۷ نتیجه. فضاهای انقباض پذیر، همبند ساده هستند. عکس این حکم در حالت کلی درست نیست.

۲۵.۲.۷ تمرین.

۱) فرض کنید A انقباض ضعیفی برای X باشد (به تمرین ۲۱.۳.۶−(۵) توجه شود) و $a \in A$. در مورد هومومورفیسمهای القائی $r_* : \pi(X,a) \to \pi(A,a)$ و $i_* : \pi(A,a) \to \pi(X,a)$ چه حکم کلی‌ای می‌توان گفت؟

۲) در صورتی می‌گوئیم فضای X دارای خاصیت C است که به ازای هر راه بستهٔ $f : I \to X$، یک هموتوپی $F : I \times I \to X$ به گونه‌ای یافت شود که به ازای هر $s, t \in I$ ای $F(\circ, s) = F(۱, s)$، $F(t, ۱) = F(\circ, ۱)$ و $F(t, \circ) = f(t)$. توجه شود که لزومی ندارد F هموتوپی نسبی نسبت به $\{\circ, ۱\}$ باشد. نشان دهید که شرط لازم و کافی برای اینکه X دارای خاصیت C باشد، آن است که X همبند ساده باشد.

۳) فرض کنید $X = U \cup V$ که U و V باز و همبند ساده هستند، و $U \cap V$ همبند راهی است. ثابت کنید X همبند ساده است. سپس نتیجه بگیرید که اگر $n \geq ۲$، آنگاه $\mathbb{S}^n$ همبند ساده است. (راهنمایی: از تمرینات ۱۱.۱.۷−(۵) و (۹) استفاده شود.)

حکم بعدی، ارتباط بین گروه بنیادی فضاها و گروه بنیادی حاصلضربشان را نشان می‌دهد.

۲۶.۲.۷ قضیه. گیریم فضاهای توپولوژی X و Y همبند راهی باشند. گروه بنیادی $X \times Y$ با حاصلضرب گروه بیادی X و گروه بنیادی Y ایزومورف است.

اثبات: گیریم $p : X \times Y \to X$ و $q : X \times Y \to Y$ نمایشگر تصاویر طبیعی باشند. اکنون، نگاشت $\varphi : \pi(X \times Y, (x_\circ, y_\circ)) \to \pi(X, x_\circ) \times \pi(Y, y_\circ)$ را به صورت $\varphi([f]) = \big(p_*([f]), q_*([f])\big) = ([p \circ f], [q \circ f])$ تعریف می‌کنیم.

ابتدا تحقیق می‌کنیم که φ خوشتعریف است. اگر $[f]=[g]$، آنگاه $f\sim g$، و بنابراین نگاشتی پیوسته $F:I\times I\to X\times Y$ چنان وجود دارد که $F(t,\circ)=f(t)$، $F(t,\text{۱})=g(t)$ و $F(\circ,s)=F(\text{۱},s)=(x_\circ,y_\circ)$. در این صورت نگاشتهای پیوستهٔ $p\circ F:I\times I\to X$ و $q\circ F:I\times I\to Y$، بترتیب موجب طرح هم ارزیهای $p\circ f\sim p\circ g$ و $q\circ f\sim q\circ g$ می‌شوند. پس $\varphi([f])=\varphi([g])$ و φ خوشتعریف است.

برای مشاهدهٔ پوشایی φ، فرض کنیم $([f_\text{۱}],[f_\text{۲}])\in\pi(X,x_\circ)\times\pi(Y,y_\circ)$. نگاشت $f:I\times I\to X\times Y$ با ضابطهٔ $f(t)=(f_\text{۱}(t),f_\text{۲}(t))$ را در نظر بگیرید. روشن است که در این صورت $\varphi([f])=([f_\text{۱}],[f_\text{۲}])$.

برای نشان دادن یکبیک بودن φ، فرض می‌کنیم $\varphi([f])=\varphi([g])$، در این صورت $p\circ f\sim p\circ g$ و $q\circ f\sim q\circ g$. چنانچه $F_\text{۱}:I\times I\to X$ و $F_\text{۲}:I\times I\to Y$ این دو هم ارزی را بیان کنند، در این صورت $F:I\times I\to X\times Y$ با ضابطهٔ $F(t,s)=\big(F_\text{۱}(t,s),F_\text{۲}(t,s)\big)$ هموتوپی نسبی نسبت به $\{\circ,\text{۱}\}$ است؛ و موجب هم ارزی $F:f\sim g$ می‌شود. بنابراین $[f]=[g]$.

سرانجام، از این حکم بدیهی که اگر $f,g:I\to X\times Y$ راههایی با $f(\text{۱})=g(\circ)$ باشند، آنگاه $p\circ(f*g)=(p\circ f)*(p\circ g)$ و $q\circ(f*g)=(q\circ f)*(q\circ g)$، نتیجه می‌گیریم که φ هomomorphism است. □

۲۷.۲.۷ یادداشت. در تمرینات، روش دیگری برای اثبات این قضیه آورده شده است.

۲۸.۲.۷ تمرین.

۱) نشان دهید که حاصلضرب دو فضای همبند ساده، همبند ساده است.

۲) گیریم $f:I\to X$ و $g:I\to Y$ راههی بستهٔ با پایهٔ بترتیب در $x_\circ\in X$ و $y_\circ\in Y$ باشند. گیریم $i:X\hookrightarrow X\times Y$ و $j:Y\hookrightarrow X\times Y$ نگاشتهای احتوی هستند: $i(x):=(x,y_\circ)$ و $j(y):=(x_\circ,y)$. نشان دهید راههای $(i\circ f)*(j\circ g)$ و $(j\circ g)*(i\circ f)$ در $X\times Y$ هم ارزند.

۳) با مفروضات در تمرین (۲)، نشان دهید که نگاشت $([f],[g])\mapsto[(i\circ f)*(j\circ g)]$ از $\pi(X,x_\circ)\times\pi(Y,y_\circ)$ به $\pi(X\times Y,(x_\circ,y_\circ))$ ایزومورفیسم بین گروهها است.

۴) **گروه توپولوژی** G عبارت است از مجموعه‌ای G دارای ساختار گروهی و توپولوژی، به نحوی که نکاشتهای $\mu:G\times G\to G$ و $\nu:G\to G$ با ضابطهٔ بترتیب

$\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$ و $\nu(g) = g^{-1}$ پیوسته‌اند. فرض کنید f و h دو راه بستهٔ در G با پایهٔ در e هستند. نگاشت $f.h : I \to G$ را به صورت $(f.h)(t) := f(t)h(t)$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید $f*h \sim f.h \sim h*f$ و نتیجه بگیرید که گروه بنیادی $\pi(G,e)$ آبلی است. بعلاوه، نشان دهید که هومورفیسم $\nu_* : \pi(G,e) \to \pi(G,e)$ به صورت $\nu_*([f]) = [f]^{-1}$ عمل می‌کند.

۵) نگاشت $\mu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ را با فرض $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ به صورت $\mu(z_1, z_2) = z_1 z_2$ تعریف می‌کنیم. همچنین، نگاشت $\nu : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ را به صورت $\nu(z) = z^{-1}$ تعریف می‌کنیم.ثابت کنید $\mathbb{S}^1$ گروه توپولوژی است. نتیجه بگیرید $\pi(\mathbb{S}^1, 1)$ آبلی است.

٦) این تمرین تعمیم قسمت (۴) است. گیریم $x_\circ$ نقطه‌ای از فضای X باشد. فرض کنید نگاشتی پیوسته $\mu : X \times X \to X$ چنان وجود دارد که به ازای هر $x \in X$ ای $\mu(x_\circ, x) = \mu(x, x_\circ) = x$. ثابت کنید که اگر $i, j : X \to X \times X$ نمایشگر نگاشتهای احتوی $i(x) = (x, x_\circ)$ و $j(x) = (x_\circ, x)$ باشند، در این صورت $\mu((i \circ f) * (j \circ g)) = f * g$. سپس، با استفاده از تمرین (۴) در بالا، نتیجه بگیرید که گروه $\pi(X, x_\circ)$ آبلی است.

۷) این مسأله تعمیم قسمت ٦ از همین مجموعهٔ تمرینات است. فضای X را در صورتی H-**فضا** (به افتخار هاینز هوپف Heinz Hopf) گوئیم که نگاشتی پیوسته $\mu : X \times X \to X$ چنان یافت شود که به ازای نقطهٔ $x_\circ \in X$ ای $\mu \circ i \simeq_{\{x_\circ\}} 1_X$ و $\mu \circ j \simeq_{\{x_\circ\}} 1_X$؛ که i و j نگاشتهای احتوی معرفی شده در تمرین قبل هستند. توجه شود که $\mu(x_\circ, x_\circ) = x_\circ$. ثابت کنید گروه بنیادی $\mu(X, x_\circ)$ هر H-فضای مفروض، آبلی است. (راهنمایی: نشان دهید $\mu((i \circ f) * (j \circ g)) \sim f * g$.)

۳.۷ تعمیم مفهوم گروه بنیادی

در تعریف گروه بنیادی از راه (یعنی، توابع از $I \subset \mathbb{R}$ به فضای توپولوژی) استفاده شد. به همین دلیلی در برخی کتب بجای $\pi(X,x)$ از نماد $\pi_1(X,x)$ استفاده می‌شود، که اندیس ۱ مبین بعد $\mathbb{R}$ است. تعریف زیر تعمیمی از مفهوم راه را فراهم می‌سازد.

۱.۳.۷ تعریف. در صورتی که I^n حاصلضرب توپولوژی I به تعداد n بار در خودش باشد، منظور از n−**راه در** X، نگاشتی پیوسته به شکل $f : I^n \to X$ می‌باشد.

۲.۳.۷ تعریف. مرز I^n را به صورت $\partial I^n = \{(t_1, \cdots, t_n) \,|\, \exists i \ : \ t_i \in \{0, 1\}\}$ می‌توان نشان داد. منظور از n−راه بستهٔ با پایهٔ در $x_0 \in X$، نگاشتی پیوسته $f : I^n \to X$ است که $f(\partial I^n) = x_0$. دو n−راه بستهٔ f و g با پایهٔ در x_0 را در صورتی هم ارز گوئیم که نسبت به $\{x_0\}$ هموتوپ باشند. فرض کنید $\pi_n(X, x_0)$ مجموعهٔ همهٔ دسته‌های هم ارزی از n−راههای بستهٔ با پایهٔ در x_0 باشد.

۳.۳.۷ تعریف. فرض کنیم $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$. حاصلضرب آنها را به صورت $[f][g] = [f * g]$ تعریف می‌کنیم، که در آن

$$(f * g)(t) := \begin{cases} f(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & \text{اگر } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ f(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \text{اگر } 1/2 \leq t_1 \leq 1 \end{cases}$$

به راحتی می‌توان خوشتعریفی این ضرب را نشان داد (تمرین).

۴.۳.۷ قضیه. $\pi_n(X, x_0)$ با ضرب تعریف شده در بالا، گروه است. $\pi_n(X, x_0)$ را n−**گروه بنیادی** X **با پایهٔ در** x_0 می‌نامیم.

در حالت کلی ممکن است $\pi_1(X, x_0) = \pi(X, x_0)$ آبلی نباشد. با این حال، حکم زیر را داریم.

۵.۳.۷ قضیه. اگر $n \geq 2$، آنگاه گروه $\pi_n(X, x_0)$ آبلی است.

۶.۳.۷ تمرین.

۱) قضیهٔ ۴.۳.۷ را ثابت کنید: $\pi(X, x_0)$ گروه است.

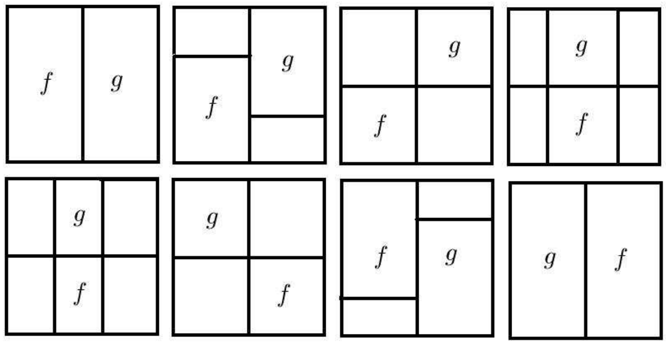
۲) ثابت کنید که اگر راهی در X از x به y وجود داشته باشد، آنگاه $\pi_n(X, x)$ و $\pi_n(X, y)$ ایزومورفند.

۳) فرض کنید $\varphi : X \to Y$ نگاشتی پیوستهٔ است. نگاشت القائی $\varphi_* : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, \varphi(x))$ را چطور تعریف می‌کنید؟ ثابت کنید φ_* هومومورفیسم است. همچنین قضیهٔ ۱۴.۲.۷ را برای حالت گروههای بنیادی مرتبهٔ بالا $\pi_n(X, x)$ اثبات کنید. نتیجه بگیرید که فضاهای هئومورف، گروههای بنیادی ایزومورف دارند.

۴) ثابت کنید که فضاهای هم نوع هموتوپی، گروههای بنیادی مرتبهٔ بالای ایزومورف دارند.

۵) قضیهٔ ۵.۳.۷ را ثابت کنید. به بیان دیگر: ثابت کنید که اگر X $\in$ $x_\circ$ و $n \geq$ ۲، آنگاه $\pi_n(X, x_\circ)$ آبلی است. (راهنمایی: از روش مشروح در شکل ۵.۷ استفاده کنید.)

شکل ۵.۷: مربوط به تمرین ۶.۳.۷$-$(۵)



۷.۳.۷ یادداشت. وارون حکم تمرین ۶.۳.۷$-$(۴) را تا حدودی می‌توان اثبات نمود. به این معنی که اگر X و Y از نوع بخصوص باشند (یعنی، مثلاً هر دو $CW-$مجتمع همبند راهی باشند) و نیز اگر $\varphi : X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد که به ازای هر $n \geq$ ۱ ای نگاشت القائی $\varphi_* : \pi_n(X, x_\circ) \to \pi_n(Y, \varphi(x_\circ))$ ایزومورفیسم است، در این صورت φ هم ارزی هموتوپی است. این قضیه به ج. ه. س. وایتهد منتسب است.

۴.۷ گروه بنیادی دایره $\mathbb{S}^1$

تا اینجا بجز در موارد بدیهی، گروه بنیادی فضایی را محاسبه نکرده‌ایم. در این بخش گروه بنیادی دایره $\mathbb{S}^1$ را محاسبه می‌کنیم؛ که پاسخ آن گروه جمعی اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است. این حکم را به صورت شهودی به صورت زیر می‌توان مشاهده نمود:

هر راه بستهٔ f با پایهٔ در $1 \in \mathbb{S}^1$ از دایره $\mathbb{S}^1$ تعدادی مشخص بار به گرد دایره می‌چرخد؛ این عدد را چرخش یا درجهٔ f می‌نامیم. (با $f(0) = 1$ شروع نموده و $f(t)$ را در حال ازدیاد t در نظر می‌گیریم؛ هر گاه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بگردد، -1 امتیاز و هر گاه در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت بگردد، ۱ امتیاز می‌دهیم. امتیاز کل برابر همان عدد چرخش است.) به این ترتیب، به ازای هر راه بستهٔ با پایهٔ در 1، عددی بدست می‌آید. ثابت می‌شود که دو راه بسته وقتی و تنها وقتی هم ارزند (یعنی، نسبت به $\{0, 1\}$ هموتوپند) که هم درجه باشند. سر انجام، ثابت می‌شود که به ازای هر عدد صحیح مفروض n، راهی از درجهٔ n وجود دارد.

به جهت ایجات شفافیت لازم در تعریف درجه، به تعریف زیر نیاز داریم.

۱.۴.۷ تعریف. نگاشت نمایی $e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ را به صورت $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ تعریف می‌کنیم.

۲.۴.۷ لم. نگاشت نمایی $e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ پیوسته و پوشا است. بعلاوه

۱) به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ و هر $n \in \mathbb{Z}$ ای $e(t+n) = e(t)$؛

۲) $e^{-1}(\exp(2\pi i t_0)) = \mathbb{Z} + t_0 := \{t_0 + n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$؛ و در حالت خاص

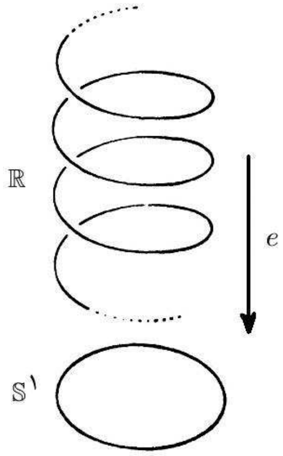
۳) $e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

از نظر شهودی، اگر محور حقیقی را به صورت مارپیچ در نظر بگیریم، e تصویر در امتداد محور آن می‌باشد. به شکل ٦.٧ توجه شود.

ایدهٔ اثبات $\pi(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$ را چنین می‌توان اظهار داشت: نشان می‌دهیم که به ازای هر راه $f : I \to \mathbb{S}^1$ با $f(0) = f(1) = 1$، نگاشتی یکتا $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ با $\tilde{f}(0) = 0$ و $e \circ \tilde{f} = f$ وجود دارد (نگاشت $\tilde{f}$ را ترفیع f می‌نامیم). چون $f(1) = 1$، بایستی داشته باشیم $\tilde{f}(1) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$؛ این عدد صحیح را درجهٔ f می‌نامیم. سپس، نشان می‌دهیم که اگر راههای f_0 و f_1 در $\mathbb{S}^1$ هم ارز باشند، آنگاه $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$. این باعث طرح نگاشتی به شکل $\pi(\mathbb{S}^1, 1) \to \mathbb{Z}$ می‌گردد، که در قدم آخر نشان می‌دهیم ایزومورفیسم می‌باشد.

این روش را در فصل بعد به فضاهای مختلف تعمیم می‌دهیم.

شکل ۶.۷: تعبیر شهودی نگاشت نمایی e



۳.۴.۷ لم. گیریم U زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{S}^۱-\{1\}$ باشد و $V = I\cap e^{-۱}(U) \subseteq \mathbb{R}$. در این صورت $e^{-۱}(U)$ اجتماعی مجزا از مجموعه‌های باز $V+n := \{v+n \,|\, v \in V\}$ با $n \in \mathbb{Z}$ است، که هر یک از آنها توسط e به صورت همئومورف روی U تصویر می‌گردند.

اثبات: فرض کنیم U بازه‌ای باز در $\mathbb{S}^۱$ باشد، به عبارت دیگر، اعداد $a, b \in [\circ; ۱]$ به گونه‌ای یافت شوند که $U = \{\exp(۲\pi it) \,|\, a < t < b\}$. در این صورت $V = (a; b)$، و به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$ ای $V + n = (a + n; b + n)$. روشن است که در این صورت، $e^{-۱}(U)$ اجتماعی مجزا از مجموعه‌های باز به شکل $V + n$ می‌باشد، که $n \in \mathbb{Z}$.

فرض کنیم e_n تحدید e به $V + n = (a + n; b + n)$ باشد. به وضوح e_n پیوسته و دوسویی است. برای تحقیق پیوستگی $e_n^{-۱}$، مجموعهٔ $(a+n; b+n)$ و زیر مجموعهٔ بستهٔ W از آن را در نظر می‌گیریم (واضح است که در این صورت W فشرده می‌باشد). چون W فشرده و $\mathbb{S}^۱$ هاوسدورف است، بنابه قضیهٔ ۱۱.۲.۴ نگاشت e_n همئومورفیسمی از W بروی $e_n(W)$ تعریف می‌کند. در نتیجه، $e_n(W)$ فشرده و لذا بسته است. این نشان می‌دهد که اگر W زیر مجموعه‌ای بسته باشد، آنگاه $e_n(W)$ نیز بسته است؛ بنابراین $e_n^{-۱}$ پیوسته است و در نتیجه e_n همئومورفیسم می‌باشد. □

۴.۴.۷ تمرین. فرض کنید $x \in \mathbb{S}^۱$ دلخواه است. نشان دهید حکم بالا در مورد $\mathbb{S}^۱ - \{x\}$ نیز درست می‌باشد.

۵.۴.۷ نتیجه. اگر $f : X \to \mathbb{S}^1$ پوشا نباشد، در این صورت f پوچ هموتوپی است. یعنی، با نگاشتی ثابت هموتوپ است.

اثبات: اگر $x \notin \mathrm{Image}(f)$، در این صورت $\mathbb{S}^1 - \{x\}$ با $(0;1)$ همئومورف است، که فضایی انقباض پذیر می‌باشد. (به ازای s ای $x = \exp(2\pi i s)$ و $\mathbb{S}^1 = \{\exp(2\pi i t) \mid s \le t < s+1\}$.) $\square$

حال نوبت به اولین حکم مهم این فصل رسیده است.

۶.۴.۷ قضیهٔ ترفیع راهها برای $(e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1)$. هر نگاشت $f : I \to \mathbb{S}^1$ دارای ترفیع $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ است. بعلاوه، به ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}$ با $e(x_0) = f(0)$، ترفیعی یکتا با این ویژگی وجود دارد که $\tilde{f}(0) = x_0$.

اثبات: به ازای $x \in \mathbb{S}^1$، فرض کنیم U_x همسایگی بازی از آن باشد که $e^{-1}(U_x)$ اجتماعی مجزا از زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ است، به گونه‌ای که هر یک توسط e به صورت همئومورف بروی U_x نگاشته می‌شود. خانوادهٔ $\{f^{-1}(U_x) \mid x \in \mathbb{S}^1\}$ را به صورت $\{(x_j;y_j) \cap I \mid j \in J\}$ می‌توان در نظر گرفت، که پوششی باز برای I است. چون I فشرده است، زیر پوششی متناهی از آن نظیر

$$[0;t_1+\varepsilon_1),\ \ (t_2-\varepsilon_2;t_2+\varepsilon_2),\ \cdots\ (t_n-\varepsilon_n;1]$$

وجود دارد، که به ازای هر $i = 1,2,\cdots,n-1$ ای $t_i+\varepsilon_i > t_{i+1}-\varepsilon_{i+1}$. حال، به ازای $i = 1,2,\cdots,n-1$، عنصر $a_i \in (t_{i+1}\varepsilon_{i+1};t_i+\varepsilon_i]$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 1$. روشن است که $f([a_i;a_{i+1}]) \subseteq \mathbb{S}^1$، و حتی بیشتر، $f([a_i;a_{i+1}])$ در زیر مجموعه‌ای باز S_i از $\mathbb{S}^1$ قرار دارد، طوری که $e^{-1}(S_i)$ اجتماعی مجزا از زیر مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ است که هر یک توسط e به صورت همئومورف بروی S_i تصویر می‌شود.

