۲۰۳_ ۱۰

دانشگاه آزاد ایران

درس ریاضیات بنیادی ۳: بخش چهارم

# دترمینان و دستگاه معادلات خطی

# دترمینان و دستگاه معادلات خطی

درس ریاضیات بنیادی ۳: بخش چهارم

ژان - بت داود

دانشگاه آزاد ایران

## گروه تهیه درس:

ژان بت‌داود (سرپرست گروه)
آفاق امامی (تکنولوژیست آموزشی)
احمد جلالی (ویراستار ارشد)
محمد جلوداری ممقانی
سلیمان خراشاهی
شیرین خسروی
لیدا فرخو
محمدتقی ممجد (تهیه کنندهٔ تلویزیونی)

## ویراستاران :

محسن بلورساز
هوشنگ شکرانیان
محمد افتخاری (دستیار ویراستار)

طرح روی جلد: فاطمه ملك‌افضلی

صفحه آرایی: علی‌اکبر شعبانی

ناظر چاپ: تقی مرندی

ویرایش و صفحه آرایی در سازمان ویرایش و تولید فنی دانشگاه ازاد ایران

این کتاب در شش‌هزار نسخه در شهریور ماه ۱۳۵۷ در چاپخانه مرکز تولید انتشارات دانشگاه ازاد به چاپ رسید

# فهرست

# پیشگفتار

این بخش شامل دوفصل است. در فصل اول، ابتدا مفهوم دترمینان را معرفی می‌کنیم وسپس به‌بررسی خواص آن می‌پردازیم. بااستفاده از دترمینان، روشی برای تعیین وارون ماتریسهای مربع وارون‌پذیر ارائه می‌دهیم. در فصل‌دوم، ابتدا دستگاه معادلات خطی معرفی، و سپس روشی جهت حل دستگاه معادلات خطی و بحث در وجود جوابهای آن عرضه می‌شود. همچنین در این فصل، دستگاه کرامر را تعریف می‌کنیم و بااستفاده از دترمینان، روشی برای‌حل این‌گونه دستگاهها بیان می‌کنیم. سرانجام، باتعریف وبررسی معادلات همگن، بخش را به‌پایان می‌رسانیم.

پاسخ‌دادن به‌سؤالات وحل مسائل متن درس نقش‌مهمی دریادگیری آن دارند. توجه‌کنیدکه یکی از شرایط بسیارمهم ولازم برای فراگیری این‌بخش سعی درپاسخ دادن به‌سؤالات‌وحل مسائل ویافتن‌جواب‌آنها بدون رجوع به‌قسمت پاسخهاست. البته پس از یافتن پاسخ، برای اطمینان از درستی‌آن، به‌قسمت‌پاسخ مراجعه‌خواهیدکرد.

قسمت خودآزمایی که‌درانتهای‌این‌بخش می‌آید مشتمل‌بر تعدادی مسئله وسؤال پاسخ‌گزینی است. این‌آزمون توجه‌شمارا به‌نکات‌دقیق تعاریف وقضایا جلب‌می‌کند. از سوی دیگر این آزمون را می‌توان شاخصی برای ارزیابی فراگرفته‌ها در رابطه باهدفهای این بخش محسوب داشت.

## هدفها

پس از مطالعه وفراگیری این‌بخش باید بتوانید:

۱. دترمینان ماتریس مربع را تعریف کنید.

۲. خواص دترمینان را بدانید، وقضایای مربوط به‌آن‌را ثابت کنید وآنها را به کار ببرید.

۳. مقدار دترمینان را محاسبه‌کنید.

۴. ماتریس وابسته را تعریف و محاسبه‌کنید.

۵. انواع دستگاه معادلات خطی را تعریف کنید ومثالهایی از آنها ارائه دهید.

۶. بااستفاده از دترمینان، وارون یک‌ماتریس وارون‌پذیر را محاسبه‌کنید.

۷. اعمال مقدماتی را روی دستگاه معادلات خطی وماتریس تعریف کنید و کاربرد آنهارا به‌وسیلهٔ چند مثال توضیح دهید.

۸. دروجود جوابهای یک‌دستگاه‌معادلهٔ خطی بحث‌کنید ودرصورت وجود، جوابهای آن‌را به‌دست‌آورید.

## توصیه‌ها

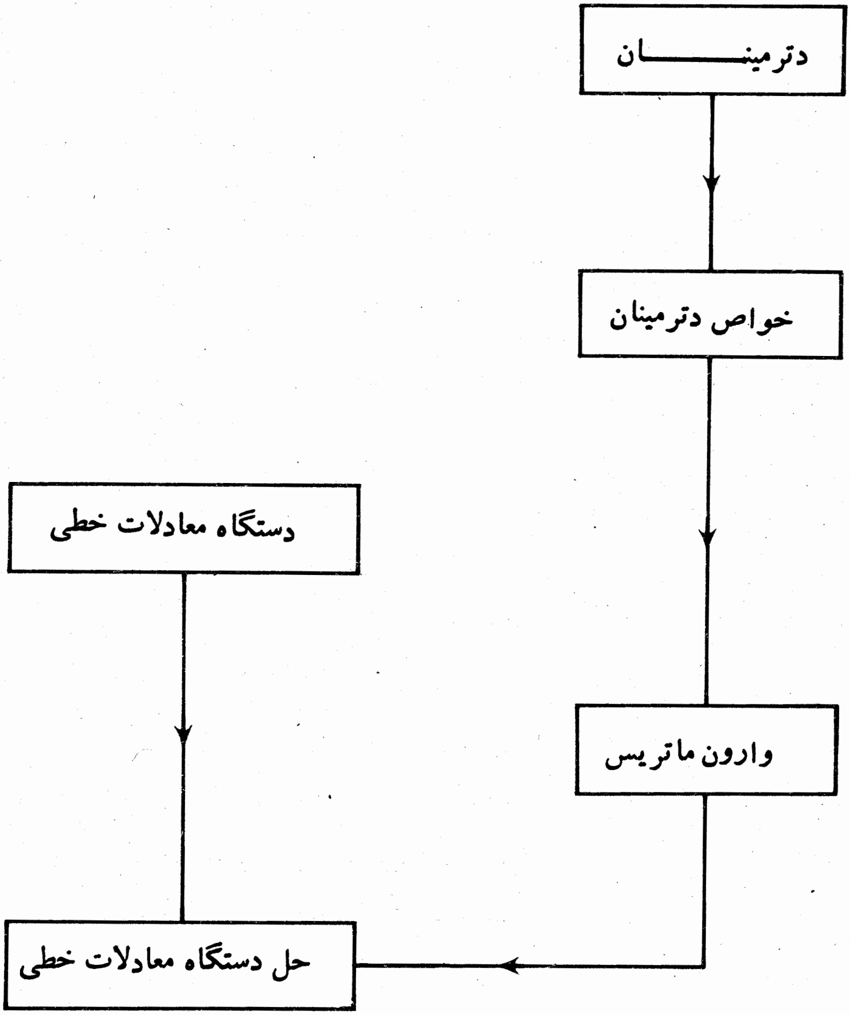
۱. لازم است که پیش‌از مطالعهٔ این بخش، بخشهای اول وسوم ریاضیات بنیادی سال دوم را فراگرفته‌باشید.

۲. ضمن مطالعهٔ این‌بخش خواهیم دید که اساس این‌بخش در ارائهٔ روشی برای محاسبهٔ وارون ماتریس مربع وارون‌پذیر است. بنابراین خواننده باید به‌مفهوم وخواص دترمینان که وسیله‌ای برای محاسبهٔ وارون ماتریس است، تسلط داشته باشد.

۳. توجه‌کنید‌که قسمتهایی که با علامت «*» مشخص شده‌اند، جزو هدفهای این بخش نیستند.

# طرح ساختمانی بخش

در طرح زیر ارتباط مطالب این بخش درج شده است. توجه به‌این طرح در ضمن مطالعهٔ بخش، مارا قادر می‌سازد که ارتباط مطالب را به‌خاطر بسپاریم.



# درس ریاضیات بنیادی ۳

۱. دستگاه مختصات خطی و بردار
۲. معادلات صفحات، خطوط و رویه‌های درجه دوم
۳. تابع خطی و ماتریس
۴. دترمینان و دستگاه معادلات خطی
۵. توابع چند متغیره و مشتقات جزئی
۶. معرفی خمها و رویه‌ها
۷. مشتق توابع چند متغیره و کاربردهای آن
۸. انتگرال چندگانه

# ۱
# دترمینان و وارون‌ماتریس

در این‌فصل مفهوم دترمینان‌را معرفی می‌کنیم. با‌استفاده از دترمینان می‌توانیم روشی برای به‌دست‌آوردن وارون ماتریسهای مربع ودر نتیجه وارون توابع خطی به‌دست آوریم.

## ۱ـ۱ مفهوم دترمینان

۱ـ۱ـ۱ بـرای‌حل دستگاههـای چندمعادلهٔ چند مجهولـی، روشهایی از جمله دستور کرامر (Cramer's rule) را بـرای‌حل دستگـاههای دومعادلهٔ دومجهولی در دبیرستان آموختیم. اکنون برای پی‌ریزی مقدمـات بیان مفهوم دترمینان، بـه‌یادآوری دستور کرامر برای‌حل دستگاههای معادلات خطی می‌پردازیم.

۱ـ۱ـ۲ بنابه دستور کرامر، جواب دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \qquad (۱)$$

عبارت است از:

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \quad \text{و} \quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

البته فرض براین است‌که:

$$ab'-ba'\neq 0$$

می‌بینیم مخرجهـای $x$ و $y$ هـردو مساوی $ab'-ba'$ است. مقـدار $ab'-ba'$ را با علامت $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$، ومقدار $cb'-bc'$ را با $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$ و $ac'-ca'$ را بـا $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ نشان می‌دهیم.

به‌این ترتیب می‌توانیم جواب دستگاه (۱) را به‌صورت‌زیر بنویسیم:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

۱-۱-۳ جواب دستگـاه دومعادلهٔ دومجهولـی زیر را باتوجه به‌آنچه در ۱-۱-۲ دیـدیم، محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ x-3y=5 \end{cases}$$

داریم:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{0\times(-3)-(-1)\times5}{2\times(-3)-(-1)\times1}=\frac{5}{-5}=-1$$

و:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{2\times5-0\times1}{2(-3)-(-1)\times1}=\frac{10}{-5}=-2$$

۱-۱-۴ تعریف $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ را دترمینان مرتبهٔدوم می‌نامیم ومقدارآن‌را به‌صورت‌زیر تعریف‌می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-ba'$$

۱-۱-۵ بـرای هرمـاتریس مـربع مرتبهٔ دوم $A=\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$، مـی‌توان دتـرمینان $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ را تعریف‌کرد. عموماً دترمینان $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ را دتـرمینان مـاتریس $A$ می‌نامیم و می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=\det A$$

مشاهده‌می‌کنیم‌مقداردترمینان $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ مساوی تفاضل حـاصل‌ضرب اعضای قطر غیراصلی از حاصل‌ضرب اعضای قطر اصلی (ماتریس) است.

**۱ـ۱ـ۶** دترمینان ماتریسهای زیر را حساب کنید:

الف) $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

ب) $B=\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

پ) $C=\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

پاسخ خود را با [۱ـ۱ـ۶] مقایسه کنید.

**۱ـ۱ـ۷** اینك دستگاه سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

می‌دانیم جواب دستگاه فوق عبارت است از:

$$x=\frac{db'c''+cd'b''+bc'd''-(dc'b''+bc''d'+cb'd'')}{ab'c''+ca'b''+bc'a''-(ac'b''+ba'c''+cb'a'')}$$

$$y=\frac{ca'd''+ac''d'+c'a''d-(ac'd''+a'c''d+a''cd')}{ab'c''+ca'b''+bc'a''-(ac'b''+ba'c''+cb'a'')}$$

$$z=\frac{ab'd''+ba''d'+a'b''d-(ad'b''+ba'd''+db'a'')}{ab'c''+ca'b''+bc'a''-(ac'b''+ba'c''+cb'a'')}$$

مشاهده می‌کنیم که مخرجهای $x$ و $y$ و $z$ باهم برابرند. حال بوسیلهٔ محاسبات زیر نشان می‌دهیم که این مخرج بصورت حاصل جمع مضاربی از چنددترمینان مرتبهٔ دوم است. داریم:

$$ab'c''+ca'b''+bc'a''-(ac'b''+ba'c''+cb'a'')=$$

$$a(b'c''-c'b'')-b(a'c''-c'a'')+c(a'b''-b'a'')$$

مطابق تعریف دترمینان مرتبهٔ‌دو، طرف‌راست تساوی فوق برابراست با:

$$a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

**۱ـ۱ـ۸**
**تعریف**
مقدار $a\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$ را با علامت زیر نشان می‌دهیم و آن را دترمینان مرتبهٔ سه می‌نامیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad (۱)$$

عموماً دترمینان (۱) را دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$ می‌نامیم و

می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=\det A$$

**۱-۱-۹** دترمینان ماتریسهای مرتبهٔ سهٔ زیر را محاسبه کنید:

الف) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ب) $B=\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

پ) $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

**پاسخ خود را با [۱-۱-۹] مقایسه کنید.**

**۱-۱-۱۰** مجهولات $x$ و $y$ و $z$ شمارهٔ ۱-۱-۷ را برحسب دترمینان ماتریسهای مرتبهٔ‌سه بنویسید.

**پاسخ خود را با [۱-۱-۱۰] مقایسه‌کنید.**

**۱-۱-۱۱** باتوجه به ۱-۱-۷ و ۱-۱-۹، اگر

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}\neq 0$$

باشد، جواب دستگاه سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی ۱-۱-۷ عبارت است از:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

**۱ـ۱ـ۱۲** جواب دستگاه زیر را به‌کمك دترمینان به‌دست آورید:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3y+z=1 \\ 4z+x=2 \end{cases}$$

پاسخ خود را با [۱ـ۱ـ۱۲] مقایسه‌کنید.

**۱ـ۱ـ۱۳** ماتریس $A$ را درنظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

صحت تساویهای زیر را ثابت کنید:

الف) $\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

$$=-a'\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix}+b'\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix}-c'\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

ب) $\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$

$$=a''\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}-b''\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}+c''\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

پاسخ خود را با [۱ـ۱ـ۱۳] مقایسه کنید.

**۱ـ۱ـ۱۴** در تساوی (الف) ۱ـ۱ـ۱۳ مشاهده‌می‌کنیم که ضرایب دترمینانهای مرتبهٔ‌دو،صرف‌نظر از علامت، اعضای سطردوم ماتریس $A$ هستند. می‌گوییم دترمینان ماتریس $A$ برحسب سطردوم بسط داده شده است. و همچنین در تساوی (ب)، $\det A$ برحسب سطر سوم بسط داده شده است.

**۱ـ۱ـ۱۵** هرگاه دستگاه چهارمعادلهٔ چهارمجهولی

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1w=k_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2w=k_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3w=k_3 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4w=k_4 \end{cases}$$

را حل کنیم، مخرج جوابها به‌صورت زیر خواهد بود:

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}$$

این عبارت را به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم و آن‌را دترمینان مرتبهٔ چهار می‌نامیم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

## ۱ـ۲ تعریف دترمینان

۱ـ۲ـ۱ برای تعریف دترمینان در حالت عمومی، ابتدا مفهومی به‌نام مینور $(Minor)$ ماتریس را تعریف می‌کنیم. به‌عنوان مثال ماتریس زیر را درنظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

اگر سطر اول وستون اول این ماتریس را حذف کنیم، ماتریس زیر به‌دست می‌آید که آن را به‌صورت $A_{11}$ نشان می‌دهیم:

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

همچنین اگر سطر اول و ستون دوم ماتریس $A$ را حذف کنیم، ماتریس زیر به دست می‌آید که آن‌را باعلامت $A_{12}$ نشان می‌دهیم:

$$A_{12}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

به‌این‌ترتیب باحذف سطرها وستونهای مختلف ماتریس $A$، ماتریسهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$A_{13} \text{ ، } A_{21} \text{ ، } A_{22} \text{ ، } A_{23} \text{ ، } A_{31} \text{ ، } A_{32} \text{ ، } A_{33}$$

به‌طوری که دیده‌می‌شود پس از حذف یك‌سطر ویك ستون ماتریس $A$، ماتریسی از مرتبهٔ‌دوم به‌دست مـــی‌آید. هریك از ماتریسهای حاصل را مینور ماتریس $A$ می‌نامیم. حال تعریف کلی مینور را بیان می‌کنیم:

**۱-۲-۲ تعریف** ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ را درنظر می‌گیریم؛ ماتریسی را که ازحـــذف سطر $i$ام وستون $j$ام ماتریس $A$ حاصل شود، مینور عضو $a_{ij}$ ماتریس $A$ می‌نامیم، و آن را بـا علامت $A_{ij}$ نشان می‌دهیم:

$$A_{ij}=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1,j-1} & a_{1,j+1}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{i-1,1}\cdots a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1}\cdots a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1}\cdots a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1}\cdots a_{i+1,n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}\cdots\cdots a_{n,j-1} & a_{n,j+1}\cdots\cdots a_{n,n} \end{bmatrix}$$

روشن است که مرتبهٔ ماتریس $A_{ij}$ یکی کمتراز مرتبهٔ ماتریس$A$، یعنی از مـــرتبهٔ $(n-1)$ است.

**۱-۲-۳** بافرض:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad و \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

مینورهای زیر را به‌دست آورید:

$$A_{23} ، A_{31} ، B_{34} ، B_{42} ، B_{43}$$

پاسخ خود را با [۱-۲-۳] مقایسه‌کنید.

**۱-۲-۴** درمثالهای اخیر دیدیم که یك دترمینان از مرتبهٔ 4 برحسب دترمینانهای مرتبهٔ3، ویك دترمینان از مرتبهٔ3 برحسب دتـرمینانهای مرتبهٔ2 قابل بیان‌است. در ۱-۲-۵ دترمینان از مرتبهٔ $n$ را به‌طورکلی تعریف می‌کنیم:

**۱-۲-۵ تعریف** اگر $A=[a_{ij}]$ ، ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n$ باشد، دترمینان آن را که در زیـــر تعریف می‌کنیم، یك دترمینان از مرتبهٔ $n$ می‌نامیم وباعلامت زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

معمولاً برای اختصار، دترمینان $A$ را به‌صورت $\det A$ یا $|A|$ می‌نویسیم.

تعریف دترمینان ماتریس، به‌صورت استقرائی ونسبت به‌مرتبهٔ‌ماتریس انجام‌می گیرد:

الف) اگر $A=[a]$ ماتریس مرتبهٔ 1 باشد، دترمینان آن به‌صورت زیر است:

$$\det A = a$$

ب) اگر $A=[a_{ij}]$ ماتریسی از مرتبهٔ $n$ باشد، دترمینان آن عبارت‌است‌از:

$$\det A = a_{11}\det A_{11} - a_{12}\det A_{12} + a_{13}\det A_{13} - \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}\det A_{1n} \qquad (۱)$$

ویا:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{ij}\det A_{ij}$$

در(ب) مشاهده می کنیم که $\det A$ برحسب دترمینان مینورهای زیر تعریف شده است:

$$A_{11}\ ,\ A_{12}\ ,\ \cdots\ ,\ A_{1n}$$

می بینیم مرتبهٔ این دترمینانها یکی کمتراز مرتبهٔ $A$ است؛ همچنین ضرایب ـ دترمینانهای:

$$\det A_{11}\ ,\ \det A_{12}\ ,\ \cdots\ \det A_{1n}$$

صرف‌نظر از علامت، اعضای سطر اول ماتریس $A$ می‌باشند؛ مثلا درتساوی (۱) دترمینان $A$ برحسب سطر اول‌بسط داده‌شده است.

۱ـ۲ـ۶ باتوجه به تعریف ۱ـ۲ـ۵، دترمینان مرتبهٔ 5 ماتریس $A=[a_{ij}]$ را برحسب مینورهای اعضای سطر اول بنویسید.

پاسخ خود را با [۱ـ۲ـ۶] مقایسه کنید.

۱ـ۲ـ۷ دترمینان هریك از ماتریسهای زیر را محاسبه‌کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} -5 & -6 & 7 \\ 8 & -9 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ب) $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

پ) $C=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$

پاسخ خود را با [۱ـ۲ـ۷] مقایسه‌کنید.

۱ـ۲ـ۸ تعریف مقدار $\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ را کوفاکتور (Cofactor) عضو $a_{ij}$ درماتریس $A=[a_{ij}]^n$ می نامیم. می‌دانیم که $A_{ij}$ مینور عضو $a_{ij}$ ماتریس $A$ است.

۱ـ۲ـ۹ کوفاکتورهای هریك از اعضای ماتریس داده شده در ۱ـ۲ـ۳ راحساب کنید.

پاسخ خود را با [۱ـ۲ـ۹] مقایسه‌کنید.

۱ـ۲ـ۱۰ با درنظر گرفتن تعریف ۱ـ۲ـ۸، دترمینان ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}a_{1j}$$

۱ـ۲ـ۱۱ با درنظر گرفتن تعریف ۱ـ۲ـ۵ می‌توان دترمینان را تابعی دانست که قلمرو آن مجموعهٔ تمام ماتریسهای مربع، و برد آن مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

۱ـ۲ـ۱۲ در بخش دستگاه مختصات خطی و بردار دیدیم که حاصلضرب سه‌گانهٔ بردارهای:

$$u=x_1i+y_1j+z_1k$$
$$v=x_2i+y_2j+z_2k$$
$$w=x_3i+y_3j+z_3k$$

عبارت است از:

$$(u\times v)\cdot w=(y_1z_2-z_1y_2)x_3+(z_1x_2-x_1z_2)y_3+(x_1y_2-x_2y_1)z_3$$
$$=y_1z_2x_3-z_1y_2x_3+z_1x_2y_3-x_1z_2y_3+x_1y_2z_3-x_2y_1z_3$$

با انجام فاکتورگیری داریم:

$$(u\times v)\cdot w=x_1(y_2z_3-z_2y_3)-y_1(x_2z_3-z_2x_3)+z_1(x_2y_3-y_2x_3)$$

با توجه به تعریف دترمینان می‌توان نوشت:

$$(u\times v)\cdot w=x_1\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

و یا:

$$(u\times v)\cdot w=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

می‌دانیم که اگر $(u\times v)\cdot w=0$ باشد، بردارهای u و v و w، هرسه موازی با صفحهٔ معینی هستند. پس اگر دترمینان

$$(u\times v)\cdot w=\begin{vmatrix}x_1 & y_2 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

مساوی صفر باشد، سه بردار فوق موازی با صفحهٔ معینی خواهند بود.

۱ـ۲ـ۱۳ با فرض:

$$u=i+j \quad و \quad v=-i+2k \quad و \quad w=2i-j+3k$$

به کمک دترمینان، حاصلضرب سه‌گانهٔ زیر را محاسبه کنید:

$$(u\times v)\cdot w$$

پاسخ خود را با [۱ـ۲ـ۱۳] مقایسه کنید.

۱ـ۲ـ۱۴ اگر $u=xi+yj+zk$ و $v=x'i+y'j+z'k$ باشد، حاصلضرب خارجی

$\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=(yz'-zy')\mathbf{i}+(zx'-xz')\mathbf{j}+(xy'-yx')\mathbf{k}$$

با توجه به‌تعریف دترمینان می‌توان نوشت:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

تساوی بالا را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \qquad (1)$$

باید توجه داشت‌که جدول (۱) نمایش یك دترمینان نیست، زیـرا تمام عناصر آن ازیك نوع نیستند؛ سطر اول از بردارها و سطرهای دیگر از اعداد تشکیل شده‌اند. ولی چون باتوجه به‌این علامت، حاصل‌ضرب برداری $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ را بـه‌راحتی به‌خاطر می‌سپاریم، از این نمایش استفاده می‌کنیم.

۱ـ۲ـ۱۵ اگر $\mathbf{u}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ باشد، باتوجه‌به ۱ـ۲ـ۱۴، حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ را محاسبه‌کنید.

پاسخ خود را با [۱ـ۲ـ۱۵] مقایسه کنید.

## ۱ـ۳ خواص دترمینان

دراین قسمت به‌مطالعهٔ بعضی از خواص دترمینان می‌پردازیم. باتوجه به‌این خواص، روشهایی برای محاسبهٔ مقدار دترمینان به‌دست می‌آوریم.

۱ـ۳ـ۱ ماتریس $A$ مفروض است:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ستون دوم این ماتریس را درعدد اختیاری $r$ ضرب می‌کنیم و ماتریس حاصل را $B$ می‌نامیم.

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 2r & -2 \\ 1 & 2r & 3 \\ 2 & 3r & 4 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که:

$$\det B=r\det A$$

پاسخ خود را با [۱ـ۳ـ۱] مقایسه کنید.

۱-۳-۲ قضیه فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]^n$ باشد. یکی از ستونهای ماتریس $A$ را درعدد دلخواه $r$ ضرب می‌کنیم و ماتریس حاصل را $B=[b_{ij}]^n$ می‌نامیم، دراین‌صورت داریم:

$$\det B = r\det A$$

۱-۳-۳ اثبات* این قضیه را به‌وسیلهٔ استقراء ریاضی روی مرتبهٔ ماتریس به‌اثبات می‌رسانیم.

اگر $A$ ماتریسی از مرتبهٔ 1 به‌صورت $A=[a]=a$ باشد، داریم:

$$B=[ra]=ra$$

مطابق تعریف ۱-۲-۵ داریم:

$$\det A = a \quad \text{و} \quad \det B = ra$$

نتیجه می گیریم که:

$$\det B = r\det A$$

حال ثابت می‌کنیم که اگرقضیه درمورد ماتریسهای از مرتبهٔ $(n-1)$ صادق باشد، درمورد ماتریسهای $A$ و $B$ از مرتبهٔ $n$ نیز صادق است:

ستونهای $j$ام ماتریسهای $A$ و $B$ را به‌ترتیب باعلائم $\mathbf{a}_j$ و $\mathbf{b}_j$ نشان می‌دهیم وفرض می‌کنیم که ستون $j$ام ماتریس $B$، $r$ برابر ستون $j$ام ماتریس $A$ باشد، یعنی:

$$\mathbf{b}_j = r\mathbf{a}_j$$

و:

$$\mathbf{b}_k = \mathbf{a}_k \qquad k\neq j$$

چون‌داریم $b_{1j}=ra_{1j}$،ملاحظه می‌کنیم که‌تنها تفاوت مینور $B_{1k}$ برای $k\neq j$ با مینور $A_{1k}$، دراین است که ستونی از ماتریس $B_{1k}$، $r$ برابر ستون نظیرش در $A_{1k}$ است.

چون $B_{1k}$ و $A_{1k}$ از مرتبهٔ $(n-1)$ هستند، بنابه‌فرض استقراء داریم:

$$\det B_{1k} = r\det A_{1k}$$

ازطرفی چون‌درماتریسهای $A_{ij}$ و $B_{ij}$ ستونهای $j$ام ماتریسهای $A$ و $B$ حذف‌شده‌اند، داریم:

$$B_{ij}=A_{ij}$$

بنابراین برای هر $k$ که $1\leqslant k\leqslant n$ باشد، داریم:

$$b_{1k}\det B_{1k} = ra_{1k}\det A_{1k}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}b_{1k}\det B_{1k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}ra_{1k}\det A_{1k}\end{aligned}$$

پس:

$$\det B = r\det A$$

(دراین قسمت، برای اثبات بیشتر قضایای مربوط به دترمینان از روش استقراء ریاضی که نمونهٔ آنرا دربالا دیدیم، استفاده می‌کنیم.)

**۱ـ۳ـ۴** فرض می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } B=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

مقدار دترمینان $A$ را حساب کنید وسپس مقدار دترمینان $B$ را با توجه به‌این که ستون دوم ماتریس $B$ مساوی حاصل‌ضرب عدد 3 درستون دوم ماتریس $A$ است، به‌دست آورید.

پاسخ خود را با [۱ـ۳ـ۴] مقایسه کنید.

**۱ـ۳ـ۵** دترمینان ماتریس زیر را محاسبه‌کنید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ خود را با [۱ـ۳ـ۵] مقایسه کنید.

**۱ـ۳ـ۶** اگر درماتریس $B=[b_{ij}]^n$، تمام اعضای یك ستون صفر باشند، آنگاه دترمینان $B$ برابر صفر است.

**قضیه**

اثبات خود را با [۱ـ۳ـ۶] مقایسه کنید.

**۱ـ۳ـ۷** اگر:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

باشد، صحت تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\det C=\det A+\det B$$

(توجه‌کنید که ماتریسهای فوق فقط درستون دوم باهم اختلاف دارند. ستون دوم ماتریس $C$ برابر مجموع ستونهای دوم ماتریسهای $A$ و $B$ است.)

اثبات خودرا با [۱ـ۳ـ۷] مقایسه کنید.

**۱ـ۳ـ۸** ماتریسهای زیر مفروضند:

**قضیه**

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2j} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} a_{11} \cdots b_{1j} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots b_{2j} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots b_{nj} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots(a_{1j}+b_{1j})\cdots a_{1n}\\ a_{21}\cdots(a_{2j}+b_{2j})\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots(a_{nj}+b_{nj})\cdots a_{nn}\end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌کنید که فرق این ماتریسها تنها دراعضای ستون $j$ ام است. اعضای ستون $j$ ام ماتریس $C$ از جمع اعضای مشابه به ستونهای ماتریسهای $A$ و $B$ به‌دست آمده است، ثابت کنید که:

$$\det C=\det A+\det B$$

اثبات خودرا با [۱-۳-۸] مقایسه کنید.

**۱-۳-۹** اگر:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-2\\2&-4&1\\3&5&-2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&1&-4\\3&-2&5\end{bmatrix}$$

باشد، صحت تساوی زیر را ثابت کنید:

$$\det B=-\det A$$

اثبات خود را با [۱-۳-۹] مقایسه کنید.

**۱-۳-۱۰ قضیه** ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ مفروض است. ماتریس $B$ را از جابجا کردن دوستون متوالی $j$ و $(j+1)$ ام $A$ باهم به‌دست می‌آوریم:

$$B=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & a_{1,j} & a_{1,j+2}\cdots a_{1n}\\ a_{21}\cdots a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & a_{2,j} & a_{2,j+2}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}\cdots a_{n,j-1} & \underbrace{a_{n,j+1}}_{\text{ستون } j \text{ام}} & \underbrace{a_{n,j}}_{\text{ستون } j+1 \text{ام}} & a_{n,j+2}\cdots a_{n,n}\end{bmatrix}$$

داریم:

$$\det B=-\det A$$

**۱-۳-۱۱ اثبات** * قضیه را به‌روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم. اگر $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ ماتریسی از مرتبهٔ 2 باشد، ماتریس $B$ به صورت زیر است:

$$B=\begin{bmatrix}b&a\\d&c\end{bmatrix}$$

داریم:

$$\det B=bc-ad=-(ad-bc)=-\det A$$

حال با توجه به‌روش استقراء ریاضی فرض می‌کنیم که برای هرماتریس $A$ و $B$ از

مرتبهٔ $(n-1)$ قضیهٔ فوق درست باشد؛ نشان می‌دهیم که قضیه درمورد ماتریسهای از مرتبهٔ $n$ نیز درست است.

فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]^n$ و $B=[b_{ij}]^n$ درشرایط قضیهٔ بالا صدق کنند. بنابراین اگر $k\neq j+1$ و $k\neq j$ باشد، داریم:

$$b_{1k}=a_{1k}$$

مطابق فرض استقراء داریم:

$$\det B_{1k}=-\det A_{1k}$$

بنابراین:

$$(-1)^{k+1}b_{1k}\det B_{1k}=-(-1)^{k+1}a_{1k}\det A_{1k}$$

ازطرفی داریم:

$$b_{1j}=a_{1,j+1} \quad \text{و} \quad B_{1j}=A_{1,j+1}$$

پس:

$$\begin{aligned}(-1)^{j+1}b_{1j}\det B_{1j}&=(-1)^{j+1}a_{1,j+1}\det A_{1,j+1}\\&=-(-1)^{j+2}a_{1,j+1}\det A_{1,j+1}\end{aligned}$$

به همین‌ترتیب داریم:

$$(-1)^{j+2}b_{1,j+1}\det B_{1,j+1}=-(-1)^{j+1}a_{1j}\det A_{1j}$$

بنابراین می‌بینیم که هرجملهٔ بسط $\det B$ برابر قرینهٔ جملهٔ مربوط دربسط $\det A$ است. نتیجه می‌گیریم:

$$\det B=-\det A$$

۱-۳-۱۲ اگر:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&-2\\2&-4&1\\3&5&-2\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}-2&3&1\\1&-4&2\\-2&5&3\end{bmatrix}$$

باشد، نشان دهید که:

$$\det B=-\det A$$

(توجه کنید که ماتریس $B$ از جابجا کردن ستونهای اول و سوم ماتریس $A$ به‌دست آمده‌است.)

پاسخ خودرا با [۱-۳-۱۲] مقایسه‌کنید.

۱-۳-۱۳ قضیه اگر ماتریس $B=[b_{ij}]^n$، از جابجا نمودن دوستون ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ به‌دست آید، داریم:

$$\det B=-\det A$$

(توجه کنید که این قضیه تعمیم قضیهٔ ۱-۳-۱۰ است.)

اثبات خودرا با [۱-۳-۱۳] مقایسه‌کنید.

۱-۳-۱۴ دترمینان ماتریس زیر را محاسبه کنید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(توجه کنید که ستونهای اول و سوم ماتریس $A$ یکسانند.)

پاسخ خودرا با [۱-۳-۱۴] مقایسه کنید.

**۱-۳-۱۵ قضیه** اگر دوستون ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ یکسان باشند، داریم:

$$\det A=0$$

اثبات خودرا با [۱-۳-۱۵] مقایسه کنید.

**۱-۳-۱۶** ماتریس زیر مفروض است:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

دوبرابر ستون اول ماتریس $A$ را باستون سوم این ماتریس جمع می کنیم وماتریس حاصل را $C$ می نامیم؛ به عبارت دیگر:

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2\times 1-2 \\ 2 & -4 & 2\times 2+1 \\ 3 & 5 & 2\times 3-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که:

$$\det C=\det A$$

پاسخ خود را با [۱-۳-۱۶] مقایسه کنید.

**۱-۳-۱۷ قضیه** فرض می کنیم ماتریس $C=[c_{ij}]^n$ از ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ به وسیلهٔ جمع کردن مضرب غیرصفری ازستون $i$ام باستون $j$ام به دست آید؛ به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$C=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots & \cdot\, a_{1j}+ra_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots & \cdot\, a_{2j}+ra_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\cdots & \underbrace{\cdot\, a_{nj}+ra_{ni}}_{\text{ستون } j\text{ام}} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

در این صورت داریم:

$$\det C=\det A$$

**۱-۳-۱۸ اثبات** فرض می کنیم ماتریس $C$ درشرایط قضیه صدق می کند؛ بنابراین اگر $\mathbf{c}_k$ و $\mathbf{a}_k$ به ترتیب ستونهای $k$ام ماتریس $C$ و $A$ باشند، داریم:

$$\mathbf{c}_k=\begin{cases} \mathbf{a}_k & k\neq j \\ \mathbf{a}_k+r\mathbf{a}_i & k=j \end{cases}$$

در ماتریس $A$ ، به‌جای ستون $\mathbf{a}_j$ ستون $r\mathbf{a}_i$ را قرار می‌دهیم و ماتریس حاصل را $B$ می‌نامیم؛ بنابر قضیهٔ ۱-۳-۸ داریم:

$$\det C = \det A + \det B$$

ازطرفی $\det B$ مساوی $r$ برابر دترمینان ماتریسی است که ستون $j$ام وستون $i$ام آن برابرند، در نتیجه مطابق قضیهٔ ۱-۳-۱۵ داریم:

$$\det B = 0$$

پس:

$$\det C = \det A$$

**۱-۳-۱۹** ماتریس زیر را درنظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

دوبرابر ستون سوم $A$ را به ستون اول اضافه می‌کنیم و ماتریس $B$ را به دست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

بنا به‌قضیهٔ ۱-۳-۱۷ داریم:

$$\det B = \det A$$

حال چهار برابر ستون سوم $B$ را به‌ستون دوم آن اضافه می‌کنیم و ماتریس $C$ را به‌دست می‌آوریم:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 3 \\ 5 & 14 & 3 & 1 \\ -4 & -7 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

در اینجا نیز داریم:

$$\det C = \det B = \det A$$

اینك دترمینان ماتریس $C$ را که درسطر اول آن تعداد صفرها بیش ازتعداد صفرهای واقع درسطر اول $A$ و $B$ است، محاسبه می‌کنیم:

$$\det C = 0(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 14 & 3 & 1 \\ -7 & -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$0(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 14 & 1 \\ -4 & -7 & -1 \end{vmatrix}+$$

$$0(-1)^{4}\begin{vmatrix} 7 & 8 & 2 \\ 5 & 14 & 3 \\ -4 & -7 & -2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 14 & 1 \\ -4 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

حال دترمینان زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$\det C=-\begin{vmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 5 & 14 & 1 \\ -4 & -7 & -1 \end{vmatrix}$$

به‌این منظور، اعمال زیر را انجام می‌دهیم:

الف) به‌ستون دوم، $-1$ برابرستون اول را اضافه می‌کنیم:

$$\det C=-\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 5 & 9 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

ب) به‌ستون اول، $-7$ برابر ستون دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\det C=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -58 & 9 & 1 \\ 17 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

پ) به‌ستون سوم، $-3$ برابر ستون دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\det C=-\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -58 & 9 & -26 \\ 17 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

حال دترمینان اخیر را به‌راحتی محاسبه می‌کنیم:

$$\det C=-(-1)[(-58)8-17(-26)]=-22$$

معمولا برای محاسبهٔ مقدار یك دترمینان از روشی که در بالا ذکر شد، استفاده می‌کنیم. اساس این‌روش بر این است که با استفاده از قضیهٔ ۱ـ۳ـ۱۷ ، تمام‌اعضای سطر اول‌را به‌استثنای یکی، به‌صفر تبدیل کنیم و سپس از تعریف دترمینان استفاده کنیم. با این روش، محاسبهٔ یك دترمینان از مرتبهٔ $n$ به محاسبهٔ یك دترمینان از مرتبهٔ $(n-1)$ تبدیل می‌شود.

**۱ـ۳ـ۲۰ قضیه** برای ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ داریم:

$$\det A=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij} \qquad (۱)$$

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij} \qquad (۲)$$

ملاحظه می‌کنیم درتساوی (۱)، دترمینان $A$ برابر مجموع حاصل‌ضرب اعضای ستون $j$ام درکوفاکتورهایشان است. می‌گوییم که دترمینان $A$ برحسب ستون $j$ام بسط‌داده شده است. همین‌طور مشاهده می‌کنیم در تساوی (۲)، دترمینان $A$ برابر مجموع حاصل‌ضرب اعضای سطر $i$ام درکوفاکتورهایشان است. می‌گوییم که دترمینان $A$ برحسب سطر $i$ام بسط داده‌شده است.

ابتدا قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۱ را که در اثبات این قضیه به‌آن نیازمندیم، ثابت می‌کنیم و سپس قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۰ را در ۱ـ۳ـ۲۳ اثبات می‌کنیم.

۱ـ۳ـ۲۱ قضیه * اگر ستون اول ماتریس مربع $A=[a_{ij}]^n$ بردار $e_i$ باشد، داریم:

$$\det A=(-1)^{i+1}\det A_{i1}$$

۱ـ۳ـ۲۲ اثبات * ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $i=1$ یعنی ستون اول ماتریس $A$ ، $e_1$ باشد، داریم:

$$\det A=\det A_{11}$$

مطابق تعریف دترمینان داریم:

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\det A_{1j}$$

می‌دانیم $a_{11}=1$ و به‌ازاء $j\neq 1$ داریم: $a_{j1}=0$.

ستون اول ماتریس $A_{1j}$ ، $(j>1)$ برابر صفر است، لذا می‌توان نوشت:

$$\det A_{1j}=0 \quad , \quad j>1$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\det A=\det A_{11}$$

حال به‌وسیلهٔ استقراء ریاضی روی مرتبهٔ ماتریس $A$، قضیه را ثابت می‌کنیم: اگر مرتبهٔ ماتریس $A$، یک باشد، درستی قضیه روشن است. فرض می‌کنیم قضیه برای هر ماتریس ازمرتبهٔ $(n-1)$ صحیح است. قضیه‌را برای ماتریس مرتبهٔ $n$ ثابت‌می‌کنیم. دیدیم که اگر $i=1$ باشد، $\det A=\det A_{11}$ یعنی قضیه درست است؛ حال فرض می‌کنیم $i\neq 1$، یعنی $2\leqslant i\leqslant n$ باشد؛ دراین حالت داریم:

$$a_{11}=0$$

$$\det A=\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\det A_{1j} \qquad (۱)$$

ستون اول هرمینور $A_{1j}$ برابر $e_{i-1}$ است، پس مطابق فرض استقراء داریم:

$$\det A_{1j}=(-1)^{i}\det A_{[j,\,i]} \qquad (۲)$$

که در رابطهٔ (۲)، ماتریس $A_{[j,\,i]}$ ازحذف سطر اول وستون $j$ام وسطر $i$ام و ستون اول ماتریس $A$ حاصل شده است.

حال اگر ماتریس $A_{i1}$ را مساوی $B$ قرار دهیم، چون ستون اول $B$ از ستون دوم $A$ تشکیل شده است، می‌توان نوشت:

$$A_{[j\,,\,i]}=B_{1\,,\,j-1}$$
$$a_{1j}=b_{1\,,\,j-1}$$

با قراردادن مقادیر بالا در رابطهٔ (۱) و (۲)، و جایگذاری (۲) در (۱)، به دست می‌آوریم:

$$\det A=\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}b_{1,j-1}(-1)^{i}\det B_{1\,,\,j-1}$$

بنا به تساوی (۱) در ۱ـ۲ـ۵، سمت راست رابطهٔ بالا برابر است با $(-1)^{i+1}\det B$ که مساوی است با $(-1)^{i+1}\det A_{i1}$؛ پس:

$$\det A=(-1)^{i+1}\det A_{i1}$$

**۱ـ۳ـ۲۳ اثبات** * حال به اثبات قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۰ می‌پردازیم. ابتدا تساوی (۱) را در حالت خاص $j=1$ ثابت می‌کنیم. ستون اول ماتریس $A$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{a}_1=a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2+\dots+a_{n1}\mathbf{e}_n$$

به همین ترتیب ستون $i$ام $(i=1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n)$ ماتریس $A$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{a}_i=a_{1i}\mathbf{e}_1+a_{2i}\mathbf{e}_2+\dots+a_{ni}\mathbf{e}_n$$

با به‌کار بردن قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲ و قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۱، داریم:

$$\det A=a_{11}\det(\mathbf{e}_1\,,\,\mathbf{a}_2\,,\,\dots\,,\,\mathbf{a}_n)+a_{21}\det(\mathbf{e}_2\,,\,a_2\,,\,\dots,\mathbf{a}_n)+\dots+$$
$$a_{n1}\det(\mathbf{e}_n\,,\,\mathbf{a}_2\,,\,\dots\,,\,\mathbf{a}_n)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\det A_{i1}$$

برای اثبات درحالت عمومی، ستون $j$ام ماتریس $A$ را به‌ستون اول آن تغییر مکان می‌دهیم‌وماتریس حاصل‌را $B$ می‌نامیم. این تغییرمکان شامل $j-1$ تغییرمکان‌ستونهای متوالی است، پس بنا به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۱۰ داریم:

$$\det A=(-1)^{j-1}\det B$$

ازطرفی برای هر $i=1\,,\,2\,,\,\dots\,,\,n$، داریم:

$$b_{i1}=a_{ij}$$
$$B_{i1}=A_{ij}$$

پس داریم:

$$\det A=(-1)^{j-1}\det B$$
$$=(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i1}\det B_{i1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}$$

تساوی (۱) ثابت شد. اثبات تساوی (۲) که با توجه به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۶ ساده است، به‌خواننده واگذار می‌شود.

**۱ـ۳ـ۲۴** اگر داشته باشیم:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

الف) با بسط دترمینان $A$ برحسب ستون دوم، مقدار آن‌را محاسبه کنید.
ب) با بسط دترمینان $A$ برحسب سطر دوم، مقدار آن را محاسبه کنید.
پ) با بسط دترمینان $A$ برحسب ستون سوم، مقدار آن‌را محاسبه کنید.
پاسخ خود را با [۱ـ۳ـ۲۴] مقایسه کنید.

۱ـ۳ـ۲۵ اگر داشته باشیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ترانسپزماتریس $A$ ، «$A'$» را به‌دست آورید، سپس صحت تساوی زیررا اثبات‌کنید:

$$\det A=\det A'$$

پاسخ خود را با [۱ـ۳ـ۲۵] مقایسه کنید.

۱ـ۳ـ۲۶ **قضیه** برای هر ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ داریم:

$$\det A=\det A'$$

$A'$ ترانسپز ماتریس $A$ است.

۱ـ۳ـ۲۷ **اثبات** * واضح است‌که قضیه درمورد ماتریسهای مرتبهٔ 1 صحیح است؛ حال با فرض این که قضیه برای هر ماتریس از مرتبهٔ $(n-1)$ نیز صحیح است، صحت آن‌را در مورد ماتریس $A$ از مرتبهٔ $n$ اثبات می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $B=A'$ باشد، بنا به‌تعریف ترانسپز داریم:

$$B_{ij}=A_{ji} \quad \text{و} \quad b_{ij}=a_{ji}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \mathrm{dat}B &= b_{11}\det B_{11}-b_{12}\det B_{12}+\cdots+(-1)^{n+1}b_{1n}\det B_{1n} \\ &= a_{11}\det A'_{11}-a_{21}\det A'_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}\det A'_{n1} \end{aligned}$$

چون‌ماتریسهای $A_{ij}$ ازمرتبهٔ $(n-1)$ هستند، باتوجه‌به‌روش استقراء می‌توان‌نوشت:

$$\det A'_{i1}=\det A_{i1}$$

به این ترتیب تساوی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\det B=a_{11}\det A_{11}-a_{21}\det A_{21}+\cdots+(-1)^{n+1}a_{n1}\det A_{n1}$$

عبارت سمت راست تساوی اخیر، بسط دترمینان $A$ برحسب ستون اول است.