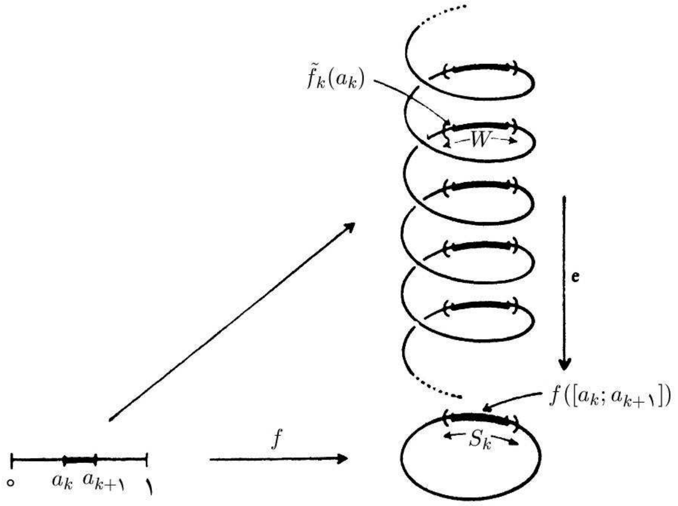
ترفیعهای «$\tilde{f}_k$ بر $[0;a_k]$ و با $\tilde{f}_k(0) = x_0$» را به صورت استقراء روی $k = 0,1,\cdots,n$ تعریف می‌کنیم. این برای $k = 0$ بدیهی است: $\tilde{f}(0) = x_0$؛ یعنی، انتخابی در کار نیست. فرض کنیم $\tilde{f}_k : [0;a_k] \to \mathbb{R}$ به صورت یکتا تعریف شده باشد. یادآور می‌شویم که $f([a_k;a_{k+1}]) \subseteq S_k$ و $e^{-1}(S_k)$ اجتماعی مجزا از $\bigcup\{W_j \mid j \in J\}$ از مجموعه‌های باز است که به ازای هر $j \in J$ ای $e|_{W_j} : W_j \to S_k$ همئومورفیسم است. اکنون، به ازای عضو یکتایی W از خانوادهٔ $\{W_j \mid j \in J\}$ داریم $\tilde{f}_k(a_k) \in W$؛ به شکل ۷.۷ توجه شود. چون $[a_k;a_{k+1}]$ همبند راهی است، بایستی $[a_k;a_{k+1}]$ توسط $\tilde{f}_{k+1}$ بتوی W نگاشته شود. چون تحدید $e|_W : W \to S_k$ همئومورفیسم است،

نگاشتی یکتا $\rho : [a_k; a_{k+1}] \to W$ چنان وجود دارد که $e \circ \rho = f|_{[a_k;a_{k+1}]}$ (در واقع $\rho = (e|_W)^{-1} \circ f$). حال، $\tilde{f}_{k+1}$ را به صورت

$$\tilde{f}_{k+1}(s) = \begin{cases} \tilde{f}_k(s) & 0 \leq s \leq a_k \quad \text{اگر} \\ \rho(s) & a_k \leq s \leq a_{k+1} \quad \text{اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم، که بنا به لم چسب و به دلیل اینکه $\tilde{f}_k(a_k) = \rho(a_k)$، پیوسته است؛ و مطابق روش ساختش، یکتا می‌باشد. به این ترتیب، $\tilde{f} = \tilde{f}_n$ به صورت استقرایی حاصل می‌گردد. □

شکل ۷.۷



با استفاده از این قضیه، درجهٔ هر راه بسته در $\mathbb{S}^{1}$ را می‌توان تعریف نمود.

۷.۴.۷ تعریف. گیریم f راه بسته‌ای در $\mathbb{S}^{1}$ با پایهٔ در 1 باشد و $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ ترفیع یکتایی از آن باشد که $\tilde{0} = 0$. چون $e^{-1}(f(1)) = e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$، ملاحظه می‌گردد که $\tilde{f}(1)$ عددی صحیح است. این عدد را **درجهٔ راه** f تعریف نموده و با نماد $\deg f$ نشان می‌دهیم.

به جهت اثبات اینکه راههای هم ارز، دارای درجهٔ برابرند، ابتدا نشان می‌دهیم که راههای هم ارز دارای ترفیعهای هم ارزند. برای این منظور، در قضیهٔ قبل بجای I از I^{2} استفاده می‌کنیم.

۸.۴.۷ لم. هر نگاشت $F : I^{2} \to \mathbb{S}^{1}$ دارای ترفیع $\tilde{F} : I^{2} \to \mathbb{R}$ است. بعلاوه، به ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}$ با $e(x_0) = F(0, 0)$، ترفیعی یکتا با این ویژگی وجود دارد که $\tilde{F}(0, 0) = x_0$.

اثبات: اثبات بسیار شبیه قضیهٔ ۶.۴.۷ است. چون $I^۲$ فشرده است، اعداد

$$\circ = a_\circ < a_۱ < \cdots < a_n = ۱, \quad \circ = b_\circ < b_۱ < \cdots < b_m = ۱,$$

را طوری می‌توان یافت که اگر R_{ij} را مستطیل

$$R_{ij} = \{(t,s) \in I^۲ \mid a_i \leq t \leq a_{i+۱} \,,\, b_j \leq s \leq b_{j+۱}\}$$

تعریف کنیم، آنگاه $F(R_{i,j}) \subseteq \mathbb{S}^۱$. حال با استفاده از روشی شبیه به روش بکار رفته در اثبات قضیهٔ ۶.۴.۷، ترفیع $\tilde{F}$ را به صورت استقرایی بر مستطیلهای

$$R_{\circ,\circ},\ R_{\circ,۱},\ \cdots\ ,\ R_{\circ,m},\ R_{۱,\circ},\ R_{۱,۱},\ \cdots$$

تعریف می‌کنیم. جزئیات را به خواننده می‌سپاریم. □

به عنوان نتیجه‌ای از این حکم، قضیهٔ تکمداری را برای $\mathbb{S}^۱$ اثبات می‌کنیم، که بر اساس آن راههای هم ارز دارای درجهٔ برابرند.

۹.۴.۷ نتیجه (قضیهٔ تک مداری). فرض کنید $f_\circ$ و $f_۱$ راههایی هم ارز در $\mathbb{S}^۱$ با پایهٔ در 1 باشند. اگر $\tilde{f}_\circ$ و $\tilde{f}_۱$ ترفیع آن دو باشند، و نیز اگر $\tilde{f}_\circ(\circ) = \tilde{f}_۱(\circ)$، در این صورت $\tilde{f}_\circ(۱) = \tilde{f}_۱(۱)$.

اثبات: گیریم F هموتوپی نسبت به $\{\circ, ۱\}$ بین $f_\circ$ و $f_۱$ باشد. این نگاشت، ترفیعی یکتا $\tilde{F} : I^۲ \to \mathbb{R}$ را مشخص می‌کند که $\tilde{F}(\circ,\circ) = \tilde{f}_\circ(\circ) = \tilde{f}_۱(\circ)$. چ.ن $F(t,\circ) = f_\circ(t)$ و $F(t,۱) = f_۱(t)$، داریم $\tilde{F}(t,\circ) = \tilde{f}_\circ(t)$ و $\tilde{F}(t,۱) = \tilde{f}_۱(t)$. همچنین، $\tilde{F}(۱,t)$ راهی از $\tilde{f}_\circ(۱)$ به $\tilde{f}_۱(۱)$ در است، زیرا $F(۱,t) = f_\circ(۱) = f_۱(۱)$. اما، $\tilde{F}(۱,t) \in e^{-۱}(f_\circ(۱)) \simeq \mathbb{Z}$، که این به معنی ثابت بودن راه $\tilde{F}(۱,t)$ است. بنابراین $\tilde{f}_\circ(۱) = \tilde{f}_۱(۱)$ و برهان تمام است. □

۱۰.۴.۷ یادداشت. توجه شود که در برهان بالا، عملاً $\tilde{F}$ هموتوپوی نسبت به $\{\circ, ۱\}$ بین $\tilde{f}_\circ$ و $\tilde{f}_۱$ می‌باشد.

اکنون امکان اثبات قضیهٔ‌اساسی این فصل را داریم. یعنی، امکان محاسبهٔ گروه بنیادی دایره را داریم.

۱۱.۴.۷ قضیه. $\pi(\mathbb{S}^۱, 1) \cong \mathbb{Z}$.

اثبات: نگاشت $\mathbb{Z} \to (\mathbb{S}^۱,1)\pi : \varphi$ را به صورت $\varphi([f]) = \deg(f)$ تعریف می‌کنیم: توضیح اینکه $\deg(f)$ درجهٔ راه f است، یعنی $\deg(f) = \tilde{f}(۱)$، که $\tilde{f}$ ترفیع یکتای f با شرط $\tilde{f}(۰) = ۰$ می‌باشد. بنابه نتیجهٔ ۹.۴.۷ این تابع خوشتعریف است. نشان می‌دهیم که φ ایزومورفیسمی بین گروهها است.

ابتدا، نشان می‌دهیم که φ هомوموрфیسم است. گیریم $\ell_a(f)$ نمایشگر ترفیع آغازی از نقطهٔ $a \in e^{-۱}(f(۰))$ برای f باشد. بنابراین، به ازی هر راه f آغازی از $1 \in \mathbb{S}^۱$ داریم $\ell_۰(f) = \tilde{f}$ و $(\ell_a(f))(t) = \tilde{f}(t) + a$. روشن است که، اگر $b = \tilde{f}(۱) + a$، آنگاه $\ell_a(f * g) = \ell_a(f) * \ell_b(g)$. بنابراین، اگر $[f], [g] \in \pi(\mathbb{S}^۱, 1)$، در این صورت

$$\begin{aligned}
\varphi([f][g]) &= \varphi([f * g]) = \widetilde{(f * g)}(۱) \\
&= \ell_۰(f * g)(۱) = \big(\ell_۰(f) * \ell_b(g)\big)(۱) \qquad (\text{که در آن } b = \tilde{f}(۱)) \\
&= \ell_b(g)(۱) = b + \tilde{g}(۱) \\
&= \tilde{f} + \tilde{g}(۱) = \varphi([f]) + \varphi([g])
\end{aligned}$$

بنابراین، φ هوموذفیسم است.

نشان دادن پوشایی φ، کار ساده‌ای است. به ازای $n \in \mathbb{Z}$ مفروض، فرض کنیم $g : I \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $g(t) = nt$ باشد؛ در این صورت $e \circ g : I \to \mathbb{S}^۱$ راهی بسته و با پایهٔ در 1 می‌باشد. چون g ترفیع $e \circ g$ با $g(۰) = ۰$ است، داریم

$$\varphi([e \circ g]) = \deg(e \circ g) = g(۱) = n$$

که بیانگر پوشایی φ است.

برای نشان دادن یکبیک بودن φ، فرض می‌کنیم $\varphi([f]) = ۰$. یعنی $\deg(f) = ۰$. این بدان معنی است که ترفیع $\tilde{f}$ راه f در شرط $\tilde{f}(۰) = \tilde{f}(۱) = ۰$ صدق دارد. چون $\mathbb{R}$ انقباض پذیر است، داریم $\tilde{f} \sim \varepsilon_۰$؛ به بیان دیگر، نگاشتی $F : I^۲ \to \mathbb{R}$ وجود دارد که $F(۰,t) = \tilde{f}(t)$، $F(۱,t) = ۰$ و $F(t,۰) = F(t,۱) = ۰$. در واقع $F(s,t) = (۱-s)\tilde{f}(t)$. اما، $e \circ F : I^۲ \to \mathbb{S}^۱$ طوری است که $(e \circ F)(۰,t) = f(t)$، $(e \circ F)(۱,t) = 1$، $(e \circ F)(t,۰) = (e \circ F)(t,۱) = 1$ و لذا $f \sim \varepsilon_1$؛ به بیان دیگر $[f] = [\varepsilon_1] \in \pi(\mathbb{S},1)$، که مبین یکبیک بودن φ می‌باشد. بنابراین، φ ایزومورفیسم است، و برهان تمام می‌باشد. $\square$

۱۲.۴.۷ نتیجه. گروه بنیادی تیوب عبارت از $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ است.

این بخش را با دو کاربرد به پایان می‌بریم. اولین کاربرد، حکمی است که بنام **قضیهٔ اساسی جبر** مشهور است.

۱۳.۴.۷ نتیجه (قضیهٔ اساسی جبر). هر چند جمله‌ای مختلط و غیر ثابت، ریشه دارد.

اثبات: بدون کاستن از کلیت بحث، می‌توانیم فرض کنیم که چند جمله‌ای مذکور به شکل $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + a_k z^k$ است و $1 \le k$. فرض کنیم p هیچ صفری (یعنی، ریشه‌ای) نداشته باشد. اکنون، تعریف می‌کنیم

$$G : I \times [0; \infty) \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \qquad G(t,r) = \frac{p\big(r\exp(2\pi i t)\big)}{\big|p\big(r\exp(2\pi i t)\big)\big|}\,\frac{|p(r)|}{p(r)}$$

که در اینجا $0 \le r$ و $0 \le t \le 1$. روشن است که G پیوسته می‌باشد. نگاشت $F : I^2 \to \mathbb{S}^1$ را با ضابطهٔ

$$F(t,r) = \begin{cases} G\Big(t, \frac{s}{1-s}\Big) & 0 \le t \le 1\ ,\ 0 \le s < 1 \ \text{اگر} \\ \exp(2\pi i t) & 0 \le t \le 1\ ,\ s = 1 \ \text{اگر} \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. نظر به اینکه

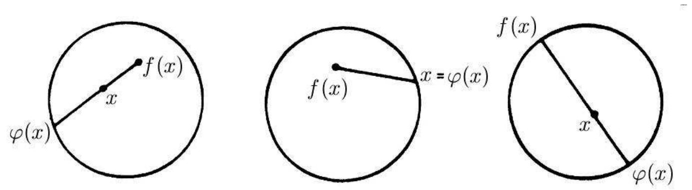
$$\begin{aligned} \lim_{s\to 1} F(t,s) &= \lim_{s\to 1} G\Big(t, \frac{s}{1-s}\Big) = \lim_{s\to\infty} G(t,r) \\ &= \big(\exp(2\pi i t)\big)^k = \exp(2\pi i k t) \end{aligned}$$

ملاحظه می‌گردد که F پیوسته است. همچنین، مشاهده می‌شود که F هموتوپی نسبت به $\{0,1\}$ بین $f_0(t) = F(t,0)$ و $f_1(t) = F(t,1)$ می‌باشد. اما، $f_0(t) = 1$ و $f_1(t) = \exp(2\pi i k t)$. بنابراین $\deg(f_0) = 0$، در حالی که $\deg(f_1) = k$. این تناقض است (مگر آنکه $k = 0$). □

کاربرد بعدی تحت عنوان **قضیهٔ نقطه ثابت براور در صفحه** معروف است. یادآور می‌شویم که در بخش ۴.۴ قضیه‌ای مشابه برای I را به اثبات رساندیم. این حکم دارای تعمیم به حالت ابعاد بالاتر نیز هست، که گروه بنیادی برای اثبات آن کفایت نمی‌کند.

۱۴.۴.۷ نتیجه (قضیهٔ نقطه ثابت براور در صفحه). هر نگاشت پیوسته $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ نقطه ای ثابت دارد. یعنی، نقطه‌ای $x \in \mathbb{D}^2$ با $f(x) = x$ وجود دارد.

شکل ۸.۷



اثبات: فرض خلف این است که به ازای هر $x \in \mathbb{D}^2$ ای $f(x) \neq x$. در این صورت، نگاشتی $\varphi : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ می‌توان تعریف نمود که $\varphi(x)$ نقطه‌ای بر $\mathbb{S}^1$ است که از برخورد پاره خط واصل از $f(x)$ به x و سپس تداوم آن از سمت x حاصل می‌گردد؛ به شکل ۸.۷ توجه شود. اینکه φ پیوسته است، بدیهی است. گیریم $i : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{D}^2$ نمایشگر نگاشت احتوی باشد. در این صورت، $\varphi \circ i = 1_{\mathbb{S}^1}$ و بعلاوه نمودار زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, "1_{\mathbb{S}^1}"] \arrow[dr, "i"'] & \mathbb{S}^1 \\ & \mathbb{D}^2 \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

این خود باعث تنودار تعویضپذیر زیر می‌گردد:

$$\begin{tikzcd} \pi(\mathbb{S}^1,1) \arrow[r, "1_{\pi(\mathbb{S}^1,1)}"] \arrow[dr, "i_*"'] & \pi(\mathbb{S}^1,1) \\ & \pi(\mathbb{D}^2,1) \arrow[u, "\varphi_*"'] \end{tikzcd}$$

اما $\pi(\mathbb{D}^2,1)=0$، زیرا $\mathbb{D}^2$ انقباضپذیر است، و بنابراین نمودار

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "1_{\mathbb{Z}}"] \arrow[dr, "i_*"'] & \mathbb{Z} \\ & 0 \arrow[u, "\varphi_*"'] \end{tikzcd}$$

تعویضپذیر است؛ این محال است، زیرا $\mathrm{Image}(\varphi_* \circ i_*) = 0$ در حالی که $\mathrm{Image}(1_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}$. تناقض مذکور، حکم مورد نظر را اثبات می‌کند. $\square$

۱۵.۴.۷ تمرین.

۱) به ازای $[f] \in \pi(\mathbb{S}^1,1)$ مفروض، γ را کانتور $\{f(t) \,|\, t \in I\} \subseteq \mathbb{C}$ گرفته و تعریف می‌کنیم $w(f) := \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$. در این صورت، ثابت کنید:

 18/9/05

۱) $w(f)$ عددی صحیح است،
۲) $w(f)$ مستقل از انتخاب $f \in [f]$ است،
۳) $w(f) = \deg(f)$.

۲) گیریم $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ نگاشتی با ضابطهٔ $f(z) = z^k$ است، که k عددی صحیح می‌باشد. با استفاده ایزومورفیسم $\pi(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$، نگاشت $f_* : \pi(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi(\mathbb{S}^1, 1)$ را توصیف کنید.

۳) راههای $\alpha(t) = (\exp(2\pi it), 1)$ و $\beta(t) = (1, \exp(2\pi it))$ در $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $\alpha * \beta \sim \beta * \alpha$. (راهنمایی: این کار را با استفاده از نمودارها انجام دهید.)

۴) گروه بنیادی $\pi(\underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n\ \text{تا}}, (1, \cdots, 1))$ را محاسبه کنید.

۵) با استفاده از تمرین ۲۵.۲.۷—(۳) نشان دهید که تیوب با کره $\mathbb{S}^3$ همئومورف نیست.

٦) ثابت کنید که مجموعهٔ نقاط $z \in \mathbb{D}^2$ که به ازای آنها $\mathbb{D}^2 - \{z\}$ همبند ساده است، دقیقاً همان $\mathbb{S}^1$ است. سپس، ثابت کنید که اگر $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ همئومورفیسم باشد، آنگاه $f(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$.

۷) گروه بنیادی هر یک از فضاهای زیر را محاسبه کنید:
۱) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$:
۲) $\mathbb{C}^*/G$، که در آن $G = \{\varphi^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ و $\varphi(z) = 2z$:
۳) $\mathbb{C}^*/H$، که در آن $H = \{\psi^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ و $\psi(z) = 2\bar{z}$:
۴) $\mathbb{C}^*/\{e, a\}$، که e همئومورفیسم همانی است و $a(z) = -\bar{z}$.

فصل ۸

فضاهای پوششی

بسیاری از احکام فصل قبل در خصوص گروه بنیادی دایره و مراحل محاسبهٔ آن را می‌توان تعمیم داد. این کار را در فصل اخیر انجام می‌دهیم. انگیزهٔ اصلی این کار، در نظر گرفتن نگاشتهایی بخصوص است که امکان عملکردی شبیه به $e:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^۱$ را دارند: نگاشتهای پوششی. در بخش اول به معرفی آنها پرداخته و در بخشهای بعدی ضمن بیان خواص آنها، گروه بنیادی این نوع فضاها را محاسبه می‌کنیم.

۱.۸ تعریف و چند مثال

برای شروع، لم ۳.۴.۷ در خصوص نگاشت $e:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^۱$ را به عنوان تعریفی برای خانواده‌ای وسیع از نگاشتها $p:\tilde{X}\to X$ در نظر می‌گیریم!

۱.۱.۸ تعریف. فرض کنیم $p:\tilde{X}\to X$ نگاشتی پیوسته باشد. زیر مجموعهٔ $U\subseteq X$ را در صورتی **یقیناً پوشانده شده توسط** p گوئیم که $p^{-۱}(U)$ اجتماعی مجزا از زیر مجموعه‌های باز در $\tilde{X}$ باشد، به گونه‌ای که هر یک از آنها توسط p به صورت همئومورف بروی U تصویر می‌شوند.

۲.۱.۸ تعریف. نگاشت پیوستهٔ $p:\tilde{X}\to X$ را در صورتی **پوششی** گوئیم که پوشا بوده و به ازای هر $x\in X$ یک همسایگی از x یافت شود که توسط p یقیناً پوشانده می‌شود. به بیان دیگر، $p:\tilde{X}\to X$ در صورتی **نگاشت پوششی** است که

۱) p پیوسته و پوشا باشد، و

۲) به ازای هر $x \in X$، همسایگی باز U از x و خانوادهٔ مجموعه‌های باز $\{U_j \,|\, j \in J\}$ در $\tilde{X}$، به گونه‌ای یافت شود که

الف) $p^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} U_j$،

ب) به ازای هر $k, j \in J$ با $k \neq j$، داشته باشیم $U_j \cap U_k = \emptyset$، و

ج) به ازای هر $j \in J$، نگاشت $p|_{U_j} : U_j \to U$ تحدید یافتهٔ p به U_j، همئومورفیسم باشد.

در این حالت اصطلاحاً $p : \tilde{X} \to X$ را **نگاشت پوششی**، $\tilde{X}$ را **فضای پوششی** و X را **فضای پایهٔ نگاشت پوششی** $p : \tilde{X} \to X$ می‌نامیم.

۳.۱.۸ مثال. ۱) در لم ۳.۴.۷ نشان داده شد که نگاشت نمایی $e : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ پوششی است.

۲) هر همئومورفیسم $h : X \to Y$، نگاشتی پوششی است.

۳) فرض کنیم X فضای توپولوژی دلخواه، Y فضایی با توپولوژی گسسته و $\tilde{X} = X \times Y$ دارای ساختار توپولوژی حاصلضربی باشد. فرض کنیم $p : \tilde{X} \to X$ تصویر بر مؤلفهٔ اول باشد. در این صورت p نگاشتی پوششی است.