پس باتوجه به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۰ می‌توان نوشت:

$$\det A'=\det A$$

۱ـ۳ـ۲۸ بااستفاده از قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۶، می‌توان قضایایی نظیر قضایای مربوط به دترمینان را که برحسب ستون یا ستونهای ماتریس $A$ بیان شده‌اند، برحسب سطر یا سطرهای

ماتریس $A$ بیان کرد.

در زیر به‌عنوان مثال، قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲ را برحسب سطر بیان می‌کنیم:

۱ـ۳ـ۲۹ **قضیه** تمام اعضای یکی از سطرهای ماتریس $A$ را درعدد دلخواه $r$ ضرب می‌کنیم وماتریس حاصل را $B$ می‌نامیم. دراین صورت، داریم:

$$\det B=r\det A$$

۱ـ۳ـ۳۰ **اثبات** فرض می‌کنیم $A=[a_{ij}]^n$ و :

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ ra_{i1} & ra_{i2}\cdots ra_{in} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

طبق تعریف ترانسپز، داریم:

$$A'=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{i1}\cdots a_{n1} \\ a_{12}\cdots a_{i2}\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}\cdots \underbrace{a_{in}}_{\text{ستون } i\text{ام}}\cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B'=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots ra_{i1}\cdots a_{n1} \\ a_{12}\cdots ra_{i2}\cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots \\ a_{1n}\cdots \underbrace{ra_{in}}_{\text{ستون } i\text{ام}}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

بنا به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲ ، داریم:

$$\det B'=r\det A'$$

ازطرفی بنا به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۶، داریم:

$$\det B=\det B'$$

$$\det A=\det A'$$

بنابراین تساوی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\det B=r\det A$$

۱ـ۳ـ۳۱ ثابت کنیدکه اگر دوسطر ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ یکسان باشند، داریم:

$$\det A=0$$

اثبات خود را با [۱ـ۳ـ۳۱] مقایسه کنید.

## ۱ـ۴ وارون ماتریس

۱ـ۴ـ۱ درقسمت‌پیش بسیاری ازخواص دترمینان را بررسی کردیم وبا استفاده ازاین‌خواص، توانستیم روشهایی برای محاسبهٔ مقدار دترمینان به دست آوریم. اینک با استفاده از دترمینان، روشی برای محاسبهٔ وارون ماتریس بیان می‌کنیم.

**۱ـ۴ـ۲ تعریف** اگر $A=[a_{ij}]^n$ یك ماتریس مربع و $\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ کوفاکتور عضو $a_{ij}$ باشد، آنگاه ترانسپز ماتریس $[\alpha_{ij}]^n$ را ماتریس وابستهٔ $A$ می‌نامیم و آن را با علامت $\operatorname{adj} A$ (adj سه‌حرف‌اول کلمهٔ Adjoint، به‌معنی «وابسته») نشان می‌دهیم:

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{n2} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \cdots \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

بنابراین‌اعضای سطر $i$ام ماتریس $\operatorname{adj} A$، کوفاکتورهای اعضای‌ستون $i$ام ماتریس $A$ هستند؛ با منظورکردن $\operatorname{adj} A=[\alpha'_{ij}]^n$، داریم:

$$\alpha'_{ij}=\alpha_{ji} \qquad i , j=1 , 2 , \dots , n$$

**۱ـ۴ـ۳** اگر داشته باشیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

کوفاکتورهای $A$ عبارتند از:

$$\alpha_{11}=6 \qquad \alpha_{12}=-2 \qquad \alpha_{13}=-3$$
$$\alpha_{21}=1 \qquad \alpha_{22}=-5 \qquad \alpha_{23}=3$$
$$\alpha_{31}=-5 \qquad \alpha_{32}=4 \qquad \alpha_{33}=-1$$

بنابراین ماتریس وابستهٔ $A$ عبارت است از:

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

**۱ـ۴ـ۴ قضیه** برای هرماتریس مربع $A=[a_{ij}]^n$، داریم:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{kj}\det A_{ij}=\begin{cases}\det A & , \quad k=i \\ 0 & , \quad k\neq i\end{cases} \qquad (۱)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ik}\det A_{ij}=\begin{cases}\det A & , \quad k=j \\ 0 & , \quad k\neq j\end{cases} \qquad (۲)$$

**۱ـ۴ـ۵ اثبات** * ابتدا رابطهٔ (۱) را ثابت می‌کنیم:

اگر $k=i$ باشد، عبارت سمت چپ رابطهٔ (۱) بسط دترمینان $A$ برحسب سطر $i$ام است. حال فرض می‌کنیم $k\neq i$ باشد؛ همچنین فرض می‌کنیم ماتریس $B$ ازماتریس $A$ به‌وسیلهٔ جایگزین کردن سطر $k$ام $A$ به‌جای سطر $i$ام $A$ به‌دست می‌آید. به این

ترتیب ماتریس $B$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots a_{kn} \\ \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} \cdots a_{kn} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \} \text{سطر } k\text{ام} \\ \\ \} \text{سطر } i\text{ام} \\ \\ \\ \end{array}$$

ملاحظه می‌کنیم که کوفاکتور هرعضو سطر $i$ام ماتریس $B$ برابر کوفاکتور عضو نظیر سطر $i$ام ماتریس $A$ است. اگر دترمینان ماتریس $B$ را برحسب اعضای سطر $i$ام بسط دهیم، داریم:

$$\det B=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

طرف راست رابطهٔ فوق، همان طرف چپ رابطهٔ (۱) است. چون دوسطر $i$ام و $k$ام ماتریس $B$ یکسان هستند، مطابق قضایای ۱ـ۳ـ۱۵ و ۱ـ۳ـ۲۶ داریم:

$$\det B=0$$

و رابطهٔ (۱) اثبات می‌شود.

اثبات رابطهٔ (۲) نظیر رابطهٔ (۱) است،که انجام آن به‌خوانندهٔ واگذار می‌شود.

**۱ـ۴ـ۶ قضیه** برای هرماتریس مربع $A$ ازمرتبهٔ $n$، داریم:

$$A(\operatorname{adj}A)=(\det A)I_n$$

$$(\operatorname{adj}A)A=(\det A)I_n$$

**۱ـ۴ـ۷ اثبات** باتوجه به‌رابطهٔ (۱) قضیهٔ ۱ـ۴ـ۴، داریم:

$$A\cdot[\operatorname{adj}A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \cdots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \cdots \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \cdots \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \det A & 0 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots \det A \end{bmatrix}=\det A\cdot I_n$$

به‌همین ترتیب از رابطهٔ (۲) در ۱ـ۴ـ۴، نتیجه می‌شود:

$$(\operatorname{adj}A)A=\det A\cdot I_n$$

**۱ـ۴ـ۸** اگر در روابط بالا $\det A\neq 0$ فرض کنیم، داریم:

$$\left(\frac{\operatorname{adj}A}{\det A}\right)\cdot A=A\cdot\left(\frac{\operatorname{adj}A}{\det A}\right)=I_n$$

بنابراین ماتریس $\frac{\operatorname{adj}A}{\det A}$ وارون ماتریس $A$ است. بهعبارت دیگر:

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj}A}{\det A} \qquad (1)$$

پس باشرط دترمینان $A$ مخالف صفر، ماتریس $A$ دارای وارون است واین وارون از تساوی (۱) بهدست می‌آید.

۱ـ۴ـ۹ توجه کنید که هرگاه وارون‌یك ماتریس وجود داشته باشد، منحصربه فرد خواهد بود.

۱ـ۴ـ۱۰ می‌خواهیم وارون ماتریس زیر را بهدست آوریم:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

ابتدا دترمینان $A$ را برحسب ستون سوم بسط می‌دهیم:

$$\det A=4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}-7\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$=4(-3)-7(-6)=30$$

چون $\det A\neq 0$ است، پس ماتریس $A$ دارای وارون است.

اکنون ماتریس وابستهٔ $A$ را حساب می‌کنیم:

ابتدا کوفاکتورهای $\alpha_{ij}$، $(i , j=1 , 2 , 3)$ را حساب می‌کنیم:

$\alpha_{11}=-63$ $\alpha_{12}=56$ $\alpha_{13}=-3$

$\alpha_{21}=36$ $\alpha_{22}=-32$ $\alpha_{23}=6$

$\alpha_{31}=-3$ $\alpha_{32}=6$ $\alpha_{33}=-3$

بنابراین:

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} -63 & 36 & -3 \\ 56 & -32 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

باتوجه بهقضیهٔ قبل نتیجه می‌گیریم:

$$A^{-1}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix} -63 & 36 & -3 \\ 56 & -32 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

۱ـ۴ـ۱۱ وارون ماتریس زیر را بهدست آورید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ خودرا با [۱ـ۴ـ۱۱] مقایسه‌کنید.

**۱۲-۴-۱** وارون ماتریس زیر را به‌دست آورید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

پاسخ خودرا با [۱-۴-۱۲] مقایسه‌کنید.

# ۲
# دستگاه معادلات خطی

دراین فصل بااستفاده از ماتریس و دترمینان، روشی برای حل و بحث در وجود جوابهای دستگاه معادلات خطی ارائه می‌دهیم.

## ۲-۱ روش حل دستگاه معادلات خطی

**۲-۱-۱ تعریف** دستگاه معادلاتی به‌صورت زیر را یك دستگاه $n$ معادلهٔ $m$ مجهولی خطی می‌نامیم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=h_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=h_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=h_n \end{cases} \qquad (۱)$$

دستگاه (۱) را می‌توانیم به‌صورت معادلهٔ ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2m} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \qquad (۲)$$

درمعادلهٔ(۲)، سه ماتریس زیر را داریم:

$$A=[a_{ij}]^{n\times m} \text{ و } X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ و } H=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$A$ را ماتریس ضرایب و $X$ را ماتریس مجهولات دستگاه (۱) می‌نامیم. معادلهٔ ماتریسی(۲) را به‌صورت خلاصهٔ زیر می‌نویسیم:

$$AX=H$$

هر $m$ تایی

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

را که دردستگاه (۱) صدق کند، یك جواب دستگاه می‌نامیم. و خواهیم دید که یك دستگاه معادلات خطی ممکن است دارای یك‌جواب منحصر به‌فرد، یا بینهایت‌جواب باشد، ویا اصلا جوابی نداشته باشد.

**۲-۱-۲ قرارداد** ماتریسی را که ازقراردادن ماتریس‌ستونی $H$ درسمت راست ماتریس $A$ حاصل‌می‌شود، یعنی:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1m} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2m} & h_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nm} & h_n \end{bmatrix}$$

را برای اختصار به $[AH]$ نشان می‌دهیم.

نقش ماتریس $[AH]$ درحل دستگاه معادلات خطی را دراین قسمت خواهیم دید.

حال به‌معرفی اعمالی‌که روی ماتریسها و دستگاههای معادلات خطی برای‌حل‌دستگاه معادلات خطی انجام می‌دهیم، می‌پردازیم:

**۲-۱-۳** دستگاه سه معادلهٔ دومجهولی

$$\begin{cases} a_1x_1+b_1x_2=h_1 \\ a_2x_1+b_2x_2=h_2 \\ a_3x_1+b_3x_2=h_3 \end{cases} \qquad (۱)$$

را به‌صورت معادلهٔ ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

از ضرب معادلهٔ اول دستگاه(۱) درعدد $k\neq 0$، داریم:

$$\begin{cases} ka_1x_1+kb_1x_2=kh_1 \\ a_2x_1+\ b_2x_2=\ h_2 \\ a_3x_1+\ b_3x_2=\ h_3 \end{cases} \qquad (۲)$$

به‌این‌ترتیب، ماتریس $[AH]$ به ماتریس زیر تبدیل می‌شود:

$$[A_1H_1]=\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & kh_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{bmatrix}$$

حال بااضافه‌کردن حاصل جمع معادلهٔ اول و $t$ برابر معادلهٔ دوم، به‌سومین معادلهٔ دستگاه(۲)، دستگاه(۳) به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} ka_1x_1+kb_1x_2=kh_1 \\ a_2x_1+\ b_2x_2=\ h_2 \\ (ka_1+ta_2+a_3)x_1+(kb_1+tb_2+b_3)x_2=kh_1+th_2+h_3 \end{cases} \qquad (۳)$$

بنابراین ماتریس $[A_1H_1]$ به ماتریس زیر تبدیل می‌شود:

$$[A_2H_2]=\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & kh_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ ka_1+ta_2+a_3 & kb_1+tb_2+b_3 & kh_1+th_2+h_3 \end{bmatrix}$$

بالاخره اگر جای معادله‌های اول و دوم دستگاه (۳) را باهم عوض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a_2x_1+b_2x_2=h_2 \\ ka_1x_1+kb_1x_2=kh_1 \\ (ka_1+ta_2+a_3)x_1+(kb_1+tb_2+b_3)x_2=kh_1+th_2+h_3 \end{cases} \qquad (۴)$$

ماتریس $[A_3H_3]$ چنین می‌شود:

$$[A_3H_3]=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & h_2 \\ ka_1 & kb_1 & kh_1 \\ ka_1+ta_2+a_3 & kb_1+tb_2+b_3 & kh_1+th_2+h_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین باانجام یك سلسله عملیات، دستگاه (۱) را بەدستگاه (۴) وماتریس $[AH]$ را بەماتریس $[A_3H_3]$ تبدیل کردیم، این عملیات را اعمال مقدماتی می‌نامیم.

**۲ـ۱ـ۴ تعریف** بەطورکلی اعمال زیر راکه روی یك دستگاه معادلـهٔ خطی انجام می‌گیرد، اعمال مقدماتی‌می‌نامیم:

الف) ضرب کردن یکی از معادلات دستگاه درعددی غیر صفر.

ب) اضافه‌کردن مضربی ازیکی ازمعادلات دستگاه بەمعادلهٔ دیگر.

پ) عوض‌کردن محل دومعادلهٔ دستگاه بایکدیگر.

**۲ـ۱ـ۵ تعریف** نظیراعمال مقدماتی روی دستگاهها، برای یك‌ماتریس نیز اعمال مقدماتی را تعریف می‌کنیم:

الف) ضرب یك سطر ماتریس درعددی غیرصفر.

ب) اضافه‌کردن مضربی از یك سطر به سطر دیگر.

پ) تعویض محل دوسطر ماتریس بایکدیگر.

**۲ـ۱ـ۶ تعریف** دودستگاه معادلات خطی (یا دو ماتـریس) را درصورتی معادل گوییم کـه بتوان یکی‌از آنهارا بەوسیلهٔ چند عمل مقدماتی، از دیگری بەدست‌آورد.

بنابراین دستگاههای(۱) تا (۴) در ۲ـ۱ـ۳ بایکدیگر معادل هستند.

**۲ـ۱ـ۷** نشان خواهیم دادکـه دستگاههای معادل دارای جـوابهای یکسان هستند. بنابراین، برای حل یك دستگاه معادلات خطی، آن‌را بەوسیلهٔ اعمال مقدماتی بەدستگاه معادل ساده‌تری تبدیل می‌کنیم‌که جوابهای آن بەراحتی قابل محاسبه باشند.

بەعنوان مثال برای حل دستگاه

$$\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ -x+3y+2z=-5 \end{cases} \qquad (۱)$$

به‌معادلهٔ دوم، 2 — برابر معادلهٔ اول را اضافه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ -3y-2z=2 \\ -x+3y+2z=-5 \end{cases} \qquad (۲)$$

حال معادلهٔ دوم را با معادلهٔ سوم جمع می‌کنیم، داریم:

$$\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ -3y-2z=2 \\ -x=-3 \end{cases} \qquad (۳)$$

معادلهٔ سوم را به معادلهٔ اول اضافه می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4y+3z=-2 \\ -3y-2z=2 \\ -x=-3 \end{cases} \qquad (۴)$$

به معادلهٔ اول، 3 / 4 برابر معادلهٔ دوم را اضافه مـی‌کنیم ومعادلهٔ سوم را در 1 — ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} z=2 \\ -3y-2z=2 \\ x=3 \end{cases} \qquad (۵)$$

بالاخره، دوبرابر معادلهٔ اول را به معادلهٔ دوم اضافه می‌کنیم وجای معادلهٔ اول‌وسوم را عوض می‌کنیم، دراین‌صورت داریم:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases} \qquad (۶)$$

به‌این‌ترتیب، دستگاه(۱) را به‌دستگاه (۶)که تنهاجواب‌آن $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ است، تبدیـل کردیم.

درقضیهٔ زیرثابت می‌کنیم‌که این جواب، جوابی برای دستگاه(۱) نیز هست.

**۲-۱-۸ قضیه** اگـر دستگاه معادلات خطی $A_2X=H_2$ بەوسیلهٔ یـك عمل مقدماتی از دستگاه $m$ معادلهٔ $n$ مجهولی $A_1X=H_1$ به‌دست آمـده باشد، دو دستگاه دارای جواب یـا جوابهای همانند (مشترك) خواهند بود.

**۲-۱-۹ اثبات** * اثبات را در دو مرحله انجام می‌دهیم:

الف) ابتدا نشان می‌دهیم‌که اگرهریك از معادلات:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=h_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=h_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=h_m \end{cases} \qquad (۱)$$

را به‌ترتیب‌دراعداد $c_i$ ، $(i=1 , 2 , . . . , m)$ ضرب کنیم ونتیجه را باهم جمع کنیم، معادلهٔ (۲) به‌دست می‌آید که هرجواب دستگاه (۱) یك جواب این‌معادله نیز می‌باشد:

$$(c_1a_{11}+c_2a_{21}+\cdots+c_ma_{m1})x_1+\cdots+(c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\cdots+$$
$$c_ma_{mn})x_n=c_1h_1+c_2h_2+\cdots+c_mh_m \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم که:

$$u=\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

یك جواب دستگاه (۱) است؛ پس برای هر $i$ داریم:

$$a_{i1}k_1+a_{i2}k_2+\cdots+a_{in}k_n=h_i \qquad i=1 , 2 , \ldots , m \quad (۳)$$

حال به‌جای

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

مقدار $u$ را درسمت چپ معادلهٔ(۲) قرار می‌دهیم:

$$(c_1a_{11}+c_2a_{21}+\cdots+c_ma_{m1})k_1+\cdots+(c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\cdots+$$
$$c_ma_{mn})k_n=c_1(a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1n}k_n)+\cdots+$$
$$c_m(a_{m1}k_1+a_{m2}k_2+\cdots+a_{mn}k_n)$$

با توجه به‌رابطهٔ (۳)، سمت راست تساوی بالا برابر است با:

$$c_1h_1+c_2h_2+\cdots+c_mh_m$$

پس نتیجه می‌گیریم که هرجواب دستگاه(۱)، یك جواب معادلهٔ(۲) نیز هست.

ب) حال بااستفاده ازقسمت (الف)، قضیهٔ ۲ــ۱ــ۸ را ثابت می‌کنیم:

فرض می‌کنیم دستگاه $A_2X=H_2$ به‌وسیلهٔ عمل‌مقدماتی (ب) که در۲ــ۱ــ۴ تعریف شده است، از دستگاه(۱) به‌صورت زیر به‌دست آمده باشد:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=h_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left.\begin{array}{l} -c_j(a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n)+c_i(a_{i1}x_1+\cdots+ \\ a_{in}x_n)=-c_jh_j+c_ih_i \end{array}\right\} \text{معادلهٔ } i \text{ ام} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=h_m \end{cases}$$

از (الف) نتیجه می‌شود که (بافرض $c_i\neq 0$) هرجواب دستگاه(۱)، جواب دستگاه $A_2X=H_2$ نیز هست.

به‌عکس اگر در دستگاه $A_2X=H_2$ ، $c_j/c_i$ برابر معادلهٔ $j$ ام را به $1/c_i$ برابر معادلهٔ $i$ام اضافه کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{c_j}{c_i}(a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n)+\frac{1}{c_i}\Big[-c_j(a_{j1}x_1+\cdots+a_{jn}x_n)+$$
$$c_i(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n)\Big]=\frac{1}{c_i}(c_jh_j-c_jh_j+c_ih_i)$$

پس‌از ساده‌کردن طرفین داریم:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=h_i$$

می‌بینیم که با عمل مقدماتی فوق، معادلهٔ $i$ ام دستگاه $A_2X=H_2$ تبدیل بـه معادلهٔ $i$ ام دستگاه (۱) می‌شود؛ پس بنا به‌حالت (الف)، هـرجواب دستگاه $A_2X=H_2$، یك جواب دستگاه(۱) نیزهست.

اثبات قضیه درمورد اعمال مقدماتی اول یاسوم شمارهٔ ۲ـ۱ـ۴ به‌عهدهٔ دانشجوست.

۲ـ۱ـ۱۰ حال فرض می‌کنیم دستگاه $A_1X=H_1$ بـه‌وسیلهٔ $(p-1)$ عمل مقدماتی، به‌ترتیب به‌دستگاههای زیر تبدیل شود:

$$A_2X=H_2 \quad , \quad A_3X=H_3\ , \ldots ,\ A_pX=H_p$$

بنا به قضیهٔ ۲ـ۱ـ۸ ، جـوابهای دستگاه $A_1X=H_1$ بـا دستگاه $A_2X=H_2$ ، و جـوابهای $A_2X=H_2$ بـا جوابهای $A_3X=H_3$، و به‌همین تـرتیب، جـوابهای $A_{p-1}X=H_{p-1}$ با جوابهای $A_pX=H_p$ مشترك هستند. بنابراین دستگاههای‌بالا دارای جوابهای مشترك می‌باشند؛ این مطلب را به‌صورت قضیه‌ای بیان می‌کنیم:

۲ـ۱ـ۱۱ قضیه

دستگاههای معادل دارای جوابهای مشترك هستند.

۲ـ۱ـ۱۲ در۲ـ۱ـ۷، جواب دستگاه زیر را بـاانجام اعمال مقدماتی روی معادلات دستگاه، محاسبه‌کردیم:

$$\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+5y+4z=4 \\ -x+3y+2z=-5 \end{cases}$$

حال همان اعمال مقدماتی را روی ماتریس $[AH]$ دستگاه انجام می‌دهیم تا جواب دستگاه را به‌دست آوریم، داریم:

$$[AH]=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

به‌سطر دوم، $2-$ برابر سطر اول ماتریس $[AH]$ را اضافه می‌کنیم. مـاتریس زیر که معادل ماتریس $[AH]$ است، حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

حال دراین ماتریس، سطر دوم را به‌سطر سوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

سطر سوم‌را به‌سطر اول اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

به‌سطر اول، $4/3$ سطر دوم‌را اضافه می‌کنیم وسپس این سطر را در $3$ ضرب‌می‌کنیم. سطر سوم‌را در $1-$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

به‌سطر دوم، $2$ برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم وسطر دوم‌را درعدد $1/3-$ ضرب می‌کنیم؛ سپس جای سطرهای اول وسوم را عوض می‌کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

این ماتریس نظیر دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} 1x+0y+0z=3 \\ 0x+\ y+0z=-2 \\ 0x+0y+\ z=2 \end{cases}$$

این دستگاه به‌صورت سادهٔ زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \\ z=2 \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ جوابی برای دستگاه معادلات خطی $AX=H$ است.

بنابراین برای حل دستگاه $AX=H$ ، سعی می‌کنیم ماتریس $[AH]$ را به ماتریس معادل ساده‌تری تبدیل کنیم تاجوابها به‌راحتی به‌دست آیند.

۲-۱-۱۳ می‌خواهیم جواب دستگاه زیر را محاسبه کنیم:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+x_2-2x_3=1 \\ 4x_1-3x_2-x_3=3 \\ 2x_1+4x_2+2x_3=4 \end{cases}$$

دستگاه فوق را به‌صورت ماتریسی زیرمی‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

که درآن داریم:

$$[AH]=\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&1&-2&1\\4&-3&-1&3\\2&4&2&4\end{bmatrix}$$

به‌سطر چهارم، ۲ — برابر سطر اول را اضافه می‌کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\3&1&-2&1\\4&-3&-1&3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

به‌سطر سوم، 4 — برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم؛ همچنین 3 — برابر سطراول‌را به‌سطر دوم اضافه می‌کنیم، ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix}1&2&1&2\\0&-5&-5&-5\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

سطر دوم‌را در 1/5 — ضرب می‌کنیم وسپس 2 — برابر سطر دوم ماتریس حاصل را به‌سطر اول اضافه می‌کنیم، ماتریس زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

حال، 11 برابر سطر دوم‌را باسطر سوم جمع و سپس، سطر سوم را در 1/6 ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

سطر سوم‌را با سطر اول جمع و بالاخره 1 — برابر سطر سوم‌را با سطر دوم جمع می‌کنیم، نتیجه به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

بنابراین جواب دستگاه برابر است با:

$$X=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

**۲ـ۱ـ۱۴** دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=2 \\ x_1+4x_2=-1 \\ 2x_1+6x_2-x_3=5 \end{cases}$$

جواب خودرا با [۲ـ۱ـ۱۴] مقایسه کنید.

**۲ـ۱ـ۱۵** درمثال زیر نشان می‌دهیم که یك دستگاه معادلهٔ خطی ممکن است بینهایت جواب داشته باشد.

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=2 \\ (1/2)x_1-2x_2-(13/2)x_3=7 \\ -3x_1+5x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1/2 & -2 & -13/2 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[AH]=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1/2 & -2 & -13/2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیر را روی ماتریس $[AH]$ انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر دوم، $-1/2$ برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم.

ب) به‌سطرسوم، 3 برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم.

در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

پ) سطر دوم را در $-1$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

ت) سطر دوم را به‌سطر سوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ث) به‌سطر اول، 2 برابر سطر دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس اخیر، نظیر دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} x_1+7x_3=-10 \\ x_2+5x_3=-6 \end{cases}$$

با قرار دادن $x_3=a$ در دستگاه فوق، خواهیم‌داشت:

$$x_1=-10-7a$$

$$x_2=-6-5a$$

درنتیجه جوابهای دستگاه عبارتنداز:

$$\begin{cases} x_1=-10-7a \\ x_2=-6-5a \\ x_3=a \end{cases}$$

چون $a$ دلخواه است، پس دستگاه بینهایت جواب دارد.

**۲ـ۱ـ۱۶** دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=6 \\ x_1+3x_2+\ \ x_3-2x_4=4 \\ 2x_1+5x_2-2x_3-5x_4=10 \end{cases}$$

• جواب خودرا با [۲ـ۱ـ۱۶] مقایسه‌کنید.

**۲ـ۱ـ۱۷** ممکن است دستگاهی اصلاً جواب نداشته باشد؛ اینك مثالی ازاین‌گونه دستگاهها را می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4=5 \\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4=2 \\ 4x_1+5x_2+3x_3=7 \end{cases}$$

دستگاه بالا را به‌صورت معادلهٔ ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

که درآن داریم:

$$[AH]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیر را روی این ماتریس انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر دوم، $-2$ برابر سطر اول را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ب) به‌سطر سوم 4 — برابر سطر اول را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{bmatrix}$$

پ) به‌سطر سوم 1 — برابر سطر دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

ت) به‌سطر اول 1 — برابر سطر دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

از آخرین ماتریس، دستگاه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x_1+7x_3+5x_4=13 \\ x_2-5x_3-4x_4=-8 \\ 0=-5 \end{cases}$$

ولی معادلهٔ سوم دستگاه فوق غیرممکن است زیرا همواره $-5\neq 0$ است، پس دستگاه جوابی ندارد.

**۲ـ۱ـ۱۸** دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=2 \\ (1/2)x_1-2x_2-(13/2)x_3=7 \\ -3x_1+5x_2+4x_3=2 \end{cases}$$

جواب خود را با [۲ـ۱ـ۱۸] مقایسه کنید.

## ۲ـ۲ دستگاه کرامر

**۲ـ۲ـ۱ تعریف** یك دستگاه معادلهٔ خطی را دستگاه کرامر گوئیم، هرگاه تعداد مجهولات آن برابر با تعداد معادله‌های آن باشد (دستگاه $n$ معادلهٔ $n$ مجهولی) و ماتریس ضرایب آن دارای وارون باشد.

**۲ـ۲ـ۲** دستگاه کرامر

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=h_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=h_n \end{cases}$$

همواره دارای یك جواب منحصر به‌فرد است. این مطلب را چنین اثبات می‌کنیم:

رابطهٔ $AX=H$ را از طرف چپ در $A^{-1}$ ضرب می‌کنیم، نتیجه می‌شود:

$$X=A^{-1}H$$

چون وارون هرماتریس منحصر بفرد است، پس $A^{-1}H$ تنها جواب معادله‌می باشد.

۲-۲-۳ برای حل‌دستگاه کرامر، ابتدا $A^{-1}$ رامحاسبه می کنیم وسپس‌طرفین معادلهٔ $AX=H$ را از سمت چپ در $A^{-1}$ ضرب می کنیم:

$$(A^{-1}AX)=A^{-1}H$$

به‌این‌ترتیب مقدار $X$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$X=A^{-1}H$$

این روش را درمثال ۲-۲-۴ به‌کار می بریم.

۲-۲-۴ جواب دستگاه زیر را با استفاده از وارون ماتریس ضرایب محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=9 \\ x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 3x_1+x_2+2x_3=8 \end{cases}$$

این دستگاه برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

از طرفی داریم:

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

درنتیجه:

$$X=A^{-1}H=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}=\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین تنها جواب دستگاه برابر است با:

$$x_1=35/18 \qquad x_2=29/18 \qquad x_3=5/18$$

۲-۲-۵ دستگاه زیر را به‌وسیلهٔ محاسبهٔ وارون ماتریس ضرایب حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3+x_4=5 \\ x_1+x_2-3x_3-4x_4=-1 \\ 3x_1+6x_2-2x_3+x_4=8 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-3x_4=2 \end{cases}$$

جواب خودرا با [۲-۲-۵] مقایسه کنید.

۲-۲-۶ جواب دستگاه کرامر را با استفاده از دترمینان نیز می‌توان محاسبه کرد. برای سهولت، قرارداد زیر را بیان می کنیم:

**۲ـ۲ـ۷ قرارداد** ماتریسی راکه ازجایگزین کردن ماتریس ستونی $H$ درستون $j$ام ماتریس$A$ به‌دست می‌آید، با $A_j$ نمایش می‌دهیم:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1,j-1} & h_1 & a_{1,j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2,j-1} & h_2 & a_{2,j+1} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,j-1} & h_n & a_{n,j+1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

هرگاه دترمینان ماتریس $A_j$ را برحسب ستون $j$ام بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$\det A_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} h_i \det A_{ij}$$

درقضیهٔ زیرنشان می‌دهیم که جوابهای دستگاه کرامر را می‌توان برحسب $\det A$ و $\det A_j$ به‌دست آورد.