۴) فرض کنیم n عددی صحیح و مخالف صفر باشد. نگاشت $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $p(z) = z^n$ پوششی است. برای اثبات این مطلب، کافی است توجه شود که به ازای هر $x \in \mathbb{S}^1$، مجموعهٔ باز $\mathbb{S}^1 - \{x\}$ توسط p یقیناً پوشانده می‌شود.

G–فضاهای بخصوصی به فضاهای پوششی می‌انجامند. اینها را در تعریف زیر معرفی می‌کنیم.

۴.۱.۸ تعریف. گیریم X یک G–فضا باشد. در صورتی می‌گوئیم عمل G بر X **کاملاً ناپیوسته** است که به ازای هر $x \in X$، همسایگی بازی V از x چنان یافت شود که به ازای هر $g, g' \in G$ با $g \neq g'$، داشته باشیم $(g \bullet V) \cap (g' \bullet V) = \emptyset$.

۵.۱.۸ لم. اگر G بر X به طور کاملاً ناپیوسته عمل کند، در این صورت به ازای هر $g \in G$ با $g \neq 1$ و هر $x \in X$ ای $g \bullet x \neq x$.

اثبات: اگر V یک همسایگی با خاصیت مذکور در تعریف بالا برای x باشد، آنگاه $g \bullet x \in g \bullet V$ و $(g \bullet V) \cap V = \emptyset$. □

پیش از طرح هر گونه مثالی از این مفهوم، قضیه‌ای می‌آوریم که نشان دهندهٔ دلیل طرح این مفهوم است.

۶.۱.۸ قضیه. گیریم X یک G-فضا باشد. اگر عمل G بر X کاملاً ناپیوسته باشد، آنگاه نگاشت $p : X \to X/G$ پوششی است.

اثبات: ابتدا متذر می شویم که p پوشا و پیوسته است. همچنین، بنابه قضیهٔ ۱۲.۳.۳، نگاشت p باز است. گیریم U یک همسایگی باز از $x \in X$ باشد، که در شرط کاملاً ناپیوستگی صدق می‌کند. چون p باز است، $p(U)$ همسایگی بازی از نقطهٔ $G \centerdot x = p(x)$ است و $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g\in G} g \centerdot U$ (به اثبات قضیهٔ ۱۲.۳.۳ توجه شود)، که $\{g \centerdot U \,|\, g \in G\}$ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های باز مجزای در X می‌باشد. بعلاوه، $p|_{g\centerdot U} : g \centerdot U \to p(U)$ پیوسته، باز و دوسویی است، و در نتیجه همئومورفیسم می‌باشد. $\square$

۷.۱.۸ مثال. ۱) عمل $\mathbb{Z}$ بر $\mathbb{R}$ که به صورت $n \centerdot x := x + n$ تعریف می‌شود، کاملاً ناپیوسته است. چرا که اگر $x \in \mathbb{R}$ و $\varepsilon < ۱/۲$، در این صورت $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ همسایگی بازی از x است که در شرط کاملاً ناپیوستگی صدق دارد. چون این عمل $\mathbb{Z}$ بر $\mathbb{R}$، آن را به یک $\mathbb{Z}$-فضا تبدیل می‌کند، مشاهده می‌کنیم که نگاشت $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ پوششی است. خواننده می‌تواند نشان دهد که این نگاشت عملاً همان نگاشت نمایی $e : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ است.

۲) فرض کنیم $\mathbb{Z}_۲$ بر $\mathbb{S}^n$ به صورت $\pm ۱ \centerdot x = \pm x$ عمل کند، و $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{RP}^n$ نگاشت تصویر طبیعی باشد. در این صورت، نگاشت p پوششی است. زیرا، به ازای $x \in \mathbb{S}^n$، مجموعهٔ $\{y \in \mathbb{S}^n \,|\, \|y - x\| < ۱/۲\}$ همسایگی بازی از x است که در شرط کاملاً ناپیوستگی صدق می‌کند. دلیل دیگر اینکه، جون $-x \neq x$ و $\mathbb{S}^n$ هاوسدورف است، همسایگی‌های باز مجزای V و W بترتیب از x و $-x$ یافت می‌شوند؛ در این صورت، همسایگی $V \cap (-W)$ از x در شرط کاملاً ناپیوستگی صدق می‌کند.

مثال ۷.۱.۸-(۲) را می‌توان تعمیم داد. یادآور می‌شویم که عمل G بر X را در صورتی آزاد گوئیم که به ازای هر $g \in G - \{1\}$ و هر $x \in X$ ای $g \centerdot x \neq x$.

۸.۱.۸ قضیه. اگر گروه G متناهی بوده و به صورت آزاد بر فضای توپولوژی X عمل کند، در این صورت عمل G بر X کاملاً ناپیوسته است.

اثبات: گیریم $G=\{g_\circ=1,g_1,\cdots,g_n\}$. چون X هاوسدورف است، همسایگیهای باز $U_\circ$، U_1، . . . و U_n بترتیب از $g_\circ\bullet x$، $g_1\bullet x$، . . . و $g_n\bullet x$ به گونه‌ای می‌توان یافت که به زای هر $j=1,2,\cdots,n$ $U_\circ\cap U_j=\emptyset$. گیریم U مقطع $\bigcap_{j=\circ}^n g_j^{-1}\bullet U_j$ باشد، که به وضوح همسایگی بازی از x می‌باشد. به این ترتیب، ملاحظه می‌گردد که

$$g_i\bullet U=\bigcap_{j=\circ}^{n} g_i\bullet(g_j^{-1}\bullet U_j)\subseteq g_i\bullet(g_i^{-1}\bullet U_j)=U_i$$

و در نتیجه، اگر $g_j^{-1}g_i=g_k$، در این صورت

$$\begin{aligned}(g_i\bullet U)\cap(g_j\bullet U) &= g_j(((g_j^{-1}g_i)\bullet U)\cap U)=g_j\bullet\Big((g_k\bullet U)\cap U\Big)\\ &\subseteq g_j\bullet\big(U_k\cap U\big)\subseteq g_j\bullet\big(U_k\cap U_\circ\big)=\emptyset\end{aligned}$$

بنابراین، عمل G بر X کاملاً ناپیوسته است. □

۹.۱.۸ مثال. گیریم p عددی اول، q عددی طبیعی و نسبت به p اول، و $\mathbb{Z}_p$ گروه دوری از مرتبهٔ p باشد، همچنین، فرض کنید ۳-کرهٔ $\mathbb{S}^3$ را به صورت

$$\mathbb{S}^3=\big\{(z_\circ,z_1)\in\mathbb{C}^2\,\big|\,|z_\circ|^2+|z_1|^2=1\big\}$$

به عنوان زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{C}^2$ در نظر بگیریم. نگاشت $h:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ را با ضابطهٔ

$$h(z_\circ,z_1)=\Big(\exp\Big(\frac{2\pi i}{p}\Big)z_\circ,\exp\Big(\frac{2\pi iq}{p}\Big)z_1\Big)$$

تعریف می‌کنیم. در یان صورت، h همئومرفیسمی از $\mathbb{S}^3$ بروی خودش است، و بعلاوه اگر h^i را ترکیب h به تعداد i بار با خودش تعریف کنیم، آنگاه $h^p=1_{\mathbb{S}^3}$. حال فرض کنیم تأثیر $n\in\mathbb{Z}_p=\{\circ,1,\cdots,p-1\}$ بر $(z_\circ,z_1)\in\mathbb{S}^3$ را به صورت

$$n\bullet(z_\circ,z_1)=h^n(z_\circ,z_1)$$

تعریف کنیم. به این ترتیب، $\mathbb{S}^3$ به یک $\mathbb{Z}_p$-فضا تبدیل می‌گردد. این عمل آزاد است و $\mathbb{S}^3$ هاوسدورف می‌باشد. بنابراین، تصویر طبیعی $\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ نگاشت پوششی است.

خارج قسمت $\mathbb{S}^3/\mathbb{Z}_p$ را **فضای لنز** نامیده و با نماد $L(p,q)$ نشان می‌دهیم.

۱۰.۱.۸ یادداشت. $L(2,1)$ عملاً همان $\mathbb{RP}^3$ می‌باشد. به راحتی می‌توان مثال بالا را به حالت عمل $\mathbb{Z}_p$ بر $\mathbb{S}^{2n+1}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ می‌توان تعمیم داد.

۲.۸ خواص اولیه

در مثالهایی که تا کنون از فضاهای پوششی آوردیم، که منبعث از عمل گروهها بودند، همهٔ نگاشتهای پوششی، باز بودند و فضاهای پایه‌ای دارای توپولوژی خارج قسمتی نسبت به نگاشت پوششی بودند. این امر عملاً برای کلیهٔ نگاشتهای پوششی درست می‌باشد.

۱.۲.۸ قضیه. گیریم $p:\tilde{X}\to X$ نگاشت پوششی باشد. در این صورت

۱) نگاشت p باز است: و

۲) X دارای توپولوژی خارج قسمتی نسبت به p می‌باشد.

اثبات: گیریم U زیر مجموعه‌ای باز از X و $x\in p(U)$. چون نگاشت p پوششی است، همسایگی باز یقیناً پوشانده شده‌ای V از x وجود دارد. فرض کنیم $\tilde{x}\in p^{-1}(x)\cap U$: چون $\tilde{x}\in p^{-1}(V)=\bigcup_{j\in J}V_j$، مجموعهٔ بازی V_j در $\tilde{X}$ وجود دارد که $\tilde{x}\in V_j$. چون $V_j\cap U$ در V_j باز است و $p|_{V_j}$ یک همئومورفیسم از V_j بتوی V می‌باشد، ملاحظه می‌کنیم که $p(V_j\cap U)$ زیر مجموعه‌ای باز از V است. اما، باز بودن V در X به این معنی است که $p(U)$ باز است و لذا نگاشت p باز می‌باشد.

قسمت دوم قضیه از این واقعیت نتیجه می‌گردد که نگاشت p پیوسته و باز است و بنابراین «زیر مجموعهٔ $V\subseteq X$ وقتی و تنها وقتی باز است که $p^{-1}(V)\subseteq\tilde{X}$ باز باشد»، و برهان تمام است. $\square$

بسیاری از احکام فصل قبل در خصوص نگاشت نمایی $e:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1$ (که نگاشتی پوششی است)، به حالت نگاشتهای پوششی دلخواه تعمیم می‌دهیم.

۲.۲.۸ تعریف. اگر نگاشت $p:\tilde{X}\to X$ پوششی باشد و نکاشت $f:Y\to X$ پیوسته، در صورتی می‌گوئیم $\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$ **ترفیع** f است که $p\circ\tilde{f}=f$.

بر اساس لم بعد، ترفیع در صورت وجود، عملاً یکتا است.

۳.۲.۸ لم. گیریم نگاشت $p:\tilde{X}\to X$ پوششی بوده و $\tilde{f},\hat{f}:Y\to\tilde{X}$ ترفیع نگاشت $f:Y\to X$ باشند. اگر Y همبند باشد و به ازای یک $y_\circ\in Y$ ای $\hat{f}(y_\circ)=\tilde{f}(y_\circ)$، در این صورت $\hat{f}=\tilde{f}$.

اثبات: فرض کنیم $Y' = \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \hat{f}(y)\}$. چون $y_{\circ} \in Y'$، پس Y' غیر تهی است. می‌خواهیم ثابت کنیم که $Y' \subseteq Y$ باز و بسته است، و چون Y همبند فرض شده است، باید $Y' = Y$ باشد؛ یعنی، به ازای هر $y \in Y$ ای $\hat{f}(y) = \tilde{f}(y)$ و برهان تمام می‌شود.

گیریم $y \in Y$، در این صورت همسایگی بازی V از $f(y)$ وجود دارد که یقیناً پوشانده شده توسط p است. یعنی، $p^{-1}(V)$ اجتماعی مجزا از مجموعه‌های باز $\{V_j \mid j \in J\}$ می‌باشد که به ازای هر $j \in J$ ای $p|_{V_j} : V_j \to V$ همئومورفیسم است. اگر $y \in Y'$، آنگاه به ازای $k \in J$ ای $\tilde{f}(y) = \hat{f}(y) \in V_k$ و $W_k = \tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \hat{f}^{-1}(V_k)$ همسایگی بازی از y می‌باشد که تماماً در Y' قرار دارد. برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض کنیم $x \in W_k$، در این صورت $\tilde{f}(x) \in V_k$ و $\hat{f}(x) \in V_k$: در حالی که $p(\tilde{f}(x)) = f(x) = p(\hat{f}(x))$ و $p|_{V_k}$ همئمورفیسم است، بنابراین الزاماً $\tilde{f}(x) = \hat{f}(x)$ و لذا $x \in Y'$. در نتیجه هر نقطه از Y' دارای همسایگی بازی است که تماماً در Y' قرار دارد، و بنابراین Y' باز می باشد. از سوی دیگر، اگر $y \notin Y'$، آنگاه $k, l \in J$ ای وجود دارند که $k \neq l$، $\tilde{f}(y) \in V_k$ و $\hat{f}(y) \in V_l$. در این صورت، با همان استدلال بالا می‌توان نشان داد که $\tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \hat{f}^{-1}(V_l)$ همسایگی بازی از y می‌باشد که کاملاً در $Y - Y'$ قرار دارد. در نتیجه $Y - Y'$ باز و لذا Y' بسته است: و به این ترتیب، برهان تمام است. □

نتیجه‌ای غریب از این حکم به شرح زیر وجود دارد.

۴.۲.۸ نتیجه. فرض کنیم $p : \tilde{X} \to X$ نگاشت پوششی بوده و $\tilde{X}$ همبند راهی باشد. فرض کنیم $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ نگاشتی پیوسته با $p \circ \varphi = p$ باشد. اگر به ازای یک $x_1 \in \tilde{X}$ ای $\varphi(x_1) = x_1$، آنگاه به ازای هر $x \in \tilde{X}$ ای $\varphi(x) = x$ (یعنی، $\varphi = 1_{\tilde{X}}$ نگاشت همانی است).

اثبات: فرض کنیم x نقطه‌ای دلخواه از $\tilde{X}$ و $\alpha : I \to \tilde{X}$ راهی از x_1 به x باشد. چون $\varphi(x_1) = x_1$، هر دو راه α و $\varphi \circ \alpha$ از x_1 آغاز می‌شوند. بعلاوه، $p \circ \alpha = p \circ (\varphi \circ \alpha)$: یعنی، α و $\varphi \circ \alpha$ ترفیع مشترک راه $p \circ \alpha : I \to X$ هستند. حال، بنابه لم بالا ۳.۲.۸، بایستی $\varphi \circ \alpha = \alpha$. بنابراین، نقاط انتهایی α و $\varphi \circ \alpha$ یکی هستند. یعنی $\varphi(x) = (\varphi \circ \alpha)(1) = \varphi(\alpha(1)) = \alpha(1) = x$. □

حکم بعدی شبیه قضیهٔ ٦.۴.۷ و لم ۸.۴.۷ اثبات می‌گردد.

۵.۲.۸ قضیهٔ ترفیع راه هموتوپی. گیریم $p : \tilde{X} \to X$ نگاشت پوششی باشد. در این صورت

۱) به ازای هر راه مفروض $f : I \to X$ و هر $a \in \tilde{X}$ با $p(a) = f(\circ)$، راهی منحصر بفرد $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ وجود دارد که $p \circ \tilde{f} = f$ و $\tilde{f}(\circ) = a$.

۲) به ازای هر نگاشت پیوستهٔ مفروض $F : I \times I \to X$ و هر $a \in \tilde{X}$ با $p(a) = F(\circ, \circ)$، نگاشت پیوستهٔ یکتایی $\tilde{F} : I \times I \to \tilde{X}$ وجود دارد که $p \circ \tilde{F} = F$ و $\tilde{F}(\circ, \circ) = a$.

نتیجهٔ بعدی شبیه نتیجهٔ ۹.۴.۷ است و اثبات آن نیز شبیه می‌باشد.

۶.۲.۸ نتیجه. فرض کنید $f_\circ$ و $f_۱$ دو راه هم ارز در X بوده، و $\tilde{f}_\circ$ و $\tilde{f}_۱$ بترتیب ترفیع $f_\circ$ و $f_۱$ باشند. چنانچه $\tilde{f}_\circ(\circ) = \tilde{f}_۱(\circ)$، آنگاه $\tilde{f}_\circ(۱) = \tilde{f}_۱(۱)$.

اکنون، قسمتی از قضیهٔ ۱۱.۴.۷ را تعمیم می‌دهیم.

۷.۲.۸ قضیه. گیریم $p : \tilde{X} \to X$ نگاشتی پوششی، $\tilde{X}$ همبند ساده و $a \in \tilde{X}$ باشد. در این صورت تناظری یکبیک میان مجموعه‌های $\pi(X, p(a))$ و $p^{-۱}(p(a))$ وجود دارد.

اثبات: این اثبات اساساً همان محتوی اثبات قضیهٔ ۱۱.۴.۷ می‌باشد. نکگات برجستهٔ آن را متذکر می‌شویم. ابتدا نگاشت $\varphi : \pi(X, p(a)) \to p^{-۱}(p(a))$ را با ضابطهٔ $\varphi([f]) = \tilde{f}(۱)$ تعریف می‌کنیم، که در اینجا $\tilde{f}$ ترفیع f با شرط $\tilde{f}(\circ) = a$ می‌باشد. این نگاشت بنا به لم ۶.۲.۸ خوشتعریف است.
سپس $\psi : p^{-۱}(p(a)) \to \pi(X, p(a))$ را تعریف می‌کنیم. برای این منظور، فرض کنیم $x \in p^{-۱}(p(a))$، و f راهی از a به x باشد. چون $\tilde{X}$ همبند ساده است، هر دو چنین راهی هم ارزند. بنابراین $[p \circ f]$ عنصری خوشتعریف از $\pi(X, p(a))$ می‌باشد. تعریف می‌کنیم $\psi(x) = [p \circ f]$. بسادگی می‌شود تحقیق نمود که در این صورت $\varphi \circ \psi = 1_{p^{-۱}(p(a))}$ و نیز $\psi \circ \varphi = 1_{\pi(X, p(a))}$. بنابراین φ تناظری دوسویی است. $\square$

۸.۲.۸ یادداشت. از حکم بالا این نکتهٔ راهگشا قابل استنتاج است:

برای محاسبهٔ گروه بنیادی $\pi(X, x_\circ)$، یک فضای پوششی $p : \tilde{X} \to X$ به گونه‌ای مطرح می‌کنیم که $\tilde{X}$ همبند ساده باشد. سپس بر $p^{-۱}(x_\circ)$ ساختاری گروهی به گونه‌ای قرار می‌دهیم که تابع دوسویی $\varphi : \pi(X, x_\circ) \to p^{-۱}(x_\circ)$ ایزومورفیسم بین گروهها باشد.

این اساس کاری است که در بخش پایانی فصل قبل برای محاسبهٔ $\pi(\mathbb{S}^{۱},1)$ انجام دادیم. این کار در حالت کلی ساذده نیست. در بخشهای بعدی، چند حالت خاص آن را مطرح خواهیم نمود.

۹.۲.۸ تمرین.

۱) فرض کنیم $p:\tilde{X}\to X$ نگاشتی پوششی، $X_{۰}$ زیر مجموعه‌ای از X و $\tilde{X}_{۰}=p^{-۱}(X_{۰})$ باشد. ثابت کنید نگاشت $p:\tilde{X}_{۰}\to X_{۰}$ با ضابطهٔ $p_{۰}(x)=p(x)$ پوششی است.

۲) فرض کنیم که $\tilde{X}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}\mid$ عددی صحیح است y یا $x\}$، $X=\{(z_{۱},z_{۲})\in\mathbb{S}^{۱}\times\mathbb{S}^{۱}\mid z_{۲}=1$ یا $z_{۱}=1\}$ و $p:\tilde{X}\to X$ به صورت $p(x,y)=(\exp(۲\pi ix),\exp(۲\pi iy))$ تعریف شود. نشان دهید که در این صورت نگاشت $p:\tilde{X}\to X$ پوششی است.

۳) مشخص کنید که کدام نگاشتهای زیر پوششی هستند:

ا) $p:\mathbb{C}^{*}\to\mathbb{C}^{*}$ با ضابطهٔ $p(z)=z^{n}$، که n عددی صحیح است؛

ب) $\sin:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$؛

ج) $p:U\to\mathbb{C}^{*}$ با ضابطهٔ $p(z)=(۱-z)^{m}z^{n}$، که m و n اعدادی صحیح هستند و $U=\mathbb{C}^{*}-\{1\}$.

۴) گیریم نگاشتهای $p:\tilde{X}\to X$ و $q:\tilde{Y}\to Y$ پوششی باشند.

ا) ثابت کنید $p\times q:\tilde{X}\times\tilde{Y}\to X\times Y$ پوششی است؛

ب) ثابت کنید که اگر $X=Y$ و $\tilde{W}=\{(\tilde{x},\tilde{y})\in\tilde{X}\times\tilde{Y}\mid p(\tilde{x})=q(\tilde{y})\}$ آنگاه، نگاشت $f:\tilde{W}\to X$ با ضابطهٔ $f(\tilde{x},\tilde{y})=p(\tilde{x})$ پوششی است.

ج) در صورتی که p و q برابر $e:\mathbb{R}\to\mathbb{S}^{۱}$ با ضابطهٔ $e(t)=\exp(۲\pi it)$ باشند، $\tilde{W}$ را مشخص کنید.

۵) گیریم $a,b:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ همئومورفیسمهای با ضابطهٔ بترتیب $a(z)=z+i$ و $b(z)=\bar{z}+۱/۲+i$ باشند. نشان دهید که $b\circ a=a^{-۱}\circ b$ و در نتیجه $G=\{a^{m}\circ b^{۲n}\circ b^{\varepsilon}\mid m,n\in\mathbb{Z},\varepsilon\in\{۰,۱\}\}$ گروهی از همئومورفیسمهای $\mathbb{C}$ تشکیل می‌دهد. بعلاوه، نشان دهید که عمل G بر $\mathbb{C}$ کاملاً ناپیوسته است و فضای مداری $\mathbb{C}/G$ هاوسدورف می‌باشد.

۶) (ادامهٔ تمرین ۵) یک مستطیل نیم—باز به گونه‌ای بیابید که هر مدار G تنها یک نقطه از آن را در بر داشته باشد و سپس نشان دهید که $\mathbb{C}/G$ عملاً همان بطری کلاین است.

۷) (ادامهٔ تمرین ۶) **نشاننده‌ای برای بطری کلاین در $\mathbb{R}^۴$**. گیریم نگاشت $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^۵$ با ضابطهٔ

$$\varphi(x+iy) = \Big(\cos(۲piy), \cos(۲pix), \sin(۴\pi x), \\ \sin(۲\pi y)\cos(۲\pi x), \sin(۲\pi x)\sin(۲\pi y)\Big)$$

تعریف گردد. نشان دهید که φ هر یک از مدارات گروه G را به تنها یک نقطه می‌نگارد و سپس نتیجه بگیرید که $\mathbb{C}/G$ با نگارهٔ φ همئومورف است.

نشان دهید که اگر نگاشت $\psi : \mathbb{R}^۵ \to \mathbb{R}^۴$ با ضابطهٔ

$$\psi(p,q,r,s,t) = \big((p+۲)q, (p+۲)r, s, t\big)$$

را به نگارهٔ φ تحدید کنیم، حاصل یک همئومورفیسم می‌گردد. بنابراین، نگارهٔ $\psi \circ \varphi$ با بطری کلاین همئومورف می‌باشد.

۸) فرض کنید $p : \tilde{X} \to X$ نگاشتی پوششی و X همبند راهی باشد. ثابت کنید عدد اصلی $p^{-۱}(x)$ مستقل از انتخاب $x \in X$ می‌باشد. در صورتی که این عدد را n بنامیم، می‌گوئیم $p : \tilde{X} \to X$ یک **نگاشت پوششی n—لایه** است.

۹) فرض کنید K نمایشگر بطری کلاین باشد. یک نگاشت پوششی دو—لایه $p : \mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱ \to K$ معرفی کنید.

۱۰) زیر مجموعهٔ C از یک سطح مفروض را در صورتی **خم بستهٔ ساده** گوئیم که با $\mathbb{S}^۱$ همئومورف باشد. گیریم $p : \mathbb{S}^۲ \to \mathbb{RP}^۲$ تصویر طبیعی از کره $\mathbb{S}^۲$ بروی صفحهٔ تصویری $\mathbb{RP}^۲$ باشد. ثابت کنید که اگر C خم بسته‌ای در $\mathbb{RP}^۲$ باشد، در این صورت $p^{-۱}(C)$ خم بسته‌ای در $\mathbb{S}^۲$ خواهد بود و یا اینکه اجتماعی از دو خم بستهٔ سادهٔ مجزا می‌باشد. (راهنمایی: C را به عنوان تصویر راهی در $\mathbb{RP}^۲$ قلمداد کنید.)

۱۱) گروه بنیادی $\pi(\mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱, (1,1))$ را با استفاده از احکام در این بخش، مستقیماً محاسبه کنید. (راهنمایی: با استفاده از تمرینات (۴) و (۹)، نگاشتی پوششی به شکل $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^۱ \times \mathbb{S}^۱$ بسازید و سپس از قضیهٔ ۷.۲.۸ استفاده کنید.)

۱۲) فرض کنید که به ازای $n \geq ۲$، کرهٔ $\mathbb{S}^n$ همبند ساده باشد (تمرین ۲۵.۲.۷—(۳)). نشان دهید که گروه بنیادی $\mathbb{RP}^n$ (که $n \geq ۲$) دوری و از مرتبهٔ ۲

است. بعلاوه نشان دهید که اگر p عددی اول باشد، آنگاه گروه بنیادی فضای لنز $L(p,q)$ دوری و از مرتبهٔ p است.

۱۳) آیا فضای توپولوژی Y ای وجود دارد که $\mathbb{S}^1 \times Y$ با $\mathbb{RP}^2$ یا $\mathbb{S}^2$ همئومورف باشد؟ چرا؟

۱۴) فضر کنید X و Y فضاهایی هاوسدورف و $p : X \to Y$ نگاشتی پوششی باشد. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای اینکه X یک n−منیفلد باشد این است که Y یک n−منیفلد باشد.

۱۵) فرض کنیم $p : \tilde{X} \to X$ نگاشتی پوششی و Y فضایی توپولوژی باشد. فرض کنیم $f : Y \to X$ دارای ترفیع $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ باشد. ثابت کنید که هر هموتوپی $F : Y \times I \to X$ که به ازای هر $y \in Y$ ای $F(y,\circ) = f(y)$، موجب یک هموتوپی ترفیع یافته $\tilde{F} : Y \times I \to \tilde{X}$ می‌گردد، که به ازای هر $y \in Y$ ای $\tilde{F}(y,\circ) = \tilde{f}(y)$.

۱٦) گیریم $p : \tilde{X} \to X$ نکاشتی پوششی بوده و $f, g : Y \to \tilde{X}$ نگاشتهایی پیوسته با $p \circ f = p \circ g$ باشند. ثابت کنید مجموعهٔ نقاطی در Y که به ازای آنها f و g یک مقدار دارند، زیر مجموعه‌ای باز و بسته در Y است.

۱۷) گیریم $p : \tilde{X} \to X$ نکاشتی پوششی باشد، که $\tilde{X}$ موضعاً همبند راهی است (به تمرین ۲۰.۱.٦−(۱۰) توجه شود). ثابت کنید $\tilde{X}$ نیز موضعاً همبند راهی است.

۱۸) منظور از **تبدیل پوششی** برای نکاشت پوسششی مفروض $p : \tilde{X} \to X$، همئومرفیسمی $h : \tilde{X} \to \tilde{X}$ است که $p \circ h = h$. ثابت کنید مجموعهٔ همهٔ تبدیلات پوششی، تشکیل گروه می‌دهد.

۱۹) گیریم $p : \tilde{X} \to X$ نکاشتی پوششی باشد، که $\tilde{X}$ موضعاً همبند راهی است. ثابت کنید که عمل گروه تبدیلات پوششی برای $p : \tilde{X} \to X$ بر $\tilde{X}$، کاملاً ناپیوسته است.

۳.۸ گروه بنیادی فضای پوششی

این بخش در ارتباط با گروه $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ)$ و ارتباط آن با $\pi(X,x_\circ)$ می‌باشد، که $p:\tilde{X}\to X$ نگاشتی پوششی است و $p(\tilde{x}_\circ)=x_\circ$. بسیاری از احکام به صورت تمرین مطرح شده اند.

اولین حکم، نتیجه‌ای است بلافصل از قضیهٔ ۵.۲.۸.

۱.۳.۸ قضیه. اگر $p:\tilde{X}\to X$ نگاشتی پوششی باشد، $x_\circ\in X$ و $\tilde{x}_\circ\in\tilde{X}$، به گونه‌ای که $p(\tilde{x}_\circ)=x_\circ$، در این صورت هوموفیسم القائی $p_*:\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ)\to\pi(X,x_\circ)$ منومورفیسم است.

سؤالی که در اینجا به طور طبیعی مطرح می‌گردد، این است که اگر پایه را عوض کنیم، چه رخ می‌دهد؟ این مطلب را به صورت زیر پاسخ می‌دهیم.

۲.۳.۸ قضیه. گیریم $\tilde{X}$ فضایی همبند راهی و $p:\tilde{X}\to X$ نگاشتی پوششی باشد. اگر $\tilde{x}_\circ,\tilde{x}_1\in\tilde{X}$، آنگاه راهی f در X از $p(\tilde{x}_\circ)$ به $p(\tilde{x}_1)$ چنان وجود دارد که

$$(\mathfrak{u}_f\circ p_*)\big(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ)\big)=p_*\big(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)\big).$$

اثبات: گیریم g راهی در $\tilde{X}$ از $\tilde{x}_\circ$ به $\tilde{x}_1$ باشد. راه g موجب تعریف ایزومورفیسم $\mathfrak{u}_f$ از $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ)$ به $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)$ می‌شود. بنابراین $\mathfrak{u}_f\big(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ)\big)=\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)$. با بکارگیری، هومومورفیسم p_*، داریم

$$(p_*\circ\mathfrak{u}_g)\big(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ)\big)=p_*\big(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)\big).$$

اما، بر اساس تمرین ۱۱.۱۵—(۳) داریم $p_*\circ\mathfrak{u}_g=\mathfrak{u}_{p\circ g}\circ p_*$. در نتیجه $f=p\circ g$ در شرایط خواسته شده صدق می‌کند. □

اگر در قضیهٔ بالا $p(\tilde{x}_\circ)=p(\tilde{x}_1)=x_\circ$، در این صورت راه f عنصری $[f]$ از $\pi(X,x_\circ)$ را مشخص می‌کند، و بعلاوه

$$p_*\big(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)\big)=[f]^{-1}\Big(p_*\big(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ)\big)\Big)[f]$$

به بیان دیگر، زیر گروههای $p_*(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ))$ و $p_*(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1))$ در $\pi(X,x)$ مزدوجند. عملاً، بیش از این می‌توان گفت:

۳.۳.۸ قضیه. گیریم $p:\tilde{X}\to X$ نگاشتی پوششی باشد، که در آن $\tilde{X}$ همبند راهی است. به ازای هر $x_\circ\in X$ مفروض، گردایهٔ $\{p_*(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ))\,|\,\tilde{x}_\circ\in p^{-1}(x_\circ)\}$ یک دستهٔ تزویج از زیر گروههای در $\pi(X,x_\circ)$ می‌باشد.

اثبات: ثابت شده است که هر دو زیر گروه موجود در گردایهٔ مذکور، مزدوجند. بعلاوه، فرض کنیم H زیر گروهی از $\pi(X,x_\circ)$ باشد که با یکی از زیر گروههای موجود در گردایه مزدوج است. مثلاً با $p_*(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ))$. در این صورت به ازای یک $\alpha\in\pi(X,x_\circ)$ ای $H=\alpha^{-1}\Big(p_*(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ))\Big)\alpha$. فرض کنیم $\alpha=[f]$ و $\tilde{f}$ ترفیعی از f باشد که از $\tilde{x}_\circ$ آغاز می‌گردد. در این صورت، بنابه قضیهٔ ۲.۳.۸ داریم $p_*(\pi(\tilde{X},\tilde{f}(1)))=(\mathfrak{u}_f\circ p_*)(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ))=H$. بنابراین H به گردایهٔ داده شده متعلق است و برهان تمام می‌باشد. $\square$

سایر روابط میان $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ)$ و $\pi(X,x_\circ)$ را در تمرینات زیر ارائه می‌دهیم.

۴.۳.۸ تمرین. در تمام تمرینات مشروح در ذیل، فرض بر آن است که $p:\tilde{X}\to X$ نگاشتی پوششی و $\tilde{X}$ همبند راهی است و $x_\circ\in X$.

۱) به ازای $\tilde{x}\in p^{-1}(x_\circ)$ و $[f]\in\pi(X,x_\circ)$ مفروض، $\tilde{x}\bullet[f]$ را به صورت $\tilde{f}(1)$ تعریف می‌کنیم که در اینجا $\tilde{f}$ تنها ترفیع ممکن برای f با آغاز از $\tilde{x}$ می‌باشد. ثابت کنید که این عملی راست از گروه $\pi(X,x_\circ)$ بر مجموعهٔ $p^{-1}(x_\circ)$ تعریف می‌کند. (راهنمایی: به اثبات قضیهٔ ۱۱.۴.۷ نگاهی بیاندازید و از نماد $\ell_a(f)$ برای ترفیع f آغازی از نقطهٔ a استفاده کنید.)

۲) در صورتی می‌گوئیم عمل G بر مجموعهٔ S **متعدی** است که به ازای هر $a,b\in S$، عنصری $g\in G$ چنان یافت شود که $g\bullet a=b$.: با بیان دیگر، به ازای هر $a\in S$ ای داشته باشیم $S=G\bullet a$ (که $G\bullet a$ مدار a است). ثابت کنید که در این صورت $\pi(X,x_\circ)$ بطور متعدی بر $p^{-1}(x_\circ)$ عمل می‌کند.

۳) ثابت کنید که رابطه‌ای دوسویی و $\pi(X,x_\circ)$–هم ارزی بین $p^{-1}(x_\circ)$ و مجموعهٔ همدسته‌های راست $p_*(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ))$ در $\pi(X,x_\circ)$ وجود دارد. (راهنمایی: از تمرین ۹.۳.۳–(۴) با تعویض کلمهٔ «راست» به «چپ» استفاده کرده و نشان دهید که پایدارساز عمل $\pi(X,x_\circ)$ بر $p^{-1}(x_\circ)$ عبارت است از $p_*(\pi(\tilde{X},\tilde{x}_\circ))$.)

۴) از تمرین (۳) نتیجه بگیرید که اگر $\tilde{X}$ همبند ساده باشد، آنگاه تناظری دوسویی و $\pi(X,x_\circ)$–هم ارزی بین $p^{-1}(x_\circ)$ و $\pi(X,x_\circ)$ وجود دارد.

۵) نشان دهید که اگر $p : \tilde{X} \to X$ نگاشت پوششی n–لایه باشد (یعنی $p^{-1}(x_\circ)$ از n نقطه تشکیل گردد)، آنگاه $p_* : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_\circ) \to \pi(X, x_\circ)$ تابع احتوی زیر گروهی با شاخص n می‌باشد.

٦) فرض کنید گروه بنیادی X برابر $\mathbb{Z}$ بوده و $p^{-1}(x_\circ)$ متناهی باشد. گروه بنیادی $\tilde{X}$ را مشخص کنید.

۷) ثابت کنید که اگر X همبند ساده باشد، آنگاه p همئموذفیسم است.

۸) فرض کنید $\tilde{X} = X$. ثابت کنید p در صورتی همئومورفیسم است که گروه بنیادی X متناهی باشد. اگر گروه بنیادی متناهی نباشد، آنگاه آیا الزاماً p همئومورفیسم است؟

۹) نگاشت پوششی $p : \tilde{X} \to X$ را در صورتی **منظم** گوئیم که به زای $\tilde{x}_\circ \in \tilde{X}$ ای گروه $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_\circ))$ زیر گروهی نرمال از $\pi(X, x_\circ)$ باشد. ثابت کنید که اگر f راهی بسته در X باشد، آنگاه یا هر ترفیع f نیز راهی بسته است و یا هیچ یک از آنها بسته نیستند.

۱۰) فرض کنید $p : \tilde{X} \to X$ نگاشت پوششی حاصل از یک عمل کاملاً ناپیوسته از G بر $\tilde{X}$ باشد (یعنی $X = \tilde{X}/G$). ثابت کنید $p : \tilde{X} \to X$ منظم است.

۱۱) ثابت کنید که p وقتی و تنها وقتی همئومورفیسم است که $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_\circ)) = \pi(X, x_\circ)$.

۴.۸ گروه بنیادی فضای مداری

۱.۴.۸ قرارداد. در این بخش فرض بر این است که X فضایی همبند راهی، G گروه و عمل G بر X کاملاً ناپیوسته است. بنابراین، $p : X \to X/G$ نگاشتی پوششی است. بعلاوه فرض می‌کنیم که $x_\circ \in X$ و $y_\circ = p(x_\circ) \in X/G$.

موضوع این بخش، ایجاد ارتباط بین گروه مفروض G و گروه بنیادی فضای مداری X/G است.

۲.۴.۸ تعریف. با توجه به قرار دادهای انجام شده

$$p^{-۱}(y_\circ) = \{g \bullet x_\circ \,|\, g \in G\} = G \bullet y_\circ$$

اگر $[f] \in \pi(X/G, y_\circ)$، آنگاه ترفیعی یکتا $\tilde{f}$ برای f وجود دارد که از $x_\circ \in X$ آغاز می‌گردد. در این صورت $\tilde{f}(۱)$ عضوی از مدار $p^{-۱}(y_\circ)$ است و بنابراین عنصر یکتایی $g_f \in G$ وجود دارد که $\tilde{f}(۱) = g_f \bullet x_\circ$. به این ترتیب، تناظر $f \mapsto g_f$، موجب تعریف نگاشتی به شکل $\varphi : \pi(X/G, y_\circ) \to G$ می‌شود.

۳.۴.۸ قضیه. نگاشت $\varphi : \pi(X/G, y_\circ) \to G$ همومورفیسم بین گروهها است.

اثبات: دو راه بستهٔ f و f' در X/G و با پایهٔ در $y_\circ$ را در نظر بگیرید. اگر $\widetilde{f * f'}$ ترفیع یکتایی از $f * f'$ باشد که از $x_\circ \in X$ آغاز می‌گردد، در این صورت $\widetilde{f * f'} = \tilde{f} * \ell_a(f')$، که در اینجا $\tilde{f}$ ترفیع یکتایی از f است که از $x_\circ$ آغاز می‌گردد و $\ell_a(f')$ ترفیع یکتایی از f' می‌باشد که از $a = \tilde{f}(۱)$ آغاز می‌شود. گیریم $\tilde{f}'$ ترفیع یکتایی برای f' باشد که از $x_\circ$ اغاز می‌گردد. جون $g_f \bullet \tilde{f}'$ ترفیعی از f' است که از $g_f \bullet x_\circ$ آغاز می‌گردد، و چون $a = \tilde{f}(۱) = g_f \bullet x_\circ$ نتیجه می‌گیریم که $\ell_a(f') = g_f \bullet \tilde{f}'$. به این ترتیب ملاحظه می‌گردد که

$$\widetilde{f * f'}(۱) = g_f \bullet \tilde{f}'(۱) = g_f \bullet (g_{f'} \bullet x_\circ) = (g_f . g_{f'}) \bullet x_\circ .$$

در نتیجه $\varphi([f][f']) = \varphi([f]).\varphi([f'])$ و لذا φ همومورفیسم می‌باشد. □

حال، هستهٔ همومورفیسم φ را محاسبه می‌کنیم.

۴.۴.۸ لم. هستهٔ $\varphi : \pi(X/G, y_\circ) \to G$ زیر گروه $p_*\big(\pi(X, x_\circ)\big)$ است.

اثبات: هستهٔ φ مجموعهٔ عناصری $[f] \in \pi(X/G, y_\circ)$ است که $\varphi([f]) = 1$. این درست عبارت است از مجموعهٔ عناصری $[f] \in \pi(X/G, y_\circ)$ که برای آنها $\tilde{f}(۱) = x_\circ$. یعنی، به ازای آنها $\tilde{f}$ راهی بسته با پایهٔ در $x_\circ$ می‌باشد. بنابراین، عبارت از مجموعهٔ همهٔ عناصری $[f] \in \pi(X/G, y_\circ)$ به شکل $[p\circ\tilde{f}]$ است که $[\tilde{f}] \in \pi(X, x_\circ)$. به عبارت دیگر، عبارت از $p_*\big(\pi(X, x_\circ)\big)$ می‌باشد. □

۵.۴.۸ نتیجه. $p_*\big(\pi(X, x_\circ)\big)$ زیر گروه نرمالی از $\pi(X/G, y_\circ)$ است، و بنابراین گروه خارج قسمتی $\pi(X/G, y_\circ)/p_*\big(\pi(X, x_\circ)\big)$ قابل تعریف است.

۶.۴.۸ قضیه. گروههای $\pi(X/G, y_\circ)/p_*\big(\pi(X, x_\circ)\big)$ و G ایزومورفند.

اثبات: کافی است نشان دهیم که نگاشت $\varphi : \pi(X/G, y_\circ) \to G$ پوشا است. اگر $g \in G$، فرض می‌کنیم f_g راهی از $x_\circ$ به $g \bullet x_\circ$ در فضای X باشد. این عنصری از $\pi(X/G, y_\circ)$ به شکل $[p \circ f_g]$ را مشخص می‌سازد. بنابه تعریف $\big(\varphi([p\circ f_g])\big) \bullet x_\circ = \widetilde{(p \circ f_g)}(۱)$، که $\widetilde{p \circ f_g}$ ترفیع یکتای $p\circ f_g$ آغازی از $x_\circ$ می‌باشد. اما f_g چنین ترفیعی است و بعلاوه $f_g(۱) = g \bullet x_\circ$. بنابراین $\varphi([p \circ f_g]) = g$، که نشانگر پوشایی φ می‌باشد. □

۷.۴.۸ نتیجه. اگر X همبند ساده باشد، آنگاه $\pi(X/G, y_\circ)$ و G ایزمورفند..

۸.۴.۸ مثال. ۱) حکم اصلی فصل قبل مبنی بر اینکه گروه بنیادی دایره $\mathbb{S}^۱$ برابر $\mathbb{Z}$ است را با فرض $X = \mathbb{R}$، $G = \mathbb{Z}$ و در نظر گرفتن عمل طبیعی $\mathbb{Z}$ بر G می‌توان بدست آورد. در این صورت $\mathbb{R}$ همبند ساده است (چون انقباض پذیر است) و $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ با $\mathbb{S}^۱$ همئومرف می‌باشد. بنابراین $\pi(\mathbb{S}^۱, 1) \cong \pi(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \circ) \cong \mathbb{Z}$.

۲) با فرض $G = \mathbb{Z}^n$ و $X = \mathbb{R}^n$ و تعریف

$$(a_۱, \cdots, a_n) \bullet (t_۱, \cdots, t_n) = (t_۱ + a_۱, \cdots t_n + a_n)$$

ملاحظه می‌کنیم که $\pi(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n, (\circ, \cdots, \circ)) \cong \mathbb{Z}^n$. اما فضای مداری $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ با فضای حاصلضربی $(\mathbb{S}^۱)^n$ همئوموِرف است.

مثالهای بیشتر را به شکل تمرین می‌آوریم.

۹.۴.۸ تمرین.

۱) نشان دهید که گروه بنیادی فضای لنز $L(p,q)$ با گروه جمعی $\mathbb{Z}_p$ ایزومورف است. (بنابه تمرین ۲۵.۲.۷–(۳)، فرض کنید $\mathbb{S}^۳$ همبند ساده است).

۲) نشان دهید که به ازای هر گروه آبلی متناهیاً تولید شده G، فضایی X_G وجود دارد که گروه بنیادی آن G است. (راهنمایی: از این حکم استفاده کنید که G حاصلضربی از چند کپی از $\mathbb{Z}$ و تعدادی گروه دوری از مرتبهٔ متناهی است.)

۳) گیریم $Y = \mathbb{C}^*/K$، که $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{۰\}$ و K گروه همئومورفیسمهای $\{\varphi^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ با $\varphi(z) = ۴z$ است. با استفاده از نتیجهٔ ۷.۴.۸ ثابت کنید که گروه بنیادی Y برابر $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ است. (راهنمایی: فضای X، گروه G و زیر گروه نرمال H از G را به گونه‌ای بیابید که X یک G–فضای همبند ساده باشد. همچنین، طوری انتخاب کنید که $X/H \cong \mathbb{C}^*$ و $G/H \cong K$. سپس از تمرین ۱۳.۳.۳–(۳) استفاده کنید.)

۴) ثابت کنید که اگر $X = \mathbb{R}\times[۰;۱] \subset \mathbb{C}$، در این صورت $T(z) = \bar{z} + ۱ + i$ همئومورفیسمی به شکل $T : X \to X$ است. نشان دهید که اگر G گروه همئومورفیسمهای تولید شده توسط T باشد، آنگاه X/G نوار موبیوس می‌باشد. نتیجه بگیرید که گروه بنیادی نوار موبیوس نیز $\mathbb{Z}$ است.