**۲ـ۲ـ۸ قضیه** جواب دستگاه کرامر $n$ معادلهٔ $n$ مجهولی $AX = H$ برابر است با:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A} \qquad j = 1 , 2 , \dots , n$$

**۲ـ۲ـ۹ اثبات** چون دستگاه $AX = H$ کرامر است، پس $A$ وارون‌پذیر است و داریم:

$$X = A^{-1}H$$

باتوجه به ضرب ماتریسها، $x_j$ برابر است با حاصل‌ضرب سطر $j$ام ماتریس $A^{-1}$ در ماتریس ستونی $H$ ؛ از طرفی $A^{-1} = \operatorname{adj} A / \det A$ و عنصر سطر $j$ام و ستون $i$ام $\operatorname{adj} A$ برابر است با:

$$\alpha'_{ji} = \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

درنتیجه عنصر سطر $j$ ام و ستون $i$ ام ماتریس $A^{-1}$ برابر است با:

$$\alpha_{ij} / \det A = (-1)^{i+j} \det A_{ij} / \det A$$

بنابراین داریم:

$$x_j = \left[ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} (\det A_{ij})\, h_i \right] \Big/ \det A$$

ازطرفی داریم:

$$\det A_j = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} h_i \det A_{ij}$$

درنتیجه داریم:

$$x_j = \det A_j / \det A \ , \quad j = 1 , 2 , \dots , n$$

**۲ـ۲ـ۱۰** بااستفاده از قضیهٔ ۲ـ۲ـ۸ دستگاه کرامر زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$$

دستگاه بالا را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

چون دترمینان ماتریس $A$ مخالف باصفر است $(\det A=-120)$، پس $A$ دارای ماتریس وارون و دستگاه $AX=H$ یك دستگاه کرامر است. ازطرفی، داریم:

$$\det A_1=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-240$$

$$\det A_2=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-24$$

$$\det A_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$\det A_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-96$$

بنابراین جواب دستگاه برابر است با:

$$x_1=\det A_1/\det A=-240/-120=2$$
$$x_2=\det A_2/\det A=-24/-120=1/5$$
$$x_3=\det A_3/\det A=0/-120=0$$
$$x_4=\det A_4/\det A=-96/-120=4/5$$

۲-۲-۱۱ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1+3x_2-x_3=3 \end{cases}$$

جواب خود را با [۲-۲-۱۱] مقایسه‌کنید.

۲-۲-۱۲ اگر در دستگاه $n$ معادلهٔ $m$ مجهولی خطی، ماتریس ستونی $H$ برابر صفر باشد،
تعریف دستگاه را همگن گوئیم، درغیر این‌صورت دستگاه را غیرهمگن می‌نامیم؛ بنابراین،
هردستگاه به‌صورت زیر، یك دستگاه $n$ معادلهٔ $m$ مجهولی همگن است:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=0 \end{cases}$$

۲-۲-۱۳ واضح‌است‌که در دستگاه $n$ معادلهٔ $m$ مجهولی، همیشه یك‌جواب به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

۲-۲-۱۴ هرگاه $X_1$ و $X_2$ دوجواب دستگاه $AX=H$ باشند، آنگاه $X_2-X_1$ جوابی برای
قضیه دستگاه همگن $AX=0$ است.

۲-۲-۱۵ ابتدا فرض می‌کنیم $X_1$ و $X_2$ هردو جوابهایی برای $AX=H$ باشند، پس داریم:
اثبات

$$AX_1=H \quad \text{و} \quad AX_2=H$$

ازطرفی داریم:

$$A(X_2-X_1)=AX_2-AX_1$$

درنتیجه:

$$A(X_2-X_1)=H-H=0$$

لذا $(X_2-X_1)$ جوابی برای $AX=0$ است.

۲-۲-۱۶ از ۲-۲-۱۳ و ۲-۲-۱۴ نتیجه می‌شودکه دستگاه $AX=H$ دارای یك جواب
منحصربه‌فرد است اگر وتنها اگر جواب $AX=0$ منحصر به‌فرد باشد.

۲-۲-۱۷ ماتریس مربع $A$ را درنظر می‌گیریم، $X=0$ جواب منحصر به‌فرد دستگاه همگن
قضیه $AX=0$ است، اگر وتنها اگرماتریس $A$ بوسیلهٔ اعمال مقدماتی قابل تبدیل به‌یك
ماتریس واحد باشد. (از اثبات این قضیه صرف‌نظر می‌کنیم)

۲-۲-۱۸ دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+3x_2+2x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

این دستگاه برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

ماتریس $[AH]$ به‌صورت زیر است

$$[AH]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر دوم، $-1$ برابر سطر اول را اضافه می‌کنیم.

ب) به‌سطر سوم، $-2$ برابر سطر اول را اضافه می‌کنیم، ماتریس زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

پ) سطر دوم را به‌سطرسوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ت) سطر دوم را در $1/2$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ث) به‌سطر اول، $-1$ برابرسطر دوم را اضافه می‌کنیم؛ به‌این‌ترتیب‌ماتریس $[AH]$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

این ماتریس‌نظیر دستگاه زیراست:

$$\begin{cases} x_1+(1/2)x_3-(1/2)x_4=0 \\ x_2+(1/2)x_3+(3/2)x_4=0 \end{cases}$$

حال باقراردادن $x_3=a$ و $x_4=b$ خواهیم داشت:

$$x_1=(-1/2)a+(1/2)b \qquad x_2=(-1/2)(a+3b)$$

درنتیجه جوابهای دستگاه برابرند با:

$$x_1=-(a-b)/2 \qquad x_2=-(a+3b)/2 \qquad x_3=a \qquad x_4=b$$

چون $a$ و $b$ دلخواه هستند، پس دستگاه بینهایت جواب دارد.

۲-۲-۱۹ می‌خواهیم در وجود وجواب دستگاه زیر، بحث کنیم:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=a_1 \\ 2x_1+x_2+x_3=a_2 \\ 5x_2-x_3=a_3 \end{cases}$$

دستگاه فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \text{ یا } AX=H$$

ماتریس $[AH]$ به‌صورت زیر است:

$$[AH]=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a_1 \\ 2 & 1 & 1 & a_2 \\ 0 & 5 & -1 & a_3 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر دوم، $-2$ برابر سطر اول را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a_1 \\ 0 & 5 & -1 & a_2-2a_1 \\ 0 & 5 & -1 & a_3 \end{bmatrix}$$

ب) به‌سطر سوم، $-1$ برابر سطر دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a_1 \\ 0 & 5 & -1 & a_2-2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_3-a_2+2a_1 \end{bmatrix}$$

پ) سطر دوم را در $1/5$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & -1/5 & (a_2-2a_1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & a_3-a_2+2a_1 \end{bmatrix}$$

ت) به‌سطر اول، 2 برابر سطر دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 & (a_1+2a_2)/5 \\ 0 & 1 & -1/5 & (a_2-2a_1)/5 \\ 0 & 0 & 0 & a_3-a_2+2a_1 \end{bmatrix}$$

برای اینکه دستگاه فوق دارای جواب باشد، باید داشته باشیم:

$$a_3-a_2+2a_1=0 \qquad (۱)$$

اگر شرط (۱) برقرار باشد، با قراردادن $x_3=c$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_1=-\frac{3}{5}c+\frac{1}{5}(a_1+2a_2) \qquad x_2=\frac{1}{5}c+(a_2-2a_1)/5$$

درنتیجه جوابهای دستگاه برابرند با:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-3}{5}c + \frac{1}{5}(a_1 + 2a_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}c + \frac{1}{5}(a_2 - 2a_1) \\ x_3 = c \end{cases}$$

## پاسخ به سؤالات و حل مسائل

[۱-۱-۶] باتوجه‌به‌تعریف ۱-۱-۴ می‌توان نوشت:

الف) $\det A=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=(2)(5)-(1)(-3)=13$

ب) $\det B=\begin{vmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{vmatrix}=(3)(2)-(-6)(-1)=0$

پ) $\det C=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=(-4)(5)-(-1)(1)=-19$

[۱-۱-۹] الف) از تعریف ۱-۱-۸ داریم:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 0\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(1\times 0-3\times 0)+(0\times 0-3(-1))+2(0\times 0-1(-1))=5$$

ب)

$$\det B=\begin{vmatrix}1 & 5 & -2\\ -1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 0 & 3\end{vmatrix}$$

$$=(4\times 0-2\times 3)-5(-1\times 0-2\times 0)-2((-1)3-4\times 0)=-6+6=0$$

پ)

$$\det C=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & -1\\ 5 & 0 & 6\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}4 & -1\\ 0 & 6\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 0\end{vmatrix}$$

$$=0-(3\times 6-(-1)\times 5)+2(3\times 0-5\times 4)=-23-40=-63$$

[۱-۱-۱۰] دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \\ a''x+b''y+c''z=d'' \end{cases}$$

در ۱-۱-۷ جواب دستگاه را دیدیم، حال به‌عنوان مثال مقدار $x$ را به‌صورت دترمینان ماتریسهایی از مرتبهٔ سوم می‌نویسیم، سایر مجهولات یعنی $y$ و $z$ را نیز به‌همین‌صورت می‌توان محاسبه کرد. می‌دانیم که:

$$x=\frac{db'c''+cd'b''+bc'd''-(dc'b''+bc''d'+cb'd'')}{ab'c''+ca'b''+bc'a''-(ac'b''+ba'c''+cb'a'')}$$

درتعریف ۱-۱-۸ دیدیم که:

$$ab'c''+ca'b''+bc'a''-(ac'b''+ba'c''+cb'a'')=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

واضح است که باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}\neq 0$$

تا دستگاه دارای جواب باشد.

حال باتوجه به‌تعریف دترمینان مرتبهٔ سوم، صورت $x$ را به‌شکل دترمینان از مرتبهٔ سوم تبدیل می‌کنیم، داریم:

$$db'c''+cd'b''+bc'd''-(dc'b''+bc''d'+cb'd'')=$$

$$d(b'c''-c'b'')-b(c''d'-c'd'')+c(d'b''-b'd'')$$

$$=d\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d' & c' \\ d'' & c'' \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d' & b' \\ d'' & b'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ d' & b' & c' \\ d'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ a' & d' & c' \\ a'' & d'' & c'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}$$

[۱-۱-۱۲] دستگاه سه معادلهٔ سه‌مجهولی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 3y+z=1 \\ 4z+x=2 \end{cases}$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 2x+y+0z=0 \\ 0x+3y+z=1 \\ x+0y+4z=2 \end{cases}$$

ابتدا دترمینان ضرایب مجهولات را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=25$$

چون مقدار این دترمینان مخالف صفر است، جواب دستگاه را باتوجه به ۱-۱-۱۱ محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{-1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{25}=\frac{-2}{25}$$

به‌همین‌ترتیب $y$ و $z$ را محاسبه می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{25}=\frac{4}{25} \quad z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{25}$$

$$=\frac{13}{25}$$

[۱-۱-۱۳] ماتریس زیر را درنظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}$$

الف) می‌دانیم که:

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}=ab'c''+ca'b''+bc'a''-(ac'b''+ba'c''+cb'a'')$$

با فاکتورگیری داریم:

$$\det A=-a'(bc''-cb'')+b'(ac''-ca'')-c'(ab''-ba'')$$

$$=-a'\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix}+b'\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix}-c'\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

ب) نظیر حالت (الف) داریم:

$$\det A=ab'c''+ca'b''+bc'a''-(ac'b''+ba'c''+cb'a'')$$

$$=a''(bc'-cb')-b''(ac'-ca')+c''(ab'-bd')$$

$$=a''\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}-b''\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}+c''\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

[۱-۲-۳] داریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$A_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{31}=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \quad B_{34}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{42}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{43}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[۱-۲-۶] فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ ماتریس مربعی از مرتبهٔ 5 باشد، دراین صورت دترمینان آن برحسب مینورهای اعضای سطر اول به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\det A=\sum_{j=1}^{5}(-1)^{j+1}a_{1j}\det A_{1j}$$

$$=a_{11}\det A_{11}-a_{12}\det A_{12}+a_{13}\det A_{13}-a_{14}\det A_{14}+$$

$$a_{15}\det : A_{15}$$

واضح است که مینورهای $A_{ij}$، ماتریسهایی از مرتبهٔ 4 هستند.

[۱-۲-۷] از تعریف ۱-۲-۵ داریم:

الف)

$$\det A=\begin{vmatrix}-5 & -6 & 7\\ 8 & -9 & 0\\ -3 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=-5\begin{vmatrix}-9 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(-6)\begin{vmatrix}8 & 0\\ -3 & 2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}8 & -9\\ -3 & 4\end{vmatrix}$$

$$=-5(-18-0)+6(16-0)+7(32-27)=90+96+35=221$$

ب)

$$\det B=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 5\\ 5 & 6 & 7\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}3 & 5\\ 5 & 7\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{vmatrix}$$

$$=(28-30)+0+2(18-20)=-6$$

پ)

$$\det C=\begin{vmatrix}2 & -3 & -4\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & -5 & -6\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}0 & -2\\ -5 & -6\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -6\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -5\end{vmatrix}$$

$$=2(0-10)+3(-6+0)-4(-5+0)=-20-18+20=-18$$

[۱-۲-۹] اگر کوفاکتورهای $A$ را $\alpha_{ij}$ بنامیم، داریم:

$$\alpha_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-(1\times 1-4(-2))=-9$$

$$\alpha_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & -3\end{vmatrix}=4(-3)-5\times 7=-47$$

اگر کوفاکتورهای ماتریس $B$ را $\beta_{ij}$ بنامیم، داریم:

$$\beta_{34}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-\left(0\times\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\right)=0$$

$$\beta_{42}=(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&-2&1\end{vmatrix}$$

$$=0\begin{vmatrix}1&1\\-2&1\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&1\\0&-2\end{vmatrix}=0$$

$$\beta_{43}=(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}0&1&1\\0&-2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0$$

[۱-۲-۱۳] بافرض

$$\mathbf{u}=\mathbf{i}+\mathbf{j} \text{ و } \mathbf{v}=-\mathbf{i}+2\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{w}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$$

حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$ باتوجه به ۱-۲-۱۲ عبارت‌است‌از:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&0&2\\2&-1&3\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}0&2\\-1&3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-1&2\\2&3\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}-1&0\\2&-1\end{vmatrix}=2+7=9$$

[۱-۲-۱۵] بافرض

$$\mathbf{u}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{v}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

حاصل‌ضرب خارجی $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ را باتوجه به ۱-۲-۱۴ محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&2&-1\\3&-1&1\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{i}\begin{vmatrix}2&-1\\-1&1\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}1&-1\\3&1\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}=\mathbf{i}-4\mathbf{j}-7\mathbf{k}$$

[۱-۳-۱] دترمینان ماتریسهای $A$ و $B$ را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$\det A=2\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}$$

$$=2(8-9)-2(4-6)-2(3-4)=-2+4+2=4$$

$$\det B=2\begin{vmatrix}2r&3\\3r&4\end{vmatrix}-2r\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&2r\\2&3r\end{vmatrix}$$

$$=2(8r-9r)-2r(4-6)-2(3r-4r)$$

$$=-2r+4r+2r=4r$$

بنا براین داریم:

$$\det B = 4r = r\det A$$

[۱-۳-۴] داریم:

$$\det A = 1\begin{vmatrix}2 & 4\\1 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}-1 & 4\\0 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}-1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix} = 0+4-3=1$$