۵) ثابت کنید که گروه بنیادی بطری کلاین عبارت از

$$G = \{a^m b^{۲n+\varepsilon} \,|\, m,n \in \mathbb{Z}\,,\, \varepsilon \in \{۰,۱\}\,,\, ba = a^{-۱}b\}$$

است: G گروهی با دو مولد a و b و تنها یک رابطهٔ $ba = a^{-۱}b$ می‌باشد.

۶) فرض کنید X دارای یک G–عمل کاملاً ناپیوسته است. از تمرین ۴.۳.۸ یاد آور می‌شویم که گروه $\pi(X/G, y_۰)$ از راست بر $p^{-۱}(y_۰)$ عمل می‌کند. ثابت کنید که به ازای هر $g \in G$، $x \in p^{-۱}(y_۰)$ و $[f] \in \pi(X/G, y_۰)$ ای داریم $(g\centerdot x)\centerdot[f] = g\centerdot(x\centerdot[f])$.

۷) فرض کنید G و H دو گروه عمل کننده بر مجموعهٔ S باشند، که G از چپ و H از راست عمل می‌کند. همچنین، فرض کنید که به ازای همهٔ $g \in G$، $x \in S$ و $h \in H$ ها $(g\centerdot x)\centerdot h = g\centerdot(x\centerdot h)$. ثابت کنید که اگر G بطور آزاد و متعدی بر S عمل کند، آنگاه همومورفیسمی $\varphi : H \to G$ وجود خواهد داشت. بعلاوه،

نشان دهید که هستهٔ φ عبارت از پایدارساز نقطهٔ $x_\circ \in S$ تحت عمل H می‌باشد و نیز $S = \{g \bullet x_\circ \,|\, g \in G\}$. (راهنمایی: به ازای $h \in H$، مقدار $\varphi(h)$ را عنصری یکتا از G تعریف کنید که در شرط $g \bullet x_\circ = x_\circ \bullet h$ صدق می‌کند.)

۸) با بکارگیری تمرینات (۶) و (۷)، قضیهٔ ؟؟ و لم ۴.۴.۸ را مجدداً اثبات کنید.

۹) با استفاده از تمرین (۸) و نیز تمرین ۴.۳.۸—(۳)، قضیهٔ ۶.۴.۸ را مجدداً ثابت کنید.

۵.۸ قضایای بورساک—اولام و ساندویچ ژامبون

هدف از این بخش، ارائهٔ چند کاربرد از مباحث قبلی است. در واقع، به دنبال تعمیم احکام بخش ۴.۴ هستیم، که همهٔ آنها مبتنی بر قضیه‌ای موسوم به **قضیهٔ بورساک—اولام** هستند. این قضیه را س. اولام مطرح کرد و ک. بورساک در سال ۱۹۳۰ حل نمود.

۱.۵.۸ قضیهٔ بورساک—اولام. هیچ نگاشت پیوستهٔ $\varphi:\mathbb{S}^{۲}\to\mathbb{S}^{۱}$ صادق در شرط $\varphi(-x)\neq-\varphi(x)$ وجود ندارد.

اثبات: فرض کنیم چنین نگاشت $\varphi:\mathbb{S}^{۲}\to\mathbb{S}^{۱}$ ای وجود داشته باشد. گروه $\mathbb{Z}_{۲}=\{-۱,۱\}$ به صورت انعکاس قطری بر $\mathbb{S}^{۲}$ و نیز بر $\mathbb{S}^{۱}$ عمل می‌کند (یعنی، به صورت $\pm x:=\pm۱\bullet x$)؛ در هر دو مورد، عمل کاملاً ناپیوسته است. اگر $p_{۱}:\mathbb{S}^{۱}\to\mathbb{S}^{۱}/\mathbb{Z}_{۲}$ و $p_{۲}:\mathbb{S}^{۲}\to\mathbb{S}^{۲}/\mathbb{Z}_{۲}$ نگاشتهای تصویر طبیعی باشند، در این صورت φ موجب نگاشتی پیوسته $\psi:\mathbb{S}^{۲}/\mathbb{Z}_{۲}\to\mathbb{S}^{۱}/\mathbb{Z}_{۲}$ با ضابطهٔ $\psi(\{\pm x\})=\{\pm\varphi(x)\}$ می‌گردد که در شرط $p_{۱}\circ\varphi=\psi\circ p_{۲}$ صدق می‌کند (به اثبات قضیهٔ ۱۹.۲.۳ توجه شود). گیریم $a=(۱,۰,۰)\in\mathbb{S}^{۲}$، که مطابق معمول

$$\mathbb{S}^{۲}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^{۳}\mid x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۱\}.$$

همچنین، فرض کنیم $b=p_{۲}(a)\in\mathbb{S}^{۲}/\mathbb{Z}_{۲}$. اگر f راه با ضابطهٔ

$$f(t)=\big(\cos(\pi t),\sin(\pi t),۰\big)\qquad ۰\leq t\leq ۱$$

در $\mathbb{S}^{۲}$ از a به $-a$ باشد، در این صورت $[p_{۲}\circ f]\in\pi(\mathbb{S}^{۲}/\mathbb{Z}_{۲},b)$ در رابطهٔ $[p_{۲}\circ f]^{۲}=[\varepsilon_{b}]$ صدق دارد. زیرا

$$\begin{aligned}\big((p_{۲}\circ f)*(p_{۲}\circ f)\big)(t) &= \begin{cases} p_{۲}\big(\cos(۲\pi t),\sin(۲\pi t),۰\big) & ۰\leq t\leq ۱/۲\\ p_{۲}\big(-\cos(۲\pi t),-\sin(۲\pi t),۰\big) & ۱/۲\leq t\leq ۱\end{cases}\\ &= p_{۲}\big(\cos(۲\pi t),\sin(۲\pi t),۰\big)\qquad ۰\leq t\leq ۱\end{aligned}$$

حال، نگاشت $F:I\times I\to\mathbb{S}^{۲}$ را به صورت

$$\begin{aligned}F(t,s) &= \Big(s+(۱-s)\cos(۲\pi t)\,,\,(۱-s)\sin(۲\pi t)\,,\\ &\qquad \sqrt{۲s(۱-s)}(۱-\cos(۲\pi t))\Big)\end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. ملاحظه می‌گردد که $p_2 \circ F : I \times I \to \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ پیوسته است. بعلاوه

$$p_2(F(t,0)) = \big((p_2 \circ f) * (p_2 \circ f)\big)(t),$$
$$p_2(F(t,1)) = p_2(1,0,0) = \varepsilon_b(t),$$
$$p_2(F(0,s)) = p_2(1,0,0) = p_2(F(1,s)),$$

که این نشان می‌دهد $[p_2 \circ f]^2 = [\varepsilon_b] \in \pi(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b))$.

نگاشت $\psi : \mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$ موجب القاء هومورفیسمی به شکل

$$\psi_* : \pi(\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2, b) \to \pi(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b))$$

می‌شود، و بنابراین $[\psi \circ p_2 \circ f]^2 = [\varepsilon_{\psi(b)}] \in \pi(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b))$. اما، $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{S}^1$ و به ازای یک $\alpha \in \pi(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b))$ ای $\pi(\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b)) = \{\alpha^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ (در واقع $\alpha = [p_1 \circ g]$، که $g : I \to \mathbb{S}^1$ به صورت $g(t) = \exp(\pi i t) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ تعریف می‌گردد.) بنابراین، $[\psi \circ p_2 \circ f]^2 = [\varepsilon_{\psi(b)}]$ به این معنی است که $[\psi \circ p_2 \circ f] = [\varepsilon_{\psi(b)}]$ (به ازای یک k ای $[\psi \circ p_2 \circ f] = \alpha^k$ و $\alpha^{2k} = \alpha^0$ ایجاب می‌کند که $\alpha^k = \alpha^0$).

در ادامه، از احکام بخش ۲.۸ استفاده نموده و ترفیعی یکتا با شروع از $\varphi(a)$ در $\mathbb{S}^1$ از راه $\psi \circ p_2 \circ f$ و نیز راه $\varepsilon_{\psi(b)}$ را مورد توجه قرار می‌دهیم. اینها بترتیب عبارتند از $\varphi \circ f$ و $\varepsilon_{\varphi(a)}$ (توجه شود که $\psi \circ p_2 = p_1 \circ \varphi$). اما $\varphi(f(1)) = \varphi(-a) = -\varphi(a)$، در حالی که $\varepsilon_{\varphi(a)}(1) = \varphi(a)$، که این با $[\psi \circ p_2 \circ f] = [\varepsilon_{\psi(a)}]$ در تضاد است. بنابراین، چنین φ ای نمی‌تواند وجود داشته باشد (همچنین، توجه شود که $[p_2 \circ f] \neq [\varepsilon_b] \in \pi(\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2, b)$). □

۲.۵.۸ یادداشت. بر اساس تمرین ۲۵.۲.۷—(۳)، $\mathbb{S}^2$ همبند ساده است (به نتیجهٔ ؟؟ نیز توجه شود). بنابراین، بر اساس اطلاعات بخش قبل، گروه بنیادی $\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2$ درست خود $\mathbb{Z}_2$ است. بنابراین، ψ_* هومورفیسمی از $\mathbb{Z}_2$ به $\mathbb{Z}_2$ است. اما، می‌دانیم که چنین هومورفیسمی الزاماً همانی است. در نتیجه $[\psi \circ f] = \varepsilon_{\psi(b)} \in \pi(\mathbb{S}^2/\mathbb{Z}_2, \psi(b))$. استدلال قبل به جهت اجتناب از بکار گیری تمرینات آورده شده است.

۳.۵.۸ یادداشت. این قضیه تعمیم حکم «هیچ نگاشت پیوسته‌ای $\varphi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^0$ وجود ندارد که در شرط $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ صدق کند» می‌باشد. (این حکم درست

است، زیرا چنین نگاشتی باید پوشا باشد، ولی $\mathbb{S}^1$ همبند و $\mathbb{S}^\circ = \{-1, 1\}$ غیر همبند است.) در واقع حکم کلی‌تری به شرح زیر وجود دارد:

به ازای $n \geq 1$، هیچ نگاشت پیوسته‌ای $\varphi : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n-1}$ وجود ندارد که در شرط $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ صدق کند.

اثبات این حکم برای حالت $n > 2$ خارج از سطح کتاب حاظر است: در اثبات آن، مثلاً از گروههای هموتوپی مرتبهٔ بالا استفاده می‌شود.

۴.۵.۸ نتیجه. گیریم $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ نگاشتی پیوسته باشد که به ازای همهٔ $\mathbb{S}^2$ ها $f(-1) = -f(x)$. در این صورت، نقطه‌ای $x \in \mathbb{S}^2$ چنان وجود دارد که $f(x) = 0$.

اثبات: فرض کنیم به ازای هر $x \in \mathbb{S}^2$ ای $f(x) \neq 0$ و نگاشت $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ با ضابطهٔ $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت g پیوسته است و $g(-x) = -g(x)$، که خلاف حکم قضیهٔ ۱.۵.۸ است. □

۵.۵.۸ نتیجه. گیریم $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ نگاشتی پیوسته باشد. در این صورت، نقطه‌ای $x \in \mathbb{S}^2$ چنان وجود دارد که $f(x) = f(-x)$.

اثبات: اگر به ازای هر $x \in \mathbb{S}^2$ ای $f(x) \neq f(-x)$، آنگاه نگاشت $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $g(x) = f(x) - f(-x)$ پیوسته است و در شرط $g(-x) = -g(x)$ صدق می‌کند، و بعلاوه به ازای هر $x \in \mathbb{S}^2$ ای $g(x) \neq 0$. این خلاف حکم قضیهٔ ۱.۵.۸ است. □

نتیجهٔ ؟؟، تعمیم نتیجهٔ ۳.۴.۴ است. این دو حکم را می‌توان به حالت $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{S}6n$ تعمیم داد.

یکی از نتایج بالفصل نتیجهٔ ۵.۵.۸ این است که هیچ نگاشت پیوستهٔ یکبیکی از $\mathbb{S}^2$ به $\mathbb{R}^2$ وجود ندارد. حکم زیر نیز، نتیجه‌ای بلافصل از این مطلب است.

۶.۵.۸ نتیجه. هیچ زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ با $\mathbb{S}^2$ همئومورف نیست.

همانند در بخش ۴.۴، تعبیری برای نتیجهٔ ۵.۵.۸ می آوریم.

۷.۵.۸ نتیجه. در هر لحظه یک جفت نقطهٔ قطراً متقابل بر سطح زمین وجود دارد که دمای محیط و فشار هوا در آن دو محل یکی است.

قضیه‌ای موسوم به **قضیهٔ ساندویچ ژامبون** وجود دارد که حکم آن شبیه به اولین مسألهٔ پنکیکی می‌باشد. بر اساس این قضیه، هر ساندیچ ژامبون که از سه لایهٔ نان، کره

و ژامبون تشکیل می‌شود را، با تنها یک برش به دو قسمت مساوی می‌توان تقسیم نمود (فرض بر این است که اجزای ساندویچ در هم آمیخته نشده‌اند). به بیان دقیقتر

۸.۵.۸ قضیهٔ ساندویچ ژامبون. گیریم A، B و C سه زیر مجموعهٔ کراندار در $\mathbb{R}^3$ باشند. در این صورت، صفحه‌ای در $\mathbb{R}^3$ وجود دارد که هر یک از این سه مجموعه را دقیقاً به دو نیم تقسیم می کند.

اثبات: اثبات این قضیه شبیه اثبات قضیهٔ ۶.۴.۴ است. می‌توانیم فرض کنیم که A، B و C در کرهٔ S به شعاع ۱/۲ و با مرکز در مبداء $0 \in \mathbb{R}^3$ واقع هستند. به ازای $x \in S$، فرض کنیم D_x نمایشگر خط قطری گذرنده از x در S باشد. به ازای $t \in I = [0; 1]$، فرض کنیم P_t نمایشگر صفحه‌ای عمود بر D_x باشد که از نقطه‌ای به فاصلهٔ t تا x می‌گذرد. به این ترتیب، P_t مجموعهٔ A را به دو بخش A_1 و A_2 تقسیم می کند، که A_1 به x نزدیکتر است تا به x. توابع f_1 و f_2 را بترتیب به صورت $f_1(t) = \mathrm{Vol}(A_1)$ و $f_2(t) = \mathrm{Vol}(A_2)$ تعریف می‌کنیم. روشن است که f_1 و f_2 توابعی پیوسته از I به $\mathbb{R}$ هستند، f_1 اکیداً صعودی و f_2 اکیداً نزولی می‌باشد. بنابراین، تابع $f : I \to \mathbb{R}$ با ضابطهٔ $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ پیوسته و صعودی است.بعلاوه، $f(0) = -f(1)$ و لذا بنابه قضیهٔ مقدار میانی، $t \in I$ ای وجود دارد که $f(t) = 0$. چون f صعودی است، پس یا f تنها در یک نقطه صفر می‌شود، و یا اینکه بر بازهٔ بسته‌ای $[a; b]$ صفر می‌گردد. در حالت نخست، تنها نقطه را a را با نماد $\alpha(x)$، و در حالت آخر، عدد $(a + n)/2$ را $\alpha(x)$ می‌نامیم. بنابراین، $P_{\alpha(x)}$ مجموعهٔ A را به دو نیمهٔ هم حجم تقسیم می‌کند. توجه شود که $\alpha : S \to \mathbb{R}$ نگاشتی پیوسته و صادق در شرط $\alpha(x) = 1 - \alpha(-x)$ می‌باشد.

به طریقی مشابه می‌توان نگاشتهای $\beta, \gamma : S \to \mathbb{R}$ را ساخت، که در روابط $\beta(x) = 1 - \beta(-x)$ و $\gamma(x) = 1 - \gamma(-x)$ صدق می‌کنند. در این صورت، $P_{\beta(x)}$ مجموعهٔ B را و $P_{\gamma(x)}$ مجموعهٔ C را به دو نیمهٔ هم حجم تقسیم می‌کنند. حال با استفاده از توابع α، β و γ نگاشت $\varphi : S \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $\varphi(x) = (\alpha(x) - \beta(x), \alpha(x) - \gamma(x))$ را تعریف می‌کنیم. چون α، β و γ پیوسته‌اند، φ نیز پیوسته است.بعلاوه، به ازای هر $x \in S$ ای $\varphi(x) = -\varphi(-x)$. در نتیجه، بنابه نتیجهٔ ۵.۵.۸، نقطه‌ای $y \in S$ چنان وجود دارد که $\varphi(y) = 0$. اما، این به معنی $\alpha(y) = \beta(y) = \gamma(y)$ است، و بنابراین، صفحهٔ $P_{\alpha(y)}$ هر سه مجموعهٔ A، B و C را به دو نیمه تقسیم می‌کند. □

۹.۵.۸ تمرین.

۱) ثابت کنید که اگر $n \geq ۲$، در این صورت هیچ نگاشت پیوسته‌ای به شکل $\varphi : \mathbb{S}^۲ \to \mathbb{S}^۱$ که در شرط $\varphi(-x) = \varphi(x)$ صدق کند وجود ندارد.

۲) گیریم $\mathbb{Z}_p$ به صورت زیر بر $\mathbb{S}^۳ \subset \mathbb{C}^۲$ و همچنین بر $\mathbb{S}^۱ \subset \mathbb{C}$ عمل کند:

$$k \bullet z = \exp\Big(\frac{۲\pi ik}{p}\Big)z, \quad k \bullet (z_۱, z_۲) = \Big(\exp\Big(\frac{۲\pi ik}{p}\Big)z_۱, \exp\Big(\frac{۲\pi ikq}{p}\Big)z_۲\Big)$$

که $k \in \mathbb{Z}_p = \{۰, ۱, \cdots, p-۱\}$ و q عددی است که نسبت به p اول می‌باشد. ثابت کنید هیچ نگاشت پیوستهٔ $\mathbb{Z}_p$—هم ارزی از $\mathbb{S}^۳$ به $\mathbb{S}^۱$ وجود ندارد.

۳) آیا شبیه مسألهٔ دوم پنکیک در $\mathbb{R}^۳$ وجود دارد؟ چرا؟

۴) فرض کنید X و Y دو G—فضا باشند، به گونه‌ای که عمل G بر آنها کاملاً ناپیوسته است. همچنین، فرض کنید که $\varphi : X \to Y$ نگاشتی G—هم ارزی و پیوسته بین آنها باشد. گیریم $\psi : X/G \to Y/G$ نمایشگر نگاشت القایی توسط φ باشد. ثابت کنید که در این صورت نگاشت $\psi_* : \pi(x_\circ) \to \pi(Y/G, q(\varphi(x_\circ)))$ موجب القاء هومورفیسمی به شکل

$$\pi(X/G, p(x_\circ))/p_*\big(\pi(X, x_\circ)\big) \to \pi(X/G, q(\varphi(x_\circ)))/q_*\big(\pi(Y, \varphi(x_\circ))\big)$$

می‌گردد، که عملاً ایزومورفیسم می‌باشد. در اینجا $p : X \to X/G$ و $q : Y \to Y/G$ تصاویر طبیعی هستند و $x_\circ \in X$.

۵) با استفاده از تمرین (۴)، قضیهٔ بورساک—اولام و نیز حکم تمرین (۲) را مجدداً اثبات کنید (هر یک از این استدلالها در یک خط جا می‌گیرد).

فصل ۹

همولوژی تکین

بی شک نظریهٔ همولوژی یکی از بخشهای بسیار مهم از توپولوژی است. این فصل به دلیل اختصارش، نمی‌تواند حق مطلب را ادا کند: تنها ایده‌های اصلی و پایه‌ای درگیر در آن را معرفی می‌کند: و در حالت خاص، ارتباط آن با گروههای بنیادی را مورد بررسی قرار می‌دهد. با چند تعریف آغاز می‌کنیم.

۱.۹ زنجیرهٔ تکین

۱.۱.۹ تعریف. منظور از n**–سادک استاندارد** Δ_n، زیر فضای

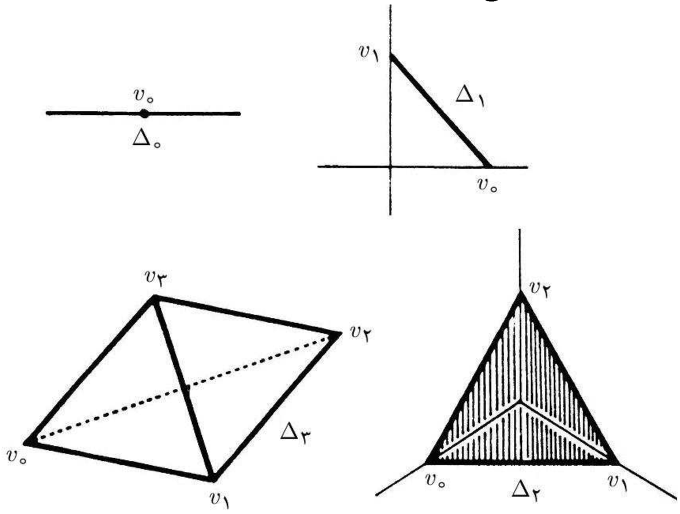
$$\Delta_n := \Big\{x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\Big|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \,,\, x_i \geq 0 \,,\, i = 0, 1, \cdots, n\Big\}$$

از $\mathbb{R}^{n+1}$ است. نقاط $v_0 := (1, 0, \cdots, 0)$، $v_1 := (0, 1, \cdots, 0)$، . . . و $v_n := (0, \cdots, 0, 1)$ را **رئوس** n–سادک استاندارد Δ_n می‌نامیم.

۲.۱.۹ مثال. Δ_0 مجموعه‌ای با تنها یک نقطه در $\mathbb{R}$ است. Δ_1 پاره خطی راست در $\mathbb{R}^2$ است. Δ_2 ناحیه‌ای به شکل مثلث در $\mathbb{R}^3$ است. Δ_3 جسمی تو پر به شکل هرم در $\mathbb{R}^4$ است. به شکل ۱.۲۹ توجه شود.

۳.۱.۹ تعریف. گیریم X فضایی توپولوژی باشد. منظور از n-**سادک تکین در** X، نگاشتی پیوسته به شکل $\varphi : \Delta_n \to X$ است.

شکل ۱.۲۹: نمونه‌هایی از n-سادکهای استاندارد.



۴.۱.۹ مثال. ۱) ۰-سادک تکین، چیزی جز یک نقطه در X نیست.