بنا به‌قضیهٔ ۱-۳-۲ داریم:

$$\det B = 3\det A$$

پس:

$$\det B = 3\times 1 = 3$$

[۱-۳-۵] داریم:

$$\det A = 1\begin{vmatrix}0 & 0\\0 & 4\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}-1 & 0\\2 & 4\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}-1 & 0\\2 & 0\end{vmatrix} = 0$$

[۱-۳-۶] ستون $j$ام ماتریس $B$ را با $\overrightarrow{b_j}$ نشان می‌دهیم. اگر $\overrightarrow{b_j}=0$ باشد، ماتریس $A$ را چنان تعریف می‌کنیم که اعضای ستون $j$ام آن 1 وبقیهٔ اعضای آن همان اعضای $B$ باشد، بنا به‌قضیهٔ ۱-۳-۲ داریم:

$$\det B = 0\times\det A$$

پس:

$$\det B = 0$$

[۱-۳-۷] در ۱-۳-۴ دیدیم که:

$$\det A = 1$$

حال دترمینان ماتریسهای $B$ و $C$ را محاسبه می‌کنیم، داریم:

$$\det B = (1)(2+8) - 3(-2-0) + 3(2-0) = 22$$

$$\det C = (1)(6+4) - 5(-2-0) + 3(1-0) = 23$$

بنابراین داریم:

$$\det A + \det B = 1 + 22 = 23 = \det C$$

[۱-۳-۸]* این قضیه را به روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم. اگر $A=[a]$ و $B=[b]$ و $C=[a+b]$ ماتریسهایی از مرتبهٔ اول باشند، واضح است‌که داریم:

$$\det C = \det A + \det B$$

حال فرض می‌کنیم که برای هرسه ماتریس از مرتبهٔ $(n-1)$ که درشرایط قضیه صدق کنند، رابطهٔ فوق برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم که هر گاه ماتریسهای مرتبهٔ $n$، $A=[a_{ij}]^n$ و $B=[b_{ij}]^n$ و $C=[c_{ij}]^n$ درشرایط قضیه صدق‌کنند، داریم:

$$\det C = \det A + \det B$$

می‌دانیم که داریم:

$$c_{1j}=a_{1j}+b_{1j} \quad \text{و} \quad C_{1j}=A_{1j}=B_{1j}$$

همچنین برای $k\neq j$ داریم:

$$c_{1k}=a_{1k}=b_{1k}$$

تنها اختلاف مینور $C_{1k}$ بـا مینورهای $A_{1k}$ و $B_{1k}$ دریك ستون است بـه‌این صورت که ستونی از $C_{1k}$ برابر حاصل‌جمع اعضای‌متناظر همان ستون در $A_{1k}$ و $B_{1k}$ است.

پس بنابه‌فرض استقراء، برای $k\neq j$ داریم:

$$\det C_{1k}=\det A_{1k}+\det B_{1k}$$

بنابراین برای $k\neq j$ داریم:

$$\begin{aligned} c_{1k}\det C_{1k}&=c_{1k}\det A_{1k}+c_{1k}\det B_{1k}\\ &=a_{1k}\det A_{1k}+b_{1k}\det B_{1k}\end{aligned}$$

ضمناً داریم:

$$\begin{aligned} c_{1j}\det C_{1j}&=(a_{1j}+b_{1j})\det C_{1j}\\ &=a_{1j}\det A_{1j}+b_{1j}\det B_{1j}\end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{aligned}\det C&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}c_{1k}\det C_{1k}\\ &=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}\det A_{1k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}b_{1k}\det B_{1k}\end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که:

$$\det C=\det A+\det B$$

[۱ـ۳ـ۹] دترمینان ماتریسهای $A$ و $B$ را محاسبه می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\det A=(1)(8-5)-3(-4-3)+(-2)(10+12)=-20$$

$$\det B=(1)(5-8)-(-2)(10+12)+3(-4-3)=20$$

پس:

$$\det B=-\det A$$

[۱ـ۳ـ۱۲] در [۱ـ۳ـ۹] دیدیم که:

$$\det A=-20$$

حال دترمینان $B$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\det B&=-2(-12-10)-3(3+4)+1(5-8)\\ &=44-21-3=20\end{aligned}$$

بنابراین:

$$\det B=-\det A$$

[۱ـ۳ـ۱۳] * فرض کنیم $k$ ستون، بین دوستونی که جایشان را عوض کرده‌ایم، وجود داشته باشد ($k=0$، اگر دوستون متوالی تغییر محل داده باشند). اگر یکی از ستونهایی را که

عوض کرده‌ایم با $k$ تغییر مکان ستونهای متوالـی بین ایـن دوستون به‌کنار ستون دیگر برسانیم وسپس جای این دوستون را عوض‌کنیم و به‌وسیلهٔ $k$ تغییرمکان دیگر، ستون دیگر را به‌جای اول‌آن درماتریس اصلی برگردانیم، مجموعاً $2k+1$ تعویض محل ستون انجام داده‌ایم تـا ماتریس موردنظـر را به‌صورت اولیهٔ آن ماتـریس دربیاوریم. بنابراین با توجه به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۱۰ که هـرتغییر مکان دوستون متوالی، علامت دترمینان را تغییر می‌دهد و اینکه $2k+1$ عددی فرد است، داریم:

$$\det B=(-1)^{2k+1}\det A=-\det A$$

[۱ـ۳ـ۱۴] داریم:

$$\det A=1(-5-0)-2(0-0)+1(0+5)=0$$

[۱ـ۳ـ۱۵] از تغییر محل دوستون مساوی ماتریس$A$، مجدداً ماتریس $A$ به‌دست می‌آید. *
بنابراین $\det A=-\det A$؛ به‌عبارت دیگر داریم:

$$\det A=0$$

[۱ـ۳ـ۱۶] در [۱ـ۳ـ۹] دیدیم که:

$$\det A=-20$$

حال دترمینان ماتریس $C$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\det C=1(-16-25)-3(8-15)+0(10+12)=-41+21=-20$$

بنابراین به‌طوری‌که می‌بینیم، داریم:

$$\det C=\det A$$

[۱ـ۳ـ۲۴] باتوجه به:

$$A=\begin{bmatrix}2&3&4\\5&6&7\\8&9&0\end{bmatrix}$$

الف)

$$\det A=\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2}a_{i2}\det A_{i2}$$

$$=(-1)^3\cdot 3\begin{vmatrix}5&7\\8&0\end{vmatrix}+6(-1)^4\begin{vmatrix}2&4\\8&0\end{vmatrix}+9(-1)^5\begin{vmatrix}2&4\\5&7\end{vmatrix}$$

$$=-3(-56)+6(-32)-9(14-20)=30$$

ب)

$$\det A=\sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{2j}\det A_{2j}$$

$$=-5\begin{vmatrix}3&4\\9&0\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}2&4\\8&0\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}2&3\\8&9\end{vmatrix}$$

$$=-5(-36)+6(-32)-7(-6)=30$$

پ)

$$\det A = 4\begin{vmatrix}5 & 6\\8 & 9\end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix}2 & 3\\8 & 9\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 6\end{vmatrix}$$

$$= 4(-3) - 7(-6) = 30$$

[۱-۳-۲۵] از تعریف ترانسپز ماتریس داریم:

$$A' = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & -4 & 0\\0 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

حال $\det A$ و $\det A'$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\det A = 1(-4+0) - 3(2-15) + 0(0+12) = -4+39 = 35$$

$$\det A' = 1(-4+0) - 2(3-0) + 3(15+0) = -4-6+45 = 35$$

بنابراین:

$$\det A = \det A'$$

[۱-۳-۳۱] فرض‌می‌کنیم سطرهای $i$ام و $j$ام ماتریس $A$ برابر باشند. ازتعریف ترانسپزماتریس نتیجه می‌شود که ستونهای $i$ام و $j$ام ماتریس $A'$ مساوی هستند. پس طبق قضیهٔ ۱-۳-۱۵ ، داریم:

$$\det A' = 0$$

از طرفی، از قضیهٔ ۱-۳-۲۶ نتیجه می‌شود:

$$\det A = \det A'$$

بنابراین:

$$\det A = 0$$

[۱-۴-۱۱] قبلا در ۱-۴-۳ ماتریس وابسته $A$ را محاسبه کردیم:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix}6 & 1 & -5\\-2 & -5 & 4\\-3 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

ازطرفی داریم:

$$\det A = 1(12-6) - 2(8-6) + 3(6-9)$$

$$= 6-4-9 = -7$$

چون $\det A \neq 0$ است، پس وارون آن وجود دارد؛ بنابراین:

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix}6 & 1 & -5\\-2 & -5 & 4\\-3 & 3 & -1\end{bmatrix}$$

[۱-۴-۱۲] داریم:

$$\det A = 1(16-9) - 3(4-3) + 3(3-4) = 7-3-3 = 1$$

چون $\det A \neq 0$ است، $A$ دارای وارون است. حال به‌محاسبهٔ ماتریس $\operatorname{adj} A$ می‌پردازیم:

$$\alpha_{11}=(-1)^2 7=7 \qquad \alpha_{12}=(-1)^3\cdot 1=-1$$
$$\alpha_{13}=(-1)^4(-1)=-1 \qquad \alpha_{21}=(-1)^3\cdot 3=-3$$
$$\alpha_{22}=(-1)^4\cdot 1=1 \qquad \alpha_{23}=(-1)^5\cdot 0=0$$
$$\alpha_{31}=(-1)^4(-3)=-3 \qquad \alpha_{32}=(-1)^5\cdot 0=0$$
$$\alpha_{33}=(-1)^6\cdot 1=1$$

بنابراین:

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وارون ماتریس $A$ عبارت است از:

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}=\frac{\operatorname{adj} A}{1}=\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[۲-۱-۱۴] دستگاه

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=2 \\ x_1+4x_2=-1 \\ 2x_1+6x_2-x_3=5 \end{cases}$$

را به‌صورت معادلهٔ ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

ماتریس $[AH]$ را تشکیل می‌دهیم:

$$[AH]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر اول، $2-$ برابر سطر دوم‌را اضافه می‌کنیم وماتریس زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

ب) به‌سطر سوم، $2-$ برابر سطر دوم‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

پ) سطر سوم‌را در $-1/2$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \end{bmatrix}$$

ت) به‌سطر اول، 9 برابر سطر سوم‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 15/2 & -55/2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \end{bmatrix}$$

ث) سطر اول را در $2/15$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -11/3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \end{bmatrix}$$

ج) سطر دوم‌را با $-4$ برابر سطر سوم جمع می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -11/3 \\ 1 & 0 & -2 & 13 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \end{bmatrix}$$

چ) سطر دوم‌را با 2 برابر سطر اول جمع می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -11/3 \\ 1 & 0 & 0 & 17/3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -7/2 \end{bmatrix}$$

ح) سطر سوم‌را با $-1/2$ برابر سطر اول جمع می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -11/3 \\ 1 & 0 & 0 & 17/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 \end{bmatrix}$$

خ) حال، جای سطر دوم‌را با اول وجای سطر اول‌را با سوم عوض می‌کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 17/3 \\ 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & -11/3 \end{bmatrix}$$

و از آن نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} x_1 = 17/3 \\ x_2 = -5/3 \\ x_3 = -11/3 \end{cases}$$

[۲ـ۱ـ۱۶] دستگاه زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$$

این دستگاه برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX = H$$

ماتریس $[AH]$ را تشکیل می‌دهیم:

$$AH = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

حال اعمال مقدماتی زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر دوم، $-1$ برابر سطر اول و به سطر سوم، $-2$ برابر سطر اول را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

ب) به‌سطر سوم، $-1$ برابر سطر دوم و به سطر اول، $-2$ برابر سطر دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پ) به‌سطر اول، 8 برابر سطر سوم‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس اخیر، نظیر دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} x_1 - 11x_3 = 10 \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

با قراردادن $x_3 = a$ دراین دستگاه، نتیجه می‌شود:

$$x_1 = 10 + 11a$$

$$x_2 = -2 - 4a$$

در نتیجه، جوابهای دستگاه به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} x_1 = 10 + 11a \\ x_2 = -2 - 4a \\ x_3 = a \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

چون $a$ دلخواه است، دستگاه بینهایت جواب دارد.

[۲-۱-۱۸] دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1-2x_2-3x_3=2 \\ (1/2)x_1-2x_2-(13/2)x_3=7 \\ -3x_1+5x_2+4x_3=2 \end{cases}$$

این دستگاه برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1/2 & -2 & -13/2 \\ -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

ماتریس $[AH]$ را تشکیل می‌دهیم:

$$AH=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 1/2 & -2 & -13/2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

حال اعمال مقدماتی زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر دوم، $-1/2$ برابر سطر اول و به سطر سوم، 3 برابر سطراول را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

ب) سطر دوم را در $-1$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

پ) سطر دوم‌را به‌سطر سوم ودو برابر سطر دوم‌را به‌سطر اول اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس اخیر معادل دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} x_1+7x_3=-10 \\ x_2+5x_3=-6 \\ 0=2 \end{cases}$$

دراین دستگاه معادلهٔ سوم غیرممکن می‌باشد، پس دستگاه جوابی ندارد.

[۲-۲-۵] دستگاه زیر را با محاسبهٔ وارون ماتریس ضرایب حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3+x_4=5 \\ x_1+x_2-3x_3-4x_4=-1 \\ 3x_1+6x_2-2x_3+x_4=8 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-3x_4=2 \end{cases}$$

این دستگاه برابر است با :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

چون دترمینان $A$ مخالف صفر است $(\det A=-120)$ ، $A$ دارای وارون است و داریم:

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-120}\begin{bmatrix} -120 & -120 & 0 & 120 \\ 69 & 73 & -17 & -80 \\ 15 & 35 & 5 & -40 \\ -24 & -8 & -8 & 40 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}.$$

بنابراین جواب دستگاه برابر است با:

$$\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=1/5 \\ x_3=0 \\ x_4=4/5 \end{cases}$$

[۲-۲-۱۱] دستگاه زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=1 \\ -x_1+x_2-x_3=2 \\ 2x_1+3x_2-x_3=3 \end{cases}$$

این دستگاه برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

چون دترمینان $A$ مخالف صفر است، $\det A=-12$ ، دستگاه فوق یك دستگاه کرامر است وجواب آن از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x_i=\frac{\det A_i}{\det A} \qquad i=1 ، 2 ، 3$$

داریم:

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -30$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -22$$

بنابراین، جواب دستگاه به‌صورت زیر است:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{16}{-12} = -\frac{4}{3}$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-30}{-12} = \frac{5}{2}$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-22}{-12} = \frac{11}{6}$$

## خودآزمایی

۱. دترمینان ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

برابر است با:

الف) 38

ب) 32−

پ) صفر

ت) 30

۲. اگر

$$\mathbf{u}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} \,،\, \mathbf{v}=2\mathbf{i}-3\mathbf{k} \,،\, \mathbf{w}=\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

باشد، حاصل‌ضرب سه‌گانهٔ زیر را محاسبه کنید:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$

۳. اگر $A=[a_{ij}]$ ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n$، و $k$ عددی حقیقی باشد، ثابت کنید:

$$\det(kA)=k^n\det A$$

۴. ثابت کنید در ماتریس مربع $A=[a_{ij}]^n$ ، اگر تمام اعضای یك سطر $A$ صفر باشند، دترمینان $A$ برابر صفر است.