۲) ۱-سادک تکین در X، عملاً همان مفهوم راه در X است. زیرا، اگر φ یک ۱-سادک تکین در X باشد، آنگاه می‌توانیم تابه $f : I \to X$ را با ضابطهٔ $f(t) := \varphi(۱-t, t)$ تعریف کنیم، که نگاشت حاصل یک راه در X از $\varphi(v_\circ)$ به $\varphi(v_۱)$ می‌باشد. بالعکس، اگر $f : I \to X$ راهی در X باشد، می‌توانیم ۱-سادک تکین $\varphi : \Delta_۱ \to X$ را به صورت $\varphi(x_\circ, x_۱) := f(x_۱)$ تعریف کنیم.

۵.۱.۹ تعریف. n-**زنجیرهٔ تکین** در X، عبارتی است به شکل $\sum_{j\in J} n_j\varphi_j$، که در آن $\{\varphi_j \,|\, j \in J\}$ گردایهٔ همهٔ n-سادکهای تکین در X است (که توسط J اندیسگذاری شده است) و $n_j \in \mathbb{Z}$ و تنها تعدادی متناهی از اعداد $\{n_j \,|\, j \in J\}$ مخالف صفر می‌باشد.

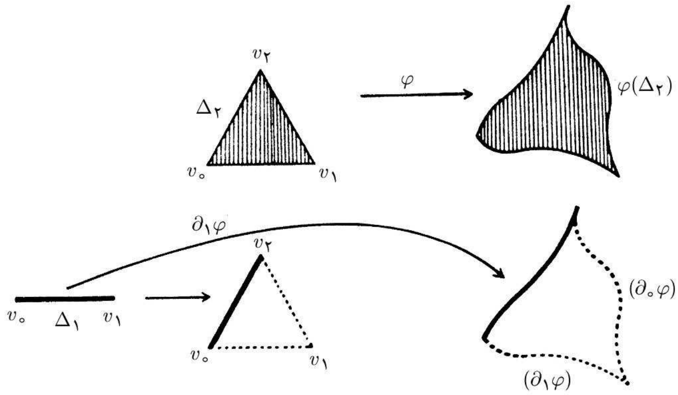
۲.۹ گروههای همولوژی

۱.۲.۹ قضیه. مجموعهٔ n–زنجیره‌های تکین در X را با نماد $S_n(X)$ نشان داده، و به ازای $\sum_{j\in J} n_j\varphi_j, \sum_{j\in J} m_j\varphi_j \in S_n(X)$ تعریف می‌کنیم

$$\Big(\sum_{j\in J} n_j\varphi_j\Big) + \Big(\sum_{j\in J} m_j\varphi_j\Big) := \sum_{j\in J}(n_j+m_j)\varphi_j$$

در این صورت، $S_n(X)$ گروه آبلی تشکیل می‌دهد. عنصر خنثی این عمل $0 = \sum_{j\in J} \circ\varphi_j$ و عنصر وارون $\sum_{j\in J} n_j\varphi_j$ عبارت است از $\sum_{j\in J} -n_j\varphi_j$.

شکل ۲.۲۹: عملگر مرزی.



۲.۲.۹ تعریف. به ازای n–سادک تکین مفروض φ و اندیس مفروض $i = \circ, ۱, \cdots, n$، $(n-۱)$–سادک تکین $\partial_i\varphi$ را به صورت

$$\partial_i\varphi(x_\circ, x_۱, \cdots, x_{n-۱}) = \varphi(x_\circ, x_۱, \cdots, x_{i-۱}, \circ, x_i, \cdots, x_{n-۱})$$

تعریف می‌کنیم. به شکل ۲.۲۹ توجه شود. به وضوح، ∂_i همومورفیسمی به شرح زیر تعریف می‌کند:

$$\partial_i : S_n(X) \to S_{n-۱}(X) \qquad \sum_{j\in J} n_j\varphi_j \mapsto \sum_{j\in J} n_j\partial_i\varphi_j.$$

۳.۲.۹ تعریف. **عملگر مرزی** را به صورت نگاشت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X) \qquad \partial := \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \cdots + (-1)^n \partial_n$$

عملگر مرزی موجب تعریف دو زیر گروه ویژه از $S_n(X)$ می‌گردد.

۴.۲.۹ تعریف. ۱) n–زنجیرهٔ تکین $c \in S_n(X)$ را در صورتی n–**دور** گوئیم که $\partial c = 0$. مجموعهٔ n–دورهای در X را با نماد $Z_n(X)$ نشان می‌دهیم.
۲) n–زنجیرهٔ تکین $d \in S_n(X)$ را در صورتی n–**مرز** گوئیم که به ازای یک $e \in S_{n-1}(X)$ ای $d = \partial e$. مجموعهٔ n–مرزهای در X را با نماد $B_n(X)$ نشان می‌دهیم.

به بیان دیگر، $Z_n(X)$ هستهٔ نگاشت $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ و $B_n(X)$ نگارهٔ نگاشت $\partial : S_{n+1}(X) \to S_n(X)$ است. بنابراین،

۵.۲.۹ نتیجه. ۱) $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ زیر گروه نرمال در $S_n(X)$ هستند.
۲) هر ۰–زنجیرهٔ تکین الزاماً ۰–دور است، یعنی $Z_0(X) = S_0(X)$.

۶.۲.۹ قضیه. هر n–مرز، n–دور است. به بیان دقیقتر $\partial \circ \partial = 0$.

اثبات: کامی است مقدار $\partial \circ \partial$ را بر n–سادک تکین دلخواه φ محاسبه کنیم:

$$(\partial \circ \partial)\varphi = \partial\Big(\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \partial_i \varphi\Big) = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} (-1)^{j+i} (\partial_j \circ \partial_i)\varphi.$$

اما، اگر $j \le i$، آنگاه $\partial_j \circ \partial_i = \partial_i \circ \partial_{j+1}$؛ زیرا

$$\begin{aligned}
\Big((\partial_j \circ \partial_i)\varphi\Big)(x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}) &= \partial_j\Big((\partial_i\varphi)(x_0, x_1, \cdots, x_{n-2})\Big)\\
&= (\partial_i\varphi)(x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_{n-2})\\
&= \varphi(x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_{n-2})\\
&= \Big(\varphi_{j+1}\Big)(x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-2})\\
&= \Big((\partial_i \circ \partial_{j+1})\varphi\Big)(x_0, x_1, \cdots, x_{n-2}).
\end{aligned}$$

بنابراین

$$(\partial \circ \partial)\varphi = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+j} (\partial_j \circ \partial_i)\varphi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j} (\partial_j \circ \partial_i)\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}(\partial_i \circ \partial_{j+1})\varphi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}(\partial_j \circ \partial_i)\varphi \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i}^{n-1}(-1)^{i+j}(\partial_j \circ \partial_{i+1})\varphi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}(\partial_i \circ \partial_{j+1})\varphi \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}(-1)^{i+j}(\partial_j \circ \partial_{i+1})\varphi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}(\partial_j \circ \partial_i)\varphi \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j-1}(\partial_j \circ \partial_{i+1})\varphi + \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}(\partial_j \circ \partial_i)\varphi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

و به این ترتیب، برهان تمام است. □

۷.۲.۹ نتیجه. $B_n(X)$ زیر گروهی نرمال از $Z_n(X)$ است.

۸.۲.۹ تعریف. n**–امین گروه مرزی** X یا n–امین گروه همولوژی X را به صورت $Z_n(X)/B_n(X)$ تعریف نموده و با نماد $H_n(X)$ نشان می‌دهیم. به بیان دیگر، اگر تعریف کنیم «دورهای $c, c' \in Z_n(X)$ در صورتی **همولوگ** هستند که $c' - c \in B_n(X)$»، آنگاه «همولوگ بودن» رابطه‌ای هم ارزی بر $Z_n(X)$ است و بعلاوه $H_n(X)$ مجموعهٔ همهٔ دسته‌های همولوگ می‌باشد.

به عنوان مثال، گروههای همولوژی فضایی تک نقطه‌ای را تعیین می‌کنیم.

۹.۲.۹ لم. اگر X فضایی با تنها یک نقطه باشد، در این صورت $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ و به ازای هر $n > 0$ ای $H_n(X) = 0$.

اثبات: به ازای هر $n \geq 0$ ای تنها یک n–سادک تکین $\varphi_{(n)} : \Delta_n \to X$، وجود دارد. بنابراین $S_n(X) = \{k\varphi_{(n)} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. از طرفی، به ازای $n > 0$ داریم $\partial_i\varphi_{(n)} = \varphi_{(n-1)}$ و در نتیجه

$$
\begin{aligned}
\partial\varphi_{(n)} &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i\varphi_{(n)} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varphi_{(n-1)} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{اگر } n \text{ فرد} \\ \varphi_{(n-1)} & \text{اگر } n \text{ زوج و } n > 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

برای $n = 0$ نیز $\partial\varphi_{(0)} = 0$.

اکنون، با استفاده از محاسبات مشروح در بالا، نتیجه می‌گیریم که

$$Z_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & \text{اگر } n \text{ فرد، یا } n = ۰ \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج و } n > ۰ \end{cases}$$

$$B_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & \text{اگر } n \text{ فرد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج} \end{cases}$$

در نتیجه،

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{اگر } n = ۰ \\ 0 & \text{اگر } n > ۰ \end{cases}$$

و بر هان تمام است. □

۱۰.۲.۹ لم. در صورتی که X فضایی غیر تهی و همبند راهی باشد، $H_۰(X) \cong \mathbb{Z}$.

اثبات: هر ۰-دور (یعنی ۰-زنجیرهٔ تکین) به شکل $\sum_{x\in X} n_x\, x$ است، که $n_x \in \mathbb{Z}$ و همه بجز تعدادی متناهی از آنها صفرند. نگاشت $\psi : H_۰(X) \to \mathbb{Z}$ را به صورت $\psi\Big(\sum_{x\in X} n_x\, x\Big) := \sum_{x\in X} n_x$ تعریف می‌کنیم.

ابتدا، خوشتعریفی ψ را نشان می‌دهیم. فرض کنیم $\sum_{x\in X} m_x\, x$ یک ۰-دور دیگر باشد، که با $\sum_{x\in X} n_x\, x$ همولوگ است. یعنی، به ازای ۱-زنجیرهٔ تکین c ای

$$\sum_{x\in X} m_x\, x = \sum_{x\in X} n_x\, x + \partial c.$$

ولی، هر ۱-زنجیرهٔ تکین به شکل $c = \sum_{j\in J} k_j\, \varphi_j$ است، که $k_j \in \mathbb{Z}$ و φ_j ها ۱-سادک تکین هستند. اکنون

$$\partial c = \sum_{j\in J} k_j \partial\varphi_j = \sum_{j\in J} k_j\big(\varphi_j(v_۱) - \varphi_j(v_۰)\big).$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \psi\Big(\sum n_x\, x\Big) &= \psi\Big(\sum m_x\, x + \partial c\Big) \\ &= \psi\Big(\sum_{x\in X} m_x\, x + \sum k_j\varphi_j(v_۱) - \sum k_j\varphi_j(v_۰)\Big) \\ &= \sum m_x + \sum k_j - \sum k_j = \sum m_x = \psi\Big(\sum m_x\, x\Big) \end{aligned}$$

که این به معنی خوشتعریفی ψ می‌باشد.

به وضوح، ψ همومورفیسم است. بعلاوه، ψ پوشا است. زیرا به زای هر نقطه مانند $x \in X$ ، داریم $\psi(n\,x) = n$. سر انجام، نشان می‌دهیم که ψ یکبیک است. گیریم $\sum n_x\,x$ یک ۰–دور دلخواه باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\sum_{x\in X} n_x\,x &= \Big(\sum_{x\in X} n_x\Big)x_\circ + \sum_{x\in X}\,(n_x\,x - n_x\,x_\circ)\\ &= \Big(\sum_{x\in X} n_x\Big)x_\circ + \partial\Big(\sum_{x\in X} n_x\varphi_x\Big)\end{aligned}$$

که φ_x راه (یعنی، یک ۱–سادک تکین) از x به $x_\circ$ می‌باشد. بنابراین، $\sum n_x\,x$ و $(\sum n_x)x_\circ$ همولوگند. بنابراین، اگر $\psi(\sum n_x\,x) = \circ$، آنگاه $\sum n_x = \circ$. در نتیجه $\sum n_x\,x$ با 0 همولوگ است، که به معنی یکبیک بودن ψ می‌باشد. □

۱۱.۲.۹ یادداشت. مرحلهٔ آخر در اثبات لم ۱۰.۲.۹ اساس آن برهان را تشکیل می‌دهد. زیرا بر اساس آن، هر ۰–دور $c = \sum n_x\,x$ با ۰–دور $(\sum n_x)x_\circ$ همولوگ است، که این ۰–دور توسط عدد $\sum n_x$ کاملاً مشخص می‌گردد.

۳.۹ ارتباط بین گروههای همولوژی

۱.۳.۹ تعریف. فرض کنیم $f : X \to Y$ نگاشتی پیوسته باشد. در این صورت، نگاشت $f_\# : S_n(X) \to S_n(Y)$ را با ضابطهٔ زیر می‌توانیم تعریف کنیم:

$$f_\#\Big(\sum_{j\in J} n_j\,\varphi_j\Big) = \sum_{j\in J} n_j\,(f\circ\varphi)$$

۲.۳.۹ یادداشت. شاید بهتر بود بجای $f_\#$ از نماد $f_{\#,n}$ استفاده می‌کردیم. اما این کار عملاً جز پیچیده‌تر کردن بحث، نتیجهٔ دیگری ندارد.

۳.۳.۹ لم. $f_\#$ هومومرفیسم بین گروهها است، و بعلاوه $\partial\circ f_\# = f_\#\circ\partial$.

اثبات: هومومرفیسم بودن $f_\#$ بدیهی است. برای اثبات حکم دوم، فرض کنیم φ یک $(n-۱)$–سادک تکین باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
\big((\partial_i\circ f_\#)(\varphi)\big)(x_۰,x_۱,\cdots,x_{n-۱}) &= \partial_i(f\circ\varphi)(x_۰,x_۱,\cdots,x_{n-۱})\\
&= (f\circ\varphi)(x_۰,x_۱,\cdots,x_{i-۱},۰,x_i,\cdots,x_{n-۱})\\
&= f\big(\varphi(x_۰,x_۱,\cdots,x_{i-۱},۰,x_i,\cdots,x_{n-۱})\big)\\
&= f\big((\partial_i\varphi)(x_۰,x_۱,\cdots,x_{n-۱})\big)\\
&= (f\circ\partial_i\circ\varphi)(x_۰,x_۱,\cdots,x_{n-۱})\\
&= \big((f_\#\circ\partial_i)(\varphi)\big)(x_۰,x_۱,\cdots,x_{n-۱})
\end{aligned}$$

و به این ترتیب، برهان تمام است. □

۴.۳.۹ نتیجه. با مفروضات لم قبل، داریم $f_\#(Z_n(X))\subseteq Z_n(Y)$ و $f_\#(B_n(X))\subseteq B_n(Y)$. به بیان دیگر، $f_\#$ هر n–مرزی را به یک n–مرز، و هر n–دور را به یک n–دور تصویر می‌کند.

اثبات: اگر c دوری در X باشد، آنگاه $۰=(\partial\circ f_\#)(c)=\partial\big(\circ f_\#(c)\big)$، که این یعنی $f_\#(c)$ نیز دوری در Y است. اگر d مرزی در X باشد، آنگاه $d=\partial(e)$ و $f_\#(d)=f_\#(\partial(e))=\partial(f_\#(e))$ نیز مرزی در Y است و برهان تمام است. □

۵.۳.۹ تعریف. بر اساس نتیجهٔ بالا، اگر نگاشت $f : X \to Y$ پیوسته باشد، آنگاه هومورفیسم گروهی $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ را با ضابطهٔ

$$f_*\Big(\sum_{j\in J} n_j\varphi_j\Big) := \sum_{j\in J} n_j(f\circ\varphi_j)$$

می‌توان تعریف نمود، که در اینجا $\sum_{j\in J} n_j\varphi_j$ یک n–دور دلخواه در X است. نگاشت f_* را **هومورفیسم القایی توسط** f می‌نامیم.

۶.۳.۹ یادداشت. در حقیقت، اگر $c = \sum_{j\in J} n_j\varphi_j$، آنگاه $f_*([c]) := [f_\#(c)]$.

احکام بعدی به راحتی قابل اثباتند، و اثبات آنها را به عنوان تمرین به خواننده می‌سپاریم. اینها را با قضیهٔ ۱۴.۲.۷ و نتیجهٔ ۱۵.۲.۷ مقایسه کنید.

۷.۳.۹ قضیه.

۱) فرض کنیم نگاشتهای $f : X \to Y$ و $g : Y \to Z$ پیوسته باشند و $n \geq 0$، آنگاه $(f\circ g)_* = g_* \circ f_* : H_n(X) \to H_n(Z)$.

۲) اگر 1_X نگاشت همانی X باشد و $n \geq 0$، در این صورت 1_{X*} نگاشت همانی $H_n(X)$ است.

۸.۳.۹ نتیجه. اگر $f : X \to Y$ همئومورفیسم باشد و $n \geq 0$، در این صورت $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ ایزومورفیسم است.

۹.۳.۹ قضیه. گیریم $f, g : X \to Y$ نگاشتهایی پیوسته باشند. اگر f و g هموتوپ باشند، آنگاه به ازای هر $n \geq 0$ ای $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$.

اثبات: فرض کنیم به ازای $t \in I$، نگاشت $\lambda_t : X \to X\times I$ به صورت $\lambda_t(x) = (x,t)$ تعریف گردد. گیریم $F : X\times I \to Y$ هموتوپی از f به g باشد. یعنی $F(x,0) = f(x)$ و $F(x,1) = g(x)$. به بیان، دیگر بر اساس برچسب λ داشته باشیم: $F\circ\lambda_0 = f$ و $F\circ\lambda_1 = g$. در این صورت

$$f_* = (F\circ\lambda_0)_* = F_*\circ\lambda_{0*} = F_*\circ\lambda_{1*} = (F\circ\lambda_1)_* = g_*.$$

بنابراین، کافی است نشان دهیم که $\lambda_{0*} = \lambda_{1*} : H_n(X) \to H_n(X\times I)$. آنچه که نشان می‌دهیم، این است که هومورفیسمی $P : S_n(X) \to S_{n+1}(X\times I)$ (بنام

عملگر منشور) نظیر به هومورفیسمهای مفروض $\lambda_{\circ\#}, \lambda_{1\#} : S_n(X) \to S_n(X\times I)$، وجود دارد که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\partial \circ P + P \circ \partial = \lambda_{1\#} - \lambda_{\circ\#}$$

در این حالت، اصطلاحاً می‌گوئیم $\lambda_{\circ\#}$ و $\lambda_{1\#}$ **هموتوپ زنجیره‌ای** هستند.

اگر $\lambda_{\circ\#}$ و $\lambda_{1\#}$ هموتوپ زنجیره‌ای باشند، و c یک n–دور در X باشد، آنگاه

$$(\lambda_{1\#} - \lambda_{\circ\#})(c) = (\partial \circ P + P \circ \partial)(c) = \partial(P \circ c)$$

که این به معنی همولوگ بودن $\lambda_{\circ\#}(c)$و $\lambda_{1\#}(c)$ می‌باشد و بنابراین $\lambda_{\circ\#} = \lambda_{1\#}$. در نتیجه، برای اثبات قضیه، کافی است نشان دهیم که $\lambda_{\circ\#}$ و $\lambda_{1\#}$ هموتوپ زنجیره‌ای هستند. برای انجام این، به تعریف P نیاز داریم.

گیریم $\varphi : \Delta_n \to X$ یک n–سادک تکین در X باشد؛ یعنی، عضوی از $S_n(X)$ باشد. به ازای $i = \circ, 1, \cdots, n$ فرض کنیم $P_i(\varphi)$ عضو با تعریف

$$\begin{aligned}\big(P_i(\varphi)\big)(x_\circ, x_1, \cdots, x_{n+1}) \quad := \quad \Big(\varphi(x_\circ, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}\\ , x_{i+2}, \cdots, x_{n+1}) \,,\, 1 - \sum_{k=\circ}^{i} x_k\Big)\end{aligned}$$

از $S_{n+1}(X \times I)$ باشد و $P(\varphi) \in S_{n+1}(X \times I)$ عضو با تعریف

$$P(\varphi) := \sum_{i=\circ}^{n} (-1)^i P_i(\varphi)$$

باشد. مشاهدهٔ هومورفیسم بودن $P : S_n(X) \to S_{n+1}(X\times I)$ بدیهی است. اکنون، $\partial P(\varphi)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\partial P(\varphi) = \sum_{j=\circ}^{n+1} (-1)^j \partial_j P(\varphi) = \sum_{j=\circ}^{n+1} \sum_{i=\circ}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j\big(P_j(\varphi)\big)$$

از طرفی، $P_j\big(\P_i(\varphi)\big)$ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

اگر $i < j - 1$، آنگاه

$$\begin{aligned}(\partial_j \circ P_i)(\varphi)(x_\circ, \cdots, x_n) &= \big(P_i(\varphi)\big)(x_\circ, \cdots, x_{j-1}, \circ, x_j, \cdots, x_n)\\ &= \Big(\varphi(x_\circ, \cdots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{j-1}, \circ, x_j, \cdots, x_n) \,,\, 1 - \sum_{k=\circ}^{i} x_k\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\partial_{j-1} \circ \varphi)\Big(\varphi(x_0, \cdots, x_{j-1}, x_i + x_{i+1}, x_{j+2}, \cdots, x_n)\,,\; 1 - \sum_{k=0}^{i} x_k\Big) \\
&= P_i(\partial_{j-1} \circ \varphi)(x_0, \cdots, x_n) \\
&= (P_i \circ \partial_{j-1} \circ \varphi)(x_0, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

اگر $i > j$، در این صورت

$$
\begin{aligned}
&(\partial_j \circ P_i)(\varphi)(x_0, \cdots, x_n) = \big(P_i(\varphi)\big)(x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_n) \\
&= \Big(\varphi(x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_j, \cdots, +x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\,,\; 1 - \sum_{k=0}^{i} x_k\Big) \\
&= \Big((\partial_j \circ \varphi)(x_0, \cdots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\,,\; 1 - \sum_{k=0}^{i} x_k\Big) \\
&= P_{i-1}(\partial_j \varphi)(x_0, \cdots, x_n) \\
&= (P_{i-1} \circ \partial_j \circ \varphi)(x_0, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

بالاخره، اگر $i = j$، آنگاه

$$
\begin{aligned}
&(\partial_j \circ P_j)(\varphi)(x_0, \cdots, x_n) = \big(P_i(\varphi)\big)(x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_n) \\
&= \Big(\varphi(x_0, \cdots, x_n)\,,\; 1 - \sum_{k=0}^{i} x_k\Big) \\
&= (\partial_{j-1} \circ \varphi)(x_0, \cdots, x_{j-1}, 0, x_j, \cdots, x_n) \\
&= (\partial_j \circ P_{j-1} \circ \varphi)(x_0, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

بنابراین، به اختصار، داریم

$$
\partial_j \circ P_i = \begin{cases} P_{i-1} \circ \partial_j & \text{اگر } i < j \\ P_j \circ \partial_{j-1} & \text{اگر } i = j \\ P_i \circ \partial_{j-1} & \text{اگر } i > j \end{cases}
$$

حال ∂P را به صورت

$$
\begin{aligned}
\partial P &= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j P_i \\
&= \partial_0 \circ P_0 + \sum_{i=j=1}^{n} \partial_j \circ P_j + \sum_{i=j-1=1}^{n} (-1) \partial_j \circ P_{j-1} \\
&\quad -\partial_{n+1} \circ P_n + \sum_{i>j} (-1)^{i+j} \partial_j \circ P_i + \sum_{i<j-1} (-1)^{i+j} \partial_j \circ P_i
\end{aligned}
$$

نوشته و با استفاده از روابط بالا به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که

$$\partial \circ P = \partial_\circ \circ P_\circ - \partial_{n+1} \circ P_n - P \circ \partial$$

اما، از طرفی می‌دانیم که

$$\begin{aligned}(\partial_\circ \circ P_\circ)(\varphi)(x_\circ, \cdots, x_n) &= P_\circ(\varphi)(x_\circ, \cdots, x_n)\\ &= (\varphi(x_\circ, \cdots, x_n), 1)\\ &= (\lambda_1 \circ \varphi)(x_\circ, \cdots, x_n)\\ &= (\lambda_{1\#} \circ \varphi)(x_\circ, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\partial_{n+1} \circ P_n)(\varphi)(x_\circ, \cdots, x_n) &= P_n(\varphi)(x_\circ, \cdots, x_n)\\ &= (\varphi(x_\circ, \cdots, x_n), \circ)\\ &= (\lambda_\circ \circ \varphi)(x_\circ, \cdots, x_n)\\ &= (\lambda_{\circ\#} \circ \varphi)(x_\circ, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

بنابراین $\partial \circ P + P \circ \partial = \lambda_{1\#} - \lambda_{\circ\#}$؛ که نشانگر هموتوپی زنجیره‌ای $\lambda_{1\#}$ و $\lambda_{\circ\#}$ می‌باشد. این اثبات قضیه را تکمیل می‌کند. □

۱۰.۳.۹ تمرین.

۱) ثابت کنید که اگر $f : X \to Y$ هم ارزی هموتوپی باشد، آنگاه به ازای هر $n \geq \circ$ ای $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ ایزومورفیسم است.

۲) ثابت کنید که اگر $i : A \hookrightarrow X$ نگاشت احتوی یک انقباظ A برای X باشد، آنگاه $i_* : H_n(A) \to H_n(X)$ منومورفیسم است. ثابت کنید که اگر $g : X \to A$ انقباظ باشد، در این صورت $H_n(X) = \mathrm{Image}(i_*) \oplus \mathrm{Kernel}(g_*)$. بعلاوه، نشان دهید که اگر A انقباظی دگردیسی برای X باشد، در این صورت i_* ایزومورفیسم است.

۳) گیریم X فضایی هبند راهی باشد و $x_\circ \in X$. گیریم $p : X \to \{x_\circ\}$ نمایشگر نگاشت بدیهی باشد و $\tilde{H}_n(X)$ را به صورت هستهٔ $p_* : H_n(X) \to H_n(\{x_\circ\})$ تعریف کنیم. ثابت کنید $H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus H_n(\{x_\circ\})$.

۴) گیریم نگاشت پیوستهٔ $f : X \to Y$ حافظ نقطهٔ پایه است. نشاند دهید که در این صورت همومورفیسم القایی $f_* : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$ وجود دارد. بعلاوه، فرض کنید $g : X \to Y$ نیز نگاشت پیوستهٔ حافظ نقطهٔ پایه باشد، که با f نسبت به نقطهٔ پایه در X هموتوپ است. ثابت کنید $f_* = g_* : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$.

۴.۹ ارتباط بین گروه بنیادی و گروه مرزی

هدف از این بخش تعیین ارتباط بین گروه بنیادی و اواین گروه هومولوژی یک فضای توپولوژی است.

۱.۴.۹ قضیه. همومورفیسمی به صورت $\psi : \pi(Y, y_\circ) \to H_\text{۱}(Y)$ وجود دارد. اگر Y همبند راهی باشد، آنگاه ψ پوشا است و هستهٔ ψ عبارت از زیر گروه جابجاگر $\pi(Y, y_\circ)$ است؛ به بیان دیگر، $H_\text{۱}(Y)$ آبلی شدهٔ گروه $\pi(Y, y_\circ)$ است.

اثبات: فرض کنیم $f : I \to Y$ راهی با شروع $y_\circ$ در Y باشد. نگاشت $\psi(f) : \Delta_\text{۱} \to Y$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(f)(x_\circ, y_\circ) = f(x_\text{۱}) = f(\text{۱} - x_\circ) \qquad (x_\circ, x_\text{۱}) \in \Delta_\text{۱}$$

در این صورت $\psi(f)$ یک ۱–سادک تکین است. اگر f راهی بسته باشد، آنگاه $\partial(\psi(f)) = y_\circ - y_\circ = \circ$ و بنابراین $\psi(f)$ یک ۱–دور در Y می‌باشد.

اکنون تحقیق می‌کنیم که اگر f و f' دو راه بستهٔ هم ارز باشند، آنگاه دورهای $\psi(f)$ و $\psi(f')$ همولوگند. فرض کنیم $f \sim f'$ و $F : I \times I \to Y$ هموتوپی نسبت به $\{\circ, \text{۱}\}$ میان f و f' باشد.

از F برای ساختن یک ۲–سادک تکین به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

مختصات هر نقطه $Q \in \Delta_\text{۲}$ را به صورت $(\text{۱} - s, s(\text{۱} - t), st)$ می‌توانین بنویسیم، که $\circ \leq t, s \leq \text{۱}$ (به شکل ۳.۲۹ توجه شود). اکنون $\varphi(Q)$ را $F(s, t)$ تعریف می‌کنیم. بر اساس مختصات $(x_\circ, x_\text{۱}, x_\text{۲})$ نقطهٔ $Q \in \Delta_\text{۲}$ داریم

$$\varphi(x_\circ, x_\text{۱}, x_\text{۲}) = \begin{cases} F\Big(\text{۱} - x_\circ, \dfrac{x_\text{۲}}{\text{۱} - x_\circ}\Big) & \text{اگر } x_\circ \neq \text{۱} \\ F(\circ, \circ) & \text{اگر } x_\circ = \text{۱} \end{cases}$$

توجه کنید که $\dfrac{x_\text{۲}}{x_\text{۱} + x_\text{۲}} = \dfrac{x_\text{۲}}{\text{۱} - x_\circ}$ و البته $\circ \leq x_\circ, x_\text{۱}, x_\text{۲}$. بنابراین $\circ \leq \dfrac{x_\text{۲}}{\text{۱} - x_\circ} \leq \text{۱}$. چون به ازای هر $t \in I$ ای $F(\circ, t) = F(\circ, \circ)$، نتیجه می‌گیریم که φ پیوسته است.

مرز φ را به راحتی می‌توان بدست آورد:

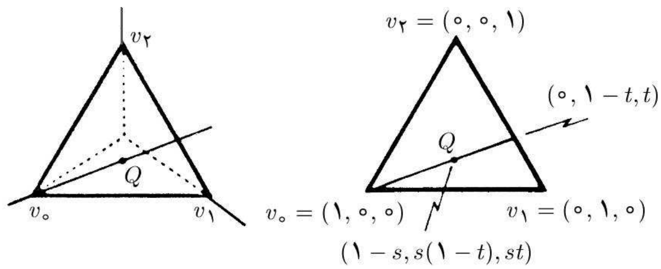
$$\begin{aligned}(\partial_0 \circ \varphi)(x_0, x_1) &= \varphi(0, x_0, x_1) = F(1, x_1) \\ &= y_0 = (\psi(\varepsilon))(x_0, x_1)\end{aligned}$$

که $\varepsilon : I \to Y$ راه ثابت $\varepsilon(t) := y_0$ است؛ همچنین

$$\begin{aligned}(\partial_1 \circ \varphi)(x_0, x_1) &= \varphi(x_0, 0, x_1) \\ &= \begin{cases} F\Big(1 - x_0, \dfrac{x_2}{1 - x_0}\Big) & x_0 \neq 1 \text{ اگر } \\ F(0, 0) & x_0 = 1 \text{ اگر } \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(1 - x_0, 1) & x_0 \neq 1 \text{ اگر } \\ F(0, 0) & x_0 = 1 \text{ اگر } \end{cases} \\ &= (\psi(f'))(x_0, x_1) \\ (\partial_2 \circ \varphi)(x_0, x_1) &= \varphi(x_0, x_1, 0) \\ &= F(1 - x_0, 0) = (\psi(f))(x_0, x_1)\end{aligned}$$

به بیان دیگر $\partial \circ \varphi = \psi(f) + \psi(f') = \psi(\varepsilon)$.

شکل ۳.۲۹



اما اگر نگاشت $c_2 : \Delta_2 \to Y$ را به صورت $c_2(x_0, x_1, x_2) = y_0$ تعریف کنیم، در این صورت ملاحظه می‌شود که $\partial \circ c_2 = \partial_1 \circ c_2 = \partial_2 \circ c_2 = c_1$، که $c_1 : \Delta_1 \to Y$ با ضابطهٔ $c_1(x_0, x_1) = y_0$ است. بنابراین $\psi(\varepsilon) = \partial \circ c_2$ و دورهای $\psi(f') = \psi(f)$ همولوگند. این اثبات می‌ک ند که تابع ψ از $\pi(Y, y_0)$ به $H_1(Y)$ خوشتعریف است.

برای تحقیق هومومورفیسم بودن ψ فرض می‌کنیم f و f' راههای بسته‌ای در Y با پایهٔ در y_0 باشند. نیاز است نشان دهیم که $\psi(f * f')$ با $\psi(f) + \psi(f')$ همولوگ است. یعنی $\psi(f) + \psi(f') - \psi(f * f')$ مرزی است؛ یعنی، به ازای یک ۲−سادک تکین $\varphi : \Delta \to Y$ ای داشته باشیم $\psi(f) + \psi(f') - \psi(f * f') = \partial\varphi$. تعریف φ در شکل

۴.۲۹ توصیف شده است و به صورت

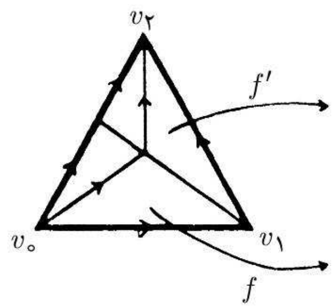
$$\varphi(x_\circ, x_۱, x_۲) = \begin{cases} f(۱ + x_۲ - x_\circ) & \text{اگر } x_\circ \geq x_۲ \\ f'(x_۲ - x_\circ) & \text{اگر } x_\circ \leq x_۲ \end{cases}$$

انجام می‌پذیرد. توجه کنید که بنابه لم چسب، φ خوشتعریف و پیوسته است. مرز φ را بسادگی می‌توان محاسبه نمود:

$$\begin{aligned}
(\partial_\circ \circ \varphi)(x_\circ, x_۱) &= \varphi(\circ, x_\circ, x_۱) \\
&= f'(x_۱) = (\psi(f'))(x_\circ, x_۱) \\
(\partial_۱ \circ \varphi)(x_\circ, x_۱) &= \varphi(x_\circ, \circ, x_۱) \\
&= \begin{cases} f(۱ + x_۱ - x_\circ) & \text{اگر } x_\circ \geq x_۱ \\ f'(x_۱ - x_\circ) & \text{اگر } x_\circ \leq x_۱ \end{cases} \\
&= \begin{cases} f(۲x_۱) & \text{اگر } x_۱ \geq ۱/۲ \\ f'(۲x_۱ - ۱) & \text{اگر } x_۱ \leq ۱/۲ \end{cases} \qquad (x_\circ + x_۱ = ۱) \\
&= \psi(f * f')(x_\circ, x_۱) \\
(\partial_۲ \circ \varphi)(x_\circ, x_۱) &= \varphi(x_\circ, x_۱, \circ) \\
&= f(۱ - x_\circ) = (\psi(f))(x_\circ, x_۱)
\end{aligned}$$

بنابراین $\partial \circ \varphi = \psi(f') - \psi(f * f') + \psi(f)$، که نشان می‌دهد $\psi(f * f')$ با $\psi(f) + \psi(f')$ همولوگ است و بنابراین ψ هomomorfیسم است.

شکل ۴.۲۹



حال فرض کنیم Y همبند راهی باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که ψ پوشا است. گیریم $c = \sum n_j\varphi_j$ یک ۱−دور در Y باشد؛ بنابراین $\partial \circ c = 0$، یعنی $\sum n_j(\varphi_j(v_0) - \varphi_j(v_1)) = 0$. با بازنویسی ∂c به صورت $\sum m_y y$ ملاحظه می‌کنیم که بایستی به ازای همهٔ $y \in Y$ ها $m_y = 0$. به ازای هر $j \in J$ مفروض، راهی g_{j0} از y_0 به $\varphi_j(v_0) = \partial_0\varphi_j(0)$، و راهی g_{ji} از y_0 به $\varphi_j(v_0) = \varphi_k(v_0)$ چنان انتخاب می‌کنیم که $g_{j0} = g_{k0}$. واضح است که بایستی $\sum_{y\in Y} m_y\psi(g_y) = 0$ (گیریم g_y راهی از y_0 به y باشد؛ در این صورت $\sum n_j(\psi_j(g_{j0}) - \psi_j(g_{j0}))$ را به صورت $\sum_{y\in Y} m_y\psi(g_y)$ می‌توان نوشت.)

با تعریف ۱−زنجیرهٔ تکین σ_j به صورت $\sigma_j := \psi(g_{j0}) + \varphi_j - \psi(g_{j1})$، داریم $c = \sum n_j\sigma_j$. اگر $f_j : I \to Y$ راه با ضابطهٔ $f_j(t) = \varphi(1-t, t)$ باشد، در این صورت $(g_{j0} * f_j) * g_{j1}$ راه بسته‌ای در Y با پایه در Y_0 است، و بعلاوه $\psi((g_{j0} * f_j) * g_{j1}) = \sigma_j$ و در نتیجه $\psi\big(\prod_j \{(g_{j0} * f_j) * g_{j1}\}^{n_j}\big) = c$؛ که این به معنی پوشایی ψ می‌باشد.

برای اثبات اینکه هستهٔ ψ زیر گروه جابجاگر است، فرض می‌کنیم $\psi(f)$ با 0 همولوگ باشد، در این صورت

$$\psi(f) = \partial\Big(\sum_{j\in J} n_j\varphi_j\Big) = \sum_{j\in J}(\varphi_{j0} - \varphi_{j1} + \varphi_{j2})$$

که φ_j (با $j \in J$) یک ۲−سادک تکین است و (به ازای $i = 0, 2, 2$) داریم $\varphi_{ji} = \partial \circ \varphi_j$. چون $\psi(f)$ یک ۱−سادک تکین است، بایستی داشته باشیم که به زای k و ℓ ای $\psi(f) = \varphi_{k\ell}$ و پس از دسته بندی عبارت سمت راست بالا، $\psi(f) = \varphi_{k\ell}$ با ضریب ۱ ظاهر می‌شود و همهٔ ضرایب دیگر صفر می‌شوند.

گیریم g_{ji} (که $i = 0, 1, 2$ و $j \in J$) راهی در Y از y_0 به $\varphi_j(v_i)$ باشد. مثل قبل، g_{ji} تنها به نقطهٔ انتهایی $\varphi_j(v_i)$ بستگی دارد و به چگونگی اندیس گذاری بستگی ندارد. اگر $\varphi_j(v_i) = y_0$، راه ثابت را انتخاب می‌کنیم. به شکل ۵.۲۹ توجه شود.

گیریم f_{ij} (که $i = 0, 1, 2$ و $j \in J$) راه با ضابطهٔ

$$f_{ji}(t) = \varphi_{ji}(1-t, t) = \partial_i \circ \varphi_i(1-t, 1)$$

در Y باشد و راههای h_{ji} (که $i = 0, 1, 2$ و $j \in J$) را به صورت

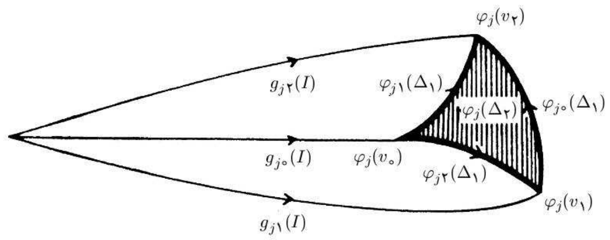
$$\begin{aligned} h_{j0} &= (g_{j1} * f_{j0}) * \bar{g}_{j2}, \\ h_{j1} &= (g_{j0} * f_{j1}) * \bar{g}_{j2}, \\ h_{j2} &= (g_{j0} * f_{j2}) * \bar{g}_{j1}, \end{aligned}$$

تعریف می‌کنیم. بالاخره، راههای h_j $(j \in J)$ را به صورت $h_j = (h_{j0} * \bar{h}_{j1}) * h_{j2}$ تعریف می‌کنیم. مشاهدهٔ اینکه h_j با

$$(g_{j1} * ((f_{j0} * \bar{f}_{j1}) * f_{j2})) * \bar{g}_{j1}$$

هم ارز است، کار دشواری نیست، که البته این نیز با راه ثابت ε هم ارز می‌باشد. بنابراین $\prod_j [h_j]^{n_j} = 1$.

شکل ۵.۲۹



گیریم $A\pi(Y, y_0)$ نمایشگر خارج قسمت $\pi(Y, y_0)$ بر زیر گروه جابجاگرش باشد (یعنی $A\pi(Y, y_0)$ آبلی شدهٔ $\pi(Y, y_0)$ است). اگر $[\alpha]$ عنصری از $\pi(Y, y_0)$ باشد، عنصر نظیر آن در $A\pi(Y, y_0)$ را به صورت $[[\alpha]]$ نشان می‌دهیم. چون $\prod_j [h_j]^{n_j} = 1$، داریم $\prod_j [[h_j]]^{n_j} = 1$. می دانیم که به ازای یک k, ℓ ای $\psi(f) = \varphi_{k\ell}$. نتیجه اینکه $f = f_{k\ell}$ (بنابه انتخاب g_{ij}) و نیز $f = h_{k\ell}$. چون $A\pi(Y, y_0)$ آبلی است، جملات در عبارت $\prod_j [[h_j]]^{n_j}$ را جمع بندی کنیم و بدست بیاوریم $\prod_j [[h_j]]^{n_j} = [[f]]$. بنابراین $[[f]] = 1$. یعنی $[f]$ به زیر گروه جابجاگر متعلق است. پس، دیدیم که هستهٔ ψ در زیر گروه جابجاگر واقع می‌باشد. از سوی دیگر، این واقعیت که $H_1(Y)$ آبلی است به این معنی است که هستهٔ ψ زیر گروه جابجاگر را در بر دارد. این مطلب، اثبات قضیه را تکمیل می‌کند. □

۲.۴.۹ تمرین.

۱) نشان دهید که $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ و $H_1((\mathbb{S}^1)^n) \cong \mathbb{Z}^n$.

۲) با ذکر مثال، نشان دهید که اگر Y همبند راهی نباشد، آنگاه $A\pi(Y, y_0)$ با $H_1(Y)$ ایزومورف نسیت.

۳) اولین گروه همولوژی الف) یک سطح جهتپذیر از نوع g، ب) یک سطح ناجهتپذیر از نوع g را محاسبه کنید و سپس نتیجه بگیرید که سطوح S_1 و S_2 وقتی و تنها

وقتسی همئومورفند که $H_1(S_2) \cong H_1(S_1)$.

۴) فرض کنید Y همبند راهی باشد. ثابت کنید وقتی و تنها وقتی $\pi(Y,y_0)$ و $H_1(Y)$ با هم ایزومورفند که $\pi(Y,y_0)$ آبلی باشد.

۵) نشان دهید که اولین گروه همولوژی شکل 8 با $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ایزومورف است.

٦) گیریم S یک سطح باشد و S' عبارت از خود S منهی یک دیسک باز بر آن باشد. ثابت کنید که $H_1(S) \cong H_1(S')$.

۵.۹ قضیهٔ شیفرت—ون کامپن

در بحث محاسبهٔ گروههای بنیادی، ملاحظه کردیم که قضیهٔ شیفرت—ون کامپن وسیله‌ای بسیار نیرومند است. قضیه‌ای مشابه در خصوص نظریهٔ همولوژی داریم که ذیلاً به توصیف آن می‌پردازیم.

۱.۵.۹ تعریف. گیریم $X = U_1 \cup U_2$، که U_1 و U_2 زیر مجموعه‌های باز در X اند و $\varphi_i : U_1 \times U_2 \to U_i$ و $\psi_i : U_i \to X$ که $i = 1,2$ نمایشگر نگاشتهای احتپی معمولی باشند. در این صورت هومورفیسمهای

$$i : H_k(U_1 \cap U_2) \to H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \ \ , \ \ j : H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \to H_k(X)$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$i(c) := \big(\varphi_{1*}(c), \varphi_{2*}(c)\big) \ \ , \ \ j(c_1, c_2) := \psi_{1*}(c_1) - \psi_{2*}(c_2)$$

۲.۵.۹ قضیه. گیریم $X = U_1 \cup U_2$، که U_1 و U_2 زیر مجموعه‌های باز در X اند. در این صورت هومورفیسمهایی $\Delta : H_k(X) \to H_{k-1}(U_1 \cap U_2)$ وجود دارند که در دنباله‌ای از گروهها و هومورفیسمها، مانند زیر صدق می‌کنند:

$$\cdots H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i} H_k(U_1) \oplus H_k(U_2)$$
$$\xrightarrow{j} H_k(X) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \cdots$$

در این دنباله، هستهٔ هر هومورفیسم برابر نگارهٔ هومورفیسم قبلی آن می‌باشد.

بعلاوه اگر Y فضایی دیگر با $Y = V_۱ \cup V_۲$ (که $V_۱$ و $V_۲$ در Y بازند) باشد، و اگر $f : X \to Y$ نگاشتی پیوسته با $f(U_i) \subseteq V_i$ باشد، در این صورت $(f|_{U_۱ \cap U_۱}) \circ \Delta = \Delta \circ f_*$. به عبارت دیگر هومورفیسم Δ با هومورفیسمهای القایی تعویض می‌گردد.