۵. ماتریس $A$ مفروض است:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & b+a \end{bmatrix}$$

بدون محاسبهٔ دترمینان این ماتریس وتنها با استفاده ازخواص دترمینان ثابت کنید:

$$\det A=0$$

۶. ثابت‌کنید اگر ماتریس $B=[b_{ij}]^n$ ازجابجاکردن دوسطر ماتریس $A=[a_{ij}]^n$ حاصل شود، داریم:

$$\det B=-\det A$$

۷. ماتریس وابسته $A$ را حساب کنید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

۸. ثابت کنید:

$$\operatorname{adj} AB=\operatorname{adj} B\cdot \operatorname{adj} A$$

۹. نشان دهید که در ماتریس:

$$A=\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

روابط زیر برقرار است:

الف) $\operatorname{adj} A=A$

ب) $A^{-1}=A$

۱۰. وارون ماتریس زیر را محاسبه کنید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

۱۱. ماتریس زیر را به‌وسیلهٔ اعمال مقدماتی به‌ماتریس واحد $I_3$ تبدیل کنید:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

۱۲. تحت چه‌شرط یا شرایطی، ماتریس قطری زیر دارای وارون است:

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

۱۳. اگر در دستگاه غیرهمگن $AX=H$ ، تعداد معادلات برابر تعداد مجهولات باشد، دستگاه:

الف) دارای یک‌جواب منحصر به‌فرد است.

ب) جوابی ندارد.

پ) بینهایت جواب دارد.

ت) (الف) یا (ب) یا (پ).

۱۴. اگر دستگاه معادلات (۲) به وسیلهٔ اعمال مقدماتی از دستگاه کرامر (۱) حاصل شود:

الف) دستگاههای (۱) و (۲) جواب مشترك ندارند.

ب) دستگاههای (۱) و (۲) دارای بینهایت جواب مشترك هستند.

پ) دستگاههای (۱) و (۲) دارای یک‌جواب مشترك هستند.

ت) دستگاه (۲) یك دستگاه کرامر نیست.

۱۵. دستگاه زیر را که درآن $i^2=-1$ است، حل کنید:

$$\begin{cases} -x_1+ix_2=0 \\ -ix_1+3x_2=0 \\ x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

۱۶. دستگاه زیررا حل کنید:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

۱۷. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$$

۱۸. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = -1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

۱۹. دستگاه کرامر زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x + 2y - z = -2 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$$

۲۰. دستگاه کرامر زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} 3x_2 + 2x_1 = x_3 + 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 8 - 5x_2 \\ 3x_3 - 1 = x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

## پاسخ خودآزمایی

۱. الف

۲. داریم:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

دترمینان بالارا بابسط نسبت به‌سطرسوم حساب می‌کنیم، داریم:

$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=1(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}+2(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-5$$

۳. مسئله را به‌وسیلهٔ استقراء ریاضی روی مرتبهٔ ماتریس $A$ ثابت می‌کنیم.

اگر $A$ ماتریسی از مرتبهٔ یك باشد، واضح است که داریم:

$$\det(kA)=k\cdot\det A$$

فرض می‌کنیم که برای هرماتریس $B$ ، ازمرتبهٔ $(n-1)$ ، داشته باشیم:

$$\det(kB)=k^{n-1}\cdot\det B \qquad (۱)$$

ثابت می‌کنیم که اگر $A=[a_{ij}]$ ماتریسی از مرتبهٔ $n$ باشد، رابطهٔ

$$\det(kA)=k\cdot\det A$$

صحیح است.

ماتریس $kA$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$kA=C=[c_{ij}]^n$$

دترمینان را برحسب سطر $i$ام بسط می‌دهیم، داریم:

$$\det(kA)=\det C=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}c_{ij}\det C_{ij}$$

از طرفی برای هر $n$ ، ... ، $2$ ، $j=1$ ، $i$ داریم $c_{ij}=ka_{ij}$ و مینور $C_{ij}=kA_{ij}$ ماتریسی از مرتبهٔ $(n-1)$ است، پس، ازتساوی (۱) داریم:

$$\det C_{ij}=k^{n-1}\det A_{ij}$$

بنابراین داریم:

$$\det(kA)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}ka_{ij}k^{n-1}\det A_{ij}$$

$$=k^n\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}=k^n\det A$$

۴. بنا به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۶، داریم:

$$\det A' = \det A \qquad (۱)$$

اگر به‌عنوان مثال اعضای سطر $i$ام $A$ صفر باشند، آنگاه اعضای ستون $i$ام ماتریس $A'$ همگی صفر بوده و بنا به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۶ داریم:

$$\det A' = 0 \qquad (۲)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\det A = 0$$

۵. ستون دوم‌را به‌ستون سوم ماتریس $A$ اضافه‌می‌کنیم، ماتریس زیر بدست‌می‌آید:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+b+a \end{bmatrix}$$

بنا به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۱۷ داریم:

$$\det B = \det A \qquad (۱)$$

از طرف دیگر، داریم:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \qquad (۲)$$

از قضیهٔ ۱ـ۳ـ۱۵ نتیجه می‌شود:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (۳)$$

از روابط (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\det A = 0$$

۶. بنا به‌قضیهٔ ۱ـ۳ـ۲۶ داریم:

$$\det B = \det B' \quad \text{و} \quad \det A = \det A'$$

از طرفی، از قضیهٔ ۱ـ۳ـ۱۳ داریم:

$$\det B' = -\det A'$$

بنابراین، نتیجه می‌شود:

$$\det B = -\det A$$

۷. برای محاسبهٔ ماتریس وابسته $A$ ، کوفاکتورهای هرعضو $A$ را حساب می‌کنیم:

$$\alpha_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -7 \qquad \alpha_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$\alpha_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad \alpha_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \qquad \alpha_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=6 \qquad \alpha_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1$$

$$\alpha_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=0$$

چون $\operatorname{adj} A=[\alpha'_{ij}]$ است که درآن $\alpha'_{ij}=\alpha_{ji}$ ، پس داریم:

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}-7 & 6 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

۸. بنا به قضیهٔ ۱ـ۴ـ۶ داریم:

$$AB\cdot \operatorname{adj} AB=(\det AB)I=(\operatorname{adj} AB)AB \qquad (۱)$$

از طرفی، داریم:

$$\begin{aligned}AB\cdot \operatorname{adj} B\cdot \operatorname{adj} A&=A(B\cdot \operatorname{adj} B)\operatorname{adj} A\\ &=A(\det B\cdot I)\operatorname{adj} A\\ &=\det B(A\cdot \operatorname{adj} A)\\ &=\det B\cdot \det A\cdot I\\ &=(\det AB)I \qquad (۲)\end{aligned}$$

از رابطهٔ (۱) داریم:

$$AB\cdot \operatorname{adj} AB=(\det AB)I$$

همچنین از رابطهٔ (۲) داریم:

$$AB\cdot \operatorname{adj} B\cdot \operatorname{adj} A=(\det AB)I$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$AB\cdot \operatorname{adj} AB=AB\cdot \operatorname{adj} B\cdot \operatorname{adj} A$$

یعنی:

$$\operatorname{adj} AB=\operatorname{adj} B\cdot \operatorname{adj} A$$

۹. ماتریس $A$ را درنظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}$$

الف) کوفاکتورهای اعضای $A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\alpha_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-4 \qquad \alpha_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4 & 4\end{vmatrix}=4$$

$$\alpha_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=1 \qquad \alpha_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3$$

$$\alpha_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}=4 \qquad \alpha_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$\alpha_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-3 \quad \alpha_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3$$

$$\alpha_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}-4 & -3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=0$$

پس داریم:

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{bmatrix}=A$$

ب) ابتدا دترمینان $A$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\det A=\sum_{j=1}^{3} a_{1j}\alpha_{1j}$$

$$=(-4)(-4)+(-3)1+(-3)4=1$$

چون $\det A=1$ است، از رابطهٔ

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$$

داریم:

$$A^{-1}=\operatorname{adj} A$$

وبا توجه به‌قسمت (الف)، داریم:

$$A^{-1}=A$$

۱۰. ابتدا دترمینان ماتریس $A$ را محاسبه می‌کنیم؛ داریم:

$$\det A=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 8\end{vmatrix}+2(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-11+12=1$$

حال ماتریس وابسته $A$ را حساب می‌کنیم، داریم:

$$\alpha_{11}=-11 \qquad \alpha_{12}=-4 \qquad \alpha_{13}=6$$
$$\alpha_{21}=2 \qquad \alpha_{22}=0 \qquad \alpha_{23}=-1$$
$$\alpha_{31}=2 \qquad \alpha_{32}=1 \qquad \alpha_{33}=-1$$

پس داریم:

$$\operatorname{adj} A=\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

زیرا داریم: $\det A=1$ ؛ بنابراین، از $A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}$ نتیجه می‌شود:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

۱۱. ماتریس $A$ را درنظر می‌گیریم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

به‌سطر دوم، $-2$ برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

به‌سطر سوم، $-3$ برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

سطر دوم‌را در $-1/3$ وسطر سوم‌را در $-1/4$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

به‌سطر سوم، $-1$ برابر سطر دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به‌سطر اول، $-2$ برابر سطر دوم‌را اضافه می‌کنیم، ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

به‌سطراول، $-1$ برابر سطرسوم وبه سطردوم $-1$ برابرسطرسوم‌را اضافه‌می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

۱۲. برای این‌که ماتریس قطری $A$ دارای وارون باشد، باید داشته باشیم:

$$\det A \neq 0$$

از طرفی، اگرحداقل یکی از $a_i$ ها $(i=1, 2, \ldots, n)$ برابرصفر باشد، اعضای یك‌سطر ماتریس $A$ صفر خواهد بود وبنا به‌تمرین پنج، خواهیم داشت:

$$\det A = 0$$

پس، ماتریس قطری $A$ زمانی دارای وارون است‌که برای هر $i=1, 2, \ldots, n$، داشته باشیم:

$$a_i \neq 0$$

۱۳. ت

۱۴. پ

۱۵. دستگاه

$$\begin{cases} -x_1 + ix_2 = 0 \\ -ix_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

برابر است با:

$$\begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=0$$

ماتریس $[AH]$ را تشکیل می‌دهیم:

$$[AH]=\begin{bmatrix} -1 & i & 0 \\ -i & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیررا به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) $i$ برابر سطر سوم‌را به‌سطر دوم وهمچنین، سطر سوم را به‌سطر اول اضافه می‌کنیم، ماتریس زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 3+2i & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) سطر اول‌رادر 2 ضرب‌می‌کنیم وسپس، 1 ــ برابر سطر دوم‌را به‌آن می‌افزاییم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3+2i & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

پ) $2i$ ــ برابر سطر اول‌را به‌سطر دوم وهمچنین، 2 ــ برابرسطر اول‌را به سطر سوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ت) به‌سطر دوم، 3 ــ برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$$

۱۶. دستگاه زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+3x_2+4x_3=0 \end{cases}$$

این دستگاه برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad AX=H$$

ماتریس $[AH]$ را تشکیل می‌دهیم:

$$[AH]=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر اول، $2-$ برابر سطر دوم‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & -7 & -7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) سطر اول‌را در $1/7-$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

پ) به‌سطر دوم، ۳− برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x_2+x_3=0 \\ x_1+x_3=0 \end{cases}$$

با قراردادن $x_3=a$ ، خواهیم داشت $x_1=-a$ ، و در نتیجه جوابهای دستگاه برابر هستند با:

$$\begin{cases} x_1=-a \\ x_2=-a \\ x_3=a \end{cases}$$

چون $a$ دلخواه است، دستگاه بینهایت جواب دارد.

۱۷. دستگاه زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2 \\ 3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-9x_5=3 \end{cases}$$

این دستگاه برابر است با:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ یا $AX=H$

ابتدا ماتریس $[AH]$ را تشکیل می‌دهیم:

$$[AH]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر دوم، $-2$ برابر سطر اول و به‌سطر سوم، $-3$ برابر سطر اول را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

ب) سطر دوم‌را در $-1/3$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

پ) $-1$ برابر سطر دوم‌را به سطر اول می‌افزائیم، سپس سطر دوم‌را به‌سطر سوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

ت) سطر سوم‌را در $-1/6$ ضرب می‌کنیم، سپس $-1$ برابر سطر سوم‌را به‌سطر اول اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

از ماتریس بالا نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2-2x_3=0 \\ x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

با قراردادن $x_3=a$ و $x_5=b$ دراین دستگاه، نتیجه می‌شود:

$$x_2=2a \quad \text{و} \quad x_4=-3b$$

درنتیجه جوابهای دستگاه برابر هستند با:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2a \\ x_3=a \\ x_4=-3b \\ x_5=b \end{cases}$$

چون $a$ و $b$ دلخواه هستند، دستگاه بینهایت جواب دارد.

۱۸. دستگاه زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+6x_2=-1 \\ -x_1-3x_2+4x_3=1 \end{cases}$$

این دستگاه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$AX=H \quad \text{یا} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس $[AH]$ را تشکیل می‌دهیم:

$$[AH]=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

اعمال مقدماتی زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

الف) به‌سطر دوم، $-2$ برابر سطر اول‌را اضافه می‌کنیم وسپس سطر اول‌را به‌سطر سوم می‌افزائیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ب) سطر دوم‌را در $1/4$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

پ) به‌سطر سوم، $-2$ برابر سطر دوم وبه سطر اول، 2 برابر سطر دوم را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

ت) به‌سطر دوم، $1/6$ برابر سطر سوم‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

ث) به‌سطر اول، $1/3$ برابر سطر سوم‌را اضافه می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

ج) سطر سوم‌را در $2/3$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

این ماتریس نظیر دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} x_1+3x_2=0 \\ x_3=0 \\ 0=1 \end{cases}$$

چون معادلهٔ سوم از دستگاه فوق بی‌معنی است، پس دستگاه جوابی ندارد.

۱۹. دستگاه کرامر زیر را درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x+2y-z=-2 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

داریم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_3=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریسهای بالا را حساب می‌کنیم؛ داریم:

$$\det A=5 \qquad \det A_2=15$$

$$\det A_1=-30 \qquad \det A_3=10$$

بنابراین، جواب منحصر به‌فرد دستگاه عبارت است از:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\det A_1}{\det A}=\dfrac{-30}{5}=-6 \\ y=\dfrac{\det A_2}{\det A}=\dfrac{15}{5}=3 \\ z=\dfrac{\det A_3}{\det A}=\dfrac{10}{5}=2 \end{cases}$$

۲۰. دستگاه را به‌صورت مرتب زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ 3x_1+5x_2+2x_3=8 \\ -x_1+2x_2+3x_3=1 \end{cases}$$

داریم:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_1=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A_3=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریسهای فوق را محاسبه می‌کنیم:

$$\det A=-22 \qquad \det A_2=22$$

$$\det A_1=-66 \qquad \det A_3=-44$$

بنابراین، جواب منحصر به فرد دستگاه عبارت است از:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\det A_1}{\det A}=\dfrac{-66}{-22}=3 \\ x_2=\dfrac{\det A_2}{\det A}=\dfrac{22}{-22}=-1 \\ x_3=\dfrac{\det A_3}{\det A}=\dfrac{-44}{-22}=2 \end{cases}$$

## کتابنامه

1. Crowell, Trotter, Williamson, *Calculus of vector Functions.*

2. Lipschutz, *Linear Algebra*, Schaum's outline Series.

3. Agres, *Matrices*, Schaum's outline Series.