۳.۵.۹ تعریف. دنباله‌ای از گروهها و هومورفیسمها که در آن هستهٔ هر هومورفیسم برابر نگارهٔ هومورفیسم قبلی است، **دنبالهٔ دقیق** نامیده می‌شود. بنابراین، دنبالهٔ مطرح شده در قضیهٔ ۲.۵.۹، نمونه‌ای از یک دنبالهٔ دقیق است. نگاشتهای Δ را **هومورفیسمهای رابط** و دنبالهٔ مطرح شده در قضیهٔ ۲.۵.۹ را **دنبالهٔ میر—ویتوریس** می‌نامند.

قضیهٔ ۲.۵.۹ را اثبات نمی‌کنیم، اما مفید بودن آن (بنابراین، مفید بودن نظریهٔ هومولوژی) را با اثبات یک حکم و سپس چند نتیجهٔ کارا از آن، نشان می‌دهیم.

۴.۵.۹ قضیه. گیریم n عددی صحیح و مثبت باشد. در این صورت

$$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = ۰ \text{ و یا } k = n \text{ اگر} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بعلاوه، اگر $T_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ نگاشت انعکاس باشد (یعنی، نگاشت با ضابطهٔ $T_n(x_۰, x_۱, \cdots, x_n) = (-x_۰, x_۱, \cdots, x_n)$)، آنگاه $T_{n*} : H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$ ضرب در ۱− است.

اثبات: حکم را به استقراء و با استفاده از دنبالهٔ میر—ویتوریس اثبات می‌کنیم. گیریم $U_۱ = \{x \in \mathbb{S}^n | x_n > -۱/۲\}$ و $U_۲ = \{x \in \mathbb{S}^n | x_n < ۱/۲\}$. توجه کنید $U_۱$ و $U_۲$ انقباض‌پذیرند و $U_۱ \cup U_۲$ با $\mathbb{S}^{n-۱}$ هموتوپ است. در نتیجه

$$H_k(U_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = ۰ \text{ اگر} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \quad H_k(U_۱ \cap U_۲) = H_k(\mathbb{S}^{n-۱}).$$

توجه کنید که اگر $\mathbb{S}^{n-۱}$ را به صورت $\{x \in \mathbb{S}^n | x_m = ۰\}$ تصور کنیم، در این صورت $T_n|_{\mathbb{S}^{n-۱}} = T_{n-۱}$.

گیریم $n = ۱$؛ در این صورت قضیهٔ میر—ویتوریس برای $k = ۱$ دنبالهٔ

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{j} H_۱(\mathbb{S}^۱) \xrightarrow{\Delta} H_۰(\mathbb{S}^۰) \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \cdots$$

را بدست می‌دهد، که این نیز به نوبت خود، دنباله

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{j} H_۱(\mathbb{S}^۱) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \cdots$$

را می‌دهد، که در آن $i(x, y) = (x + y, x + y)$.

اکنون، چون $\mathrm{Kernel}(\Delta) = \mathrm{Image}(j) = 0$، پس Δ یکبیک است؛ بعلاوه $\mathrm{Image}(\Delta) = \mathrm{Kernel}(i) = \{(x, -x) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$، که با $\mathbb{Z}$ ایزومورف است. بنابراین $H_۱(\mathbb{S}^۱) \cong \mathbb{Z}$. روشن است که $T_{\circ *}(x, y) = (y, x)$ و چون $T_{\circ *} \circ \Delta = \Delta \circ T_{۱*}$، ملاحظه می‌کنیم که $T_{۱*}$ ضرب در -۱ است. به ازای $k > ۱$، دنبالهٔ مذکور

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{i} H_k(\mathbb{S}^۱) \xrightarrow{\Delta} H_{k-۱}(\mathbb{S}^\circ) \xrightarrow{j} 0 \longrightarrow \cdots$$

است؛ همچنین، Δ ایزومورفیسم است (چون $\mathrm{Kernel}(\Delta) = \mathrm{Image}(i)$ و در نتیجه Δ یکبیک است و چون $\mathrm{Image}(\Delta) = \mathrm{Kernel}(j)$، بنابراین Δ پوشا است). بنابراین قضیه به ازای $n = ۱$ ثابت شد.

فرض کنیم $m > ۱$ و حکم مورد نظر برای $n = m - ۱$ برقرار باشد؛ در این صورت می‌خواهیم نشان دهیم که حکم برای $n = m$ نیز صحیح است.

اگر $k = ۱$، آنگاه دنباله‌ای به شکل

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{j} H_۱(\mathbb{S}^m) \xrightarrow{\Delta} H_{k-۱}(\mathbb{S}^{n-۱}) \xrightarrow{i} 0$$

داریم، که این خود موجب دنبالهٔ

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{j} H_۱(\mathbb{S}^m) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \cdots$$

می‌گردد، که $i(a) = (a, a)$. بنابراین $\mathrm{Kernel}(i) = 0$ و لذا $\mathrm{Image}(\Delta) = 0$ و $H_۱(\mathbb{S}^m) = 0$.

اگر $k > ۱$، در این صورت دنباله‌ای به شکل

$$\cdots \longrightarrow 0 \xrightarrow{j} H_k(\mathbb{S}^m) \xrightarrow{\Delta} H_{k-۱}(\mathbb{S}^{m-۱}) \xrightarrow{i} 0$$

دریم، گه از آن نتیجه می‌گردد $H_k(\mathbb{S}^m) \cong H_{k-۱}(\mathbb{S}^{m-۱})$. بعلاوه، اگر $k = m$، آنگاه با استفاده از اینکه $T_{m-۱*} \circ \Delta = \Delta \circ T_{m*}$، نتیجه می‌گیریم T_{m*} ضرب در -۱ است. اکنون حکم بنابه اصل استقراء نتیجه می‌گردد. □

۵.۵.۹ نتیجه.

۱) اگر $n \neq m$، آنگاه $\mathbb{S}^n$ و $\mathbb{S}^m$ هم نوع هموتوپ نیستند.

۲) هر نگاشت پیوسته به شکل $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ دارای نقطه‌ای ثابت است.

۳) نگاشت انعکاس $T_n : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ و نگاشت همانی $1_{\mathbb{S}^n}$ هموتوپ نیستند.

۴) نگاشت تقاطر $A:\mathbb{S}^{2n}\to\mathbb{S}^{2n}$ با ضابطهٔ $A(x)=-x$، و نگاشت همانی $1_{\mathbb{S}^{2n}}$ هموتوپ است.

۵) اگر $f:\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n$ و نگاشت همانی $1_{\mathbb{S}^n}$ هموتوپ باشند، آنگاه f نقطه‌ای ثابت دارد.

٦) هیچ نگاشت پیوستهٔ به شکل $f:\mathbb{S}^{2n}\to\mathbb{S}^{2n}$ که به ازای هر $x\in\mathbb{S}^{2n}$ ای $f(x)$ و x در $\mathbb{R}^{2n+1}$ متعامد باشند، وجود ندارد.

اثبات: قسمت اول از قضیهٔ ناوردایی هموتوپی (قضیهٔ ۹.۳.۹) نتیجه می‌گردد؛ تمرین ۱۰.۳.۹—(۱) را ملاحظه کنید. قسمت دوم، قضیهٔ نقطه ثابت براور است و همانند برهان نتیجهٔ ۱۴.۴.۷ قابل اثبات است. قسمت سوم از قضیهٔ ناوردایی هموتوپی نتیجه می‌گردد. قسمت چهارم از این واقیت نتیجه می‌گردد که $A=R_0\circ R_1\circ\cdots\circ R_{2n}$، که R_i انعکاس نسبت به مختص i ام است و بنابراین $A_*:H_{2n}(\mathbb{S}^{2n})\to H_{2n}(\mathbb{S}^{2n})$ ضرب در $(-1)^{2n+1}=-1$ است. برای قسمت چنجم، فرض می‌کنیم که f هیچ نقطهٔ ثابتی نداشته باشد. در نتیجه به ازای هر x ای $(1-t)f(x)-tx\neq 0$ و لذا یک هموتوپی $F:\mathbb{S}^{2n}\times I\to\mathbb{S}^{2n}$ میان f و A به صورت

$$F(x,t)=\frac{(1-t)f(x)-tx}{\|(1-t)f(x)-tx\|}$$

می‌توان تعریف نمود. سرانجام، قسمت ششم از قسمت پنجم نتیجه می‌گردد، زیرا اگر x و $f(x)$ متعامد باشند، آنگاه بایستی $f(x)\neq x$. □

٦.۵.۹ یادداشت. قضیه‌ای بنام **قضیهٔ گوی پشمین** وجود دارد که تعبیر هندسی قسمتهای ۵ و ٦ از قضیهٔ بالا را فراهم می‌سازد. بر اساس این قضیه

> چنانچه شما یک گوی پشمین (یعنی $\mathbb{D}^3$ که از هر نقطهٔ از سطح آن $\mathbb{S}^2$ مویی روئیده باشد) در اختیار داشته باشید، قادر به شانه زندی آن به شکل هموار نخواهید بود.

اثبات آن چنین است که اگر شما یک شانه زدن هموار بر یک گوی پشمین داشته باشید و بردار $f(x)$ راستای موی رشد کرده در نقطهٔ x باشد، آنگاه بایستی $f(x)$ بر x عمود باشد. یعنی در چنین محصولاتی یا حتماً نواحی بی مو وجود دارد، و یا اینکه موها شکستگی خواهند داشت. جالب اینکه

تیوب پشمین را به شکل هموار می‌توان شانه زد.

این کار در نیروگاههای اتمی همجوش کاربرد دارد.

۷.۵.۹ تمرین.

۱) با استفاده از قضیهٔ میر—ویتوریس، گروههای همولوژی $\mathbb{RP}^2$ را محاسبه کنید.

۲) با استفاده از دنبالهٔ میر—ویتوریس گروههای همولوژی متتم یک گره را محاسبه کنید. سپس، نتیجهٔ ؟؟ را نتیجه بگیرید.

۳) ثابت کنید که هیچ انقباضی از $\mathbb{D}^n$ بر $\mathbb{S}^{n-1}$ نمی‌شود یافت.

۴) گیریم M و N منیفلدهایی با بعد بترتیب m و n باشند. ثابت کنید که اگر $m \neq n$، آنگاه M و N حتماً غیر همئومرفند. اینرا **قضیهٔ ناوردایی بعد توپولوژی** می‌نامند. (راهنمایی: از همئومورفیسم توصیفی $M/(M-D) \cong \mathbb{S}^m$ در تمرین ؟؟—(۶) استفاده کنید.)

۶.۹ نظریهٔ همولوژی تقلیل یافته

روشهای متعدد دیگری برای تعریف گروههای همولوژی وجود دارد. **همهٔ این نظریه‌ها برای دسته بسیار بزرگی از فضاها (از جمله CW—مجتمعها) عملاً یکی هستند.** این مطلب به طرح روشی اصل موضوعی برای نظریهٔ همولوژی می‌انجامد که در اوایل دههٔ ۱۹۵۰ میلادی توسط س. آیلنبرگ و ن. استینراد شروع شده است. اصول موضوعه‌ای را در اینجا مطرح می‌کنیم، که **اصول نظریه‌های همولوژی تقلیل یافته** نامیده می‌شوند. از این اصول بر فضاهای توپولوژی با نقطهٔ ثابت (مثلاً در مورد گروههای بنیادی) می‌توان استفاده نمود.

پیش از پرداختن به اصول موضوعهٔ نظریهٔ همولوژی تقلیل یافته، به شرح مختصر چند مفهوم نیاز داریم.

۱.۶.۹ تعریف. گیریم X فضایی توپولوژی با نقطهٔ ثابت x_0 باشد. ΣX را به صورت فضای خارج قسمتی $(X\times I)/\big((X\times\partial I)\cup(\{x_0\}\times I)\big)$ تعریف می‌کنیم.

توجه شود که اگر $f: X\to Y$ نگاشتی پیوسته و حافظ نقطهٔ پایه باشد، در این صورت f موجب تعریف نگاشتی پیوسته و حافظ نقطهٔ پایه به شکل $\Sigma f:\Sigma X\to\Sigma Y$ می‌گردد.

۲.۶.۹ تعریف. **مخروط تقلیل یافته** CX نظیر به فضای توپولوژی X به صورت فضای خارج قسمتی $(X\times I)/((X\times\{1\})\cup(\{x_0\}\times I))$ تعریف می‌گردد. اگر $f:X\to Y$ نگاشتی پیوسته و حافظ پایه باشد، آنگاه **مخروطی نگاشتی** C_f نظیر به f به صورت فضای خارج قسمتی $(CX\cup Y)/\sim$ تعریف می‌گردد، که $\sim$ رابطهٔ هم ارزی به شرح زیر است:

$$(x,0)\sim f(x) \iff f(x)\in Y\ ,\ (x,0)\in CX$$

نقطهٔ پایه‌ای C_f عبارت از نقطهٔ نظیر به y_0 در Y در C_f می‌باشد. توجه شود که نگاشت $i:Y\to C_f$ را به صورت طبیعی می‌توان تعریف نمود؛ آن را به عنوان نگاشت احتوی می‌توان قلمداد نمود.

۳.۶.۹ تمرین.

۱) ثابت کنید که اگر $p:X\to\{x_0\}$ نگاشت ثابت باشد، آنگاه C_p درست همان ΣX است.

۲) نشان دهید که اگر X هاوسدورف باشد، آنگاه ΣX نیز هاوسدورف است.

۳) ثابت کنید که $\Sigma\mathbb{S}^1\cong\mathbb{S}^2$.

اکنون موقعیت مناسبی برای طرح اصول آیلنبرگ—استینراد برای نظریهٔ همولوزی تکین تقلیل یافته است.

۴.۶.۹ تعریف. در این قسمت همهٔ فضاها با نقطه‌ای به عوان نقطه‌ث پایه همراه هستند، و همهٔ نگاشتها نیز بین چنین فضاهایی تعریف می‌شوند، پیوسته‌اند و نقاط پایه را حفظ می‌کنند.

هر **نظریهٔ همولوزی تکین تقلیل یافته** بر گزدایه‌ای از (یا احتمالاً همهٔ) فضاهای توپولوژی با نقاط پایه تعریف می‌گردد و از موارد زیر تشکیل می‌گردد:

ا) خانواده‌ای $\{\tilde H_n\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ از نگاشتها، به گونه‌ای که $\tilde H_n$ به هر فضای مورد مطالعه X، گروهی آبلی $\tilde H_n(X)$ نسبت می‌دهد؛ و

ب) به ازای هر نگاشت پیوستهٔ حافظ نقطهٔ پایه $f:X\to Y$ و عدد صحیح دلخواه n، هومومرفیسمی $f_*:\tilde H_n(X)\to\tilde H_n(Y)$ بنام **هومومرفیسم القایی**؛ و

ج) به ازای هر فضای X و هر عدد صحیح n، هومورفیسمی $\sigma_n(X):\tilde{H}_n(X)\to\tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$ بنام **هومورفیسم تعلیق نظیر به** X.

اشیاء مشروح در بالا، باید در هفت اصل زیر صدق داشته باشند:

۱) (**اصل همانی**) اگر $1_X : X\to X$ نگاشت همانی باشد و $n\in\mathbb{Z}$، آنگاه هومورفیسم القایی $1_* : \tilde{H}_n(X)\to\tilde{H}_n(X)$ ایزومورفیسم است.

۲) (**اصل ترکیب**) اگر $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ نگاشتهایی پیوسته و حافظ نقطهٔ پایه باشند، در این صورت $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$.

۳) (**اصل طبیعی بودن تعلیق**) اگر $f:X\to Y$ و $g:Y\to Z$ نگاشتهایی پیوسته و حافظ نقطهٔ پایه باشد، در این صورت نمودار زیر تعویضپذیر است:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}_n(X) \arrow[r, "\sigma_n(X)"] \arrow[d, "f_*"'] & \tilde{H}_n(\Sigma X) \arrow[d, "(\Sigma f)_*"] \\
\tilde{H}_n(Y) \arrow[r, "\sigma_n(Y)"'] & \tilde{H}_n(\Sigma Y)
\end{tikzcd}$$

۴) (**اصل هموتوپی**) اگر نگاشتهای $f,g : X\to Y$ نسبت به نقطهٔ پایهٔ در X هموتوپ باشند، در این صورت هومورفیسمهای القایی f_* و g_* برابرند.

۵) (**اصل تعلیق**) به ازای هر $n\in\mathbb{Z}$ای، هومورفیسم تعلیقی $\sigma_n(X):\tilde{H}_n(X)\to\tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$ ایزومورفیسم است.

۶) (**اصل دقت**) به ازای هر نگاشت $f:X\to Y$ و هر عدد صحیح n، دنبالهٔ

$$\tilde{H}_n(X)\xrightarrow{f_*}\tilde{H}_n(Y)\xrightarrow{i_*}\tilde{H}_n(C_f)$$

دارای این خاصیت است که $\mathrm{Image}(f_*)=\mathrm{Kernel}(i_*)$؛ در اینجا $i:Y\to C_f$ احتوی طبیعی است.

۷) (**اصل بعد**) $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^0)=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{اگر } n=0\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$

۵.۶.۹ مثال. در صورتی که X فضایی توپولوزی با نقطه‌پایهٔ x_0 باشد و $n\in\mathbb{Z}$، گروه $\tilde{H}_n(X)$ را به صورت

$$\tilde{H}_n(X):=\mathrm{Kernel}(p_*),\qquad p_*:H_n(X)\to H_n(\{x_0\}).$$

تعریف می‌کنیم، که $p : X \to \{x_\circ\}$ نکاشت بدیهی است. به ازی هر نگاشت حافظ پایه $f : X \to Y$، هومورفیسمی القائی $f_* : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$ وجود دارد که به صورت بدیهی قابل تعریف است. به این صورت به یک نظریه‌ٔهمولوژی تکین تقلیل یافته است این را ثابت کنید. (راهنمایی: برای تحقیق اصول ۵ و ٦ از دنبالهٔ میر— ویتوریس استفاده کنید.)

۶.۶.۹ مثال. فرض کنید $\mathcal{G} := \{G_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ گردایه‌ای از گروههای آبلی باشد و بجای اصل (۷) در ۴.۶.۹ شرط کنیم که به ازای هر n ای $\tilde{H}_n(\mathbb{S}^\circ) \cong G_n$. در این صورت به یک نظریهٔ همولوژی تقلیل یلفتهٔ با ضرایب در $\mathcal{G}$ می‌رسیم. چنین نظریه‌هایی در توپولوژی جبری نوین دارای موقیت برجسته‌ای می باشند. این را ثابت کنید.

کتاب‌نامه

[۱] BREDON, G. E., *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York - London, 1972.

[۲] CONNER. P. E., *Differentiable periodic maps*, second edition, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1979.

[۳] CONNER, P. E. & FLOYD, E.E., *Dlfferentiable periodic maps*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1964.

[۴] DOLD, A., *Lectures on algebraic topology*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.

[۵] EILENBERG, S. & STEENROU, N., *Foundations of algebraic topology*, Princetor University Press, Princeton. N.J., 1952.

[۶] GRAY. B., *Homotopy theory*, Academic Press, New York - San Francisco - London. 1975.

[۷] GREENBERG, M. J., *Lectures on algebraic topology*, Benjamin, New York, 1967.

[۸] *Hirsch, M. W.*, *Differential topology*, Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1976.

[۹] HUSEMOLLER, D., *Fibre bundles*, second edition, Springer, New York - Heidelberg - Berlin. 1975.

[۱۰] MASSEY, W. S., *Homology and cohomology theory*, Marcel Dekker, New York - Basel. 1978.

[۱۱] MAUNDER, C. R. F., *Introduction to algebraic topology*, Cambridge UniversityPress. 1980.

[۱۲] MOISE, E. E. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*, Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1977.

[۱۳] ROLFSEN, D., *Knots and links*, Publish or perish, Berkeley, Ca., 1976.

[۱۴] SPANIER, E. H., *Algebraic topology*, McGraw Hill, New York, 1966.

[۱۵] SWITZER, R. M.. *Algebraic topology - homotopy and homology*, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.

[۱۶] VICK, J. W., *Homology theory*, Academic Press, New York - London, 1973.

[۱۷] WHITEHEAD, G. W., *Homotopy theory*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1966.

هدف از این یادداشت، معرفی گزیده‌ای از کتب و مراجع مناسب برای مطالعات بیشتر در زمینهٔ این کتاب است. در اغلب این منابع، از اطلاعات توپولوژی بیشتری نسبت به این کتاب، استفاده می‌گردد. ملاک انتخاب آنها تجربیات شخصی و بعضاً در نظر گرفتن ملاحظات بخصوص است. بنابه دلایلی کتاب اسپانر [۱۴] را به طور کلی توصیه می‌کنیم. این اثر برای ورود به توپولوژی جبری بسیار مناسب و کافی است، اما به جهت مطالعه دشوار می‌باشد.

منیفلد: برای مشاهدهٔ نظریهٔ عمومی منیفلدها، به دالد [۴] مراجعه کنید. در مورد ۲–منیفلدها و نیز ۳–منیفلدها، به مویس [۱۲] مراجعه شود. دستهٔ مهمی از منیفلدها، بنام **منیفلدهای دیفرانسیلپذیر** وجود دارد. هرش [۸] مرجع مناسبی برای پرداختن به این منیفلدها است.

هموتوپی: سه کتاب قابل توجه در این زمینه عبارتند از گری [٦]، اسپاینر [۱۴] و وایتهد [۱۷].

فضای پوششی: مطالعهٔ فضاهای پوششی به نظریهٔ **کلافهای تاری** می‌انجامد، که در کتب هاوسمولر [۹] و اسپاینر [۱۴] به این بحث پرداخته شده است.

عمل گروه بر فضای توپولوژی: کتاب بردون [۱] توصیه می‌گردد.

گره: کتاب رالفسن [۱۳] توصیه می‌گردد.

همولوژی: برای کسب اطلاعات بیشتر در خصوص نظریهٔ همولوژی تکین، کتب دالد [۴]، گرینبرگ [۷]، اسپاینر [۱۴] و ویک [۱٦] را مطالعه کنید. دو نوع دیگر نظریهٔ همولوژی عبارتند از **همولوژی سادکی** و **همولوژی چک**، که کتاب اسپاینر [۱۴] به آنها پرداخته است. ماندرز [۱۱] برای همولوژی سادکی مناسب است، ولی دالد [۴] و مسی [۱۰] در مورد همولوژی چک مناسبترند. کتب گری [٦] و سوئیتزر [۱۵] برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینهٔ نظریهٔ همولوژی تعمیم یافته از دید نظریهٔ هموتوپی محض توصیه می‌شوند. سر انجام، کتاب آیلنبرگ و استینراد [۵] برای نظریهٔ همولوژی اصل موضوعی پیشنهاد می‌گردد.

فهرست الفبایی